2) добротность по АЧХ с целью внесения улучшенных характеристик демпфирующих элементов для снижения уровня вибрации;

3) имитация импульсно-вибрационных воздействий на колесную пару в радиальном и осевом направлениях с целью выявления дефектов, проявляющихся при динамических нагрузках.

Следует отметить преимущество данного стенда, позволяющего реализовать свип-сигнал, при этом возникающие на основании вибрации будут иметь тот же закон изменения частоты:

$$A(t) = A(\omega)\sin(u \cdot t)\,. \tag{1}$$

$$f_{\text{возб}} / \Omega_0 / 2\pi = 20 \;....,100. \tag{2}$$

Таким образом, предложено новое конструктивно-техническое решение в виде лабораторного стенда, представляющего собой образец испытательной техники, которая может быть использована для осуществления вибрационной диагностики узлов и агрегатов грузовых вагонов. Предлагается использование линейных модулируемых сигналов для создания вибрационных воздействий, приближенных к реальных колебательным процессам, воздействующим на подвижной состав при движении.

Список литературы

1 Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин / С. В. Елисеев, А. В. Елисеев, Р. С. Большаков, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2021. – 679 с. – EDN KGATIU.

2 Концепция обратной связи в динамике механических систем и динамическое гашение колебаний / С. В. Елисеев, А. Н. Трофимов, Р. С. Большаков, А. А. Савченко // Наука и образование. – 2012. – № 5. – С. 25. – DOI: 10.7463/0512.0378353. – EDN PGRQDH.

3 **Елисеев, С. В.** Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения / С. В. Елисеев, С. В. Ковыршин, Р. С. Большаков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2012. – № 4 (36). – С. 61–70. – EDN PJKJWT.

4 **Каргапольцев, С. К.** Современные технологии диагностики остаточных напряжений / С. К. Каргапольцев, А. К. Мозалевская // Системы. Методы. Технологии. – 2024. – № 3(63). – С. 15–25. – DOI: 10.18324/2077-5415-2024-3-15-25. – EDN DQXVFO.

5 Патент № 2689901 C2 Российская Федерация, МПК F16F 15/02, F16F 7/10. Устройство управления вибрационным полем технологической машины : № 2017140746 : заявл. 22.11.2017 : опубл. 29.05.2019 / С. В. Елисеев, Р. С. Большаков, А. В. Елисеев [и др.] ; заявитель Иркутский гос. ун-т путей сообщения (ФГБОУ ВО ИрГУПС). – EDN KTQODK.

6 Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики машин / С. В. Елисеев, А. О. Московских, Р. С. Большаков, А. А. Савченко // Наука и образование. – 2012. – № 6. – С. 19. – DOI: 10.7463/0612.0378699. – EDN PGXZJL.

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ

Д. А. БУДНИКОВА

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Многослойные элементы конструкций нашли широкое применение в строительстве и транспортом машиностроении. Поэтому разработка математических моделей их деформирования является актуальной задачей. В [1–7] предложены общие постановки задач статики и динамики композитных элементов конструкций, рассмотрены различные кинематические гипотезы и указаны области применения. В статьях [8–11] исследовано деформирование и колебание трехслойных пластин и оболочек при распределенных и локальных нагрузках. Работы [12–17] посвящены колебаниям пятислойных пластин и стержней.

Постановка задачи проведена в прямоугольной системе координат. Рассмотрен пятислойный стержень, симметричный по толщине. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными, для них приняты гипотезы Бернулли. В относительно толстых *легких* заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой сечение остается плоским и несжимаемым по толщине, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг в заполнителях $\psi(x, t)$.

Уравнение для определения собственных чисел при шарнирном опирании торцов стержня:

$$\operatorname{sh}(\beta l)\sin(\beta l)a_1a_4\beta l-\operatorname{sh}(\beta l)\sin(\beta l)a_2^2\beta l-\cos(\beta l)\operatorname{sh}(\beta l)a_2^2+$$
$$+\operatorname{ch}(\beta l)\sin(\beta l)a_2^2+a_2^2\operatorname{sh}(\beta l)-a_2^2\sin(\beta l))=0.$$

Уравнению будет удовлетворять счетное количество собственных чисел β_n (n = 0, 1, 2, …). Частоты собственных колебаний определяются по формуле

$$\omega_n^2=\frac{\beta_n^4(a_4a_1-a_2{}^2)}{a_1M_0}.$$

В общем случае для описания прогиба пятислойного стержня вводится *система собственных ортонормированных функций* $v_n\equiv v(\beta_n,x)$:

$$v_n=\frac{1}{d_n}\left(\operatorname{sh}(\beta_n x)-\sin(\beta_n x)-S_n\left(\operatorname{ch}(\beta_n x)-\cos(\beta_n x)\right)\right),$$

где d_n – нормировочный коэффициент,

$$d_n^2=\int_0^l\left(\operatorname{sh}(\beta_n x)-\sin(\beta_n x)-S_n\left(\operatorname{ch}(\beta_n x)-\cos(\beta_n x)\right)\right)^2\mathrm{d}\,x,\quad S_n=\frac{\operatorname{sh}(\beta_n l)-\sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l)-\cos(\beta_n l)}.$$

В результате искомый прогиб определяется рядом

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)).$$

Используя ортонормированность собственных функций, из начальных условий получим константы интегрирования A_n, B_n:

$$A_n=\int_0^l w_0(x)v_n\,\mathrm{d}\,x,\qquad B_n=\frac{1}{\omega_n}\int_0^l\dot{w}_0(x)v_n\,\mathrm{d}\,x.$$

Пусть начальный прогиб и скорость стержня заданы в виде

$$w_0(x)=x^2-xl,\quad \dot{w}_0(x)=0.$$

Тогда константы интегрирования

$$A_n=\frac{1}{d_n}\int_0^l\left(x^2-xl\right)\left(\operatorname{sh}(\beta_n x)-\sin(\beta_n x)-S_n\left(\operatorname{ch}(\beta_n x)-\cos(\beta_n x)\right)\right)\mathrm{d}\,x;\ B_n=0.$$

Прогиб в исследуемом пятислойном стержне при начальном прогибе и шарнирном опирании торцов следующий:

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nv_n\cos(\omega_n t).$$

Заключение. Предложенная механико-математическая модель пятислойных, симметричных по толщине стержней позволяет исследовать их собственные частоты и моды колебаний при заданном начальном прогибе.

Список литературы

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

3 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.

5 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovoitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.

6 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

7 **Яровая, А. В.** Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

8 **Starovoitov, E. I.** Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

9 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

10 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.

11 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

12 **Лачугина, Е. А.** Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 92–99.

13 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.

14 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

15 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 33–39.

16 **Будникова, Д. А.** Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

17 **Будникова, Д. А.** Собственные колебания пятислойного стержня при жесткой заделке торцов / Д. А. Будникова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXXI Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова, Кремёнки, 19–23 мая 2025 года. – М. : ТРП, 2025. – С. 40–42.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАКСВЕЛЛА – КАТТАНЕО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Я. А. ВАХТЕРОВА, Д. А. ЛЕОНТЬЕВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

В работе реализован и исследован метод физически информированных нейронных сетей (ФИНС, *Physics-Informed Neural Networks* – PINNs) для решения обратной задачи идентификации параметров волнового-диффузионного переноса тепла, описываемого уравнением Максвелла – Каттанео, в виде

$$\tau_T \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$ – пространственная координата вдоль стержня; t – время; α – тепловая диффузия, τ_T – время релаксации теплового потока, $\theta(x,t)$ – температура.

Данная модель критически важна для точного моделирования нестационарных высокоскоростных процессов в микро- и наносистемах, где классическое параболическое уравнение теплопроводности неприменимо из-за пренебрежения конечной скоростью распространения тепловых возмущений.

Нулевые граничные условия:

$$\theta(0,t) = 0, \quad \theta(1,t) = 0. \tag{2}$$