

УДК 621.3(075): 656.25(075.8)

Д. В. КОМНАТНЫЙ, кандидат технических наук, Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ СИСТЕМЫ ТОНКИХ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫХ ПРОВОДНИКОВ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Получены выражения для потенциальных коэффициентов тонких бесконечно длинных цилиндрических проводников, расположенных в верхнем слое трехслойной диэлектрической среды. Слой ограниченной толщины находится между двумя полубесконечными слоями. Для вывода этих выражений использованы метод зеркальных изображений и метод оптической аналогии. Рассмотрен частный случай расположения проводника на границе раздела диэлектриков. Путем анализа граничных условий выведены частные формы выражений потенциальных коэффициентов. Показано, что из предлагаемых выражений могут быть получены уже известные соотношения для потенциальных коэффициентов при наличии двухслойной диэлектрической среды и для разности потенциалов проводов уединенной двухпроводной линии. Потенциальные коэффициенты для трехслойной среды могут использоваться в численном методе расчета электростатических полей – методе эквивалентных электродов.

Расчет характеристик электростатического поля в среде, состоящей из нескольких слоев диэлектрических материалов, востребован для большого числа технических приложений. В частности, можно указать разработку печатных плат [1] и электроемкостных датчиков [2].

Поскольку в технических приложениях зачастую рассматриваются электродинамические системы, состоящие из нескольких проводников, то расчет электростатического поля в слоистой среде оказывается возможен только численными методами. Одним из численных методов расчета электростатического поля является метод граничных элементов [2]. С целью сформулировать расчетные соотношения этого метода в форме, наиболее близкой к физическому смыслу задачи расчета электростатического поля, разработаны модификации метода граничных элементов, использующие максвелловы потенциальные коэффициенты [3, 4].

Одной из таких модификаций является метод эквивалентных электродов [5]. В этом методе для расчета плоскопараллельного электростатического поля потенциал поля отдельного граничного элемента принимается равным потенциалу поля эквивалентного электрода в виде тонкого бесконечно протяженного проводника круглого сечения. Расчет линейных плотностей зарядов эквивалентных электродов выполняется путем решения системы линейных алгебраических уравнений, сформированной на основе первой группы формул Максвелла. Соответственно, для записи этой системы требуются выражения потенциальных коэффициентов. Потенциальные коэффициенты тонких цилиндрических проводников получены для расположения проводников у плоской границы металл – диэлектрик [6] и для расположения у границы раздела двух диэлектрических сред с различной диэлектрической проницаемостью [7]. Следовательно, для обеспечения необходимой универсальности метода эквивалентных электродов требуется получить выражения для потенциальных коэффициентов тонких проводников круглого сечения и бесконечной длины, находящихся в многослойной диэлектрической среде.

В рамках статьи ограничиваемся трехслойной диэлектрической средой, в которой ограниченный слой толщины b расположен между двумя полубесконечными слоями диэлектрика. Абсолютная диэлектрическая проницаемость верхнего полубесконечного слоя равна ϵ_1 , проницаемость ограниченного слоя равна ϵ_2 , проницаемость нижнего полубесконечного слоя равна ϵ_3 . Проводники расположены в верхнем слое. Такая конфигурация граничных поверхностей весьма часто встречается при расчете технических устройств [1, 2]. Конфигурация среды показана на рисунке 1.

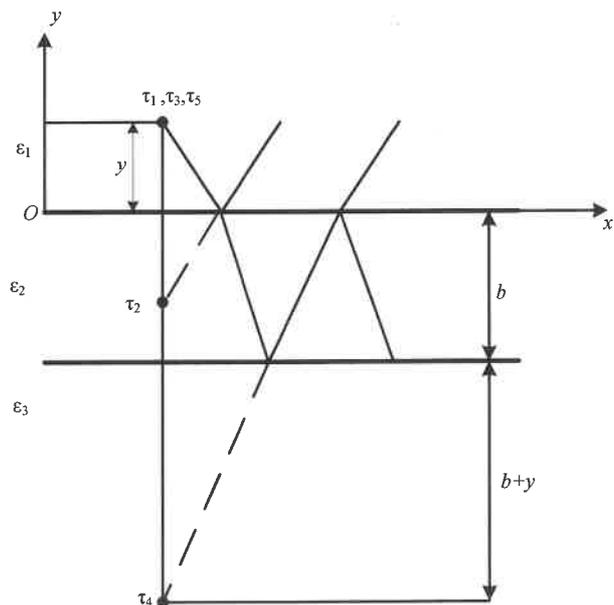


Рисунок 1 – Трехслойная диэлектрическая среда с линейным электрическим зарядом в верхнем слое

Целью статьи является получение выражений для потенциальных коэффициентов в описанной выше электродинамической системе.

Решение уравнения Лапласа для потенциала точечного заряда в слоистой среде выражается несобственным интегралом в цилиндрических координатах [8–10]:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi(\lambda, z - z_0) d\lambda, \quad (1)$$

где φ – потенциал, В; q – заряд, Кл; ϵ_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м; J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; λ – непрерывный параметр; z, r – цилиндрические координаты, м; Φ – функция, определяемая граничными условиями.

При рассмотрении плоскопараллельных полей, созданных линейными электрическими зарядами, выражение для потенциала еще более усложняется. Поэтому для получения выражений потенциальных коэффициентов используется метод зеркальных изображений [11].

Так как в рассматриваемой электродинамической системе проводники расположены в верхнем слое диэлектрика, необходимо вычислить в этом слое потенциалы электростатического поля, созданного связанными зарядами на границах раздела сред. Влияние границы сред с ϵ_1 и ϵ_2 учитывается по известному правилу изображений [12]. Влияние границы раздела сред с ϵ_2 и ϵ_3 учитывается построением двух изображений. В первом осуществляется изображение линейного заряда, введенного для расчета поля под границей сред с ϵ_1 и ϵ_2 в границе раздела сред с ϵ_2 и ϵ_3 . Во втором строятся изображения линейного заряда, введенного для расчета поля над границей раздела сред с ϵ_2 и ϵ_3 , в

границе раздела сред с ϵ_1 и ϵ_2 . В выражении для потенциального коэффициента учитывается потенциал заряда, введенного для расчета поля над границей раздела сред с ϵ_1 и ϵ_2 . Изображение заряда, для расчета поля под границей сред с ϵ_1 и ϵ_2 служит для построения изображения в границе сред с ϵ_2 и ϵ_3 . Так формируется бесконечная система зеркальных изображений исходного заряда в границах раздела сред. Начальные этапы процесса зеркальных изображений исходного заряда приведены на рисунке 1.

Так как процесс построения системы зеркальных изображений заряда оказывается длительным и не наглядным, в [11] описан способ формирования этой системы на основе аналогии с распространением света в слоистой оптически неоднородной среде. Указанным методом в статье получены коэффициенты отражения α , преломления β , начального отражения λ_1, λ_2 и коэффициент повторного отражения γ , определяющие величины зарядов-изображений в диэлектрических границах. Эти заряды используются при выводе расчетных соотношений для потенциальных коэффициентов. Первые пятнадцать линейных зарядов из системы зеркальных изображений исходного линейного заряда приведены в таблице 1. Ход световых лучей по оптической аналогии с зеркальными изображениями заряда показан на рисунке 1.

Таблица 1 – Зеркальные изображения линейного заряда в границах раздела диэлектрических сред

Номер заряда	Граница	Формула для линейной плотности заряда	Используется для записи потенциального коэффициента	Координата заряда
1		τ	Да	y
2	1-2	$\tau\alpha_{12} = \tau\lambda_1$	Да	$-y$
3		$\tau\beta_{12}$	Нет	y
4	2-3	$\tau\beta_{12}\alpha_{23}$	Нет	$-(y + 2b)$
5		$\tau\beta_{12}\beta_{23}$	Нет	y
6	1-2	$\tau\beta_{12}\alpha_{23}$	Нет	$-(y + 2b)$
7		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \beta_{21} = \tau\lambda_2$	Да	$-(y + 2b)$
8		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12}$	Нет	$y + 2b$
9	2-3	$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \beta_{21}$	Нет	$y + 2b$
10		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23}$	Нет	$-(4b + y)$
11	1-2	$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \beta_{21} = \tau\lambda_2\gamma$	Да	$-(4b + y)$
12		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12}$	Нет	$4b + y$
13	2-3	$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12}$	Нет	$4b + y$
14		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12} \beta_{21}$	Нет	$-(6b + y)$
15	1-2	$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \beta_{21} = \tau\lambda_2\gamma^2$	Да	$-(6b + y)$
		$\tau\beta_{12}\alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{12}$	Нет	$6b + y$

Примечание – $\lambda_1 = \alpha_{12} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, $\alpha_{23} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}$, $\alpha_{21} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}$, $\beta_{21} = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, $\beta_{12} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$, $\lambda_2 = \beta_{12}\alpha_{23}\beta_{21}$, $\gamma = \alpha_{21}\alpha_{23}$.

В [2] получены такие же расчетные соотношения для коэффициентов отражения и преломления трехслойной диэлектрической среды. Но в этой работе не упомянут метод оптической аналогии и не объясняется алгоритм зеркальных изображений исходного заряда в границах сред. Поэтому алгоритм изображений рассмотрен в статье подробнее.

Для вывода формул потенциальных коэффициентов в центре цилиндрического проводника размещается линейный электрический заряд. Чтобы найти собственный потенциальный коэффициент, потенциал исходного заряда проводника вычисляется в точке на поверхности проводника, а потенциалы зарядов-изображений исходного заряда – в центре проводника.

Чтобы найти взаимный потенциальный коэффициент, потенциал поля исходного заряда проводника i и потенциал поля зарядов-изображений этого заряда рассчитываются в центре проводника j [12]. Линейная плотность заряда принимается численно равной единице. Таким путем получаются выражения потенциальных коэффициентов:

– собственного:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{r_i} + \lambda_1 \ln \frac{1}{2y_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{2y_i + 2(n+1)b} \right]; \quad (2)$$

– взаимного:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} + \lambda_1 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + (2(n+1)b + y_j))^2}} \right]; \quad (3)$$

где α – потенциальный коэффициент, м/Ф; ϵ_0 – абсолютная диэлектрическая постоянная, Ф/м; r_i – радиус проводника, м; x_i, x_j, y_i, y_j – координаты центров проводников, м; n – счетная переменная.

В частном случае проводник может лежать на границе раздела сред. Если рассматривать потенциальные коэффициенты для классического случая тонких цилиндрических проводников, то достаточно в формулах (2) и (3) принять координату y центра такого проводника численно равной его радиусу r . Если цилиндрический проводник является эквивалентным электродом для граничного элемента пренебрежимо малой толщины в методе эквивалентных электродов, то возникает трудность, заключающаяся в том, что центр цилиндрического проводника лежит на границе раздела сред. В [13] предложен способ учета этого случая, но этот способ противоречит установленному в [12] правилу использования зарядов-изображений для вычисления характеристик электростатического поля под и над границей двух диэлектрических сред.

Для выработки способа учета этого частного случая рассматривается известная схема изображения линейного заряда τ_1 в плоской границе раздела двух диэлектрических сред (рисунок 2) [12].

Из рисунка 2 следует, что граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности электростатического поля на границе имеет вид [12]

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r} (\tau_1 + \tau_2) \cos\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r} \tau_3 \cos\alpha. \quad (4)$$

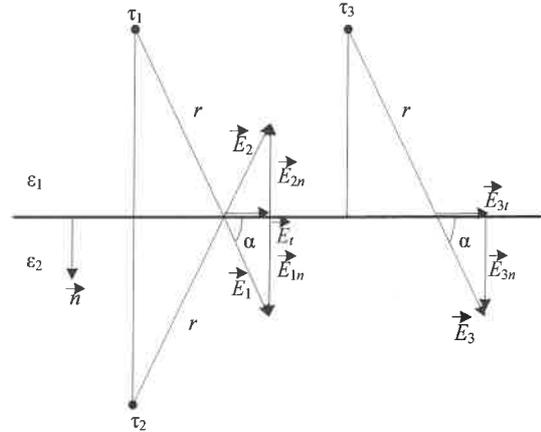


Рисунок 2 – Изображение заряда в границе раздела двух диэлектрических сред

Граничное условие для нормальной составляющей вектора индукции электростатического поля на границе имеет вид [12]

$$\frac{1}{2\pi r} (\tau_1 - \tau_2) \sin\alpha = \frac{1}{2\pi r} \tau_3 \sin\alpha. \quad (5)$$

Если заряд τ_1 приближается к границе, то угол α стремится к нулю. Тогда в пределе соотношение (5) удовлетворяется, если принять $\tau_2 = \alpha_{12}\tau$ и $\tau_3 = \beta_{12}\tau_1$. Соотношение (4) удовлетворяется тождественно.

Следовательно, для получения выражения для потенциального коэффициента достаточно полагать, что исходный заряд и два заряда-изображения в границе раздела сред с ϵ_1 и ϵ_2 находятся в одной точке, поскольку граничные условия оказываются выполненными.

Частные выражения для потенциальных коэффициентов могут быть записаны в следующем виде:

– собственный:

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{r_i} + \lambda_1 \ln \frac{1}{r_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{2(n+1)b} \right]; \quad (6)$$

– взаимный при нахождении проводника i на границе раздела сред:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_j)^2}} + \lambda_1 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_j)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (2(n+1)b + y_j)^2}} \right]; \quad (7)$$

– взаимный, при нахождении проводника j на границе раздела сред:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i)^2}} + \lambda_1 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + (2(n+1)b))^2}} \right]. \quad (8)$$

Как видно из (2), (3), (6)–(8), выражения для собственных и взаимных потенциальных коэффициентов имеют вид бесконечных рядов. При осуществлении практических расчетов ограничиваются несколькими слагаемыми ряда. Условие отбрасывания слагаемых рационально ввести из следующих соображений. В общем случае изображения данного заряда находятся ближе к исходному заряду, нежели прочие заряды и их изображения. Поэтому из (2) следует, что слагаемые с номером, равным или большим n отбрасываются, если выполняется условие

$$\frac{\gamma^n \lambda_2 \ln \frac{1}{R(n)}}{\ln \frac{1}{r_i} + \lambda_1 \ln \frac{1}{2r_i}} < \delta, \quad (9)$$

где $R(n)$ – расстояние от заряда изображения n до исходного заряда.

Физически условие (9) означает, что потенциал поля заряда-изображения существенно меньше суммарного потенциала поля исходного заряда и его первого изображения. Достоинствами предложенного условия является малая зависимость от характерных размеров электродинамической системы, а также возможность его рекуррентного вычисления.

Проверка предложенных в статье выражений для потенциальных коэффициентов возможна путем вычисления несобственного интеграла (1) с помощью аппроксимаций [9, 10]. Но тогда возникает необходимость проверки точности аппроксимации и корректности ее реализации в компьютерной программе, что затрудняет верификацию полученных в статье результатов. С другой стороны, в [2] приведены выражения для коэффициентов зеркальных изображений без вывода, а в [14] выведены потенциальные коэффициенты для малой сферы в многослойной диэлектрической среде. Причем в [14] декларируется развитие метода оптической аналогии, но расчетные соотношения получены путем решения уравнения Лапласа. Результаты указанных источников и настоящей статьи, полученные разными методами, совпадают по существу.

Кроме этого, можно показать, что при устремлении толщины среднего слоя к бесконечности, выражения (2), (3) переходят в формулы для потенциальных коэффициентов в случае расположения проводника над границей раздела двух полубесконечных диэлектриче-

ских сред [7]. При удалении границы раздела сред с ϵ_1 и ϵ_2 в бесконечность выражения для потенциальных коэффициентов позволяют получить формулу для разности потенциалов между двумя бесконечными круглыми проводниками одинакового радиуса, несущих одинаковые по модулю заряды разных знаков (двухпроводной уединенной линии) [15]. Следовательно, допустим вывод, что результаты, полученные в статье, можно полагать верными, причем обоснование этого вывода проведено так же, как в [16], путем сравнения с уже известными опубликованными результатами.

Предлагаемые в статье выражения для потенциальных коэффициентов в случае наличия трехслойной диэлектрической среды получены апробированным методом зеркальных изображений и оптической аналогии. Они соответствуют имеющимся в литературе выражениям для расчета поля в трехслойной среде. Из полученных в статье формул могут быть выведены как частные случаи уже известные формулы для потенциальных коэффициентов в случае двухслойной диэлектрической среды и для разности потенциалов двух проводников в свободном пространстве. Это дает основание полагать предлагаемые в статье выражения верными.

Следует отметить, что метод оптической аналогии позволяет получить потенциальные коэффициенты в случае расположения проводников в любом слое трехслойной среды. В статье рассмотрен наиболее технически значимый случай [1, 2]. Также отметим, что аналогично могут быть получены потенциальные коэффициенты трехмерных проводников, так как правила изображения зарядов в границах остаются теми же [11, 12].

Приведенные в статье выражения для потенциальных коэффициентов являются существенным и практически полезным дополнением к уже полученным формулам потенциальных коэффициентов при наличии границ других электрических свойств или геометрических конфигураций. Эти формулы могут найти применение в методе эквивалентных электродов, который используется для решения задач электромагнитной совместимости микросистемных узлов, в том числе и железнодорожной автоматики и телемеханики. Обеспечение электромагнитной совместимости микропроцессорных и микросистемных систем автоматики и телемеханики в настоящее время является актуальной научно-технической задачей [5], следовательно, полученные результаты являются востребованными практикой.

Список литературы

- 1 Кечиев, Л. Н. Проектирование печатных плат для цифровой быстродействующей аппаратуры / Л. Н. Кечиев. – М. : ООО Группа «ИДТ», 2007. – 616 с.
- 2 Джежора, А. А. Электроемкостные преобразователи и методы их расчета : [монография] / А. А. Джежора. – Минск : Белорусская наука, 2007. – 351 с.
- 3 Кайданов, Ф. Г. Электростатическая индукция на автотранспорт вблизи воздушных линий переменного тока / Ф. Г. Кайданов // Исследования электрического поля линий

и подстанций сверхвысокого напряжения : сб. науч. тр. / НИИПТ. – Л. : Энергоатомиздат, 1985. – С. 5–13.

4 Quasi-static tool for the EMI/EMC Analysis of Analog Circuits: Parasitic Extractor Tool and Simulator of EMI Parameters / S. Piedra [et. al.] // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility – 1998. – Vol. 40, no 2. – P. 127–137.

5 **Бочков, К. А.** Элементы моделирования электромагнитной совместимости устройств железнодорожной автоматики и телемеханики / К. А. Бочков, Д. В. Комнатный. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 185 с.

6 **Коровкин, М. В.** Теоретические основы электротехники : сб. задач / М. В. Коровкин, Е. С. Селина, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004. – 512 с.

7 **Кузнецов, С. А.** Особенности расчета электростатических полей многопроводных линий у границы раздела диэлектрических сред / С. А. Кузнецов, В. В. Рудаков // Теоретическая электротехника : респ. межвед. науч.-техн. сб. – Львов : Изд. Львовского ун-та, 1990. – Вып. 49. – С. 126–131.

8 **Пановский, В.** Классическая электродинамика / В. Пановский, М. Филипс. – М. : Физматгиз, 1963 – 432 с..

9 **Конников, И. А.** Вычисление функции Грина для уравнения Лапласа / И. А. Конников // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 1. – С. 15–20.

10 **Конников, И. А.** Вычисление квазистационарного поля в слоистой среде / И. А. Конников // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 4. – С. 138–140.

11 **Бургсдорф, В. В.** Заземляющие устройства электроустановок / В. В. Бургсдорф, А. И. Якобс. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 399 с.

12 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле : учеб. для студентов вузов / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1978. – 231 с.

13 Техника высоких напряжений, теоретические и практические основы применения / М. Бейер [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 553 с.

14 **Петрин, А. Б.** Развитие и обобщение метода отражений в задачах электростатики и теплопроводности плоскостных тел / А. Б. Петрин // Журнал технической физики. – 2023. – Т. 93, № 3. – С. 318–331.

15 **Бенинг, П.** Электрическая прочность изоляционных материалов и конструкций / П. Бенинг. – М.–Л. : Госэнергоиздат, 1960. – 216 с.

16 Метод многократных электрических изображений при расчете погонных параметров проводов кабеля в диэлектрической оболочке вблизи проводящей поверхности / О. А. Тарасов [и др.] // Технологии электромагнитной совместимости. – 2021. – № 4. – С. 3–12.

Получено 10.10.2023

D. V. Komnatny. Potential coefficients of thin endlessly long conductors system in three-layer dielectric medium.

The expressions for potential coefficients of thin endlessly long cylindrical conductors, placed in upper layer of inhomogeneous three layer dielectric medium, are obtained. The layer of bounded thickness is placed between two semi-infinite layers. The method of mirror images and method of optical analogy are used for these expressions deducing. The particular case of conductor location on the boundary of two dielectric separation is considered. By the boundary conditions analysis the particular forms of potential coefficients expressions are deduced too. It is shown, that already known expressions for potential coefficients in two-layer dielectric medium and for potential difference secluded two-wire line wires can be obtained from proposed expressions. The potential coefficients in tree-layer medium can be used in numerical method of electrostatic field calculation, named equivalent electrode method.