УДК 517.44

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ. ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛЫ

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЁВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Рассмотрим продольные колебания стержня под действием периодической силы $F(t)$, представленной своим рядом Фурье

$$F(t)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right),$$

где ω – циклическая частота колебаний, т. е. $\omega=\frac{2\pi}{t}$, T – период действующей силы, $F(t)=F(t+T)$. Скорость имеет длину l, левый конец стержня $x=0$ закреплен, на правый конец $x=l$ действует сила $F(t)$. Краевая задача для продольных колебаний стержня имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

граничные условия даются уравнениями

$$u(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{F(t)}{ES}, \tag{2}$$

где $u(x,t)$ – амплитуда продольного смещения стержня с координатой x за время t, коэффициент $a^2=\frac{E}{\rho}$, где ρ – объемная плотность материала стержня, E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения стержня. Начальные условия краевой задачи полагаем нулевыми

$$u(x,0)=0,\ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вводим лаплас-образ неизвестной функции $u(x,t)\div U(x.p)$, лаплас-образ силы $F(t)$ представим в виде

$$\bar{F}(p)=\bar{F}_0(p)+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{F}_n(p)=\frac{\alpha}{2p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n p+\beta_n n\omega}{p^2+(n\omega)^2}.$$

Лаплас-образ $\bar{F}_0(p) = \dfrac{\alpha}{2p}$ определяется стационарной частью ряда Фурье, лаплас-образ $\bar{F}_n(p) = \dfrac{\alpha_n p + \beta_n n\omega}{p^2 + (n\omega)^2}$ будет определять вынужденные колебания стержня.

Переходим к лаплас-образам в уравнении (1), с учетом нулевых начальных условий и получаем уравнение вида

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U(x,p) = 0. \tag{3}$$

Краевые условия (2), записанные в лаплас-образах, принимают вид

$$U(0,p) = 0, \quad \frac{dU(l,p)}{dx} = \frac{\bar{F}(p)}{ES}. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) с учетом первого из краевых условий (4) представим в виде

$$U(x,p) = U_0(x,p) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,p) = c_0 \operatorname{sh}\frac{px}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sh}\frac{px}{a}.$$

Второе краевое условие в (4) разобьем на два уравнения

$$\frac{dU_0(l,p)}{dx} = \frac{\bar{F}_0(p)}{ES}, \text{ или } c_0 \frac{p}{a} \operatorname{ch}\frac{pl}{a} = \frac{\alpha}{2p},$$

$$\frac{dU_n(l,p)}{dx} = \frac{\bar{F}_n(p)}{ES}, \text{ или } c_n \frac{p}{a} \operatorname{ch}\frac{pl}{a} = \frac{1}{ES} \frac{\alpha_n p + \beta_n n\omega}{p^2 + (n\omega)^2}.$$

Из полученных уравнений находим коэффициенты c_0 и c_n, и требуемые лаплас-образы принимают вид

$$U_0(x,p) = c_0 \operatorname{sh}\frac{px}{a} = \frac{a\alpha}{2ES} \frac{\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{B_0(p)} = \frac{ax}{2ES} \frac{\operatorname{sh}\frac{px}{a}}{p^2 \operatorname{ch}\frac{pl}{a}}. \tag{5}$$

$$U_n(x,p) = c_n \operatorname{sh}\frac{px}{a} = \frac{a}{ES} \frac{(\alpha_n p + \beta_n n\omega) \operatorname{sh}\frac{px}{a}}{p\left(p^2 + (n\omega)^2\right) \operatorname{ch}\frac{pl}{a}}. \tag{6}$$

Далее находим функции-оригиналы, отвечающие полученным лаплас-образам. Рассмотрим лаплас-образ $U_0(x,p)$. Функция $B_0(p) = p^2 \operatorname{ch}\frac{pl}{a}$

имеет действительный корень $p=0$. Разлагая гиперболический синус в ряд Маклорена

$$\operatorname{sh}\frac{px}{a}=\frac{px}{a}+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^3+\ldots=\frac{px}{a}\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right),$$

представим лаплас-образ (5) в виде

$$U_0(x,p)=\frac{\alpha}{2ES}\frac{x\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right)}{p\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}.$$

Как следствие, $p=0$ – простой полюс функции $U_0(x,p)$, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{p=0}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{2ES}\lim_{p\to 0}\left[p\frac{x\left(1+\frac{1}{3!}\left(\frac{px}{a}\right)^2+\ldots\right)e^{pt}}{p\operatorname{ch}\frac{pl}{a}}\right]=\frac{\alpha x}{2ES}.$$

Функция $B_0(p)$ имеет также бесконечно много нулей в точках, являющихся корнями уравнения $\operatorname{ch}\frac{pl}{a}=0$, $\frac{p_m l}{a}=i\frac{\pi(2m+1)}{2}$, $p_m=i\omega_m$, где $\omega_m=\frac{\pi a(2m+1)}{2l}$ – частоты собственных колебаний стержня, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Вычисляем производную

$$B_0'(p)=\frac{1}{a}p^2\operatorname{sh}\frac{pl}{a}+2p\operatorname{ch}\frac{pl}{a},$$

тогда

$$B_0'(p_m)=i\frac{l}{a}(i\omega_m)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)=-i\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m^2.$$

Вычет функции $U_0(x,p)e^{pt}$ в простом полюсе $p=p_m$ находим по формуле [2]

$$\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=\frac{a\alpha}{2ES}\frac{\operatorname{sh}\frac{p_m x}{a}}{B_0'(p_m)}e^{p_m t}=-\frac{a\alpha}{2ES}\frac{i\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{i\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m^{\ 2}}e^{\omega_m t}=$$

$$=-\frac{\alpha a^2}{2ESl}\frac{(-1)^m}{\omega_m^{\ 2}}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\left(\cos\omega_m t+i\sin\omega_m t\right).$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть

$$\operatorname{Re}\underset{p=p_m}{\operatorname{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=-\frac{\alpha a^2}{2ESl}\frac{(-1)^m}{\omega_m{}^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t.$$

Функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу $U_0(x,p)$, находим по основной теореме обращения лаплас-образа [3]

$$U_0(x,p)=\underset{p=0}{\operatorname{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)+\sum_{m=0}^{\infty}2\operatorname{Re}\underset{p=p_m}{\operatorname{Res}}\left(U_0(x,p)e^{pt}\right)=$$

$$=\frac{\alpha x}{2ES}-\frac{\alpha a^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\omega_m{}^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t\ . \qquad (7)$$

Аналогичным образом находим оригинал лаплас-образа (6)

$$U_n(x,p)=\frac{\alpha}{ES}\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\operatorname{sh}\dfrac{px}{a}}{B(p)}=\frac{a}{ES}\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\operatorname{sh}\dfrac{px}{a}}{p\left(p^2+(n\omega)^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}.$$

Представим функцию $B(p)$ в виде

$$B(p)=p(p-in\omega)(p+in\omega)\operatorname{ch}\frac{pl}{a}$$

и находим вычет функции и находим вычет функции $U_n(x,p)e^{pt}$ в простом полюсе $p_n=in\omega$, получаем

$$\underset{p=p_n}{\operatorname{Res}}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{ES}\lim_{p\to p_n}\left[(p-in\omega)\frac{(\alpha_n p+\beta_n n\omega)\operatorname{sh}\dfrac{px}{a}e^{pt}}{(p-in\omega)(p+in\omega)p\operatorname{ch}\dfrac{pl}{a}}\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{ES}\frac{(i\alpha_n n\omega+\beta_n n\omega)\operatorname{sh}\dfrac{in\omega x}{a}e^{in\omega t}}{2(in\omega)^2\operatorname{ch}\dfrac{in\omega l}{a}}=-\frac{\alpha}{2ES\omega}\frac{i(i\alpha_n+\beta_n)}{n\cos\dfrac{n\omega l}{a}}\sin\frac{n\omega x}{a}(\cos n\omega t+i\sin n\omega t).$$

Выделяем в полученном выражении действительную часть

$$\operatorname{Re}\underset{p=p_n}{\operatorname{Res}}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right)=\frac{\alpha}{2ES\omega}\frac{\sin\dfrac{n\omega x}{a}}{n\cos\dfrac{n\omega l}{a}}(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t).$$

Далее вычисляем вычеты функции $U_n(x,p)e^{pt}$ в полюсах $p_m=i\omega_m$ ($m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$). Так как

$$B'(p) = p\left(p^2 + (n\omega)^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh}\frac{pl}{a} + \left(p\left(p^2 + (n\omega)^2\right)\right)'_p \operatorname{ch}\frac{pl}{a},$$

то

$$B'(p_m) = p_m\left(p_m{}^2 + (n\omega)^2\right)\frac{l}{a}\operatorname{sh} i\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right) =$$

$$= i^2\frac{l}{a}\omega_m(-1)^m\left((n\omega)^2 - \omega_m{}^2\right) = \frac{l}{a}(-1)^m\omega_m\left(\omega_m{}^2 - (n\omega)^2\right).$$

Как следствие, для требуемой величины вычета в полюсе $p_m = i\omega_m$ получаем следующее соотношение:

$$\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right) = \frac{\alpha}{ES}\frac{(\alpha_n p_m + \beta_n n\omega)\operatorname{sh}\frac{p_m x}{a}}{B'(p_m)}e^{p_m t} = \frac{a}{ES}\frac{(i\alpha_n\omega_m + \beta_n n\omega)i\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m\left(\omega_m{}^2 - (n\omega)^2\right)}e^{i\omega_m t} =$$

$$= \frac{a}{ES}\frac{(i\alpha_n\omega_m + \beta_n n\omega)i\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\frac{l}{a}(-1)^m\omega_m\left(\omega_m{}^2 - (n\omega)^2\right)}e^{i\omega_m t} =$$

$$= \frac{a^2}{ESl}\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left(\omega_m{}^2 - (n\omega)^2\right)}(i\beta_n n\omega - \alpha_n\omega_m)(\cos\omega_m t + i\sin\omega_m t).$$

Действительная часть этого выражения

$$\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right) = \frac{a^2}{ESl}\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left((n\omega)^2 - \omega_m{}^2\right)}(\alpha_n\omega_m\cos\omega_m t + \beta_n n\omega\sin\omega_m t).$$

Тогда функция-оригинал, отвечающая лаплас-образу $U_n(x,p)$, принимает вид

$$U_n(x,p) \doteq 2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_n}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} 2\operatorname{Re}\operatorname*{Res}_{p=p_m}\left(U_n(x,p)e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{a}{ESl}\frac{\sin\frac{n\omega x}{a}}{n\cos\frac{n\omega l}{a}}(\alpha_n\cos n\omega t + \beta_n\sin n\omega t) +$$

$$+\frac{2a^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{\omega_m\left((n\omega)^2-\omega_m{}^2\right)}\left(\alpha_n\omega_m\cos\omega_m t+\beta_n n\omega\sin\omega_m t\right). \qquad (8)$$

Суммируя результаты равенств (7) и (8), находим решение задачи о продольных колебаниях стержней под действием периодической силы. Представим это решение в виде суммы двух функций

$$u(x,t)=\bar{u}(x,t)+u_0(x,t),$$

где функция

$$\bar{u}(x,t)=\frac{\alpha x}{2ES}+\frac{\alpha}{ES\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\omega x}{a}}{n\cos\frac{n\omega l}{a}}\left(\alpha_n\cos n\omega t+\beta_n\sin n\omega t\right)$$

описывает вынужденные колебания стержня со спектром частот периодической силы $F(t)$, а также статический сдвиг сечения стержня с координатой x, обусловленный наличием постоянного слагаемого в ряде Фурье, которым представлена сила $F(t)$.

Второе слагаемое решения

$$u_0(x,t)=-\frac{\alpha x^2}{ESl}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\omega_m{}^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}\cos\omega_m t+$$

$$+\frac{2a^2}{ESl}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2l}}{(n\omega)^2-\omega_m{}^2}\left(\alpha_n\cos\omega_m t+\beta_n\frac{n\omega}{\omega_m}\sin\omega_m t\right)$$

описывает собственные колебания стержня.

Список литературы

1 **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 736 с.

2 **Пчелин, Б. К.** Специальные разделы высшей математики. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление / Б. К. Пчелин. – М. : Высш. шк., 1973. – 464 с.

3 **Свешников, А. Г.** Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1967. – 304 с.