3 Заключительные замечания

1 По существу ССРЗ есть не что иное, как методика построения связных пар, а это – основная часть метода связных пар (МСП) [2, с.17–23].

2 Идеи, высказанные в настоящей работе, достаточно тесно переплетается с концепциями, развитыми в [3, см., например, с. 105–108]. Ведь на процесс поиска решения задачи можно смотреть с позиции теории управления (в частности, теории принятия решений) в условиях той или иной степени неопределенности.

Список литературы

1 **Великович, Л. Л.** Некоторые новые категории и результаты теории решения задач / Л. Л. Великович // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 18 апр. 2024 г. / М-во транспорта и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. гос. ун-т трансп.; под ред Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2024. – С. 76–80.

2 **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

3 Теоретическая инноватика : учеб. и практикум для вузов / И. А. Брусакова, В. Л. Горохов, В. А. Дрещинский [и др.]; под ред. И. А. Брусаковой. – М. : Юрайт, 2025. – 333 с. – (Высшее образование).

УДК 378.147:517.9

РЕШЕНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Т. А. ВЛАСЮК, И. И. СОСНОВСКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Одним из важных разделов курса высшей математики является раздел «Дифференциальные уравнения и их системы». Важность этого раздела в том, то многие процессы в физике, технике, экономике приводят в конечном итоге к дифференциальным уравнениям и их системам. Решение задач на практических занятиях по этой теме, на наш взгляд, должно предполагать тематику, которая соответствует специальности обучающегося. Это позволит мотивировать студента к изучению данной темы, а также даст необходимые умения и навыки в моделировании процессов, изучаемых в рамках конкретной специализации.

Одна из интересных моделей для использования систем дифференциальных уравнений изложена в работе Арнольда В. И. [1]. Создадим простейшую «жесткую» модель на основе следующих предположений: в прямоугольной системе координат в первой четверти координаты каждой точки соответствуют количеству перевезенных пассажиров на двух видах транспорта $x_1(t)$ и $x_2(t)$ за единицу времени [2]. Пусть также a_1 – пропускная способность первого вида транспорта, а a_2 – пропускная способность второго вида транспорта. Предположим, что на первом виде транспорте может быть перевезено за единицу времени некоторое количество пассажиров второго вида транспорта и, наоборот, на втором виде транспорта может быть перевезено некоторое количество пассажиров первого вида транспорта, т. е. имеем классическую модель Ланкастера. Модель будет представлять систему нормальных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -a_2 x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -a_1 x_1(t). \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет точное неявное решение

$$\frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = \frac{a_2 x_2(t)}{a_1 x_1(t)}, \;\; a_1 x_1(t) dx_1(t) - a_2 x_2(t) dx_2(t) = 0,$$

$$\frac{ax_1^2(t)}{2} - \frac{bx_2^2(t)}{2} = C_1, \;\; a_1 x_1^2(t) - a_2 x_2^2(t) = C, C = 2C_1.$$

Имеем множество гипербол вида

$$\frac{x_1^2(t)}{\frac{C}{a_1}} - \frac{x_2^2(t)}{\frac{C}{a_2}} = 1\,. \tag{2}$$

Асимптоты гипербол: $x_2 = \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot x_1$.

При фиксированных значениях a_1, a_2 и произвольной постоянной C графическая интерпретация модели представлена на рисунке 1. Если начальная точка (x_1, x_2) лежит ниже асимптоты ($C > 0$), то гипербола пересекает ось Ox_1, следовательно, количество пассажиров, перевезенных железнодорожным транспортом, уменьшается до 0. Если же начальная точка (x_1, x_2) лежит выше асимптоты ($C < 0$), то гипербола пересекает ось Ox_2, и количество пассажиров, перевезенных автомобильным транспортом, уменьшается до 0.

$a_1 := 0.4 \quad a_2 := 0.3 \qquad C1 := 3 \qquad C2 := -3$

$$x2_1(t) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot t^2 - C1}{a_2}} \quad x2_2(t) := \sqrt{\frac{a_1 \cdot t^2 - C2}{a_2}} \quad x2_{асимптота}(t) := \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \cdot t$$

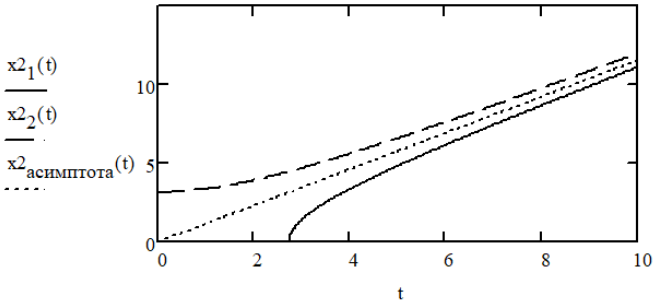

Рисунок 1

Система (1) имеет и точное решение:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-\sqrt{a_1 a_2} \cdot t} + C_2 e^{\sqrt{a_1 a_2} \cdot t}, \\ x_2(t) = C_1 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{-\sqrt{a_1 a_2} \cdot t} - C_2 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{\sqrt{a_1 a_2} \cdot t}. \end{cases}$$

Найдем частное решение системы (1) с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \;\; x_2(t_0) = x_{20}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{10} = C_1 e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} + C_2 e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0}, \\ x_{20} = C_1 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} - C_2 \sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}} \cdot e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0}. \end{cases}$$

Следовательно

$$C_1 = \frac{1}{2} e^{\sqrt{a_1 a_2} t_0} \left(x_{10} + \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \cdot x_{20} \right), \;\; C_2 = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{a_1 a_2} t_0} \left(x_{10} - \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \cdot x_{20} \right).$$

Предложенная задача может быть рассмотрена в разных вариациях на практических занятиях, в качестве примера на лекции и на лабораторным практикуме с использованием MathCad.

Список литературы

1 **Арнольд, В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2000. – 32 с.

2 **Власюк, Т. А.** Железнодорожный пассажирский транспорт в территориальной структуре городов-центров и их спутников в Республике Беларусь (ретроспекивный анализ и перспектива развития) : монография / Т. А. Власюк. – Гомель : БелГУТ, 2020. – 230 с.

УДК 51:378.147

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА В ГЕОМЕТРИИ

А. М. ГАЛЬМАК, О. А. ШЕНДРИКОВА, И. В. ЮРЧЕНКО
Белорусский государственный университет
пищевых и химических технологий, г. Могилев

В пособиях и задачниках по высшей математике [1–9], а также на практических занятиях по высшей математике в учреждении высшего образования первый замечательный предел используется, как правило, только при нахождении других пределов, в которых присутствуют тригонометрические функции, т. е. рассматриваются задачи, не выходящие за рамки раздела «Пределы». Область применения первого замечательного предела можно расширить за счёт геометрии, используя его для нахождения длин, площадей и объёмов. Проиллюстрируем сказанное на примере нахождения длины окружности и площади круга.

Нам понадобится определение по Гейне предела функции $f(x)$, определённой в некоторой проколотой окрестности точки a. Согласно этому определению, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любой последовательности точек α_n ($\alpha_n \neq a$), сходящейся к a ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$), последовательность точек $f(\alpha_n)$ сходится к A ($\lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = A$). Применив это определение к первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1 \tag{1}$$