Список литературы

1 **Арнольд, В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2000. – 32 с.

2 **Власюк, Т. А.** Железнодорожный пассажирский транспорт в территориальной структуре городов-центров и их спутников в Республике Беларусь (ретроспекивный анализ и перспектива развития) : монография / Т. А. Власюк. – Гомель : БелГУТ, 2020. – 230 с.

УДК 51:378.147

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА В ГЕОМЕТРИИ

А. М. ГАЛЬМАК, О. А. ШЕНДРИКОВА, И. В. ЮРЧЕНКО
Белорусский государственный университет
пищевых и химических технологий, г. Могилев

В пособиях и задачниках по высшей математике [1–9], а также на практических занятиях по высшей математике в учреждении высшего образования первый замечательный предел используется, как правило, только при нахождении других пределов, в которых присутствуют тригонометрические функции, т. е. рассматриваются задачи, не выходящие за рамки раздела «Пределы». Область применения первого замечательного предела можно расширить за счёт геометрии, используя его для нахождения длин, площадей и объёмов. Проиллюстрируем сказанное на примере нахождения длины окружности и площади круга.

Нам понадобится определение по Гейне предела функции $f(x)$, определённой в некоторой проколотой окрестности точки a. Согласно этому определению, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для любой последовательности точек α_n ($\alpha_n \neq a$), сходящейся к a ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$), последовательность точек $f(\alpha_n)$ сходится к A ($\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = A$). Применив это определение к первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}=1 \qquad (1)$$

для любой последовательности точек α_n, сходящейся к 0 ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$).

Например, подставив в (1) последовательность точек $\alpha_n = \frac{1}{n}$, получим формулу

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = 1 \tag{2}$$

первого замечательного предела для дискретной переменной.

Формулы (1) и (2), т. е. первый замечательный предел для дискретной переменной, в учебной литературе, в том числе и в перечисленной выше, практически отсутствуют, в отличие от второго замечательного предела, который в учебной литературе всегда представлен и для непрерывной и для дискретной переменных. Справедливости ради, заметим, что в редких случаях первый замечательный предел для дискретной переменной встречается в некоторых учебниках для студентов-математиков (см., например, [10]).

Заметим, что определение предела по Гейне можно было применить к эквивалентной форме $\lim\limits_{t\to\infty} t \cdot \sin\frac{1}{t} = 1$ первого замечательного предела.

В этом случае получится формула

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n \sin\frac{1}{\beta_n} = 1 \tag{3}$$

для любой бесконечно большой последовательности точек β_n ($\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$).

Ясно, что формулы (1) и (3) эквивалентны, так как величины α_n и β_n являются взаимно обратными. Предел (2) может быть получен подстановкой в (3) последовательности точек $\beta_n = n$.

Если в окружность последовательно вписывать правильный треугольник, квадрат, …, правильный n-угольник, то в предельном случае при $n \to \infty$ получим окружность (рисунок 1).

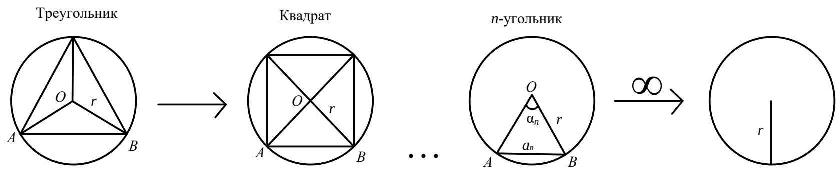

Рисунок 1

Поэтому

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{4}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n, \tag{5}$$

где S и S_n соответственно площадь круга и площадь правильного n-угольника, l и l_n соответственно длина окружности и периметр правильного n-угольника.

Правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса r, состоит из n равновеликих равнобедренных треугольников с общей вершиной в центре O окружности и боковыми сторонами, являющимися её радиусами. На рисунке 1 показан один из таких треугольников с боковыми сторонами OA и OB, основанием длины a_n и углом α_n при вершине.

Площадь круга. Так как $S_n = nS_{\Delta OAB}$, то из (4) следует

$$S = \lim_{n\to\infty} nS_{\Delta OAB}. \tag{6}$$

Для нахождения площади треугольника OAB воспользуемся «школьной» формулой

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\, OA\cdot OB \sin\alpha_n.$$

А так как $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, $OA = OB = r$, то

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}. \tag{7}$$

Подставив полученную формулу в (6) и применив (1) для последовательности точек $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, сходящейся к 0, получим

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} nr^2 \sin\frac{2\pi}{n} = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2\cdot 1 = \pi r^2.$$

Таким образом, доказана формула $S = \pi r^2$ площади круга.

Длина окружности. Так как $l_n = na_n$, то из (5) следует

$$l = \lim_{n\to\infty} na_n, \tag{8}$$

где a_n определяется «школьной» формулой $a_n = 2r\sin\dfrac{\pi}{n}$. Подставив полученную формулу в (8) и применив (1) для последовательности точек $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}$, сходящейся к 0, получим

$$l = \lim_{n\to\infty} 2nr\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi r \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r\cdot 1 = 2\pi r.$$

Таким образом, доказана формула $l = 2\pi r$ длины окружности.

Приведённые примеры нахождения длины окружности и площади круга с помощью первого замечательного предела и аналогичные примеры нахождения площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса, а также объёмов цилиндра и конуса позволяют расширить круг рассматриваемых при изучении темы «Первый замечательный предел» задач, который традиционно ограничивается задачами на раскрытие разного вида неопределённостей, содержащих тригонометрические функции, и сводящихся к неопределённости вида $\frac{0}{0}$. Нахождение длин, площадей и объёмов с использованием первого замечательного предела расширяет область его применения и он может быть востребован при проведении разного рода дополнительных занятий, а также при проведении управляемой самостоятельной работы.

Список литературы

1 **Герасимович, А. И.** Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 287 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 221 с.

3 Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский, В. П. Домашов, В. К. Кравцов, А. П. Сильванович. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 349 с.

4 **Гусак, А. А.** Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / А. А. Гусак. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – 247 с.

5 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 304 с.

6 **Каплан, И. А.** Практические занятия по высшей математике. В 5 ч. Ч. II / И. А. Каплан. – Харьков : Вища школа, 1973. – 368 с.

7 **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : АСТ : Астрель, 2007. – 558 с.

8 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – 304 с.

9 Сборник типовых расчётов по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / под ред. В. В. Миносцева. – М. : МГИУ, 2007. – 548 с.

10 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 607 с.