УДК 517.95+517.44

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. ДУДКО, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассмотрим трехмерную задачу Коши для однородного волнового уравнения с заданными начальными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),-\infty<x,y,z<\infty,t>0, \qquad (1)$$

$$u(x,y,z,0)=\tau(x,y,z),\ \frac{\partial u(x,y,z,0)}{\partial t}=\psi(x,y,z).$$

Применим преобразование Фурье по трем переменным x,y,z к функции $u(x,y,z,t)$, получим фурье-образ вида

$$U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int u(x,y,z,t)e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}dxdydz.$$

Тогда обратное преобразование Фурье (обращение фурье-образа) будет иметь вид

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \qquad (2)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести фурье-вектор $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$.

Подействуем оператором Лапласа $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ на обе части равенства (2):

$$\Delta u=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\Delta\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int U(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)\Delta e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3= \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \left(-\omega^2 U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t)\right) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Далее вводим фурье-образы функций начального условия

$$F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \tau(x, y, z) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} dxdydz,$$

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \psi(x, y, z) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} dxdydz.$$

Перейдя к фурье-образам с помощью равенства (3) в обеих частях уравнения (1), приходим к следующей задаче Коши:

$\dfrac{\partial^2 U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t)}{\partial t^2} + a^2 \omega^2 U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) = 0,$ с начальными условиями

$$U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, 0) = F(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \frac{\partial U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, 0)}{\partial t} = \Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Решение этой задачи Коши дает требуемый фурье-образ $U(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) = F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cos a\omega t + \dfrac{\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{a\omega} \sin a\omega t.$

Подставляя полученное выражение в равенство (2), находим решение волнового уравнения

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \left(F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cos a\omega t + \frac{\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{a\omega} \sin a\omega t \right) \times$$

$$\times e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cos a\omega t \, d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 +$$

$$+ \frac{1}{a(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\omega} \sin a\omega t \, d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \qquad (4)$$

Рассмотрим сначала второе слагаемое. Подставляя выражение для фурье-образа $\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, получаем

$$I_2 = \frac{1}{a(2\pi)^{3/2}} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\omega} \sin a\omega t \, d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 =$$

$$=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\varsigma)e^{-i(\omega_1\xi+\omega_2\eta+\omega_3\varsigma)}d\xi d\eta d\varsigma\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i(\vec{\omega},\vec{r})}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

В последней формуле мы ввели вектор $\vec{r}=(\xi-x,\eta-y,\zeta-z)$.

Вычислим сначала внутренние интегралы по переменным $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Переходим к сферическим координатам в пространстве переменных ξ,η,ς:

$$\xi-x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \eta-y=r\sin\theta\sin\varphi,\ \zeta-z=r\cos\theta),\ \theta\in[0;\pi],\ \varphi\in[0;2\pi],\ r\in(0;+\infty);$$

и в пространстве переменных $\omega_1,\omega_2,\omega_3$:

$$\omega_1=\omega\sin s\cos\psi,\ \omega_2=\omega\sin s\sin\psi,\ \omega_3=\omega\cos s,\ s\in[0;\pi],\ \psi\in[0;2\pi],\ \omega\in(0;+\infty);$$

s – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, т. е. $(\vec{\omega},\vec{r})=\omega r\cos s$.

Далее вычислим интегралы

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i(\vec{\omega},\vec{r})}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{-i\omega r\cos s}\omega^2\sin s\,d\omega\,ds\,d\psi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\infty}\omega\sin a\omega t\,d\omega\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds=2\pi\int_0^{\infty}\omega\sin a\omega t\,d\omega\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds.$$

Вычисляем внутренний интеграл по переменной s:

$$\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}\sin s\,ds=\frac{1}{i\omega r}\int_0^{\pi}e^{-i\omega r\cos s}d(-i\omega r\cos s)=\frac{1}{i\omega r}e^{-i\omega r\cos s}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{i\omega r}(e^{i\omega r}-e^{-i\omega r})=2\frac{\sin\omega r}{\omega r}.$$

Тогда интеграл по переменной ω будет равен

$$2\pi\int_0^{\infty}\frac{2\sin\omega r}{\omega r}\sin a\omega t\,\omega\,d\omega=\frac{2\pi}{r}\int_0^{\infty}(\cos\omega(r-at)-\cos\omega(r+at))d\omega=$$

$$=\frac{2\pi^2}{r}(\delta(r-at)-\delta(r+at)).$$

Здесь использовалось понятие δ-функции [1].

Для вычисления интеграла I_2 используем полученное соотношение для интеграла по переменной ω, а также выражаем переменные ξ,η,ς в сферических координатах:

$$I_2=\frac{2\pi^2}{a(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta\right)\frac{1}{r}\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right)\times$$

$$\times r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\varphi\int_0^{r}\psi\left(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta\right)\times$$

$$\times\left(\delta(r-at)-\delta(r+at)\right)r\sin\theta drd\theta d\varphi=$$

$$=\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

При интегрировании по переменной r мы использовали основное свойство δ-функции, при этом слагаемое с функцией $\delta(r+at)$ зануляется (минимум необходимых сведений по теории δ-функции можно найти в [1], более строгое и фундаментальное изложение теории обобщенных функций дано в [2]).

Таким образом, второе слагаемое в выражении (4) для решения волнового уравнения принимает следующий вид:

$$I_2=\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (5)$$

Вычисление первого слагаемого в выражении (4) без труда сводится к рассмотренному способу вычисления второго слагаемого посредством следующего преобразования

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\cos a\omega t e^{i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\frac{\sin a\omega t}{a\omega}e^{i\left(\omega_1 x+\omega_2 y+\omega_3 z\right)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

Подставляем в это соотношение выражение для фурье-образа $F(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, окончательно получаем

$$I_1=\frac{1}{a(2\pi)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial t}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\tau(\xi,\eta,\varsigma)d\xi d\eta d\varsigma\times$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\sin a\omega t}{\omega}e^{i\left(\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)+\omega_3(z-\varsigma)\right)}d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}t\tau\left(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta\right)\sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (6)$$

Решение исходной задачи Коши для волнового уравнения (1) в трехмерном пространстве получим, суммируя результаты равенств (5) и (6):

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\tau\big(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta\big)\sin\theta d\theta d\varphi+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\psi\big(x+at\sin\theta\cos\varphi, y+at\sin\theta\sin\varphi, z+at\cos\theta\big)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Полученный результат можно представить в виде поверхностных интегралов

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}}\frac{\tau(\xi,\eta,\varsigma)}{t}d\delta+\iint_{S_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta,\varsigma)}{t}d\delta\right], \qquad (7)$$

где S_{at} – сфера радиуса at с центром в точке (x,y,z).

В классических руководствах по математической физике, например, в [3] формула (7) носит название формулы Пуассона.

Список литературы

1 **Арсенин, В. Я.** Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974. – 384 с.

2 **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

3 **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

УДК 517.44

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. ДУДКО, А. И. ПРОКОПЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Различные типы интегральных преобразований давно уже стали мощнейшим методом решения прикладных задач во многих разделах прикладной математики и математической физики. В достаточно общей форме интегральное преобразование можно определить следующим образом.