УДК 517.275:378.4

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA ПРИ СОЗДАНИИ ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

М. А. ГЛЕЦЕВИЧ, Н. Н. РАЧКОВСКИЙ
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Геометрическая интерпретация понятий и теорем, изучаемых в математическом анализе, всегда являлась важным элементом изложения этой дисциплины студентам инженерных специальностей. Актуальность этого элемента существенно возросла в последнее время в связи с тем, что современные студенты воспринимают информацию с большей вовлеченностью, если она сопровождается визуальным рядом, и преимущественно избегают объемного текста и длинных математических выкладок. По этой причине в ряде случаев целесообразно после доказательства теоремы показать геометрическую интерпретацию понятий и утверждений, используемых в ней. Это поможет заинтересовать студента и стимулировать его дальнейшее самостоятельное изучение материала по соответствующей теме.

В настоящее время существует несколько программ и систем компьютерной алгебры, позволяющих легко создавать графический материал. В данных тезисах представлен пример использования одной из них – программы GeoGebra. Среди ее преимуществ стоит отметить, что она бесплатна, имеет стационарную, мобильную и веб-версии, динамическое управление геометрическими объектами можно осуществлять как с помощью соответствующих им уравнений, так и непосредственно взаимодействуя с ними в рабочем окне при помощи мыши, программа имеет дружественный пользователю интерфейс и различные способы включения интерактивной работы с графическими материалами в образовательный процесс [1].

Продемонстрируем использование конкретных инструментов GeoGebra, которые могут быть полезны при подготовке лекционных материалов для курса «Математический анализ». Одним из разделов этого курса, в котором особенно актуально наглядное представление определений и теорем, является раздел «Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных». Рассмотрим следующую теорему, которую можно предложить при изучении темы «Неявная функция».

Теорема. Пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывна вместе с частными производными F'_x, F'_y, F'_z в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда верны следующие утверждения:

1) уравнение $F(x,y,z)=0$ однозначно определяет функцию $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$;

2) верно равенство $z_0=f(x_0,y_0)$;

3) $f(x,y)$ непрерывна вместе с частными производными в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ [2].

Покажем, как в веб-версии приложения GeoGebra проиллюстрировать первые два утверждения данной теоремы, а также следствие нарушения условия $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Для примера зададим функцию $F(x,y,z)$ следующим образом: $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$. Студенты легко могут самостоятельно убедиться, что функция $F(x,y,z)$ непрерывна вместе с частными производными F'_x, F'_y, F'_z в окрестности любой точки. Уравнение $F(x,y,z)=0$ задает поверхность нулевого уровня, которая является хорошо знакомой студентам поверхностью – сферой с центром в точке $(0,0,0)$ и радиусом $\sqrt{3}$. Построим ее с помощью приложения 3D *Calculator*, введя соответствующее уравнение во вкладке «Алгебра» (рисунок 1, *а*). Используя инструмент «Точка на объекте» во вкладке «Инструменты», поставим мышью на трехмерном изображении поверхности точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащую указанной сфере в силу второго условия $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Координаты точки M_0 рассчитываются автоматически, и ее можно перемещать по сфере также с помощью мыши. Изначально выберем точку M_0 не лежащей в плоскости Oxy. При этом можно аналитически показать студентам, что в таком случае выполняется третье условие теоремы $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, либо предложить провести проверку этого условия самостоятельно. Для понимания его геометрической интерпретации студенты уже должны быть знакомы с понятием градиента и теоремой о перпендикулярности градиента множеству уровня функции многих переменных (ФМП). Используя эти знания и напомнив студентам материал курса аналитической геометрии, можно указать на то, что условие $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ означает, что градиент рассматриваемой функции в точке M_0 не параллелен плоскости Oxy, а следовательно, касательная плоскость к сфере, построенная в точке M_0, не параллельна оси Oz. Покажем это на трехмерном рисунке, изобразив такую касательную плоскость. Для этого с помощью инструмента «Плоскость через три точки» построим две плоскости, проходящие через точку M_0 (необходимые для этого дополнительные четыре точки можно выбрать произвольно и оставить скрытыми). Используя инструмент «Кривая пересечения», отобразим на трехмерном рисунке кривые пересечения этих плоскостей со сферой $F(x, y, z) = 0$. Инструмент «Касательная» позволяет построить касательные к этим кривым в точке M_0, через которые с помощью инструмента «Плоскость» проведем касательную плоскость (рисунок 1, *б*). Весь процесс построения можно производить непосредственно на лекции, что будет способствовать закреплению в памяти студентов понятия «касательная плоскость к поверхности». Использованные вспомогательные элементы (дополнительные плоскости, линии пересечения, касательные) затем можно скрыть. При вращении рисунка с помощью мыши хорошо видно, что построенная плоскость не параллельна *Oz*.Таким образом, наглядно проиллюстрирована геометрическая интерпретация третьего условия теоремы.

а) *б*)

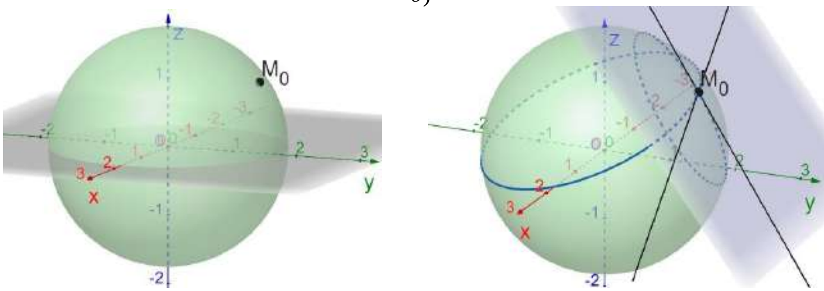

Рисунок 1 – Поверхность $F(x, y, z) = 0$ с точкой M_0 (*а*)
и касательной плоскостью (*б*)

Перейдем к иллюстрации первого утверждения теоремы. Построим сферу небольшого радиуса с центром в точке M_0, применив инструмент «Сфера по центру и радиусу». Эта сфера иллюстрирует окрестность *U* точки M_0. Выделим часть сферы $F(x, y, z) = 0$, оказавшуюся внутри *U*: $S = \{(x; y; z) \mid F(x, y, z) = 0\} \cap U$; эта часть сферы *S* показана на рисунке 2, *а*. Через произвольную точку *A*, принадлежащую *S*, проведем прямую, параллельную оси *Oz* (инструмент «Параллельная прямая»). Перемещая точку *A* с помощью мыши в пределах *S*, покажем, что вертикальная прямая всякий раз пересекает *S* лишь в одной точке *A*. Для студентов можно подчеркнуть, что таким образом упорядоченному набору координат (*x;y*) из проекции *S* на плоскость *Oxy* (граница проекции также указана на рисунке 2, *а*) ставится в соответствие *единственное* значение *z*, при котором точка с координатами (x, y, z) является точкой пересечения указанной вертикальной прямой и *S*. Студенты при этом должны вспомнить определение ФМП и ее области определения. Таким образом демонстрируется первое утверждение теоремы. Второе утверждение иллюстрируется тем же изображением.

Весьма полезной функцией приложения GeoGebra является возможность одновременного перемещения связанных между собой геометрических объектов. Так, при перемещении точки M_0 по поверхности $F(x, y, z) = 0$ одновременно перемещаются соответствующим образом и касательная плоскость, и сфера U. Динамически изменяя при этом радиус сферы U, можно показывать, что до тех пор, пока точка M_0 не сместилась в плоскость Oxy, всегда можно подобрать радиус сферы U так, что S будет пересечена прямой, параллельной Oz, только в одной точке. Ситуация принципиально изменится лишь при перемещении точки M_0 в плоскость Oxy, где нарушается условие $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (рисунок 2, *б*). При этом целесообразно показать студентам, что при таком положении касательной плоскости, как бы ни был выбран радиус сферы U, обязательно найдется вертикальная прямая, которая пересечет часть поверхности нулевого уровня S уже в двух точках A и A_1; таким образом, однозначно задать ФМП уже нельзя.

а) *б*)

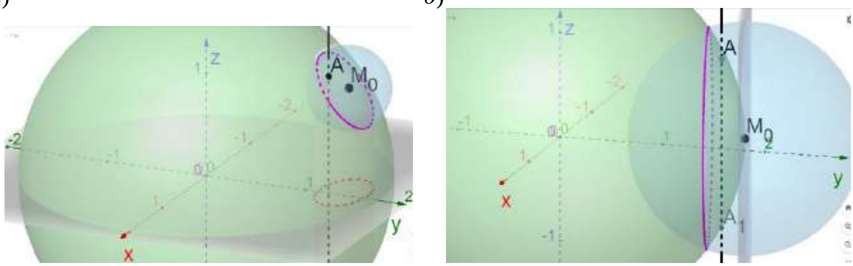

Рисунок 2 – Иллюстрация первых двух утверждений теоремы (*а*)
и следствия нарушения третьего условия (*б*)

После иллюстрации указанной теоремы, сформулированной для неявной функции двух переменных, можно перейти к ее обобщению на случай произвольного числа переменных, а также дать формулировку теоремы о задании неявной функции одной переменной. Хорошим упражнением для студентов будет создание геометрической интерпретации последней теоремы на плоскости по аналогии с представленной им объемной интерпретацией.

Список литературы

1 What is GeoGebra? // Geogebra Official Cite.– URL: https://www.geogebra.org/about (date of access: 25.08.2025).

2 **Фихтенгольц, Г. М.** Основы математического анализа. В 2 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – 6 изд., стереотип. – М. : Наука, 1968. – 464 с.