

УДК 625.042:534.112.4

А. Э. ЮНИЦКИЙ, ЗАО «Струнные технологии», ООО «Астроинженерные технологии», г. Минск;  
Ю. А. ШЕБЗУХОВ, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель; А. Р. ПОКУЛЬНИЦКИЙ,  
ЗАО «Струнные технологии», г. Минск

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЗОНАНСА В СИСТЕМЕ «СТРУНА – ПОДВИЖНОЙ СОСТАВ»

Струнный транспортный комплекс представляет собой предварительно напряжённую рельсо-струнную эстакаду, по которой в автоматизированном режиме управления перемещаются рельсовые электромобили-беспилотники. Рельсо-струнные трассы могут быть однопутными и многопутными, навесными и подвесными. Благодаря ровности и жёсткости рельсо-струнной путевой структуры струнный транспорт позволяет развивать высокие скорости движения. В то же время сочетание жёсткости и гибкости струнной путевой структуры в совокупности с высокими скоростями движения и особенностями расположения элементов комплекса относительно друг друга приводят к возникновению колебаний в различных плоскостях и с различными частотами, что является фактором риска возникновения резонанса. На исследование данного процесса и направлена настоящая работа.

**Д**вижение неуравновешенных масс всегда сопровождается колебаниями. Чем выше скорость движения и чем больше масса, тем выше соответственно частота и амплитуда колебаний.

Какой бы ровной и жёсткой ни была струнная транспортная линия, помимо неровностей пути и колебаний самой струны (собственные колебания), под влиянием множества внешних факторов будут возникать и вынужденные колебания. Как известно, совпадение частот собственных и вынужденных колебаний приводит к резонансу.

Резонансные параметры являются важной характеристикой колебательных систем. Для определения резонансных режимов движения необходимо знать условия, при которых амплитуда колебаний достигает максимального значения. В работе [1] оценка таких условий, при которых обеспечиваются необходимые статические и динамические характеристики (в том числе ускорения, частоты собственных колебаний и др.), обеспечивающие нормальное функционирование транспортной системы при эксплуатации, определяется как одна из наиболее сложных проблем. Для преодоления указанной проблемы предлагается детерминированный подход с решением задач по определению частот и форм собственных колебаний, расчету амплитудно-частотных характеристик и исследованию режимов вынужденных колебаний.

Исследования, связанные с возникновением резонанса в функционировании различных транспортных систем (наиболее приближённых к струнной транспортной системе) и частичным решением указанных проблем, представлены в научной литературе достаточно широко: например, для монорельсовой системы [2], канатной дороги [3], системы взаимодействия «транспортное средство – мост» [4, 5]. Вместе с тем представленные указанными авторами решения не направлены на комплексное решение задачи исследования резонанса, и тем более не могут быть применены для струнного транспорта.

В этой связи задача исследования сводится к расчету отдельных режимов колебания и определению для каждого из них коэффициентов уравнения движения (преимущественно констант), наилучшим образом

обеспечивающих соответствие решений этих уравнений экспериментальным данным [6, с. 608].

На подвижной состав, расположенный на струне, одновременно могут оказывать воздействие несколько факторов. К их числу на основании работ [1, 7, 8] можно отнести проезд транспортных модулей по струне, неровности пути, ветровую нагрузку (продольную и поперечную) на транспортные модули, на струну и на опоры, перемещения по кабине транспортного модуля, гололедные нагрузки. При этом следует иметь в виду, что внешние воздействия, как правило, обладают нестационарными параметрами [9].

В линейных системах со многими степенями свободы и в сплошных системах на возникновение резонанса существенное влияние оказывает распределение внешнего воздействия по отдельным координатам. При этом возможны случаи, при которых, несмотря на совпадение частоты внешнего воздействия с одной из нормальных частот системы, резонанс не наступает.

Резонанс в колебательных системах, параметры которых зависят от её состояния, т. е. в *нелинейных системах*, имеет более сложный характер. Кривые резонанса в нелинейных системах могут стать резко несимметричными, и резонанс может наблюдаться при разных соотношениях частот воздействия и частот собственных малых колебаний системы.

Если внешнее воздействие производит периодические изменения энергоёмких параметров колебательной системы, то при определённых соотношениях частот изменения параметра и собственной частоты свободных колебаний возможно *параметрическое возбуждение колебаний*, или параметрический резонанс.

Таким образом, необходима оценка комплексного влияния внешних воздействий с выявлением параметров, являющихся общими для разных видов воздействия. При этом с учетом существующих технических характеристик струнной транспортной линии (длина пролёта – 100–200 м, скорость транспортных модулей – до 150 км/ч) систему «струна – подвижной состав» можно рассматривать как систему с несколькими степенями свободы ( $n = 2...4$ ,  $n$  – число транспортных модулей, одновременно находящихся на пролёте).

Как известно, напряжение в струне может быть направлено только вдоль неё, и позволяет не учитывать изгибные напряжения, которые могли бы возникнуть при поперечных деформациях (то есть при изгибе струны). Однако стоит учитывать, что поперечные колебания *тонких стержней* отличаются от колебаний струны, так как это связано именно с возникновением изгибных напряжений. В стержне существенную роль играют внутренние изгибные напряжения, препятствующие изменению его формы, поэтому его нельзя рассматривать как струну. Здесь возникает задача определения минимальной длины пролета при постоянном поперечном сечении струны или наибольшей площади поперечного сечения при определенной длине пролета. При существующих характеристиках струнной транспортной линии, которые упомянуты ранее в статье, выполняются требования, предъявляемые к описанию струны как физического объекта.

В *натянутой* струне возникает *поперечная упругость*. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т. е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой *поперечные бегущие волны*, распространяющиеся с некоторой скоростью в *обе стороны* от места возбуждения. В ненапрянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости, и поперечные волны на ней невозможны.

Если рассматривать перемещение одного транспортного модуля по струне, то, в отличие от железнодорожного подвижного состава, в котором локомотив испытывает дополнительное воздействие от соседних вагонов или другого локомотива, модуль рассматриваемой системы является функционально законченным транспортным объектом [1, с. 223], что несколько упрощает модель. Однако с учетом цикличности движения модулей по струне, а также учитывая тот факт, что *поперечные бегущие волны* распространяются в *обе стороны* от места возбуждения, можно рассматривать несколько транспортных модулей, периодически движущихся по струне, как связанную систему.

Так как струна натянута горизонтально в поле тяжести, то натяжение  $T$  должно быть достаточным, чтобы в состоянии равновесия струна *не провисала*.

Если считать струну нерастяжимой, то скорость распространения поперечных волн на струне зависит *только* от силы натяжения струны  $T$  и её погонной плотности  $\rho_l$  и не зависит от модуля Юнга материала струны. Это можно показать, рассмотрев дифференциальное уравнение, описывающее малые поперечные свободные колебания струны.

При отклонении от равновесия элементарного участка струны, находящегося в точке  $x$ , имеющего длину  $\delta x$  и массу  $\delta m = \rho_l \delta x$ , где  $\rho_l$  – *погонная плотность струны*, кг/м, на него действуют силы натяжения  $T_1$  и  $T_2$ , направленные по касательной к струне. Их вертикальная составляющая будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая элементу некоторое вертикальное

ускорение  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . При этом угол  $\alpha$  зависит от координаты  $x$  вдоль струны и различен в точках приложения сил  $T_1$  и  $T_2$  (рисунок 1).

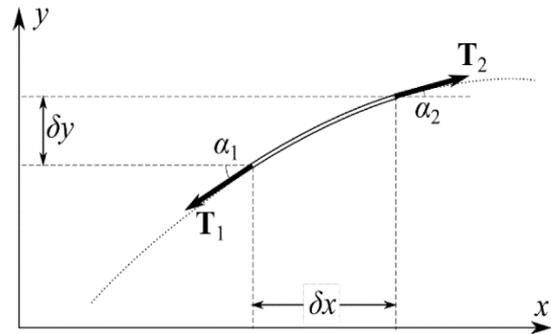


Рисунок 1 – К выводу уравнения колебаний струны

Таким образом, второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2.$$

С учетом нерастяжимости струны получаем после деления обеих частей уравнения движения на  $\delta x \rightarrow 0$

$$\rho_l \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1}{\delta x} \approx T \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\delta x} \rightarrow T \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Подставляя  $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$  и вводя величину с размерностью скорости  $u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ , находим окончательно уравнение свободных малых поперечных колебаний струны  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

Данное уравнение называется *волновым* и описывает волновые процессы в самых разных системах.

Оно также показывает, что скорость распространения поперечных волн на струне не зависит от таких внешних параметров, как амплитуда или частота возбуждающей силы. Однако это справедливо только для *малых* амплитуд колебаний. Если амплитуда колебаний струны достаточно велика, то необходимо учитывать изменение натяжения струны из-за её растяжения при деформации, что, в свою очередь, приведет к зависимости скорости волны от её амплитуды и другим *нелинейным* эффектам [10]. Как известно, амплитуда колебаний струны весьма незначительна [1].

При сильном возбуждении струны нарушаются основные условия, при которых получено волновое уравнение. Возвращающая сила  $T \sin \alpha$ , действующая на элемент струны  $\delta x$ , в этом случае будет сама зависеть от величины  $y$  – отклонения элемента струны от положения равновесия. Кроме того, начинает играть существенную роль продольная деформация (растяжение) струны. Поэтому форма резонансной кривой (амплитудно-частотной характеристики) струны начнет искажаться (рисунок 2).

Каждый участок струны будет представим как нелинейный осциллятор. Как известно, частота собственных колебаний  $\nu$  нелинейного осциллятора зависит от амплитуды  $a$  [10]. При умеренных амплитудах вынуждающей силы ( $F_2$  на рисунке 2) это приводит к смещению максимума резонансной кривой.

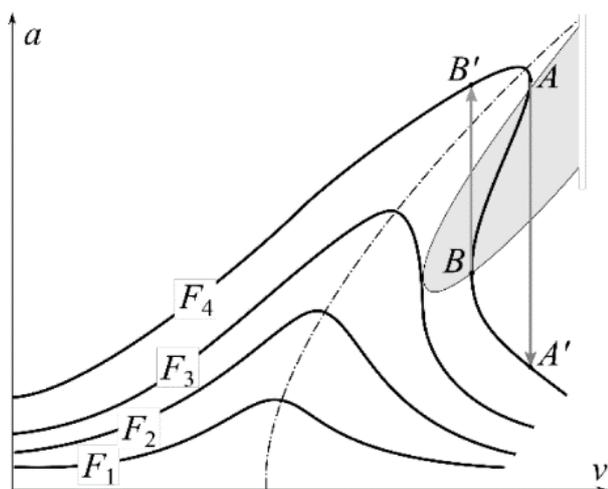


Рисунок 2 – «Опрокидывание» резонансной кривой в нелинейном режиме колебаний струны при разных амплитудах вынуждающей силы ( $F_1 < F_2 < F_3 < F_4$ )

Эффект смещения частоты тем сильнее, чем больше амплитуда колебаний струны. Вследствие этого, начиная с некоторого значения амплитуды силы ( $F_3$  на рисунке 2), резонансные кривые «опрокидываются» и приобретают неоднозначную «клювообразную» форму ( $F_4$  на рисунке 2). В таком случае в определённом интервале частот стационарная амплитуда вынужденных колебаний оказывается зависящей от предыстории установления колебаний – возникает явление колебательного гистерезиса. При увеличении частоты амплитуда достигает максимума, после чего почти сразу происходит срыв колебаний (переход  $A \rightarrow A'$ ), а при уменьшении частоты (подходе к резонансу «справа») возникает резкая раскочка колебаний на частоте, меньшей, чем резонансная (переход  $B \rightarrow B'$ ). При этом на плоскости  $(\nu, a)$  образуется область физических нереализуемых режимов (закрашена серым).

Рассматривая колебания, возникающие вследствие вибрации элементов привода транспортного средства, следует учитывать многочисленные технические решения, применяемые в существующих и разрабатываемых конструкциях, позволяющие демпфировать вибрационную нагрузку. Это же относится к перемещениям по кабине транспортного средства в том числе с учетом соотношения масс пассажира и кабины.

Неровности пути с учетом технологии изготовления струны представляют собой параметр, не носящий системный характер и потому не относящийся к источникам возмущающей силы. Ветровой нагрузкой при скорости движения транспортных средств до 200 км/ч пренебрегают [1, с. 224]. Однако следует принимать во внимание воздействие ветровой нагрузки на струну и на опоры. Последние в силу своей конструкции обладают определенной парусностью в

плоскости, перпендикулярной вектору скорости ветра. В связи с этим возникает ветровая нагрузка, приводящая к колебаниям, описываемым уравнениями, известными в аэродинамике.

В случае рассматривания системы «струна – подвижной состав» как системы с несколькими степенями свободы определение частот собственных колебаний является трудоемкой операцией, требующей больших вычислительных работ [11, с. 711]. В инженерной практике более предпочтительным является *приближенное* решение, основанное на методе Рэлея, который в то же время применяется при рассмотрении балочных систем. Так как струнная транспортная линия представляет собой в общем виде массы, колеблющиеся на натянутой струне, то к ней следует применять положения, описанные в статье.

В линейных системах со многими степенями свободы и в сплошных системах на возникновение резонанса существенное влияние оказывает распределение внешнего воздействия по отдельным координатам, при этом возможны такие специальные случаи, при которых, несмотря на совпадения частоты внешнего воздействия с одной из нормальных частот системы, резонанс не наступает. В этой связи вероятность возникновения резонанса в системе «струна – подвижной состав» при одновременном влиянии перечисленных в статье факторов стремится к нулю.

Анализ поведения колеблющейся струны и уравнения колебаний показывает, что возникновение резонанса при совокупном влиянии факторов, указанных в статье, маловероятно по причине нестационарности параметров внешних воздействий и их несовпадения в направлении колебаний и времени. Таким образом, приведенные в статье тезисы позволяют провести следующий анализ степени вероятности возникновения резонанса. Данный анализ целесообразно выполнить посредством проведения моделирования с помощью специализированных программных комплексов, основанных на принципах метода конечных элементов, с привлечением методов статистического анализа.

#### Список литературы

- 1 Юницкий А. Э. Струнные транспортные системы: на Земле и в Космосе / А. Э. Юницкий. – Силакрогс : «ПНБ принт», 2019. – 576 с.
- 2 Пат. RU 187282 U1. Устройство гашения колебаний вагона надземной монорельсовой транспортной системы / Е. Г. Мелюк, В. В. Ярицын. – № 2018141081; заявл. 22.11.2018; опубл. 28.02.2019.
- 3 Ракша, С. В. Анализ влияния подвижных масс подвешенной канатной дороги на спектр собственных частот привода / С. В. Ракша, Ю. К. Горячев, А. С. Куропятник // Вестник Донбасской государственной машиностроительной академии. – 2013. – № 1. – С. 110–115.
- 4 Проворная, Д. А. Система взаимодействия «транспортное средство – мост» / Д. А. Проворная, Н. В. Молокова // Современные научные исследования: теория, методология, практика : сб. статей по материалам Междунар. науч.-практ. конф. – Уфа, 2019. – С. 141–145.
- 5 Глушков, С. П. Исследование колебаний моста с учетом взаимодействия «транспортное средство – мост» в условиях резонанса / С. П. Глушков, Д. А. Проворная, Н. В. Молокова // Политранспортные системы : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск, 2020. – С. 757–760.

6 **Дядькин, А. А.** Метод определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования / А. А. Дядькин, О. Н. Хагунцева // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – Т. 21, № 5. – С. 607–616.

7 **Солтаханов, Ш. Х.** Гашение колебаний консоли / Ш. Х. Солтаханов // Вестник СПбГУ. – 2009. – Вып. 4. – С. 105–112. – Сер. 1.

8 Ветровой резонанс [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://selenasys.com/Help.aspx?p=3/3.12.htm>. – Дата доступа : 05.12.2023.

9 Концепция обратной связи в динамике механических систем и динамическое гашение колебаний / С. В. Елисеев [и др.] // Наука и образование. – № 5. – 2012. – С. 354–368.

10 **Кингсеп А. С.** Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / А. С. Кингсеп, Г. Р. Локшин, О. А. Ольхов // под ред. А. С. Кингсепа. – М. : Физматлит, 2001. – 560 с.

11 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов : учеб. / М. Д. Подскребко. – Минск : Выш. шк., 2007. – 797 с.

Получено 12.10.2023

**A. E. Unitsky, U. A. Shebzukhov, A. R. Pokulnitskiy.** Influence of external factors on the probability of resonance in the "string – rolling stock" system.

The string transport complex is a pre-stressed string-rail trestle-road, on which rail electric vehicles – drones move in an automated control mode. String-rail routes can be single-track or multi-track, mounted or suspended. Due to the evenness and rigidity of the string-rail track structure, string transport allows the development of very high speeds. However, the combination of rigidity and flexibility of the string track structure, together with high speeds of movement and the peculiarities of the arrangement of the elements of the complex relative to each other, lead to the occurrence of oscillations in different planes and with different frequencies. This is a risk factor for resonance. The study of this process is the focus of this paper.

