

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА, ГЕОТЕХНИКА
И СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ»

Э. И. Старовойтов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Утверждено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов учреждений высшего образования
по техническим специальностям*

Гомель 2025

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121
С77

Рецензенты: заведующий кафедрой механики д-р физ.-мат. наук, профессор *О. Н. Шабловский* (ГГТУ им. П. О. Сухого); кафедра теоретической механики и механики материалов (и. о. зав кафедрой – ст. преп. *А. В. Савицкая*; профессор кафедры д-р физ.-мат. наук, профессор *Ю. В. Василевич*) (БНТУ)

Старовойтов, Э. И.

С77 Сопротивление материалов : учеб. / Э. И. Старовойтов ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 396 с.

ISBN 978-985-891-196-6

Соответствует традиционной программе курса сопротивления материалов в технических вузах. Излагаются следующие разделы: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, геометрические характеристики, изгиб, сложное сопротивление, теории напряженного и деформированного состояний, теории прочности, перемещения, устойчивость, динамические нагрузки, прочность при циклических напряжениях, контактная задача. Предложены тестовые задания по всем разделам. Рассмотрены методы и приведены примеры решения задач.

Для студентов, магистрантов и аспирантов.

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121

ISBN 978-985-891-196-6

© Старовойтов Э. И., 2025
© Оформление. БелГУТ, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Введение в сопротивление материалов	7
1.1 Основные понятия сопротивления материалов	7
1.2 Гипотезы и допущения сопротивления материалов	10
1.3 Внешние силы. Внутренние усилия в стержнях	13
1.4 Напряжения в точке тела	16
1.5 Перемещения и деформации	17
1.6 Опоры. Расчетная схема сооружения	19
1.7 Статически определимые и статически неопределимые системы	22
1.8 Построение эпюр внутренних силовых факторов	24
1.9 Примеры построения эпюр	27
2 Растяжение и сжатие прямого бруса	37
2.1 Внутренние силы и напряжения	37
2.2 Деформации	38
2.3 Закон Гука при растяжении-сжатии	39
2.4 Перемещения при растяжении-сжатии	40
2.5 Дифференциальное соотношение при растяжении-сжатии	41
2.6 Потенциальная энергия деформации	48
2.7 Напряжения на наклонных площадках	49
2.8 Механические испытания материалов	50
2.9 Диаграммы растяжения	52
2.10 Упругие и пластические деформации	55
2.11 Диаграммы сжатия	56
2.12 Механические характеристики материалов	58
2.13 Инженерные методы расчета на прочность. Расчет по допускаемым напряжениям	60
2.14 Расчет по допускаемым нагрузкам	61
2.15 Расчет по предельным состояниям	63
2.16 Расчеты стержней при растяжении-сжатии	65
2.17 Влияние температуры и радиации на механические характеристики материалов	70
2.18 Вязкоупругие свойства материалов	72
3 Сдвиг. Кручение	75
3.1 Чистый сдвиг	75
3.2 Расчет соединений, работающих на сдвиг	77
3.3 Кручение стержня круглого поперечного сечения	79
3.4 Связь касательных напряжений и крутящего момента	81
3.5 Перемещения. Потенциальная энергия деформации	83
3.6 Геометрические характеристики сечений при кручении	84
3.7 Расчеты на прочность и жесткость при кручении	85
3.8 Кручение стержней некруглого поперечного сечения	86
4 Геометрические характеристики плоских сечений	89
4.1 Статические моменты и центр тяжести сечения	89
4.2 Моменты инерции сечения	91
4.3 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат	93

4.4	Изменение моментов инерции при повороте осей координат	95
4.5	Главные оси и главные моменты инерции	96
4.6	Геометрические характеристики простейших фигур	98
5	Прямой изгиб	103
5.1	Внутренние усилия при изгибе	103
5.2	Закон Гука при чистом изгибе	106
5.3	Нормальные напряжения при чистом изгибе	108
5.4	Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе	111
5.5	Напряжения при поперечном изгибе	112
5.6	Распределение напряжений по прямоугольному и двутавровому сечениям	116
5.7	Касательные напряжения при изгибе тонкостенных стержней	118
5.8	Расчеты на прочность при изгибе	121
5.9	Расчет балок с учетом развития пластических деформаций	123
5.10	Дифференциальное уравнение упругой линии балки	126
5.11	Определение перемещений при изгибе	128
5.12	Примеры расчета балок при прямом изгибе	131
5.13	Балка на упругом основании	138
5.14	Изгиб бруса большой кривизны. Закон Гука	141
5.15	Нормальные напряжения в кривом брус	143
5.16	Радиус кривизны нейтрального слоя	145
6	Сложное сопротивление	147
6.1	Косой изгиб	147
6.2	Изгиб с растяжением (сжатием)	151
6.3	Внецентренное растяжение (сжатие)	154
7	Напряженно-деформированное состояние в точке деформируемого тела	159
7.1	Напряженное состояние в точке	159
7.2	Напряжения на произвольной площадке	160
7.3	Главные оси и главные значения тензора напряжений	162
7.4	Вычисление главных значений тензора напряжений	164
7.5	Напряжения на октаэдрических площадках	166
7.6	Плоское напряженное состояние	169
7.7	Деформированное состояние в точке	171
7.8	Обобщенный закон Гука	173
7.9	Объемная деформация	174
7.10	Полная потенциальная энергия деформации	175
7.11	Потенциальные энергии изменения объема и формы	176
8	Теории прочности и разрушения	177
8.1	Прочность при сложном напряженном состоянии	177
8.2	Теория максимальных нормальных напряжений (первая теория прочности).	180
8.3	Теория максимальных линейных деформаций (вторая теория прочности)	181
8.4	Теория максимальных касательных напряжений Треска – Сен-Венана (третья теория прочности)	182

8.5 Энергетическая теория Хубера – Мизеса – Хенки (четвертая теория прочности)	183
8.6 Теория предельных состояний Мора (пятая теория прочности)	185
8.7 Теории разрушений	186
8.8 Расчет пространственного бруса	190
8.9 Изгиб с кручением стержней круглого сечения	202
9 Перемещения в стержневых системах	209
9.1 Потенциальная энергия стержневой системы	209
9.2 Теорема Кастилиано	213
9.3 Интеграл Мора	214
9.4 Техника вычисления интеграла Мора	217
9.5 Теоремы о взаимности работ и перемещений	221
9.6 Статическая неопределимость	222
9.7 Расчет статически неопределимых систем методом сил	225
10 Устойчивость сжатых стержней	239
10.1 Понятие об устойчивости	239
10.2 Задача Эйлера	241
10.3 Зависимость критической силы от условий закрепления стержня	243
10.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности	245
10.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость	248
10.6 Продольно-поперечный изгиб	257
10.7 Изгибающий момент при продольно-поперечном изгибе	259
10.8 Приближенный метод решения задач при продольно-поперечном изгибе	259
10.9 Допускаемая нагрузка при продольно-поперечном изгибе	261
10.10 Энергетический метод определения критических нагрузок	262
11 Расчеты при некоторых динамических нагрузках	265
11.1 Удар	265
11.2 Удар по массивной упругой системе. Продольный удар	267
11.3 Свободные колебания систем с одной степенью свободы	272
11.4 Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы	275
11.5 Рассеяние энергии при колебаниях	279
11.6 Вынужденные колебания с учетом сопротивления среды	281
11.7 Резонансные кривые	283
11.8 Крутильные колебания вала с одной степенью свободы	285
12 Прочность при циклических напряжениях	287
12.1 Усталость материалов. Характеристики циклов напряжений	287
12.2 Кривые усталости. Предел выносливости материалов	291
12.3 Диаграмма предельных амплитуд	293
12.4 Концентрация напряжений	295
12.5 Масштабный эффект. Коэффициент качества обработки поверхности	297
12.6 Коэффициент запаса при циклических нагружениях	299
12.7 Понятие о малоцикловой усталости материалов	300

13 Контактные напряжения	303
13.1 Общие сведения	303
13.2 Сжатие шаров	305
13.3 Сжатие цилиндров	306
13.4 Общий случай контакта двух тел	308
13.5 Проверка прочности при контактном взаимодействии	310
14 Тестовые задания	313
14.1 Введение в сопротивление материалов. Растяжение, сжатие и кручение стержней	313
14.2 Геометрические характеристики плоских сечений. Изгиб	323
14.3 Сложное сопротивление. Напряженное и деформированное состояние. Теории прочности и разрушения	334
14.4 Перемещения в стержневых системах. Устойчивость сжатых стержней	341
14.5 Динамика. Циклические напряжения. Контактная задача	347
Приложение А. Основные буквенные обозначения	360
Приложение Б. Справочные материалы	362
Приложение В. Сортамент прокатной стали	375
Список литературы	385
Именной указатель	387
Предметный указатель	388
Contents list	394
English annotation	397

ОТ АВТОРА

Содержание книги основано на лекционных курсах «Сопротивление материалов» и «Механика материалов», которые автор и его коллеги в течение ряда лет читали для студентов строительных и механических специальностей Белорусского государственного университета транспорта. Учебник в достаточной мере отражает и теоретический материал, и весь комплекс задач, соответствующих расчетно-графическим работам. Для закрепления знаний в процессе обучения разработаны и приведены тестовые задания. Список литературы [1–41] лишь указывает на источники, которые в той или иной мере были использованы. В предлагаемом издании учебника учтены замечания и пожелания преподавателей и студентов по предыдущим изданиям, расширено количество примеров и более подробно описано их решение.

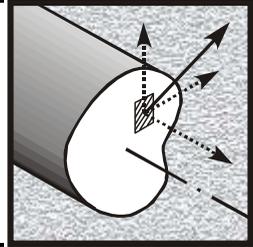
В своей работе автор во многом опирался на труды и идеи своих университетских учителей: Алексея Антоновича Ильюшина (1911–1998), Виктора Васильевича Москвитина (1923–1983), Анатолия Герасимовича Горшкова (1941–2006), памяти которых и посвящена эта книга.

Автор будет благодарен всем читателям за замечания любого характера (edstar0@yandex.by).

Гомель, лето 2025

1

ВВЕДЕНИЕ В СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ



Сопротивление материалов является одним из разделов механики деформируемого твердого тела. Это исключительно важная техническая дисциплина, необходимая для инженеров любой специальности. Без фундаментальных знаний в этой области невозможно создать различного рода машины и механизмы, промышленные и гражданские сооружения, мосты, линии электропередач, антенны, ангары, корабли, самолеты, агрегаты атомных станций, ракетной и реактивной техники и др.

1.1 Основные понятия сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это инженерная наука о методах расчета наиболее распространенных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при одновременном удовлетворении требований надежности и экономичности.

Прочность – способность материала или конструкции воспринимать внешние воздействия (нагрузки, температурные перепады, просадки грунтов и т. п.), не разрушаясь и не претерпевая беспрепятственного деформирования.

Жесткость – способность конструктивных элементов деформироваться при внешнем воздействии без существенного изменения геометрических размеров.

Устойчивость – способность элементов конструкций сохранять под нагрузкой первоначальную форму и положение равновесия.

Надежной считается конструкция, которая сохраняет свою эксплуатационную способность (прочность, жесткость, устойчивость) в течение заранее предусмотренного промежутка времени.

Сопротивление материалов позволяет установить в каждом конкретном случае оптимальные размеры элементов, при которых надежность обеспечивается без лишних запасов, удовлетворяя экономическую сторону проблемы.

Основной задачей сопротивления материалов является создание практически удобных простых приемов расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций – стержней. Эта задача решается с использованием теоретических гипотез и экспери-

ментальных данных, имеющих одинаково большое значение. Широко используются различные приближенные методы и результаты, полученные более строгими методами теории упругости.

Связь с другими науками. В теоретической части сопротивление материалов базируется на *математике* и *теоретической механике*, в экспериментальной – на *физике* и *материаловедении*.

Теоретическая механика изучает равновесие и движение абсолютно твердых тел. Поэтому постановка вопроса о расчете на прочность в ее рамках лишена смысла: в самой терминологии заложена идея неразрушимости и отсутствия каких бы то ни было деформаций. Так как все твердые тела в той или иной степени деформируемы, сопротивление материалов можно рассматривать как следующий шаг после теоретической механики на пути приближения к расчету реальных конструкций и сооружений.

Поведение деформируемых твердых тел под нагрузкой изучается *математической теорией упругости*, *теорией пластичности*, *теорией вязкоупругости*, но с других позиций и в более строгой математической постановке. Результаты, полученные этими науками, в сопротивлении материалов используются для дальнейших теоретических и практических исследований, при принятии упрощающих гипотез.

Расчетный аппарат сопротивления материалов широко используется в курсах *статики сооружений* и специальных дисциплинах, связанных с проектированием *деталей машин*, *строительных конструкций*, *мостов и дорог*. Эта наука позволяет правильно понимать работу сооружения в реальных условиях. Библиография по ней обширна, здесь указаны лишь книги [1–34], использованные автором в процессе работы над рукописью.

Развитие сопротивления материалов как науки. Наиболее ранние из опытов по изучению прочностных свойств материалов были поставлены Леонардо да Винчи¹⁾, однако его работы не были опубликованы и остались для его современников неизвестными.

Начало исследований сопротивления твердых тел разрушению связывают обычно с именем знаменитого итальянского ученого Галилео Галилея²⁾, который в 1638 г. предложил решения некоторых важных задач динамики. Хотя он и не владел законом, связывающим перемещения и силы, но его работы указали путь, по которому пошли исследователи в дальнейшем.

¹⁾ *Леонардо да Винчи* (Leonardo da Vinci) (1452–1519) – великий итальянский живописец, скульптор, архитектор, ученый, инженер, изобретатель.

²⁾ *Галилей* Галилео (Galileo Galilei) (1564–1642) – итальянский физик, математик и астроном, один из основателей современной механики, выдвинул идею об относительности движения, установил законы инерции, первым исследовал прочность балок.

Открытие закона Гука¹⁾ в 1660 г. и вывод общих уравнений Навье²⁾ в 1821 г. – важные вехи в дальнейшем развитии сопротивления материалов. Закон Гука дал необходимое обоснование теории. Общие уравнения позволили свести к математическим вычислениям проблемы, относящиеся к малым деформациям упругих тел.

Развитию науки о сопротивлении материалов в XVIII веке способствовали успехи высшей математики и механики, особенно большое значение имели работы Эйлера³⁾, посвященные в основном упругой линии и колебаниям тонких брусьев.

Бурный рост промышленности в XIX веке, внедрение паровых машин, строительство железных дорог, мостов, каналов, больших судов и крупных зданий вызвали быстрое развитие науки о прочности. В России важные исследования в этой области провели Д. И. Журавский, Н. Е. Жуковский, М. Е. Головин, Ф. С. Ясинский, В. А. Кирпичев, И. Г. Бубнов. Во второй половине XIX века лаборатория по изучению механических свойств материалов, созданная П. И. Собко и Н. А. Белелюбским в Петербургском институте инженеров путей сообщения, являлась одной из лучших в Европе.

В XX веке большой вклад в науку о прочности внесли Н. М. Беляев, В. В. Болотин, В. З. Власов, Б. Г. Галеркин, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, А. В. Дарков, А. А. Ильюшин, А. Ю. Ишлинский, А. Н. Крылов, В. В. Москвитин, Н. И. Мухелишвили, В. В. Новожилов, П. Ф. Папкович, Б. Е. Победря, Ю. Н. Работнов, Х. А. Рахматуллин, Л. И. Седов, С. В. Серенсен, В. В. Соколовский, В. И. Соколовский, С. П. Тимошенко, В. И. Феодосьев и др.

Методы расчета в сопротивлении материалов не остаются постоянными. Они изменяются вместе с возникновением новых задач и новых требований практики. При их применении успех определяет не столько сложный математический аппарат, сколько умение вникать в существо исследуемой проблемы, нахождение наиболее удачного упрощающего предположения и доведение расчета до конкретного числового результата.

¹⁾ Гук Роберт (R. Hooke) (1635–1703) – английский разносторонний ученый и экспериментатор. С работами Гука в области теории упругости связано его замечательное изобретение – замена в хронометрах маятника, использующего силу тяжести, спиральной пружиной. Он открыл свой закон в 1660 г., но забота о правах патента на изобретение задержала опубликование до 1676 г. Независимо от Гука закон был сформулирован в 1680 г. *Е. Мариоттом* (E. Mariotte) (1620–1684).

²⁾ Навье Луи Мари Анри (L. Navier) (1785–1836) – французский математик и механик, основоположник теории упругости. Впервые ввел понятие напряжения. Издал первый курс сопротивления материалов (1826).

³⁾ Эйлер Леонард (L. Euler) (1707–1783) – род. в Швейцарии, внес фундаментальный вклад в развитие математики, механики, физики и астрономии, в 1731–1766 гг. работал в России, член Петербургской академии наук, автор более чем 850 работ, включая два десятка фундаментальных монографий.

1.2 Гипотезы и допущения сопротивления материалов

Расчет конструкций и их элементов с учетом всего многообразия физико-механических свойств реальных материалов является или теоретически невозможным, или практически неприемлемым по своей сложности. Поэтому, отказываясь от принятой в теоретической механике *модели абсолютно твердого тела*, в сопротивлении материалов приходится вводить свою *модель идеализированного деформируемого тела*.

Для этого необходимо принять ряд гипотез и допущений относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций.

1 Гипотеза сплошности и однородности: материал представляет собой однородную сплошную среду; свойства материала во всех точках тела одинаковы и не зависят от размеров тела.

Сплошная среда – это такая среда, которая непрерывно (без пустот) заполняет отведенный ей объем. Свойство непрерывности позволяет использовать в расчетах методы анализа бесконечно малых величин (дифференциальное и интегральное исчисление).

Предположение об однородности позволяет отвлечься от структурных особенностей материала и считать, что любой объем, выделенный из тела (конструкции), воспринимает часть общей нагрузки, исходящейся на все тело. Это обеспечивает единообразный подход к различным по микроструктуре телам и позволяет изучать механические свойства элементов конструкций на образцах сравнительно малых размеров.

У основных конструкционных материалов – металлов – степень однородности весьма высока. Другие материалы, например, бетон, композитные материалы, дерево, обладают меньшей степенью однородности. Но размеры элементов, выполненных из этих материалов, велики по сравнению с размерами зерен или волокон, составляющих их структуру. В большинстве случаев расчеты, основанные на гипотезе сплошности и однородности, дают хорошие результаты.

2 Гипотеза об изотропности материала: физико-механические свойства материала одинаковы по всем направлениям.

Если из изотропного материала выделить куб, его свойства не будут зависеть от того, как именно был ориентирован этот куб по отношению ко всему остальному материалу. Хотя кристаллы, из которых состоят металлы, анизотропны, их хаотическое расположение дает возможность считать макрообъемы металлов изотропными. В некоторых случаях эта гипотеза неприменима. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, армированные материалы и волокнистые полимеры, свойства которых существенно различны при работе вдоль и поперек волокон.

3 *Гипотеза об идеальной упругости материала*: тело способно восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию (снятия нагрузки, температурных, электромагнитных и других полей).

Деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки, называются *упругими* в отличие от *пластических*, или *остаточных*, которые не исчезают при разгрузке.

В большинстве задач сопротивления материалов среда условно считается абсолютно упругой. В действительности же реальные тела пусть в малой степени, но обнаруживают отступление от идеальной упругости. При больших нагрузках отступление становится столь существенным, что сплошная среда должна наделяться свойствами упругопластического материала.

Гипотеза об идеальной упругости позволяет не учитывать малые остаточные деформации, неизбежно присутствующие в реальных материалах.

4 *Гипотеза (допущение) о малости деформаций*: деформации в точках тела считаются настолько малыми, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу.

Эта гипотеза позволяет вести расчеты по *недеформированной схеме*, т. е. при составлении уравнений равновесия конструкцию рассматривают как недеформируемое тело, имеющее после нагружения те же геометрические размеры, что и до нагружения. Такой подход позволяет пренебречь изменениями в расположении внешних сил при деформировании реального тела. Малые относительные деформации рассматриваются как бесконечно малые величины.

5 *Допущение о справедливости закона Гука*: перемещения точек конструкции в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения.

Системы, подчиняющиеся такой закономерности, называются *линейно деформируемыми*. Для них будет справедливым следующий принцип.

6 *Принцип независимости действия сил* (суперпозиции): результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения.

Этот принцип позволяет сложную задачу разбивать на ряд простых, решать их, а затем полученные результаты суммировать. Он является основным при решении подавляющего большинства задач сопротивления материалов, но в отдельных случаях, если несправедливо хотя бы одно из трех предыдущих допущений, он неприменим.

7 *Гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли¹⁾): поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации (рисунок 1.1).

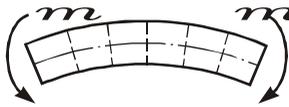


Рисунок 1.1

приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации (рисунок 1.1).

Использование этой гипотезы позволяет существенно упростить математическую сторону решаемых задач.

8 *Принцип Сен-Венана*²⁾: в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки.

Если внешние силы приложены к торцу бруса и к тому же равномерно распределены по его площади (рисунок 1.2, а), гипотеза плоских сечений выполняется строго. Если к концу стержня приложены сосредоточенные силы (рисунок 1.2, б), то сечения перестают быть плоскими (*депланируются*). Однако многочисленные опыты и теоретические исследования показывают, что на сравнительно небольшом удалении от торца (порядка высоты сечения стержня) сечения остаются плоскими.

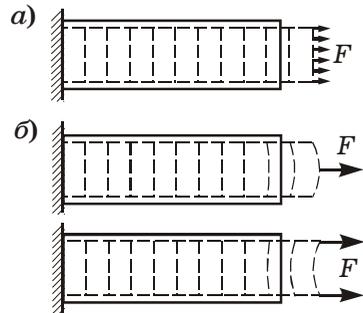


Рисунок 1.2

Этот принцип во многих случаях позволяет существенно упрощать граничные условия задачи, заменяя реальную нагрузку ее статическим эквивалентом (*равнодействующей системой сил*).

Принятые гипотезы и допущения позволяют избегать математических сложностей при выполнении ряда инженерных расчетов. Они являются в сопротивлении материалов основополагающими, но не исчерпывают всевозможных приемов идеализации свойств материала и характера деформирования изучаемых объектов. В дальнейшем при рассмотрении конкретных теоретических вопросов будут вводиться и другие упрощения, позволяющие доводить инженерный расчет до числа.

¹⁾ *Бернулли* Якоб-старший (J. Bernoulli) (1654–1705) – швейцарский математик, принадлежавший к талантливой семье, которая дала науке несколько выдающихся ученых. Иностранец почетный член Петербургской академии наук. (Родоначальник семьи был выходцем из Голландии).

²⁾ *Барре де Сен-Венан* Адемар Жан Клод (B. Saint-Venant) (1797–1886) – французский ученый в области механики. Заложил основы теории пластичности. Принцип сформулировал в 1855 г.

1.3 Внешние силы. Внутренние усилия в стержнях

Под *стержнем* понимается тело, длина которого много больше его поперечных размеров. *Осевая линия* стержня является геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений. Многие сложные конструкции составлены из стержней.

Стержень, работающий на изгиб, часто называют *брусом* или *балкой*. С точки зрения расчетов на прочность балкой является не только строительный элемент, но и вал, болт, ось железнодорожного вагона, зуб шестерни и т. д. В сопротивлении материалов рассматриваются только стержневые системы.

Внешние силы. Для характеристики взаимодействия стержня с окружающими телами вводятся внешние силы. Все внешние силовые воздействия будем называть *нагрузками*.

По способу приложения нагрузки могут быть объемными и поверхностными. *Объемные силы* непрерывно распределены по всему объему тела и приложены к каждой его частице. К ним, например, относятся силы веса (гравитационные силы), инерции, электромагнитного притяжения.

Поверхностные нагрузки (силы) приложены к участкам поверхности и характеризуют контактное взаимодействие с другими телами (твердыми, жидкими или газообразными). К ним относятся: давление жидкости или газа на стенки сосуда, снеговая или ветровая нагрузка и т. п. Поверхностные нагрузки могут быть *сосредоточенными* (приложенными в точке) и *распределенными* по длине (*погонные силы*) или по площади.

Следует заметить, что погонные и сосредоточенные силы реально не существуют. Они представляют собой статический эквивалент нагрузок, распределенных по вытянутой или малой площади, объему.

По характеру изменения в процессе приложения различают нагрузки статические, динамические и повторно-переменные.

Статические нагрузки не изменяются со временем или меняются настолько медленно, что вызываемые ими ускорения и силы инерции пренебрежимо малы (например, снеговая нагрузка).

Динамические нагрузки изменяют свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени, вызывая большие ускорения и силы инерции. Динамическое воздействие более опасно, чем статическое, и неучет его характера действия может привести к катастрофическим последствиям.

Работа внешних сил, действующих на твердое тело, преобразуется в потенциальную и кинетическую энергию. При статическом нагружении кинетическая энергия пренебрежимо мала. При динамическом воздействии кинетическая энергия системы соизмерима с потенциальной.

Повторно-переменные нагрузки многократно (до нескольких миллионов раз) изменяют со временем свое значение или значение и знак. Разрушение материала под действием таких нагрузок называется *усталостным* (например, разрушение куска проволоки от многократного перегибания).

По продолжительности действия различают постоянные и временные нагрузки. *Постоянные нагрузки* действуют непрерывно в течение всего срока службы сооружения, не меняя ни величины, ни направления (например, собственный вес). *Временные нагрузки* действуют на протяжении отдельных периодов эксплуатации объекта (нагрузки от оборудования, температурные, монтажные воздействия и т. д.).

Внутренние силы. При отсутствии внешних воздействий связность тела обусловлена силами взаимодействия атомов. Внешние силы стремятся вызвать деформирование тела путем изменения межатомных расстояний, взаимного расположения атомов и сил их взаимодействия. Однако если бы механика деформируемого твердого тела пыталась изучать силы, действующие на каждый атом в отдельности, пользоваться ее аппаратом было бы весьма сложно.

Поэтому сопротивление материалов рассматривает поведение *макробъемов* материала, которые позволяют считать материал сплошным и однородным (см. подразд. 1.2). Сплошное однородное тело не имеет в своем составе взаимодействующих частиц, его целостность обеспечивают *внутренние связи*. Из теоретической механики известна *аксиома связей*: равновесие тела сохранится, если действие связей, закрепляющих тело в пространстве, заменить их реакциями.

Пусть на тело (стержень) действует система взаимно уравновешенных внешних сил (рисунок 1.3, а). Применяя аксиому связей к деформируемому телу, можно мысленно рассечь его произвольной плоскостью, отделить одну часть от другой и взамен нарушенных связей приложить к каждой части силы, равные усилиям связей (рисунок 1.3, б). Такие силы называются *внутренними*. Они *непрерывно* распределяются по образовавшемуся сечению вследствие допущения о сплошности материала.

Внутренние силы в стержне определяют *методом сечений*:

- мысленно *рассекают* стержень в интересующем месте плоскостью;
- *отбрасывают* одну из образовавшихся частей, в результате чего нарушается равновесие оставшейся части;
- *заменяют* действие отброшенной части на оставшуюся внутренними усилиями;
- *составляют уравнения равновесия* всех сил, приложенных к оставшейся части.

При этом имеют в виду, что внутренние силы могут быть приведены к центру тяжести сечения C и заменены главным вектором \bar{R} и главным моментом \bar{M} (рисунок 1.3, в).

Полученные статические эквиваленты внутренних сил в сечении раскладываются в декартовой системе координат следующим образом (рисунок 1.3, г):

$$\bar{R} = \{Q_x, Q_y, N\}; \quad \bar{M} = \{M_x, M_y, M_z\}.$$

Здесь ось z перпендикулярна поперечному сечению, т. е. совпадает с осью стержня; оси x, y лежат в плоскости поперечного сечения.

Компоненты внутренних усилий носят следующие названия:

- N – продольная сила;
- Q_x, Q_y – поперечные силы;
- M_z – крутящий момент;
- M_x, M_y – изгибающие моменты.

В зависимости от наличия тех или иных внутренних факторов в поперечных сечениях судят о виде деформации.

Возможны следующие *простые виды деформирования стержней*:

- только $N \neq 0$ – центральное растяжение (сжатие);
- только $M_z \neq 0$ – кручение;
- только $M_x \neq 0$ (или $M_y \neq 0$) – прямой чистый изгиб;
- только $M_x \neq 0$ и $Q_y \neq 0$ (или $M_y \neq 0$ и $Q_x \neq 0$) – поперечный изгиб.

Выделяют также *сложные виды деформирования стержней*:

- $M_x \neq 0$ и $M_y \neq 0$ – косоугольный изгиб;
- $N \neq 0, M_x \neq 0, M_y \neq 0$ (один из M_x, M_y может отсутствовать) – изгиб с растяжением (сжатием);
- $M_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$ (один из M_x, M_y может отсутствовать) – изгиб с кручением.

Таким образом, разложение главного вектора и главного момента на составляющие имеет не формальный, а четко выраженный физический смысл. Применение метода сечений для определения внутренних усилий проиллюстрировано на примерах в подразд. 1.9.

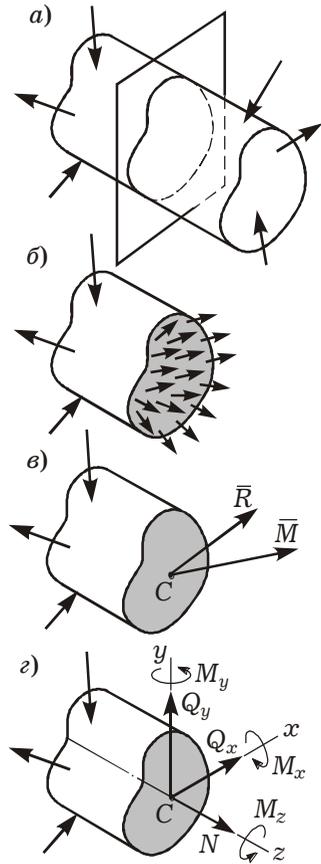


Рисунок 1.3

1.4 Напряжения в точке тела

Определение внутренних сил в сечениях элемента конструкции необходимо для оценки его прочности. Однако сосредоточенные усилия, найденные методом сечений, являются лишь равнодействующими внутренних сил, которые распределены по рассматриваемому сечению. Чтобы судить о прочности, необходимо знать *наибольшие* силы, возникающие в отдельных точках сечения.

Понятие о напряжениях. Выделим вокруг произвольной точки сечения A площадку ΔA (рисунок 1.4, а), $\underline{\Delta \bar{R}}$ равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим $\underline{\Delta \bar{R}}$. Отношение

$$\bar{p}_m = \underline{\Delta \bar{R}} / \Delta A$$

представляет собой *среднее напряжение* на указанной площадке. При уменьшении размеров площадки (стягивании ее в данную точку) в пределе получается *напряжение в точке* рассматриваемого сечения

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta \bar{R}}}{\Delta A}.$$

Вектор \bar{p} называют *полным напряжением* в рассматриваемой точке сечения. Эта величина является мерой интенсивности внутренних сил.

В Международной системе единиц (СИ) для измерения напряжений принимается *паскаль*; $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Однако эта единица мала, и в практических расчетах используют мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$).

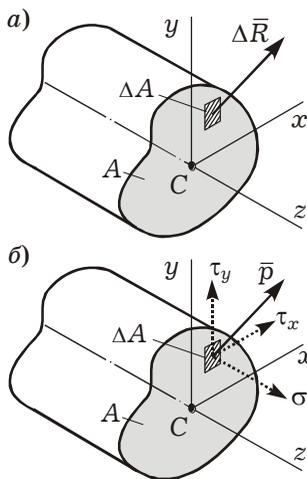


Рисунок 1.4

Через любую точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных в пространстве сечений (площадок). Возникающие на них напряжения также различны. Таким образом, если для силы достаточно указать ее значение, направление и точку приложения, то для напряжения необходимо еще указать и положение площадки, на которой оно определяется.

Нормальные и касательные напряжения. Вектор напряжения \bar{p} можно разложить по введенным ранее осям координат на *нормальное напряжение* σ , перпендикулярное к сечению, и два *касательных напряжения* τ_x , τ_y , лежащих в плоскости сечения (рисунок 1.4, б):

$$\bar{p} = \{\tau_x, \tau_y, \sigma\}.$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что нормальные и касательные напряжения влияют на прочность материала по-разному. Нормальные напряжения препятствуют отрыву одной части элемента от другой или их взаимному прижатию. Касательные напряжения препятствуют взаимному сдвигу. Поэтому в дальнейшем необходимо всегда *раздельно* рассматривать составляющие вектора напряжений.

Совокупность всех напряжений, которые действуют по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, образуют *напряженное состояние* в этой точке. Оно, как будет показано в разд. 7, определяется шестью компонентами и является одним из наиболее важных понятий в сопротивлении материалов.

Связь напряжений с внутренними усилиями. Введенные ранее внутренние силы и моменты являются статическим эквивалентом напряжений, действующих по всему сечению. Их связь мы получим, суммируя по всей площади сечения элементарные силы (σdA , $\tau_x dA$, $\tau_y dA$) или вычисляя моменты этих сил относительно осей координат (рисунок 1.5):

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA; \\
 Q_x &= \int_A \tau_x dA; \quad Q_y = \int_A \tau_y dA; \\
 M_x &= \int_A \sigma y dA; \quad M_y = \int_A \sigma x dA; \\
 M_z &= \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA. \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

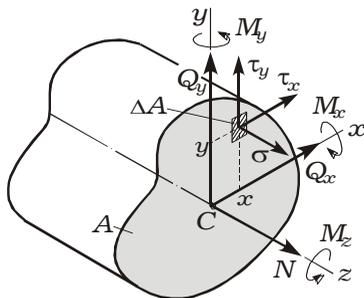


Рисунок 1.5

Выражения (1.1) для практических расчетов непосредственно использовать нельзя, т. к. закон распределения напряжений по сечению неизвестен. Если закон распределения σ и τ по сечению установлен, то по формулам (1.1) можно найти и сами напряжения.

1.5 Перемещения и деформации

Ни один из существующих в природе материалов не является абсолютно твердым. Под действием внешних сил все тела в большей или меньшей мере меняют свою форму (деформируются). Точки тела меняют свое положение в пространстве.

Перемещения. Вектор, исходящий из начального положения произвольной точки тела в недеформированном состоянии и оканчивающийся в новом положении этой точки после деформации тела, называется *вектором полного перемещения* точки.

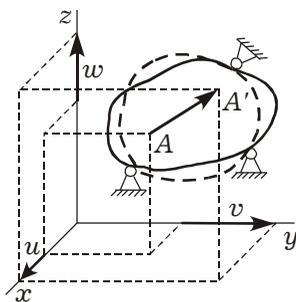


Рисунок 1.6

Его проекции на оси координат x , y , z носят название перемещений по осям. На рисунке 1.6 они обозначены u , v , w .

Как правило, в сопротивлении материалов изучаются кинематически (геометрически) неизменяемые системы, т. е. не допускающие перемещение тела в пространстве как жесткого целого. В этом случае u , v и w для большинства рассматриваемых систем являются малыми по сравнению с геометрическими размерами тела.

Деформации. Для того, чтобы характеризовать интенсивность изменения формы и размеров, рассмотрим точки A и B недеформированного тела, расположенные друг от друга на малом расстоянии s (рисунок 1.7). Пусть в результате изменения формы тела отрезок AB занял положение $A'B'$, и его длина изменилась на Δs .

Отношение приращения длины отрезка Δs к его начальной длине s назовем *средним относительным удлинением* на отрезке s :

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta s}{s}.$$

Уменьшая отрезок, в пределе получим

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s}.$$

Величина ε_{AB} называется *линейной деформацией* в точке A по направлению отрезка AB . Деформации в направлении координатных осей обозначаются ε_x , ε_y , ε_z . Они являются безразмерными величинами, иногда их измеряют в процентах по отношению к первоначальной длине элементарного отрезка. Для конструктивных материалов упругие деформации материала лежат в пределах долей процента.

Кроме линейной, вводится понятие *угловой деформации*. Для этого рассмотрим прямой угол COD в недеформированном теле (см. рисунок 1.7). После приложения нагрузки этот угол изменится и займет положение $C'O'D'$. Предел разности углов

$$\gamma_{COD} = \lim_{\substack{OC \rightarrow 0 \\ OD \rightarrow 0}} (COD - C'O'D')$$

называется *угловой деформацией*, или *углом сдвига*, в точке O в плоскости COD . В координатных плоскостях углы сдвига обозначаются через γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} .

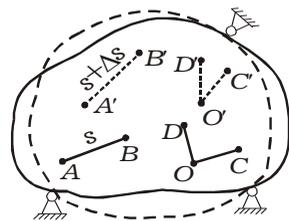


Рисунок 1.7

Совокупность линейных деформаций по различным направлениям и угловых деформаций в различных плоскостях для одной точки характеризуют *деформированное состояние* в точке тела. Оно определяется шестью независимыми величинами (см. разд. 7).

1.6 Опоры. Расчетная схема сооружения

Характеристики опорных связей. Устройство, соединяющее брус или стержневую систему с основанием и налагающее ограничения на его перемещения, называется *опорой*. Все встречающиеся в практике опоры представляют собой пространственные конструкции. В случаях, когда система является плоской, составляющие опорных реакций лежат в этой же плоскости.

Рассмотрим основные типы моделей опор, используемые для прикрепления плоских сооружений к основанию.

Шарнирно-подвижная опора показана на рисунке 1.8. Силами трения на поверхностях цилиндрического шарнира и катков обычно пренебрегают. Расчетные схемы такой опоры приведены внизу рисунка. Реактивная сила R направлена вдоль оси опорного стерженька или перпендикулярно к опорной плоскости.

Шарнирно-неподвижная опора (рисунок 1.9) отличается от подвижной тем, что нижний балансир жестко скреплен с основанием. Ее расчетная схема обычно принимается в виде двух непараллельных опорных стержней. Точка пересечения осевых линий этих стержней образует фиктивный шарнир, поэтому при выборе расчетной схемы можно изображать шарнир. В этой опоре может возникнуть реактивная сила R любого направления, проходящая через центр шарнира. Ее можно разложить на две составляющие X и Y по заданным направлениям.

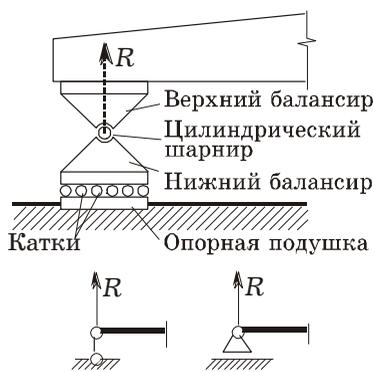


Рисунок 1.8

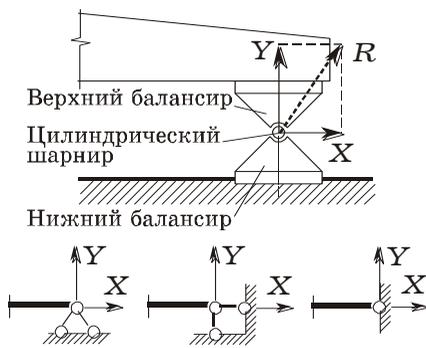


Рисунок 1.9

Жесткая заделка (защемляющая неподвижная опора) выполняется путем плотного защемления опорной части конструкции (рисунок 1.10). Расчетная схема опоры может быть представлена тремя стержнями. Для того, чтобы заделку можно было считать абсолютно жесткой, расстояние a должно быть очень малым, или брус на участке длиной a надо рассматривать как бесконечно жесткий. В жесткой заделке может возникать реактивная сила произвольного направления, проходящая через любую точку. Эту силу можно разложить на три составляющие: две силы X и Y по заданным направлениям и момент M .

Скользкая заделка (защемляющая подвижная опора) показана на рисунке 1.11. Расчетная схема обычно выбирается в виде двух параллельных стержней. Опорная реакция R вертикальна, точка ее приложения в общем случае неизвестна. При расчетах реакцию заменяют сосредоточенной силой Y и моментом M .

Отметим, что число стержней в схематическом изображении любой опоры всегда равняется числу параметров (связей), определяющих полную реакцию этой опоры.

Все рассмотренные выше опорные устройства содержат только жесткие опорные связи.

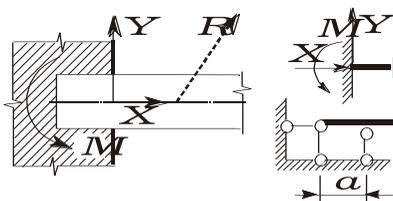


Рисунок 1.10

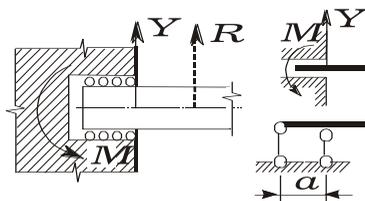


Рисунок 1.11

Упруго-податливые (упругие) опоры включают опорные связи, допускающие перемещения по направлению этих связей. Их обычно изображают в виде пружин (рисунок 1.12). Примеры подобных опор: длинные колонны, на которые опирается неразрезная балка; понтоны, служащие опорами наплавного моста. Реакция R направлена вдоль опорной связи.

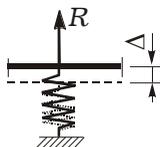


Рисунок 1.12

В сопротивлении материалов принимается, что опорная реакция R и вертикальное перемещение опоры пропорциональны:

$$R = K\Delta \text{ (или } \Delta = cR),$$

где K — коэффициент жесткости опоры, Н/м;
 c — коэффициент податливости опоры, м/Н.

Понятие о расчетной схеме. Расчет реального элемента сооружения с точным учетом всех особенностей является сложной и

практически неразрешимой задачей. Сопротивление материалов изучает лишь его прочностные и деформационные свойства. Для этого бывает достаточно рассмотреть упрощенную схему элемента, с некоторой точностью отражающую ее действительную работу.

Расчетная схема – упрощенное изображение элемента и его опор или всей конструкции, учитывающее только основные факторы, определяющие их поведение под нагрузкой.

При составлении расчетной схемы сооружения используются следующие *принципы*:

- стержни заменяются осевыми линиями (рисунок 1.13);
- нагрузки с поверхности стержней переносятся на оси, при этом силовая плоскость будет совпадать с плоскостью рисунка;
- реальные опорные устройства и связи между элементами заменяются их моделями (см. рисунки 1.8–1.12);
- поперечные сечения стержней независимо от их формы характеризуются численными значениями площадей и моментов инерции (см. разд. 4).

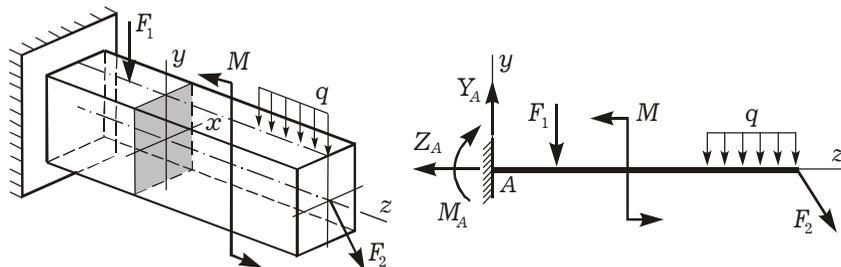


Рисунок 1.13

Расчетные схемы балок. Балки характеризуются тем, что в горизонтальных системах при действии вертикальной нагрузки в опорах возникают только вертикальные реакции.

Балка, показанная на рисунке 1.14, а, называется *простой*, однопролетной или двухопорной, а расстояние l между опорами – *длиной пролета*.

Консолью называется балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор, или часть балки, свешивающаяся за опоры. Балки, имеющие свешивающиеся части, называются *консольными* (рисунок 1.14, б).

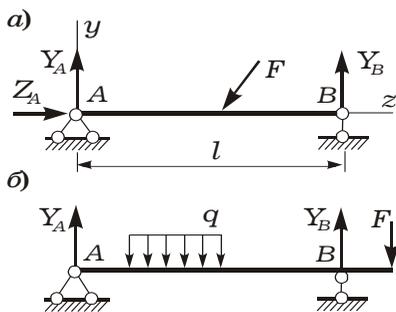


Рисунок 1.14

Стержневые системы. Под *стержневой системой* в широком смысле слова понимается всякая конструкция, состоящая из стержней.

Фермой называется стержневая система, состоящая из прямых стержней, соединенных шарнирами. Если внешняя нагрузка приложена в узлах, элементы фермы работают на центральное растяжение-сжатие.

Рама – стержневая система с жестким соединением прямолинейных элементов во всех или некоторых узлах. Стержни рамы работают на изгиб с растяжением (сжатием) или кручение. Вертикально расположенные стержни рамы принято называть *стойками*, горизонтальные – *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней.

У плоской стержневой системы оси всех составляющих элементов, а также все внешние силы, включая и реакции опор, расположены в одной плоскости. Эта плоскость называется *силовой*.

1.7 Статически определимые и статически неопределимые системы

Статическая определимость. Как известно из курса теоретической механики, для плоской системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия: либо два уравнения проекций сил на координатные оси и одно уравнение моментов сил относительно произвольной точки, либо одно уравнение проекций сил и два уравнения моментов относительно двух произвольных центров.

Статически определимыми называются такие системы, для которых все реакции связей и внутренние силы можно определить из статических уравнений равновесия. Очевидно, что балки, изображенные на рисунках 1.13, 1.14, статически определимы.

На рисунке 1.15, *а* изображена статически определимая консоль. В заделке возникают три реакции, для определения которых можно составить три независимых уравнения равновесия.

Балки на рисунке 1.15, *б, в* являются статически неопределимыми. Поставив в сечениях *E* и *F* шарниры (рисунок 1.15, *г*), получим статически определимую балку, так как каждый промежуточный шарнир к трем уравнениям статики прибавляет одно дополнительное уравнение равенства нулю суммы моментов всех сил, расположенных по одну сторону от него.

Статически неопределимыми называются системы, у которых для вычисления всех реакций связей и внутренних усилий уравнений статики недостаточно. Под *n раз статически неопределимой* системой понимается такая, в которой число связей превышает число независимых уравнений статики на *n* единиц.

Для расчета статически неопределимых систем необходимо составить дополнительные n уравнений исходя из особенностей геометрических связей, наложенных на систему и условно называемых *уравнениями совместности перемещений*.

Примеры расчета статически неопределимых стержневых систем на растяжение и сжатие приведены в разд. 2.

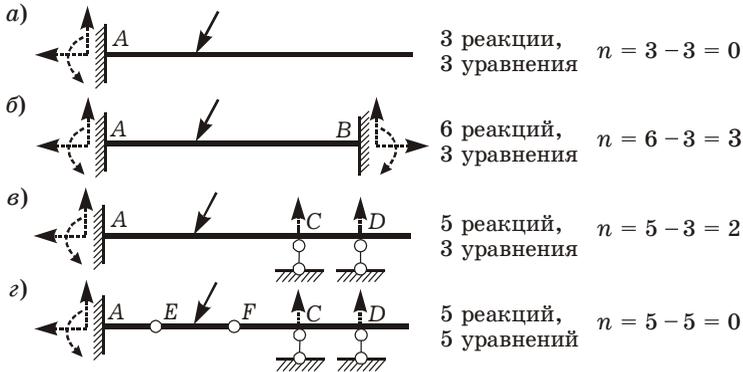


Рисунок 1.15

Свойства систем. Отметим основные свойства *статически определимых систем*:

- все реакции связей и внутренние усилия можно определить из уравнений статики;
- усилия в элементах не зависят от размеров поперечных сечений элементов и свойств материала;
- каждой конкретной нагрузке соответствуют конечные и вполне определенные значения внутренних усилий (свойство единственности решения).

Статически неопределимые системы обладают следующими основными свойствами:

- для определения реакций связей и внутренних усилий, кроме уравнений статики, необходимо использовать уравнения совместности перемещений;
- внутренние усилия зависят не только от внешних сил, но и от соотношений размеров поперечных сечений и характеристик материалов отдельных элементов;
- температурные воздействия, смещение опор или неточность сборки конструкции вызывают в статически неопределимых системах появление дополнительных усилий.

1.8 Построение эпюр внутренних силовых факторов

Под *эпюрой* внутреннего усилия будем в дальнейшем понимать график изменения этой величины вдоль оси стержня. Рассмотрим методики построения эпюр для случая плоской системы сил.

Правила введения внутренних усилий. Сформулируем правила, по которым вводятся внутренние усилия в методе сечений.



Рисунок 1.16

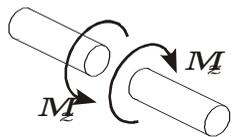


Рисунок 1.17

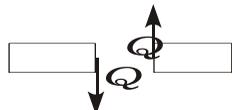


Рисунок 1.18

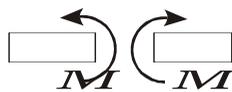


Рисунок 1.19

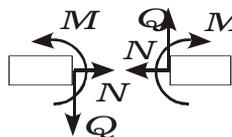


Рисунок 1.20

Продольная сила N направляется от сечения в сторону отброшенной части (рисунок 1.16). В этом случае значение $N > 0$ соответствует растяжению, $N < 0$ – сжатию.

Крутящий момент M_z направляется против часовой стрелки, если смотреть на сечение со стороны отброшенной части (рисунок 1.17).

Поперечная сила Q направляется так, чтобы она вращала оставленную часть стержня по часовой стрелке (рисунок 1.18).

На эпюрах N , M_z , Q положительные значения откладываются сверху от оси стержня, отрицательные – снизу.

Изгибающий момент M прикладывается к сечению так, чтобы верхние волокна балки испытывали сжатие, а нижние – растяжение (рисунок 1.19).

Для многих строительных материалов растяжение опаснее сжатия, поэтому эпюру изгибающих моментов M будем строить *на растянутом волокне*. Для этого отрицательные значения моментов будем откладывать сверху оси стержня, положительные – снизу.

Плоская задача. В поперечных сечениях стержней плоской системы в общем случае возникает три внутренних силовых фактора: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M (рисунок 1.20).

Порядок построения эпюр. При построении эпюр используется метод сечений (см. подразд. 1.3). Стержень рассекается воображаемой плоскостью, перпендикулярной его оси, мысленно отбрасывается одна из образовавшихся частей, а действие ее на оставшуюся заменяется неизвестными внутренними усилиями, в соответствии с принятыми выше правилами. Далее составляются уравнения равновесия оставшейся части, из которых определяются значения внутренних усилий. Если усилия получились отрицательными, то их направления противоположны выбранным ранее.

Параллельно оси стержня проводится *базисная линия* (ось эпюры), перпендикулярно ей в выбранном масштабе откладываются найденные значения усилий, полученные точки соединяются, указываются алгебраические знаки. Построенная таким образом эпюра заштриховывается линиями, перпендикулярными оси. По этим линиям можно судить о значениях внутренних усилий в соответствующих сечениях стержня.

Графическое оформление эпюры: ось – рекомендуется выполнять сплошной основной линией толщиной $s = 0,5 \dots 1,4$ мм, саму эпюру – сплошной линией толщиной $2s$. Штриховка и выносные линии должны быть тонкими, толщиной от $s/3$ до $s/2$.

Основные правила построения эпюр. Предположим, что построена эпюра какого-то силового фактора (рисунок 1.21). Если мысленно двигаться по ней слева направо, то в некоторых точках придется сделать «скачок» вверх или вниз. Зная, какими должны быть скачки, можно проверять и даже строить эпюры.

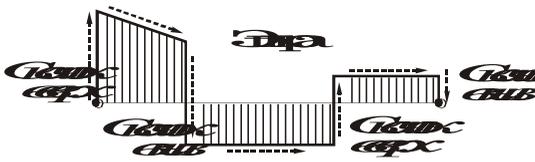


Рисунок 1.21

Для эпюр внутренних усилий справедливы следующие правила:

- эпюра *продольных сил* N имеет *скачки* в тех сечениях, где приложены внешние сосредоточенные продольные силы; величина скачка равна величине силы; скачок происходит вниз, если внешняя сила направлена вправо, вверх – если влево (рисунок 1.22);
- эпюра *крутящих моментов* M_z имеет *скачки* в тех сечениях, где приложены внешние крутящие моменты; величина скачка совпадает с величиной внешнего момента; скачок происходит вниз, если момент направлен против часовой стрелки, вверх – если по часовой стрелке; при этом необходимо смотреть на стержень с правого торца (рисунок 1.23);

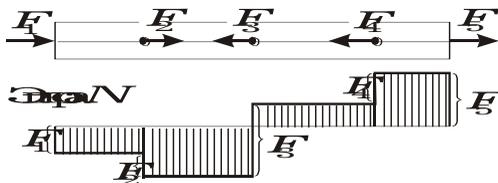


Рисунок 1.22

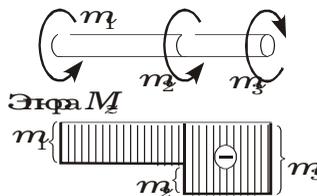


Рисунок 1.23

- эпюра *поперечных сил* Q имеет *скачки* в тех сечениях, где приложены внешние сосредоточенные силы; направление и величина скачка совпадают с направлением и величиной внешней силы (рисунок 1.24);

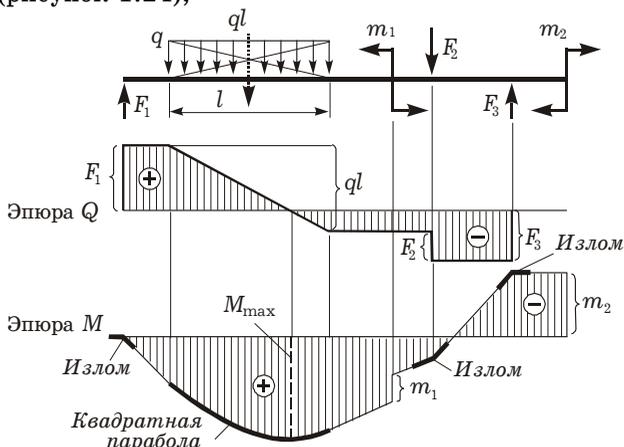


Рисунок 1.24

- эпюра *поперечных сил* Q_y имеет *перепад* на величину равнодействующей равномерно распределенной нагрузки на участке, где приложена эта нагрузка (см. рисунок 1.24);
- эпюра *изгибающих моментов* M имеет *скачки* в тех сечениях, в которых приложены внешние моменты; величина скачка совпадает с величиной момента; если внешний момент положителен (направлен против часовой стрелки), то происходит скачок вверх, если отрицателен (направлен по часовой стрелке) – вниз;
- эпюра *изгибающих моментов* M имеет *изломы* в тех сечениях, в которых приложены сосредоточенные поперечные силы; направление излома совпадает с направлением поперечной силы (см. рисунок 1.24);
- если на участке балки поперечная сила положительна ($Q_y > 0$), то изгибающий момент M_x на этом участке *возрастает*; при $Q_y < 0$ момент M_x *убывает*; если в некотором сечении $Q_y = 0$, то эпюра M_x может иметь здесь *экстремум*;
- если на всём участке балки поперечная сила Q_y равна нулю, то эпюра изгибающих моментов M_x *постоянна*; если эпюра Q_y постоянна, то эпюра M_x *изменяется линейно*; если эпюра Q_y линейна, то эпюра M_x *ограничена параболой*, направленной выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки.

Последние три правила следуют из *дифференциальных соотношений* между изгибающим моментом M_x , поперечной силой Q_y и

интенсивностью равномерно распределенной нагрузки q (см. подразд. 5.1):

$$q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Рассмотренные правила позволяют упростить и алгоритмировать построение эпюр внутренних усилий. При этом вычисляются значения только на границах участков и в точках экстремумов, а между ними проводятся линии по изложенным правилам.

1.9 Примеры построения эпюр

☑ **ПРИМЕР 1.1.** Стержень (рисунок 1.25) нагружен вдоль оси внешними силами $F_1 = 40$ кН; $F_2 = 70$ кН; $F_3 = 130$ кН. Требуется: определить реакцию в заделке; построить эпюру внутренних продольных сил N .

Определение опорной реакции. Все внешние силы действуют по оси стержня, поэтому реакцию в заделке также направляем вдоль оси. Ее величину находим из условия равновесия стержня:

$$F - F_3 + F_2 - F_1 = 0; \quad F = F_3 - F_2 + F_1 = 130 - 70 + 40 = 100 \text{ кН}.$$

Построение эпюры N . В поперечных сечениях стержня будет возникать только продольная сила N . Такой вид деформирования называется *центральной растяжкой-сжатием*. Проводим осевую линию эпюры N , положительные значения (растяжение) будем откладывать сверху, отрицательные (сжатие) – снизу.

Разбиваем стержень на характерные участки; границами служат сечения, в которых приложены силы. Внутри участков (I, II, III) внешних сил нет, поэтому продольная сила на каждом участке будет постоянной.

Участок I. Мысленно проводим произвольное поперечное сечение. Отбрасываем правую часть (более нагруженную). Силу N_1 вводим в сторону отброшенной части (см. рисунок 1.25). Проецируем все силы оставшейся части на горизонтальную ось и находим искомую силу N_1 :

$$F + N_1 = 0, \Rightarrow$$

$$N_1 = -F = -100 \text{ кН}.$$

Откладываем в выбранном масштабе эту величину на эпюре, строим график на первом участке (постоянен, так как внутри участка нагрузок нет) и проводим штриховку перпендикулярно оси.

Участок II. На втором участке поступаем аналогично:

$$F - F_3 + N_2 = 0, \Rightarrow$$

$$N_2 = F_3 - F = 130 - 100 = 30 \text{ кН}.$$

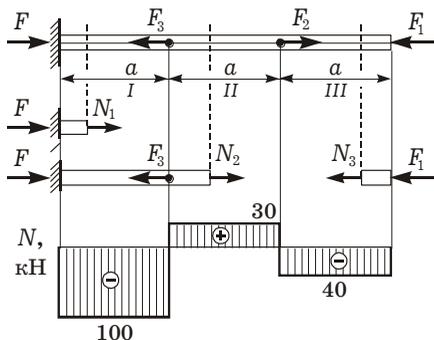


Рисунок 1.25

Участок III. На третьем участке отбрасываем левую часть:

$$-N_3 - F_1 = 0, \Rightarrow N_3 = -F_1 = -40 \text{ кН.}$$

Соответствующие числовые значения указываем на эпюре.

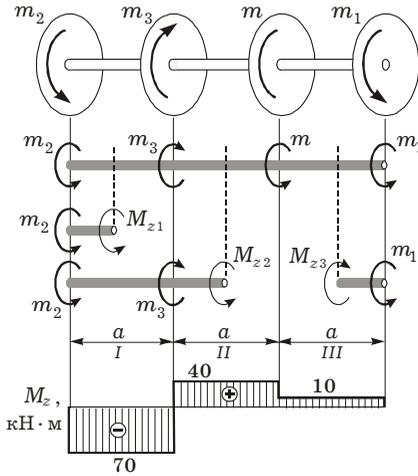


Рисунок 1.26

✓ **ПРИМЕР 1.2.** На вал (рисунок 1.26) насажены четыре шкива; на них действуют внешние крутящие моменты:

$m_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $m_2 = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $m_3 = 110 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Требуется: определить величину неизвестного крутящего момента m ; построить эпюру внутренних крутящих моментов M_z .

Определение неизвестного момента. Изображаем расчетную схему стержня. Момент m направляем против часовой стрелки, если смотреть с правого торца стержня. Составляем уравнение моментов относительно оси стержня, из которого находим величину m :

$$m_2 - m_3 + m + m_1 = 0, \Rightarrow$$

$$m = m_3 - m_2 - m_1 = 110 - 70 - 10 = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Момент положителен, значит, его направление было выбрано правильно, иначе его направление на схеме нужно поменять на противоположное, а в данные внести с положительным знаком.

Построение эпюры крутящих моментов. Разбиваем стержень на участки, границами которых служат сечения с внешними моментами.

Участок I. Рассекаем стержень на этом участке, отбрасываем правую часть (более нагруженную). Согласно принятому правилу (см. рисунок 1.17) вводим момент M_{z1} . Составляем уравнение равновесия оставшейся части, из которого определяем искомый момент:

$$m_2 + M_{z1} = 0. \Rightarrow M_{z1} = -m_2 = -70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II. $m_2 - m_3 + M_{z2} = 0, M_{z2} = m_3 - m_2 = 110 - 70 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок III. $m_1 - M_{z3} = 0, \Rightarrow M_{z3} = m_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

В соответствии с полученными результатами строим эпюру крутящих моментов и проводим штриховку перпендикулярно оси стержня.

✓ **ПРИМЕР 1.3.** Консоль, у которой $a = 1 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 2 \text{ м}$ (рисунок 1.27), нагружена вертикальной нагрузкой $F = 8 \text{ кН}$; $m = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 10 \text{ кН/м}$. Требуется: построить эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов.

Построение эпюр. Чтобы не определять опорные реакции, применяя метод сечений, всегда будем отбрасывать ту часть балки (правую), в

которой находится заделка. Балка работает на *поперечный изгиб*. При заданной вертикальной нагрузке в ее сечениях будут возникать поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_x . Нижние индексы x, y в дальнейшем для простоты писать не будем.

Разбиваем балку на три характерных участка (I, II, III), границами служат сечения с сосредоточенными внешними силами или моментами. Координату z будем отсчитывать от начала соответствующего участка. На эпюре моментов отрицательные значения будем откладывать сверху, положительные – снизу. В результате эпюра моментов будет построена *на растянутом волокне*.

Участок I. Проводим сечение на расстоянии z_1 от начала участка, отбрасываем правую часть и вводим внутренние усилия Q_1 и M_1 в соответствии с принятыми правилами. Составляем уравнения равновесия сил и моментов (относительно сечения) оставшейся части:

$$-Q_1 - F = 0, \quad M_1 + Fz_1 = 0,$$

отсюда

$$Q_1 = -F = -8 \text{ кН}, \quad M_1 + Fz_1 = 0.$$

Поперечная сила на первом участке *постоянна*, изгибающий момент *изменяется линейно*. На границах участка

$$M_1|_{z_1=0} = 0; \quad M_1|_{z_1=a} = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II. Проводим сечение на расстоянии z_2 от начала второго участка, отбрасываем правую часть и вводим внутренние усилия Q_2 и M_2 . Так как на втором участке балки внешних сил не добавляется, то по прежнему $Q_2 = -8 \text{ кН}$. Для моментов получаем

$$M_2 + F(a + z_2) + m = 0, \quad \Rightarrow \quad M_2 = -F(a + z_2) - m.$$

Поперечная сила на участке *постоянна*, изгибающий момент *изменяется по линейному закону*. На границах участка

$$M_2|_{z_2=0} = -m - Fa = -12 - 8 \cdot 1 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

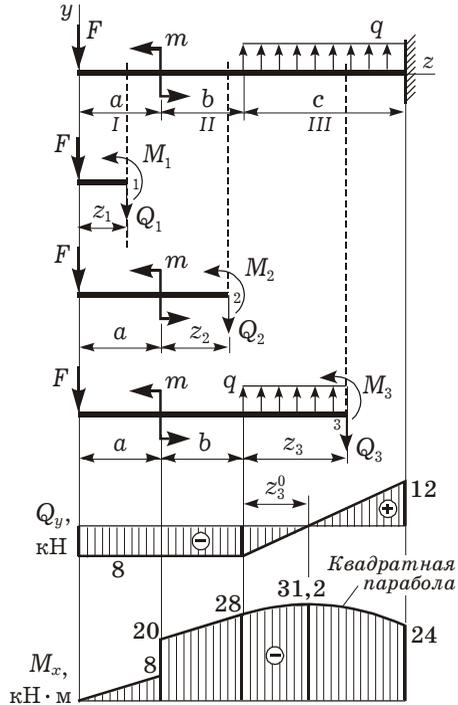


Рисунок 1.27

$$M_2 \Big|_{z_2=b} = -m - F(a+b) = -12 - 8(1+1) = -28 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III. Проводим сечение на расстоянии z_3 от начала участка, отбрасываем правую часть и вводим внутренние усилия Q_3 и M_3 . Условие равновесия сил:

$$-Q_3 - F + qz_3 = 0, \Rightarrow Q_3 = -F + qz_3.$$

Поперечная сила Q_3 изменяется вдоль участка *линейно*. На границах

$$Q_3 \Big|_{z_3=0} = -F = -8 \text{ кН}, \Rightarrow Q_3 \Big|_{z_3=c} = -F + qc = -8 + 10 \cdot 2 = 12 \text{ кН}.$$

Условие равновесия моментов:

$$M_3 + F(a+b+z_3) + m - qz_3^2 / 2 = 0, \Rightarrow$$

$$M_3 = -m - F(a+b+z_3) + qz_3^2 / 2,$$

т. е. аналитическое выражение для изгибающих моментов на данном участке описывает *квадратную параболу*. На границах участка

$$M_3 \Big|_{z_3=0} = -m - F(a+b) = -12 - 8(1+1) = -28 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_3 \Big|_{z_3=c} = -m - F(a+b+c) + \frac{qc^2}{2} = -12 - 8(1+1+2) + 10 \cdot 2^2 / 2 = -24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра представляет собой параболу, направленную выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки – вверх.

Вычисление экстремума на эпюре моментов. На участке III эпюра поперечных сил пересекает ось, следовательно, в этом сечении изгибающий момент будет экстремален. Используя выражение для поперечной силы Q_3 , определим координату z_3^0 , такую, что $Q_3(z_3^0) = 0$:

$$0 = -F + qz_3^0, \Rightarrow z_3^0 = F / q = 8 / 10 = 0,8 \text{ м}.$$

Вычислим значение момента в сечении с координатой $z_3 = z_3^0$:

$$\begin{aligned} M_3(z_3^0) &= -m - F(a+b+z_3^0) + q = \\ &= -12 - 8(1+1+0,8) + 10 \cdot 0,8^2 / 2 = -31,2 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Получили экстремальное значение момента, отмечаем его на эпюре M .

☑ **ПРИМЕР 1.4.** На балку (рисунок 1.28) действует вертикальная нагрузка q , $F = qa$, $m = qa^2$. Требуется: построить эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов; определить максимальные значения внутренних усилий.

Определение опорных реакций. Для определения реакций Y_A , Y_B составим два уравнения равновесия балки в моментах:

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot 2a - F \cdot 4a - m - q \cdot 4a \cdot a + Y_B \cdot 3a = 0, \Rightarrow$$

$$Y_B = \frac{1}{3a} (F \cdot 2a + F \cdot 4a + m + q \cdot 4a \cdot a) = \frac{11}{3} qa.$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot a - F \cdot a - m + q \cdot 4a \cdot 2a - Y_A \cdot 3a = 0, \Rightarrow$$

$$Y_A = \frac{1}{3a} (F \cdot a - F \cdot a - m + q \cdot 4a \cdot 2a) = \frac{7}{3} qa.$$

Проверку полученных значений реакций проведем, используя уравнение равновесия сил, действующих на балку:

$$\sum Y = Y_A + Y_B - F - F - q \cdot 4a = \frac{7}{3} qa + \frac{11}{3} qa - qa - qa - 4qa = 0.$$

Уравнение выполняется, следовательно, реакции определены правильно.

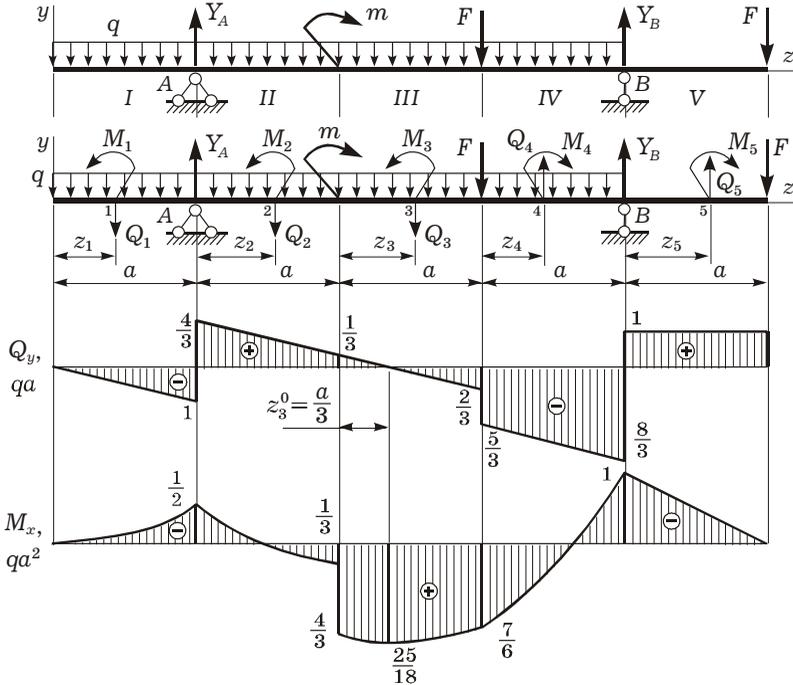


Рисунок 1.28

Построение эюр. Разбиваем балку на характерные участки I–V. На каждом из них применяем метод сечений и определяем внутренние поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_x (нижние индексы x, y в дальнейшем приводить не будем). При этом на участках I–III отбрасываем правую часть рассеченного стержня, на участках IV, V – левую часть.

Участок I. Уравнения равновесия и аналитические выражения для поперечных сил Q и изгибающих моментов M :

$$-Q_1 - qz_1 = 0; \quad M_1 + qz_1^2/2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -qz_1; \quad M_1 = -qz_1^2/2.$$

Значения внутренних усилий на границах участка:

$$z_1 = 0: \quad Q_1 = 0; \quad M_1 = 0, \quad z_1 = a: \quad Q_1 = -qa; \quad M_1 = -qa^2/2.$$

Участок II. Уравнения равновесия и выражения для Q_2 и M_2 :

$$-Q_2 - q(a + z_2) + Y_A = 0 \Rightarrow M_2 + q(a + z_2)^2/2 - Y_A z_2 = 0;$$

$$Q_2 = -q(a + z_2) + Y_A \Rightarrow M_2 = -q(a + z_2)^2/2 + Y_A z_2.$$

Значения на границах второго участка:

$$z_2 = 0: Q_2 = 4qa/3; M_2 = -qa^2/2; \quad z_2 = a: Q_2 = qa/3; M_2 = qa^2/3.$$

Участок III. Уравнения равновесия и выражения для Q_3 и M_3 :

$$-Q_3 - q(2a + z_3) + Y_A = 0, \quad M_3 + q(2a + z_3)^2/2 - Y_A(a + z_3) - m = 0, \Rightarrow$$

$$Q_3 = -q(2a + z_3) + Y_A, \quad M_3 = -q(2a + z_3)^2/2 + Y_A(a + z_3) + m.$$

Значения на границах третьего участка:

$$z_3 = 0: Q_3 = qa/3, \quad M_3 = 4qa^2/3, \quad z_3 = a: Q_3 = -2qa/3; M_3 = 7qa^2/6.$$

Поперечная сила Q_3 изменяется вдоль участка линейно, при этом имеет разные знаки на его концах. Следовательно, внутри участка она обращается в нуль. Используя аналитическое выражение для Q_3 , определим координату сечения z_3^0 , в котором $Q_3(z_3^0) = 0$:

$$0 = -q(2a + z_3^0) + Y_A, \Rightarrow z_3^0 = Y_A/q - 2a = 7a/3 - 2a = a/3.$$

Вычислим экстремальное значение момента в этом сечении:

$$M_3(z_3^0) = -q(2a + a/3)^2/2 + Y_A(a + a/3) + m = 25qa^2/18.$$

Участок IV. Уравнения равновесия и выражения для Q_4 и M_4 :

$$Q_4 - q(a - z_4) + Y_B - F = 0, \quad -M_4 - q(a - z_4)^2/2 + Y_B(a - z_4) - F(2a - z_4) = 0,$$

$$Q_4 = q(a - z_4) - Y_B + F, \quad M_4 = -q(a - z_4)^2/2 + Y_B(a - z_4) - F(2a - z_4).$$

Значения на границах участка:

$$z_4 = 0: Q_4 = -5qa/3, \quad M_4 = 7qa^2/6, \quad z_4 = a: Q_4 = -8qa/3, \quad M_4 = -qa^2.$$

Участок V. Уравнения равновесия и выражения для Q_5 и M_5 :

$$Q_5 - F = 0, \quad -M_5 - F(a - z_5) = 0, \Rightarrow Q_5 = F, \quad M_5 = -F(a - z_5).$$

Значения на границах участка:

$$z_5 = 0: Q_5 = F, \quad M_5 = -qa^2, \quad z_5 = a: Q_5 = F, \quad M_5 = 0.$$

В соответствии с полученными результатами строим эпюры.

Максимальные значения внутренних усилий. Выбираем из соответствующих эпюр наибольший изгибающий момент $|M_{\max}| = (25/18)qa^2$ и наибольшую поперечную силу $|Q_{\max}| = (8/3)qa$.

✓ ПРИМЕР 1.5. Балка (рисунок 1.29) нагружена вертикальной силой F и моментом $m = 3Fa$. Требуется: построить эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов; определить максимальное значение момента.

Определение опорных реакций. Горизонтальная реакция $Z_A = 0$, так как на балку действует только вертикальная нагрузка. В результате имеем три неизвестные опорные реакции: Y_A, Y_B, M_A .

Наличие шарнира в сечении балки C подразумевает равенство нулю в нем внутреннего изгибающего момента, поэтому слева и справа от шарнира сумма моментов внешних сил относительно точки C равняется нулю. Суммируя моменты справа от шарнира, получаем

$$\sum M_C^{\text{прав}} = Y_B a - m = 0, \Rightarrow Y_B = m / a = 3Fa / a = 3F.$$

Реакцию Y_A определим из условия равновесия сил:

$$\sum Y = -Y_A + Y_B - F = 0, \Rightarrow Y_A = Y_B - F = 2F.$$

Суммируя моменты слева от шарнира, имеем

$$\sum M_C^{\text{лев}} = \\ = Fa + 2,5Y_A a - M_A = 0, \Rightarrow$$

$$M_A = Fa + 2,5Y_A a = 6Fa.$$

Построение эпюр. Разбиваем балку на характерные участки и нумеруем их концы. Значения поперечных сил и изгибающих моментов вычисляем в граничных точках, используя метод сечений:

$$Q_1 = Q_2 = -Y_A = -2F,$$

$$Q_3 = Q_4 = Y_B = 3F,$$

$$M_1 = M_A = 6Fa,$$

$$M_2 = M_A - 1,5Y_A a = \\ = 6Fa - 1,5 \cdot 2Fa = 3Fa,$$

$$M_3 = M_2 = 3Fa,$$

$$M_4 = -m = -3Fa.$$

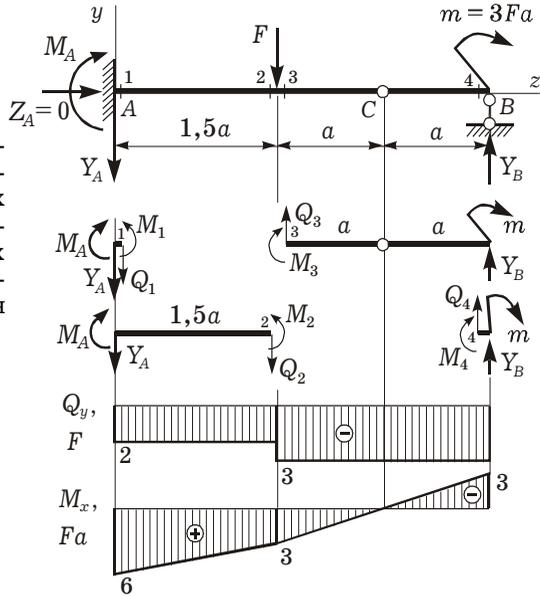


Рисунок 1.29

Распределенная нагрузка на балку не действует, поэтому эпюра Q_y внутри каждого участка постоянна, а эпюра M_x изменяется линейно, проходя через точку C (шарнир). Максимальный момент $|M_{\max}| = 6Fa$.

✓ ПРИМЕР 1.6. Брус (рисунок 1.30, а) нагружен горизонтальной силой F и вертикальными силами F и $3F$. Требуется: построить эпюры внутренних продольных N и поперечных сил Q , изгибающих моментов M_x .

Определение внутренних усилий. Чтобы не определять опорные реакции, используя метод сечений, всегда будем отбрасывать ту часть бруса, в которой находится заделка.

Разбиваем брус на характерные участки, цифрами 1–8 обозначаем их граничные сечения. Мысленно рассекаем брус в каждой из точек 1, ..., 8 и вводим внутренние усилия. Для сечений 2, 4, 6, 8 усилия показаны на рисунке 1.30, б; для сечений 1, 3, 5, 7 – прикладываются аналогично.

Вычисляем значения внутренних силовых факторов. Для определения N и Q проецируем все силы оставленной части бруса на оси y, z ; для вычисления M берем момент сил оставленной части относительно рассматриваемого сечения. Получаем:

$$N_1 = N_2 = 0, \quad N_3 = N_4 = F, \quad N_5 = N_6 = 0,$$

$$N_7 = N_8 = F - 3F = -2F;$$

$$Q_1 = Q_2 = F, \quad Q_3 = Q_4 = 0, \quad Q_5 = Q_6 = -3F, \quad Q_7 = Q_8 = F;$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M_3 = M_4 = -Fa, \quad M_5 = 0,$$

$$M_6 = -3Fa, \quad M_7 = 3Fa - Fa = 2Fa,$$

$$M_8 = 3Fa - F(a + 1,5a) = 0,5Fa.$$

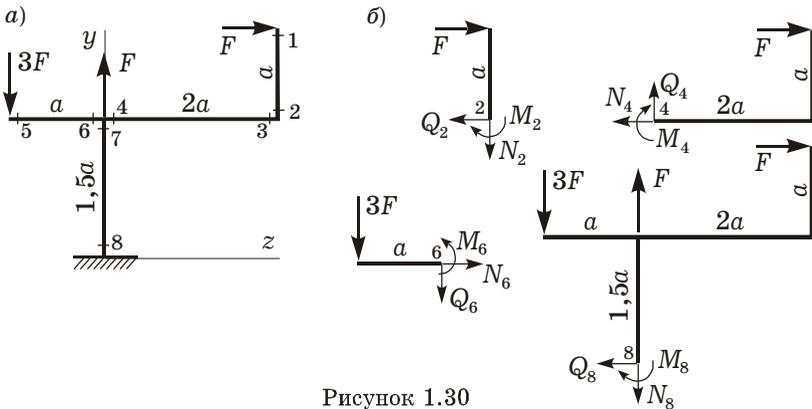


Рисунок 1.30

Построение эпюр. По полученным результатам изображаем эпюры N , Q , M (рисунок 1.31). При построении эпюры Q учитываем, что в сечениях, где приложены внешние поперечные силы, будут скачки, совпадающие с этими силами по величине и направлению (если двигаться от консолей к заделке). Эпюру M строим на растянутом волокне. На участках 1–2, 3–4, 5–6 моменты получились отрицательными, их направление противоположно выбранному на рисунке 1.30, б; на участке 1–2 растянуты левые волокна, на участках 3–4 и 5–6 – верхние. На участке 7–8 растянуты правые волокна, как было показано на рисунке 1.30, б.

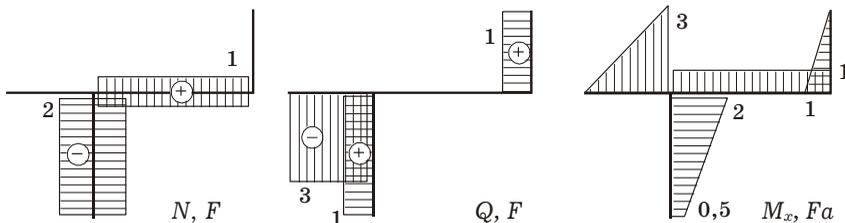


Рисунок 1.31

Проверка эпюр. Вырезаем узлы 2-3 и 4-6-7, прикладываем к сечениям внутренние усилия, взятые из эпюр (рисунок 1.32). Составляем уравнения равновесия узлов.

Узел 2-3:

$$\sum Z = F - F = 0; \sum Y = 0;$$

$$\sum M = Fa - Fa = 0.$$

Узел 4-6-7:

$$\sum Z = F - F = 0; \sum Y = F + 2F - 3F = 0; \sum M = 3Fa - 2Fa - Fa = 0.$$

Узлы находятся в равновесии, значит, расчет выполнен верно.

ПРИМЕР 1.7. На раму (рисунок 1.33, а) действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности q и сила $F = 2qa$. Требуется: построить эпюры внутренних продольных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M_x .

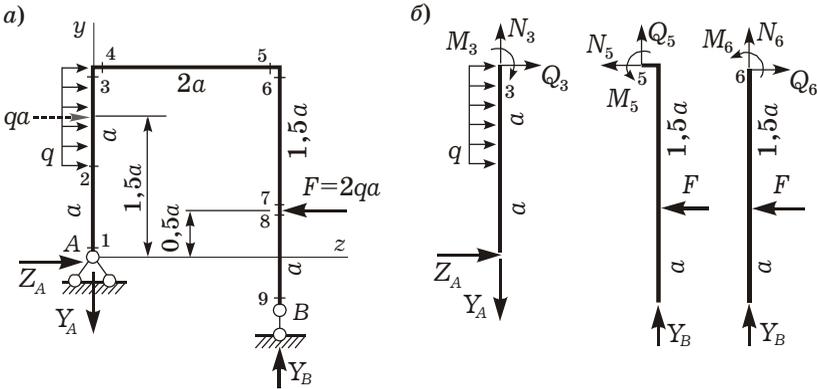


Рисунок 1.33

Определение опорных реакций. Найдем реакции Z_A, Y_A, Y_B . Для этого составим три уравнения равновесия. Из условия равенства нулю суммарного момента относительно точки А, учитывая, что расстояние до нее от равнодействующей распределенной нагрузки равно $1,5a$, получаем

$$\sum M_A = 0: F \cdot 0,5a + Y_B \cdot 2a - qa \cdot 1,5a = 0 \Rightarrow Y_B = 0,25qa.$$

Суммы проекций всех сил на координатные оси позволяют определить остальные реакции:

$$\sum Z = 0: qa + Z_A - F = 0 \Rightarrow Z_A = qa;$$

$$\sum Y = 0: -Y_A + Y_B = 0 \Rightarrow Y_A = Y_B = 0,25qa.$$

Определение внутренних усилий. Разбиваем раму на характерные участки, цифрами 1–9 обозначаем граничные сечения. Рассекаем раму в каждой из точек 1, ..., 9 и вводим внутренние силы и моменты. Для сечений 3, 5, 6 усилия показаны на рисунке 1.33, б; для остальных сечений они прикладываются аналогично. Вычисляем значения усилий:

$$\begin{aligned}
 N_1 = N_2 = N_3 = Y_A &= 0,25qa, & N_4 = N_5 = -F &= -2qa, \\
 N_6 = N_7 = N_8 = N_9 &= -Y_B = -0,25qa; \\
 Q_1 = Q_2 = -Z_A &= -qa, & Q_3 = -Z_A - qa &= -qa - qa = -2qa, \\
 Q_4 = Q_5 = -Y_B &= -0,25qa, & Q_6 = Q_7 = F &= 2qa; & Q_8 = Q_9 &= 0; \\
 M_1 = 0, & M_2 = -Z_A a = -qa \cdot a = -qa^2, & M_3 = M_4 = Z_A 2a + qa^2/2 &= 2,5qa^2, \\
 M_5 = M_6 = F \cdot 1,5a &= 2qa \cdot 1,5a = 3qa^2, & M_7 = M_8 = M_9 &= 0.
 \end{aligned}$$

Построение эпюр. По полученным результатам изображаем эпюры N , Q , M (рисунок 1.34).

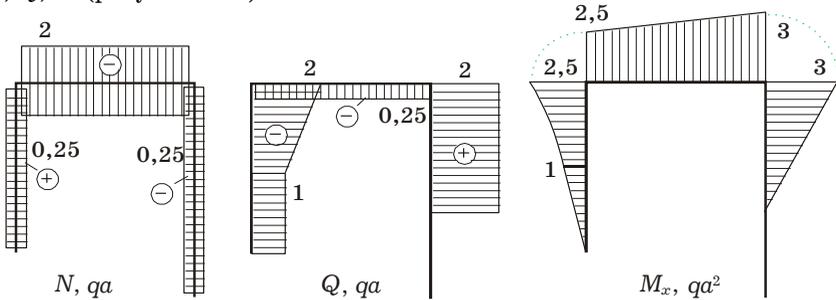


Рисунок 1.34

Как и в предыдущем примере, при построении эпюры Q движемся слева направо по брусу, учитывая, что направления скачков совпадают с направлениями внешних сил. Эпюру M_x строим на растянутом волокне. Если моменты получились отрицательными, их направление противоположно выбранному ранее на рисунке 1.33, б. На участке 2–3 эпюра M_x ограничена параболой, направленной выпуклостью в сторону действия равномерно распределенной нагрузки.



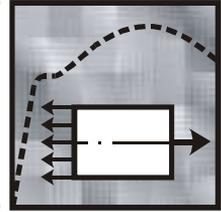
Рисунок 1.35

Проверка эпюр. Вырезаем узлы 3–4 и 5–6, прикладываем к сечениям внутренние усилия, взятые из эпюр (рисунок 1.35).

Узлы находятся в равновесии, следовательно, расчет верен.

2

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА



В строительной практике растяжение возникает, например, в тросе подъемника, в стержнях ферм. Под действием собственного веса на сжатие работают стержневые сооружения башенного типа. Поэтому важным частным случаем подобного деформирования является центральное растяжение (сжатие) стержня.

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях стержней возникают только продольные силы N , приложенные в их центрах тяжести.

2.1 Внутренние силы и напряжения

Нагрузка может быть приложена к стержню различными способами (рисунок 2.1, а), однако во всех случаях система внешних сил образует равнодействующую F , направленную вдоль его оси. Используя метод сечений, получим, что во всех поперечных сечениях возникают только *продольные силы* N (рисунок 2.1, б).

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными. Формально они отличаются только знаком силы N . Однако процессы разрушения материалов при растяжении и сжатии качественно различаются.

Нормальные напряжения. Продольная сила является равнодействующей элементарных внутренних сил в сечении стержня (рисунок 2.2) и связана с нормальными напряжениями зависимостью (1.1)

$$N = \int_A \sigma dA.$$

Это выражение может быть удовлетворено при бесконечно большом числе вариантов распределения напряжений σ в сечении. Поэтому задача определения напряжений статически неопределима, пока неизвестен закон их распределения по сечению.

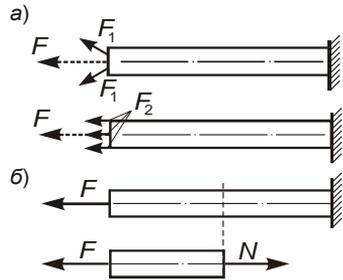


Рисунок 2.1

Используя принцип Сен-Венана и условие однородности стержня, предполагаем, что внутренние силы распределены по поперечному сечению *равномерно*. Следовательно, нормальные напряжения σ при центральном растяжении-сжатии во всех точках сечения *одинаковы*. Это позволяет в выражении для N вынести σ за знак интеграла

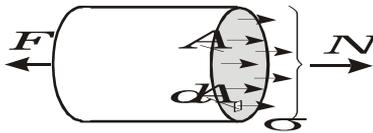


Рисунок 2.2

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

и получить формулу, связывающую напряжения с продольной силой

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

где A – площадь поперечного сечения.

Замечание. Если по длине стержня продольная сила N и площадь сечения A постоянны, то в стержне возникает *однородное напряженное состояние*, при котором напряжения одинаковы во всех точках всех поперечных сечений. Если же площадь поперечного сечения переменна или вдоль оси стержня приложены нагрузки, то напряжения будут различными для разных поперечных сечений. Напряженное состояние в стержне становится *неоднородным*.

2.2 Деформации

Продольные деформации. Предположим, что до нагружения длина стержня была равна l . Под воздействием силы F она увеличилась на Δl и стала $l + \Delta l$ (рисунок 2.3). Величину Δl называют *абсолютным удлинением* стержня. Вследствие однородного напряженного состояния все участки растянутого стержня находятся в одинаковых условиях, поэтому и линейная деформация ε по оси стержня будет постоянной, равной своему среднему значению:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.2)$$

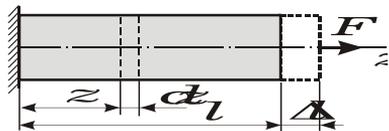


Рисунок 2.3

Эта величина называется *относительной деформацией* (*относительным удлинением*) стержня.

Если в стержне возникает неоднородное напряженное состояние, то деформация в сечении определяется предельным переходом к малому участку длиной dz (см. рисунок 2.3):

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}, \quad (2.3)$$

где $\Delta(dz)$ – удлинение элемента dz .

Поперечные деформации. Наблюдения показывают, что удлинение стержня в направлении оси z сопровождается уменьшением поперечных размеров (рисунок 2.4).

Таким образом, при растяжении возникает не только продольная $\varepsilon_z = \varepsilon = \Delta l / l$, но и поперечная деформация стержня

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \Delta a / a.$$

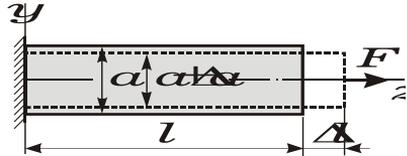


Рисунок 2.4

Экспериментально установлено, что в пределах применимости закона Гука поперечная деформация пропорциональна продольной:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon, \quad (2.4)$$

где ν – коэффициент Пуассона¹⁾.

Коэффициент Пуассона – это безразмерная константа упругости материала, определяемая экспериментально. Для всех металлов числовые значения ν лежат в пределах 0,25–0,35. Для других однородных материалов выполняется условие $0 < \nu \leq 0,5$. Это будет показано далее.

2.3 Закон Гука при растяжении-сжатии

Напряжения и деформации линейно связаны между собой *законом Гука*, который подтвержден экспериментально и при растяжении-сжатии стержня имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.5)$$

где E – модуль Юнга²⁾.

Модуль Юнга – это физическая константа материала, которая определяется экспериментально. Измеряется в *паскалях*, например, его значение для стали $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па.

Отметим, что введенные в (2.4), (2.5) константы упругости E и ν являются независимыми друг от друга и полностью описывают упругие свойства однородного изотропного материала. Все другие параметры упругости можно будет выразить через них.

Закон Гука с учетом изменения температуры. Предположим, что стержень находится под воздействием внешних сил и одновременно нагревается на температуру T . Тогда, согласно веденному ра-

¹⁾ Пуассон Семион Дени (S. D. Poisson) (1781–1840) – французский математик, механик, иностранный почетный член Петербургской академии наук.

²⁾ Юнг (Янг) Томас (T. Young) (1773–1829) – английский ученый, ввел модуль упругости (модуль Юнга). Объяснил аккомодацию глаза, разработал теорию цветного зрения. Труды по волновой теории света, акустике, астрономии, расшифровке египетских иероглифов.

нее принципу суперпозиции и гипотезе Дюамеля¹⁾ – Неймана²⁾, суммарная деформация будет следующей:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T, \quad (2.6)$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Например, для конструкционных сталей $\alpha = (11...14) \cdot 10^{-6}$ (1/°C), для алюминиевого сплава Д16Т $\alpha = 24,3 \cdot 10^{-6}$ (1/К).

Таким образом, силовая и температурная деформации рассматриваются как независимые. Основанием этому служит экспериментально установленный факт, что модуль Юнга при умеренном нагреве изменяется мало. При более высоких температурах (для стали 300–400 °C) необходимо учитывать его зависимость от температуры.

Формула (2.6) выражает закон Гука при растяжении-сжатии с учетом изменения температуры стержня.

2.4 Перемещения при растяжении-сжатии

Удлинение участка стержня. Подставим выражение для деформации (2.3) в закон Гука (2.5). Тогда, учитывая соотношение (2.1), получим полное удлинение участка стержня длиной l :

$$\Delta(dz) = \frac{Ndz}{EA}; \quad \Delta l = \int_0^l \frac{Ndz}{EA}. \quad (2.7)$$

Из выражения (2.7) можно получить формулу для удлинения участка стержня при $N = \text{const}$, $A = \text{const}$:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \quad (2.8)$$

где EA – жесткость поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии.

Перемещения сечений стержня. Часто требуется найти перемещения точек оси, а также полное удлинение стержня, состоящего из нескольких участков. Границами участков служат сечения, где приложены внешние силы или меняется жесткость стержня (рисунки 2.5). В соответствии с (2.8) удлинение i -го участка стержня

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

где N_i – продольная сила на i -м участке ($N_i = \text{const}$);
 l_i , EA_i – длина и жесткость i -го участка ($EA_i = \text{const}$).

¹⁾ Дюамель Жан-Мари (Duhamel J. M.) (1797–1872), французский физик, предложивший теорию передачи тепла в кристаллических структурах.

²⁾ Нейман Ф. Е. (Neumann F. E.) (1798–1895) – немецкий математик.

Перемещение δ_i сечения стержня, находящегося на границе i -го участка, состоит из удлинения этого участка и перемещения его как единого целого за счет деформирования предыдущих участков:

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta l_i = \delta_{i-1} + \frac{N_i l_i}{EA_i}$$

$$(i = 1, \dots, n; \delta_0 = 0). \quad (2.9)$$

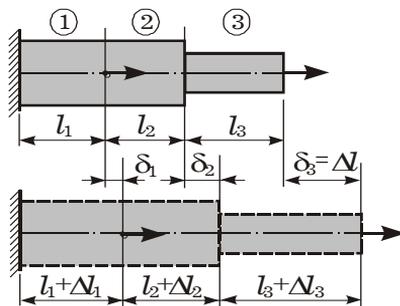


Рисунок 2.5

По полученным результатам строят эпюру продольных перемещений (эпюру δ), т. е. график, изображающий изменение этих перемещений по длине оси бруса.

Полное удлинение стержня, состоящего из n участков, равно перемещению крайней точки последнего участка:

$$\Delta l = \delta_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

т. е. полное удлинение стержня, состоящего из нескольких участков, равно алгебраической сумме удлинений всех участков.

2.5 Дифференциальное соотношение при растяжении-сжатии

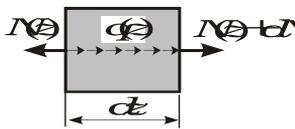


Рисунок 2.6

Рассмотрим равновесие элемента малой длины dz , выделенного из стержня двумя близкими поперечными сечениями, имеющими координаты z и $z + dz$ (см. рисунок 2.3). Этот элемент показан на рисунке 2.6.

Действие отброшенной слева части стержня на элемент dz заменим продольной силой $N(z)$, а действие отброшенной правой части – силой $N(z) + dN$. Кроме того, учитываем распределенную нагрузку $q(z)$, интенсивность которой из-за малости dz можно считать постоянной вдоль элемента. Тогда равнодействующая этой нагрузки равна $q(z)dz$.

Все силы, действующие на выделенный элемент, параллельны одной оси, поэтому из шести уравнений равновесия нетривиально только требование равенства нулю проекций этих сил на ось z :

$$-N(z) + (N(z) + dN) + q(z)dz = 0.$$

Отсюда следует *дифференциальное соотношение* между интенсивностью распределенной нагрузки и продольной силой при растяжении-сжатии:

$$q(z) = -\frac{dN}{dz}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим две задачи на растяжение и сжатие под действием распределенной нагрузки от собственного веса стержня.

☑ **ПРИМЕР 2.1.** Свободно подвешенный цилиндрический стержень растянут силами от собственного веса (рисунок 2.7). Длина стержня l , площадь поперечного сечения A , удельный вес материала γ , модуль Юнга E . Требуется: построить эпюры внутренних продольных сил N , напряжений σ и перемещений δ .

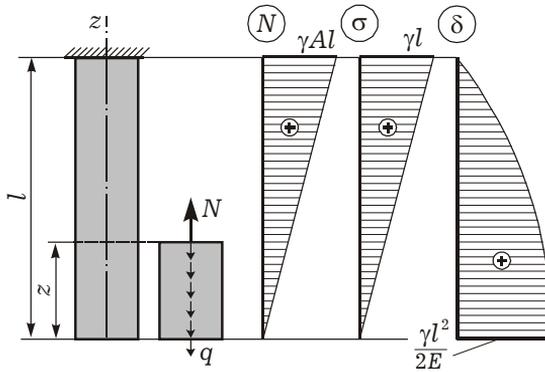


Рисунок 2.7

Продольные силы.

Выберем систему координат, начало которой примем на свободном конце стержня, ось z направим вверх. Так как площадь сечения A постоянна, то нагрузка от собственного веса $q = \gamma A$ будет равномерно распределенной по оси стержня.

Продольная сила в сечении с координатой z равна весу нижележащей части стержня. В соответствии с (2.10)

$$N = qz = \gamma Az,$$

следовательно, продольная сила пропорциональна координате z . Ее эпюра прямолинейна; нулевая ордината будет на нижнем конце стержня ($z = 0$), максимальная γAl – в сечении у заделки.

Нормальные напряжения. Напряжения в сечении с координатой z определяем по формуле (2.1):

$$\sigma = N/A = \gamma Az / A = \gamma z.$$

Эпюра σ подобна эпюре N .

Перемещения. Перемещение δ сечения с координатой z равно удлинению Δl верхнего участка стержня. По формуле (2.7)

$$\delta(z) = \Delta l(z) = \int_z^l \frac{N(z)dz}{EA} = \int_z^l \frac{\gamma Az dz}{EA} = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

Следовательно, закон изменения перемещений $\delta(z)$ вдоль оси стержня является квадратичной функцией, а эпюра – квадратной параболой. Верх-

нее сечение ($z = l$) не смещается, $\delta(l) = 0$. Наибольшее перемещение имеет нижнее торцевое сечение ($z = 0$)

$$\delta_{\max} = \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

По полученным результатам строим эпюры (см. рисунок 2.7).

☑ **ПРИМЕР 2.2.** Колонна (рисунок 2.8) нагружена силой F и нагрузкой от собственного веса. Длина колонны l , площадь ее торцевого сечения A_0 , удельный вес материала γ , модуль Юнга E . Требуется: подобрать такой закон изменения площади поперечного сечения $A = A(z)$, чтобы напряжения во всех сечениях были одинаковы и равны $|F/A_0|$; построить эпюры продольных сил N , напряжений σ и перемещений δ .

Закон изменения площади сечения.

Начало координат примем на свободном конце колонны. Так как площадь сечения A переменная, нагрузка от собственного веса будет распределена вдоль оси стержня по закону

$$q(z) = \gamma A(z).$$

Будем считать, что сжимающая продольная сила положительна.

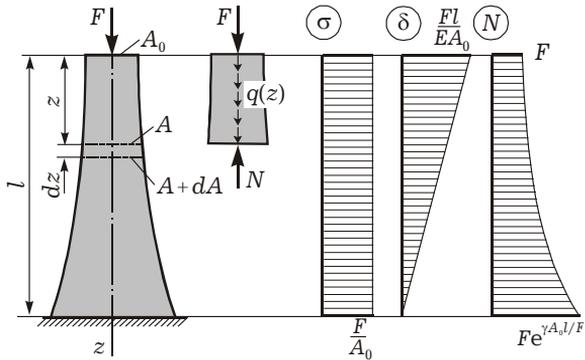


Рисунок 2.8

На расстоянии z от торца продольная сила определяется внешней силой F и нагрузкой от веса верхней части колонны

$$N = F + \int_0^z q(z)dz = F + \gamma \int_0^z A(z)dz.$$

Используя формулу (2.1), выразим напряжения через силы:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1}{A} \left(F + \gamma \int_0^z A(z)dz \right).$$

По условию задачи $\sigma = \text{const} = F/A_0$.

Приравниваем правые части последних двух выражений и умножаем на A . В результате имеем

$$F + \gamma \int_0^z A(z)dz = \frac{F}{A_0} A(z).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по z , получим

$$\gamma A(z) = \frac{F}{A_0} \frac{dA(z)}{dz}; \quad dz = \frac{F}{\gamma A_0} \frac{dA(z)}{A(z)}.$$

После интегрирования находим

$$z = \frac{F}{\gamma A_0} (\ln A(z) - \ln C), \quad A(z) = C e^{\gamma A_0 z / F}.$$

При $z = 0$ выполняется равенство $A = A_0$, следовательно, $C = A_0$, и тогда $A(z) = A_0 e^{\gamma A_0 z / F} \equiv A_0 \exp(\gamma A_0 z / F)$.

Продольная сила. Продольная сила в сечении с координатой z

$$N(z) = \sigma A(z) = F e^{\gamma A_0 z / F}.$$

Значения на верхнем и нижнем торцах колонны: $N(0) = F$, $N(l) = F e^{\gamma A_0 l / F}$.

Перемещения. По условию задачи напряжения σ вдоль оси колонны не меняются. Следовательно, постоянными будут и относительные деформации ε . Поэтому перемещение δ возрастает пропорционально расстоянию от основания колонны:

$$\delta(z) = \Delta l(z) = \int_z^l \frac{N dz}{EA} = \int_z^l \frac{\sigma dz}{E} = \frac{\sigma}{E} \int_z^l dz = \frac{\sigma}{E} (l - z) = \frac{F}{EA_0} (l - z).$$

Нижнее сечение ($z = l$) не смещается, $\delta(l) = 0$. Наибольшее перемещение имеет верхнее торцевое сечение ($z = 0$)

$$\delta_{\max} = \frac{Fl}{EA_0}.$$

По полученным результатам строим эпюры (см. рисунок 2.8).

Таким образом, рассмотрена задача на отыскание *равнопрочности* конструкции. При найденных условиях материал используется наиболее эффективно.

Далее рассмотрим две задачи по определению продольных сил, напряжений и перемещений в статически определимом и статически неопределимом стержнях со ступенчато-переменным сечением.

☑ **ПРИМЕР 2.3.** Стержень переменного сечения нагружен вдоль оси сосредоточенными внешними силами (рисунок 2.9). Требуется: построить эпюры внутренних продольных сил N , напряжений σ и перемещений δ . Влиянием собственного веса пренебречь.

Параметры участков. Разобьем стержень на участки 1–6, их границами будут сечения, в которых приложены внешние силы или изменяется площадь поперечного сечения. Модуль Юнга E считаем одинаковым для всех участков стержня. Длины l_i и площади поперечных сечений A_i следующие (i – номер участка):

$$l_1 = l_4 = l_6 = l, \quad l_2 = l_3 = l_5 = 2l; \quad A_1 = A_2 = 3A, \quad A_3 = A_4 = 2A, \quad A_5 = A_6 = A.$$

Продольные силы. Мысленно будем рассекать стержень на каждом из участков и отбрасывать верхнюю часть. Из условий равновесия нижней части определим значения внутренних продольных сил N_i :

$$N_1 = 2F - 3F + 2F = F, \quad N_2 = N_3 = 2F - 3F = -F,$$

$$N_4 = N_5 = 2F, \quad N_6 = 0.$$

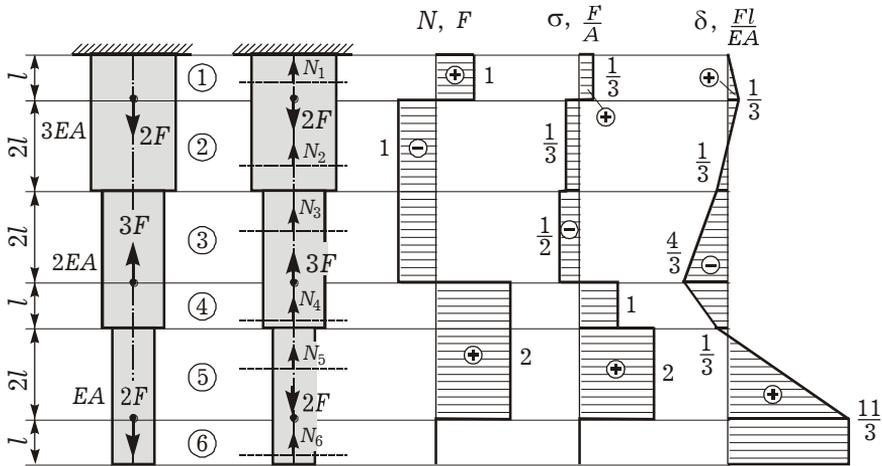


Рисунок 2.9

Нормальные напряжения. С использованием формулы (2.1) вычислим нормальные напряжения на участках ($\sigma_i = N_i / A_i$):

$$\sigma_1 = \frac{F}{3A}, \quad \sigma_2 = \frac{-F}{3A}, \quad \sigma_3 = \frac{-F}{2A}, \quad \sigma_4 = \frac{2F}{2A} = \frac{F}{A}, \quad \sigma_5 = \frac{2F}{A}, \quad \sigma_6 = 0.$$

Перемещения. Для каждого участка стержня определим δ_i – перемещение крайней нижней точки, которое состоит из его удлинения Δl_i и перемещения δ_{i-1} как единого целого за счет деформирования предыдущих участков (см. формулу (2.9)):

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta l_i = \delta_{i-1} + \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

$$\delta_0 = 0; \quad \delta_1 = 0 + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{Fl}{3EA},$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{Fl}{3EA} + \frac{-F \cdot 2l}{3EA} = -\frac{Fl}{3EA};$$

$$\delta_3 = \delta_2 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -\frac{Fl}{3EA} + \frac{-F \cdot 2l}{2EA} = -\frac{4Fl}{3EA},$$

$$\delta_4 = \delta_3 + \frac{N_4 l_4}{EA_4} = -\frac{4Fl}{3EA} + \frac{2Fl}{2EA} = -\frac{Fl}{3EA},$$

$$\delta_5 = \delta_4 + \frac{N_5 l_5}{EA_5} = -\frac{Fl}{3EA} + \frac{2F \cdot 2l}{EA} = \frac{11Fl}{3EA}, \quad \delta_6 = \delta_5 + \frac{N_6 l_6}{EA_6} = \frac{11Fl}{3EA}.$$

Эпюры продольных сил N и напряжений σ в пределах каждого участка постоянны. Перемещения δ изменяются линейно (см. рисунок 2.9).

☑ **ПРИМЕР 2.4.** Дать заключение о том, как изменятся эпюры внутренних продольных сил, напряжений и перемещений, если у стержня согласно условию примера 2.3 будут заделаны оба конца (рисунок 2.10).

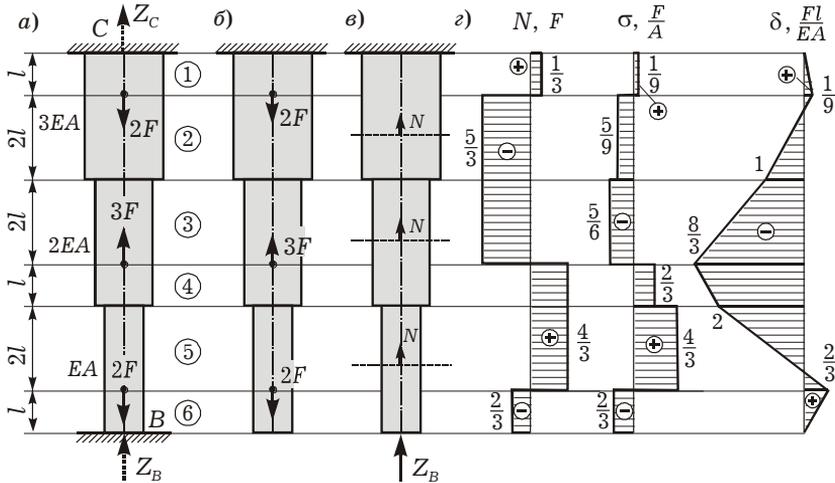


Рисунок 2.10

Параметры участков. Как и в предыдущем примере, разобьем стержень на участки 1–6. Длины l_i и площади поперечных сечений A_i следующие (i – номер участка):

$$l_1 = l_4 = l_6 = l, \quad l_2 = l_3 = l_5 = 2l, \quad A_1 = A_2 = 3A, \quad A_3 = A_4 = 2A, \quad A_5 = A_6 = A.$$

Уравнение равновесия. Система один раз статически неопределимая, так как для нахождения двух неизвестных реакций Z_B и Z_C можно составить только одно уравнение равновесия:

$$Z_B + Z_C - 2F + 3F - 2F = 0,$$

отсюда

$$Z_B + Z_C = F. \quad (a)$$

Уравнение совместности перемещений. Очевидно, что опорные сечения стержня не смещаются. Это обстоятельство дает нам возможность составить еще одно уравнение для определения неизвестных реакций – уравнение совместности перемещений, основанное на неизменности длины рассматриваемого стержня.

Отбросим нижнюю заделку и заменим ее действия реакцией Z_B . На основании принципа суперпозиции действия внешней нагрузки и силы Z_B можно рассмотреть раздельно. Перемещение нижнего сечения стержня при заделанном верхнем, вызванное внешней нагрузкой (см. рисунок 2.10, б), определено в примере 2.3:

$$\delta_6^F = \frac{11 Fl}{3 EA}.$$

Найдем перемещение того же сечения, вызванное только реакцией Z_B (см. рисунок 2.10, *в*). Выделим три участка стержня с разной жесткостью. Продольные силы N одинаковы на этих участках и равны $(-Z_B)$, длины участков одинаковы. Перемещение нижнего сечения от силы Z_B

$$\delta_6^{Z_B} = \frac{-Z_B 3l}{EA} + \frac{-Z_B 3l}{2EA} + \frac{-Z_B 3l}{3EA} = -\frac{11}{2} \frac{Z_B l}{EA}.$$

Суммарное перемещение точки B от действия внешних сил и реакции Z_B равно нулю, так как в заданной системе нижнее сечение заделано:

$$\delta_6^F + \delta_6^{Z_B} = 0. \quad (б)$$

Уравнение (б) называется уравнением совместности перемещений. Из него определяем реакцию Z_B :

$$\delta_6^F = -\delta_6^{Z_B}, \quad \frac{11 Fl}{3 EA} = \frac{11 Z_B l}{2 EA} \Rightarrow Z_B = \frac{2}{3} F.$$

Из уравнения (а) находим вторую реакцию: $Z_C = F - Y_B = F - \frac{2}{3} F = \frac{1}{3} F$.

Продольные силы. Методом сечений определим значения внутренних продольных сил N_i на участках:

$$N_1 = Z_C = \frac{1}{3} F; \quad N_2 = N_3 = Z_C - 2F = -\frac{5}{3} F;$$

$$N_4 = N_5 = 2F - Z_B = 2F - \frac{2}{3} F = \frac{4}{3} F; \quad N_6 = -Z_B = -\frac{2}{3} F.$$

Нормальные напряжения. С использованием формулы (2.1) вычислим нормальные напряжения на участках ($\sigma_i = N_i / A_i$):

$$\sigma_1 = \frac{F}{3 \cdot 3A} = \frac{F}{9A}; \quad \sigma_2 = \frac{-5F}{3 \cdot 3A} = -\frac{5}{9} \frac{F}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{-5F}{3 \cdot 2A} = -\frac{5}{6} \frac{F}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{4F}{3 \cdot 2A} = \frac{2}{3} \frac{F}{A}; \quad \sigma_5 = \frac{4}{3} \frac{F}{A}; \quad \sigma_6 = -\frac{2}{3} \frac{F}{A}.$$

Перемещения. Для каждого участка стержня определим δ_i – перемещение крайней нижней точки i -го участка.

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = 0 + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{Fl}{9EA}, \quad \delta_2 = \delta_1 + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{1}{9} \frac{Fl}{EA} + \frac{-5F \cdot 2l}{3 \cdot 3EA} = -\frac{Fl}{EA},$$

$$\delta_3 = \delta_2 + \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -\frac{Fl}{EA} + \frac{-5F \cdot 2l}{3 \cdot 2EA} = -\frac{8}{3} \frac{Fl}{EA},$$

$$\delta_4 = \delta_3 + \frac{N_4 l_4}{EA_4} = -\frac{8}{3} \frac{Fl}{EA} + \frac{4Fl}{3 \cdot 2EA} = -2 \frac{Fl}{EA},$$

$$\delta_5 = \delta_4 + \frac{N_5 l_5}{EA_5} = -2 \frac{Fl}{EA} + \frac{4F \cdot 2l}{3 \cdot EA} = \frac{2}{3} \frac{Fl}{EA}, \quad \delta_6 = \delta_5 + \frac{N_6 l_6}{EA_6} = \frac{2}{3} \frac{Fl}{EA} - \frac{2Fl}{3 \cdot EA} = 0.$$

Строим эпюры внутренних продольных сил N , напряжений σ и перемещений δ (см. рисунок 2.10, *г*). Последняя эпюра показывает, что перемещения крайних сечений стержня равны нулю.

2.6 Потенциальная энергия деформации

Упругое тело является аккумулятором энергии, затраченной на его деформирование. Это свойство широко используется в различных амортизирующих устройствах (рессорах, пружинах и др.).

При нагружении тела внешние силы совершают работу W , которая, с одной стороны, идет на сообщение скорости массе тела, т. е. переходит в кинетическую энергию K , с другой – накапливается в виде потенциальной энергии деформации U . Таким образом, уравнение энергетического баланса имеет вид

$$W = K + U.$$

Если нагрузка прикладывается статически, т. е. возрастает от нуля до конечного значения настолько медленно, что можно пренебречь скоростью деформации и силами инерции, то $K = 0$. Работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию:

$$W = U.$$

На рисунке 2.11, а показан растянутый стержень, который в результате статического действия силы F удлиняется на Δl .

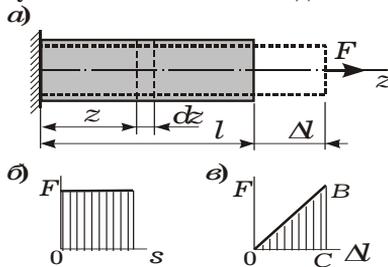


Рисунок 2.11

В теоретической механике работа определяется произведением постоянной силы F на путь s , пройденный точкой ее приложения по направлению действия силы: $W = Fs$. Эта работа выражается площадью прямоугольника, построенного в системе координат F и s (рисунок 2.11, б).

В нашем случае сила F не остается постоянной на пути Δl . При соблюдении закона Гука она линейно

возрастает от нуля до своего конечного значения (рисунок 2.11, в). Поэтому работа (а значит, и потенциальная энергия) численно равна площади заштрихованного треугольника:

$$W = U = \frac{1}{2} F \Delta l. \quad (2.11)$$

Это выражение справедливо для любой линейно деформируемой системы, причем не только при растяжении-сжатии, но и при других видах деформации. Оно известно под названием *теоремы Клапейрона*. Если материал идеально упругий, но сама система не является линейно деформируемой, то теорема неприменима.

Переходя от внешней силы F к равной ей внутренней силе N , с учетом зависимости (2.8) $\Delta l = Nl / (EA)$ получаем

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) применима только к брусам (или отдельным участкам) постоянного сечения в случае постоянной продольной силы. При переменных по длине оси бруса значениях продольной силы $N(z)$ и жесткости $EA(z)$ потенциальная энергия деформации определяется суммированием по участкам или интегрированием вдоль оси стержня по всей его длине l :

$$U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA}. \quad (2.13)$$

Отметим, что энергетические соотношения (2.12), (2.13) используются при определении перемещений в стержневых системах (см. разд. 9).

2.7 Напряжения на наклонных площадках

Рассмотрим растянутый призматический стержень. Выделим из него элемент (рисунок 2.12, а) двумя сечениями: левое сечение перпендикулярно оси стержня, правое – наклонно, его нормаль n_α составляет с осью стержня угол α .

Определим напряжения на полученных площадках. Напряженное состояние рассматриваемого стержня при растяжении однородно, поэтому во всех точках наклонной площадки полные напряжения одинаковы и равны p , в поперечном сечении – σ (рисунок 2.12, б).

Уравнение равновесия элемента стержня следующее:

$$-\sigma A + p A_\alpha = 0,$$

где A – площадь поперечного сечения;

A_α – площадь наклонного сечения, $A_\alpha = A / \cos \alpha$.

Отсюда полное напряжение на наклонной площадке $p = \sigma \cos \alpha$. Раскладывая его на нормальную σ_α и касательную τ_α составляющие (см. рисунок 2.12, б), получаем

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha, \quad \tau_\alpha = p \sin \alpha$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad (2.14)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha. \quad (2.15)$$

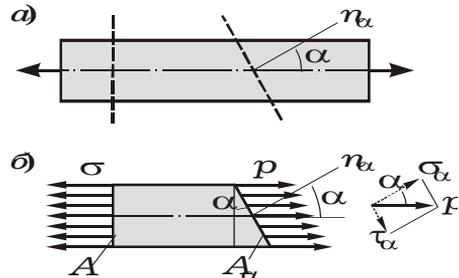


Рисунок 2.12

Формулы (2.14), (2.15) определяют нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках при растяжении-сжатии.

Следствия. Проанализируем некоторые частные случаи применения полученных соотношений:

- если положить $\alpha = 0$, то из формул (2.14), (2.15) получим напряжения в поперечном сечении стержня: $\sigma_\alpha = \sigma$; $\tau_\alpha = 0$;
- в продольных сечениях ($\alpha = 90^\circ$) напряжения $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, т. е. продольные волокна друг на друга не давят;
- касательные напряжения достигают максимума в сечениях под углом 45° к поперечному $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \sigma/2$, при этом $\sigma_\alpha = \sigma/2$.

Касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках. Пусть нормаль к одной из площадок n_α составляет с осевой линией угол α . Тогда у другой площадки нормаль n_β составит угол $\beta = \alpha + 90^\circ$ (рисунок 2.13). Касательные напряжения на первой площадке определяются формулой (2.15). На второй площадке

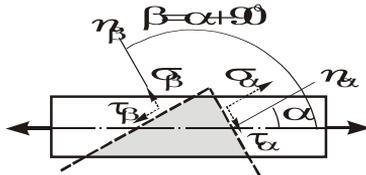


Рисунок 2.13

$$|\tau_\beta| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2\beta \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin(2\alpha + 180^\circ) \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \right| = |\tau_\alpha|.$$

Таким образом, касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках растянутого стержня равны между собой по величине. Далее (п. 7.1) будет показано, что это условие является общей особенностью любого напряженного состояния и носит название *закона парности касательных напряжений*.

2.8 Механические испытания материалов

Типы конструкционных материалов. Все конструкционные материалы можно условно разделить на хрупкие и пластичные. К *пластичным* материалам можно отнести малоуглеродистые стали¹⁾, алюминий, медь, латунь и некоторые другие. Они обладают способностью деформироваться в широких пределах без разрушения. Примерами *хрупких* материалов могут служить чугун, высокоуглеродистые стали, камень, бетон, металлокерамика, стекло. Хрупкие материалы разрушаются без заметной предварительной деформации. Промежуточное положение занимают *малопластичные* материалы: легированные стали, алюминиевые сплавы, бронзы.

¹⁾ *Сталь* – это общее название железоуглеродистых сплавов, имеющих в своем составе не более 2 % углерода. Если углерода не более 0,25 % – тогда сталь малоуглеродистая (инструментальная); 0,3–0,5 % – среднеуглеродистая; 0,6–1,2 % – высокоуглеродистая. Если содержание углерода 2,2–6,7 % (обычно 3–4,5 %), то сплавы объединяются общим названием *чугун*.

Отметим, что хрупкое или пластичное поведение материалов также зависит от температуры, скорости нагружения, радиационного воздействия и т. д.

Цели испытаний материалов. *Механическими испытаниями* называется экспериментальное изучение механических свойств материалов на специальных образцах, изготовленных из исследуемого материала.

Методика испытаний материалов установилась и к настоящему времени стандартизирована¹⁾. Для пластичных материалов основными являются испытания на *растяжение*, для хрупких – на *сжатие*.

Механические испытания преследуют несколько *целей*:

- установление механических характеристик материалов, которые определяют поведение конструкций под нагрузкой;
- выяснение опытным путем справедливости различных гипотез и границ их практической применимости;
- установление пределов применимости формул и методов сопротивления материалов для различных материалов.

Испытания на растяжение. Испытания на растяжение осуществляются на специальных разрывных или универсальных машинах. Образец, закрепленный в захватах машины, подвергается принудительному удлинению. Растягивающая сила создается механическим или гидравлическим приводом. Скорость перемещения захватов должна быть не более 20 мм/мин. В этом случае нагружение считается *статическим*, то есть не учитываются силы инерции.

Основное требование при выборе конструкции образца – на той его части, где будут проводиться измерения, напряженное состояние должно быть однородным (одинаковым). Форма одного из стандартных образцов, применяемых в опытах на растяжение, показана на рисунке 2.14. Головки по его концам служат для закрепления в нижнем и верхнем захватах машины. На основании принципа Сен-Венана деформация средней части образца однородна, т. к. не зависит от распределения нагрузки в зоне захвата.

В области однородности выбирают базу измерения l_0 и устанавливают *тензометры* для замера упругих деформаций. Упругопластическое удлинение базы Δl измеряют специальным *датчиком перемещений*.

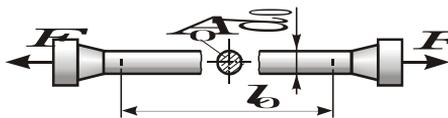


Рисунок 2.14

В процессе испытания на растяжение, с помощью диаграммного аппарата, установленного на испытательной машине, автоматически вычерчивается график зависимости удлинения образца Δl от растя-

¹⁾ Например, ГОСТ 1494–84 «Металлы. Методы испытаний на растяжение» и др.

гивающей силы F (рисунок 2.15). Полученный график называют машинной диаграммой растяжения.

Пользоваться диаграммой растяжения неудобно, так как она существенно зависит от длины испытуемого образца и площади его поперечного сечения. Чтобы она характеризовала механические свойства материала, а не конкретного образца, ее строят по машинной диаграмме растяжения в относительных координатах, переходя от F и Δl к величинам σ и ε по формулам

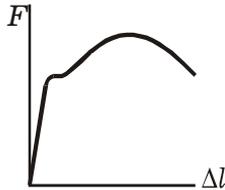


Рисунок 2.15

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где A_0 – площадь поперечного сечения образца в рабочей зоне до нагружения;
 l_0 – принятая база.

В опытах на растяжение обычно используют два типа цилиндрических образцов (см. рисунок 2.14): нормальные ($l_0/d_0 = 10$) и укороченные ($l_0/d_0 = 5$). При изучении свойств листовых материалов испытывают образцы прямоугольного поперечного сечения.

Испытания на сжатие. Испытания проводят на специальных прессах или на универсальных машинах и строят диаграммы сжатия. В опытах на сжатие используют образцы, выполненные в виде коротких цилиндров высотой $h_0 \leq 3d_0$ (d_0 – диаметр), кубиков и призм.

2.9 Диаграммы растяжения

Диаграмма растяжения малоуглеродистой строительной стали. На рисунке 2.16 представлена *диаграмма растяжения пластичной стали* (малоуглеродистой стали Ст3). Такого типа диаграмма является *условной диаграммой растяжения*. Условность ее заключается в том, что деформации и напряжения получены путем деления на первоначальные длину l_0 и площадь поперечного сечения A_0 , хотя в процессе растяжения эти величины изменяются.

Участок I соответствует упругим деформациям материала. Здесь справедлив закон Гука, и величина деформации прямо пропорциональна напряжению (прямая OA). Напряжение σ_{pr} в конечной точке A называется *пределом пропорциональности*.

Взяв отношение текущих значений напряжения σ и деформации ε на участке OA , с учетом закона Гука (2.5) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma/\varepsilon = E\varepsilon/\varepsilon = E.$$

Следовательно, модуль Юнга численно равен тангенсу угла наклона к горизонтали участка OA диаграммы растяжения.

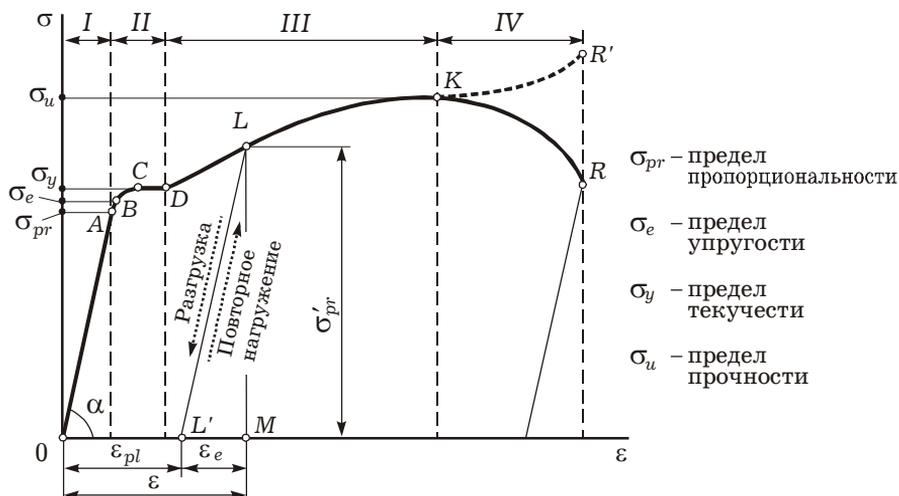


Рисунок 2.16

Участок II состоит из трех характерных разделов. От точки *A* до *B* диаграмма криволинейна, но деформации остаются упругими, т. е. при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры. Напряжение σ_e , соответствующее точке *B*, называется *пределом упругости*. При дальнейшем увеличении нагрузки после точки *B* появляются пластические деформации.

В точке *C* начинается процесс деформации образца без увеличения внешней нагрузки – *течение материала*. Участок *CD* называется *площадкой текучести*. В процессе текучести у стальных образцов существенно меняются электропроводность, магнитные свойства, происходит выделение тепла и другие процессы. Поверхность полированного образца покрывается линиями (рисунок 2.17, *a*), наклоненными к его оси примерно под углом 45° (*линии Людерса – Чернова*¹⁾). Появление этих линий связано со скольжением материала по плоскостям, на которых действуют максимальные касательные напряжения (см. подразд. 2.7). Напряжение σ_y , соответствующее точке *C*, называется *пределом текучести*.



Рисунок 2.17

¹⁾ Эти линии впервые описаны в 1859 г. немецким металлургом В. Людерсом и независимо от него в 1884 г. русским металлургом Д. К. Черновым (1839–1921).

Участок III характеризуется увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. После прекращения текучести сталь упрочнилась и снова способна противостоять деформированию. Поэтому этот участок называется *зоной упрочнения* материала.

Наибольшее напряжение σ_u , возникающее в образце до его разрушения, называется *пределом прочности* (или *временным сопротивлением*). Это отношение наибольшей силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения.

Участок IV начинается в точке *K* и характеризуется образованием местного сужения – *шейки* (см. рисунок 2.17, б), в пределах которой и происходит в дальнейшем разрыв образца.

При этом *условное напряжение* в образце (определяемое делением силы на первоначальную площадь сечения) уменьшается соответственно уменьшению растягивающей силы (участок *KR* на диаграмме). *Истинное напряжение* по сечению шейки (т. е. напряжение, отнесенное к площади поперечного сечения шейки) при этом всегда возрастает (участок *KR'*, показанный штриховой линией). Разрушению образца соответствует точка *R* на диаграмме.

Различие между истинным и условным напряжением имеется не только после достижения предела прочности, но и на любой стадии испытания, так как при растяжении образца площадь его поперечного сечения уменьшается. Однако до нагрузки, соответствующей пределу прочности, это различие невелико и его обычно не учитывают.

Диаграммы растяжения без площадки текучести. Ярво выраженная площадка текучести присуща только диаграммам сталей с содержанием углерода 0,1–0,3 %, латуни и некоторых видов бронзы. Большинство же конструкционных материалов не имеет площадки текучести на диаграмме растяжения (рисунок 2.18). Это, например, алюминиевые сплавы, стали с содержанием углерода менее 0,1 % или 0,3–5 %, легированные стали. После упругой стадии деформирования диаграмма растяжения таких материалов получает закругление и затем сразу переходит в кривую, характеризующую стадию упрочнения.

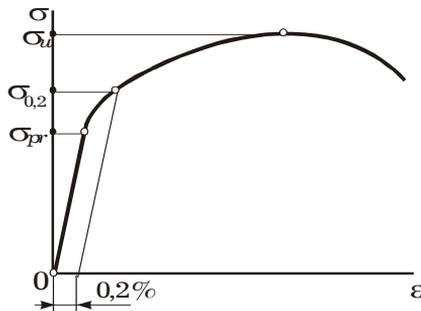


Рисунок 2.18

Таким образом, указанные материалы ведут себя как пластичные, т. е. разрушаются после развития больших остаточных деформаций.

Рисунки 2.17, б и 2.18

Для пластичных материалов, не имеющих площадки текучести, вводится условное понятие *технического предела текучести* (в отличие от физического, охарактеризованного выше). За него принимают напряжение, при котором остаточная деформация достигает примерно того же значения, что и при наличии площадки текучести. В качестве условного предела текучести обычно берется $\sigma_{0,2}$, т. е. напряжение, соответствующее пластической деформации $\varepsilon_{pl} = 0,2 \%$.

Диаграммы растяжения хрупких материалов. Типичная диаграмма растяжения хрупких материалов показана на рисунке 2.19. Здесь отклонение от закона Гука наблюдается в начальной стадии нагружения и модуль Юнга не является постоянной величиной.

Однако в пределах тех невысоких растягивающих напряжений, при которых хрупкие материалы работают в конструкциях, криволинейность диаграммы незначительна и ею пренебрегают, заменяя кривую секущей и считая

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \text{const}.$$

Хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению. Предел прочности σ_u при растяжении невелик. Опасность хрупкого разрушения заключается в том, что оно происходит быстро, почти внезапно, без образования шейки.

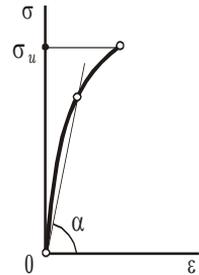


Рисунок 2.19

2.10 Упругие и пластические деформации

Предположим, что напряжение в испытываемом образце не превышает предела упругости σ_e . Если снять растягивающую нагрузку, то при разгрузке деформации будут уменьшаться по тому же закону, по какому они увеличивались при нагружении. Процесс разгрузки изобразится линией BAO на диаграмме (см. рисунок 2.16). Следовательно, в образце возникали *упругие деформации* $\varepsilon = \varepsilon_e$.

Если образец нагружен выше предела упругости, то при его разгрузке деформация полностью не исчезает. Она уменьшается только на величину своей упругой части. На диаграмме линия разгрузки представляет собой прямую LL' . В этом случае деформация образца определяется так:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{pl},$$

где ε_e — упругая деформация;

ε_{pl} — остаточная (пластическая) деформация.

Многочисленные испытания показывают, что при разгрузке прямая LL' практически параллельна первоначальному участку OA . Это явление называют *упругой разгрузкой*.

Эффекты упрочнения. Если стальной образец подвергнуть растяжению до пластического состояния и затем разгрузить, то, как отмечалось ранее, появится остаточная деформация. При повторном нагружении после некоторого «отдыха» материала (перерыва) сталь опять начнет работать упруго, повторяя прямую разгрузки $L'L$ и следуя затем диаграмме однократного растяжения LKR (см. рисунок 2.16).

Предел пропорциональности, как нетрудно видеть, повышается ($\sigma'_{pr} > \sigma_{pr}$), но полное удлинение уменьшается в результате необратимой пластической деформации, приобретенной во время первого нагружения. Площадка текучести, если она была преодолена в процессе предыдущего цикла, при повторном нагружении не возникает, т. е. материал становится более жестким, упрочняется. Такое повышение упругих свойств называется *наклепом*.

Наклеп для элементов конструкций может быть как положительным, так и отрицательным явлением. При вторичном растяжении образец разрушается как типично хрупкий, так как его пластические свойства снижаются. При сжатии наклеп может быть полезен как повышающий твердость и сопротивляемость вибрационным воздействиям. К наклепу прибегают и в случаях, когда необходимо снизить деформативность элементов: например, для устранения провисания проводов или уменьшения нежелательного удлинения проволочных канатов, грузовых цепей в процессе эксплуатации. При необходимости наклеп устраняют термической обработкой.

Увеличение предела текучести материала при растяжении приводит, как правило, к уменьшению его при сжатии. Подобное изменение механических характеристик материала после пластического деформирования носит название *эффекта Баушингера*¹⁾.

2.11 Диаграммы сжатия

Диаграммы сжатия пластичных материалов. Испытание на сжатие пластичных материалов, несмотря на простоту, менее распространено, чем испытание на растяжение. Объясняется это, прежде всего, тем, что в упругой стадии и при малом развитии пластических деформаций диаграмма сжатия таких материалов полностью повторяет диаграмму растяжения (рисунок 2.20) и не дает никаких новых механических характеристик. Пределы пропорциональности, упругости и текучести имеют те же значения. Они и модуль Юнга для малоуглеродистой стали при растяжении и сжатии считаются совпадающими.

¹⁾ *Баушингер* Иоганн (J. Bauschinger) (1834—1893) – немецкий ученый-механик второй половины XIX века. Впервые в опытах на сжатие использовал короткие образцы, что позволило ему вычислить коэффициент Пуассона с достаточной степенью точности. Эффект сформулировал в 1879 г.

Различия начинаются после предела текучести. Площадка текучести менее выражена, чем при растяжении. Сжатие сопровождается увеличением площади поперечного сечения образца, поэтому испытание требует постоянно возрастающей нагрузки.

Исследуемый образец (цилиндр) сначала принимает бочкообразную форму (рисунок 2.21), а затем, не разрушаясь, расплющивается. Дальнейшее испытание ограничивается возможностями испытательной машины.

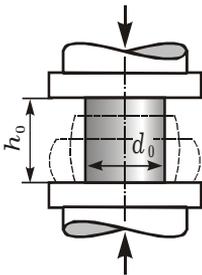


Рисунок 2.21

Диаграмма сжатия хрупкого материала по виду напоминает диаграмму растяжения (рисунок 2.22), но сопротивление сжатию в несколько раз больше, чем сопротивление растяжению ($\sigma_{uc} \gg \sigma_{ut}$). Разрушение при сжатии происходит обычно путем сдвига одной части образца относительно другой.

Плоскость сдвига в чугуном образце наклонена примерно под углом 45° к оси (рисунок 2.23, а), что объясняется действующими на ней максимальными касательными напряжениями. Характер разрушения бетонного кубика показан на рисунке 2.23, б.

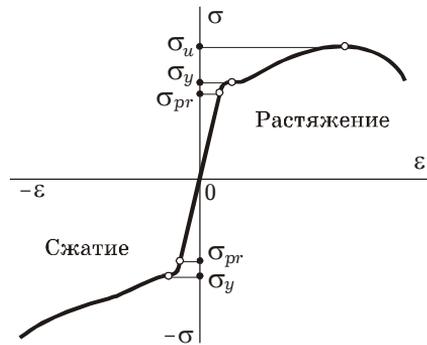


Рисунок 2.20

Следовательно, определить предел прочности на сжатие σ_{uc} для пластичных материалов невозможно. В расчетной инженерной практике, например для конструкционных сталей, его условно принимают таким же, как и на растяжение σ_{ut} :

$$\sigma_{uc} = \sigma_{ut}.$$

Диаграммы сжатия хрупких материалов.

Для хрупких материалов, таких как чугун, бетон и другие строительные материалы, испытание на сжатие является основным. Их образцы доводят до разрушения, а предел прочности устанавливают, как при растяжении:

$$\sigma_u = F_{\max} / A_0.$$

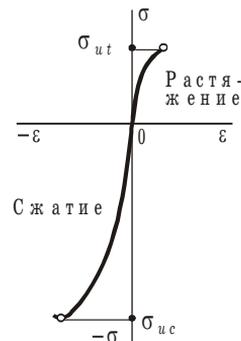


Рисунок 2.22

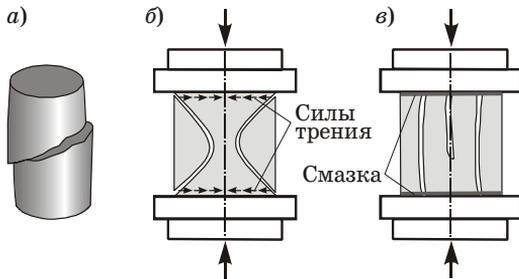


Рисунок 2.23

Если уменьшить влияние сил трения путем смазки, то образец разрушится при меньшей нагрузке, характер разрушения при этом будет другим (рисунок 2.23, в). Для большинства материалов стандартным является испытание без смазки.

2.12 Механические характеристики материалов

Механическими характеристиками конструкционных материалов называются величины, характеризующие их прочность, пластичность, твердость и т. д., а также модули упругости и коэффициент Пуассона.

Характеристики прочности. Основными механическими характеристиками прочности пластичных материалов являются предел текучести σ_t и предел прочности σ_u при растяжении, хрупких – предел прочности при сжатии σ_{uc} .

Характеристики пластичности. При испытании на растяжение образцов из пластичных материалов кроме характеристик прочности определяют также следующие характеристики пластичности:

- *относительное остаточное удлинение при разрыве*

$$\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%,$$

где l_0 – первоначальная длина образца;

l_1 – суммарная длина двух частей разорванного образца;

- *относительное остаточное сужение при разрыве*

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%,$$

где A_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца;

A_1 – площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки после разрыва.

Характеристики разрушения. В подразд. 2.6 было показано, что площадь диаграммы $F \sim \Delta l$ в пределах упругих деформаций выражает работу силы F в тех же рамках. Очевидно, площадь всей диаграммы растяжения или сжатия характеризует *полную работу, затраченную на разрушение образца.*

Из сопоставления диаграмм на рисунке 2.24 видно, что для разрушения пластичного материала необходимо затратить значительно большую работу, чем для разрушения хрупкого. Следовательно, если конструкция предназначена для восприятия динамических нагрузок, которые сопровождаются выделением большого количества энергии, предпочтение должно быть отдано пластичному материалу.

Хрупкие материалы легко и быстро разрушаются от динамических, а особенно от ударных воздействий из-за своей недостаточной энергоемкости. С другой стороны, при статическом нагружении хрупкие материалы вполне работоспособны и надежны.

Ударной вязкостью называют величину, характеризующую способность материала

сопротивляться хрупкому разрушению от действия ударных нагрузок. Меру сопротивления удару определяют на специальных копрах, на которых при помощи маятника разрушаются образцы. Ударную вязкость a определяют как отношение работы W , затраченной на разрушение образца, к площади его поперечного сечения:

$$a = W/A.$$

Твердость. *Твердостью* называют способность материала сопротивляться механическому проникновению в него другого тела. Наиболее широкое распространение получили испытания твердости по Бринеллю¹⁾ и по Роквеллу²⁾.

При испытании по Бринеллю стальной шарик, имеющий твердость стекла (из закаленной хромистой стали), диаметром 10 мм вдавливается определенной силой F в испытуемый материал (для стали $F = 30$ кН). После этого измеряют диаметр полученного отпечатка и находят величину A площади сферической поверхности, оставшейся в материале в результате его пластической деформации. Величина давления шарика F/A является мерой твердости материала и называется *числом Бринелля* $HB = F/A$.

При испытании по Роквеллу в материал вдавливают острый алмазный наконечник в виде конуса. *Число Роквелла* HR определяется, как и HB . Принципиальное отличие в том, что твердость определяется не площадью поверхности отпечатка индентора, а

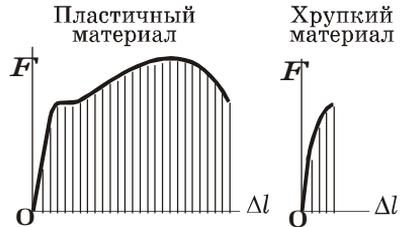


Рисунок 2.24

¹⁾ Бринелль Ю. А. (J. A. Brinell) (1849–1925) – шведский инженер, метод определения твердости предложил в 1900 году, HB – Hardness Brinell.

²⁾ Роквелл С. П. (S. P. Rockwell) (1886–1940) – американский металлург, HR – Hardness Rockwell.

глубиной его проникновения в исследуемый образец. В справочной литературе приведены таблицы, устанавливающие зависимость между твердостью по Бринеллю и Роквеллу.

Испытания материалов должны проводиться по методикам, регламентированным ГОСТами и ведомственными нормами. Для некоторых конструкционных материалов они приведены в приложении Б.

2.13 Инженерные методы расчета на прочность.

Расчет по допускаемым напряжениям

Рассмотрим вопрос о том, как использовать результаты испытаний в практических расчетах конструкций на прочность.

Историческая справка. Вплоть до начала XIX века большинство конструкторов и инженеров устанавливали размеры элементов машин и сооружений без расчета. Они руководствовались профессиональными традициями, накопленными в течение столетий. Нередко опыт приобретался тяжелой ценой обрушения неудачно выполненных сооружений.

В то же время разрабатывались методы расчета конструкций, но они в основном были направлены на поиск разрушающей нагрузки. Считалось, что конструкция может нормально работать вплоть до разрушения. Экспериментальные данные о поведении материалов при больших нагрузках отсутствовали. Приходилось вводить схемы вероятного разрушения, которые были необоснованными и часто ошибочными.

В 1826 г. Л. Навье высказал мысль об отказе от расчета конструкций по состоянию разрушения и выдвинул прогрессивную для своего времени идею рабочего состояния (напряженно-деформированного состояния, названного реальной, рабочей нагрузкой). При таком подходе нет необходимости задаваться схемой разрушения. Достаточно определить напряжения при фактической нагрузке и сопоставить их с допускаемым значением.

Методы расчета. Можно выделить *три основных метода расчета* элементов конструкций или деталей машин на прочность при силовых воздействиях:

- по допускаемым напряжениям;
- допускаемым нагрузкам (разрушающим нагрузкам);
- предельным состояниям.

Рассмотрим каждый из них подробнее.

Расчет по допускаемым напряжениям. У пластичных материалов *опасное состояние* характеризуется появлением значительных пластических деформаций, у хрупких – возникновением трещин. Для каждого материала устанавливается *опасное (предельное) напряжение* σ_{lim} :

$$\sigma_{\text{lim}} = \begin{cases} \sigma_y & (\text{для пластичных материалов предел текучести}), \\ \sigma_u & (\text{для хрупких материалов предел прочности}). \end{cases}$$

Далее определяется *допускаемое напряжение*

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n_{\sigma}},$$

где n_{σ} – коэффициент запаса прочности ($n_{\sigma} > 1$), который предусматривает возможный рост нагрузок, отклонения прочностных качеств сооружения в худшую сторону, неточность расчета и изготовления конструкции и т. д.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma], \quad (2.16)$$

где σ_{max} – наибольшее по абсолютной величине напряжение в конструкции.

В настоящее время метод расчета по допускаемым напряжениям используется в машиностроении при расчетах деталей машин и механизмов. Ранее он применялся и в строительстве (для расчета железобетонных элементов – до 1938 г., для расчета металлических и деревянных элементов – до 1955 г.).

2.14 Расчет по допускаемым нагрузкам¹⁾

Метод расчета по допускаемым нагрузкам предполагает определение расчетным путем не напряжений, а максимальной нагрузки, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и не претерпевая непрерывно нарастающих пластических деформаций. В основу метода положено *условие предельного равновесия системы*, т. е. установление предельного значения внешней нагрузки, которая может быть уравновешена внутренними силами.

Для конструкций, выполненных из пластичных материалов, в отдельных зонах или элементах допускается работа материала за пределом упругости.

Диаграмма Прандтля. Достаточная для инженерной практики точность расчета достигается при использовании упрощенной диаграммы растяжения пластичных материалов – *диаграммы Прандтля*²⁾ (рисунок 2.25). Предполагается, что деформирование подчиняется закону Гука вплоть до σ_y , а далее происходит беспредельное развитие пластических деформаций. Если после достижения предела текучести напряжения уменьшаются сначала разгрузкой, а затем приложением нагрузки противоположного знака (штриховая линия),

¹⁾ Метод расчета по допускаемым нагрузкам был разработан в СССР в 30-х годах XX века.

²⁾ *Прандтль* Людвиг (L. Prandtl) (1875–1953) – немецкий механик и физик, один из основателей экспериментальной аэродинамики.

то материал сначала ведет себя как упругий, а затем происходит его деформирование при постоянном напряжении ($-\sigma_y$).

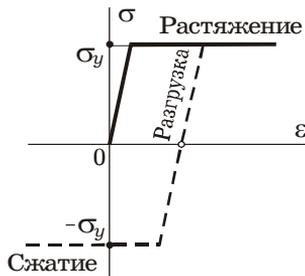


Рисунок 2.25

Материал, деформирование которого описывается диаграммой Прандтля, называется *идеальным упругопластическим*.

Определение допускаемой нагрузки. Рассмотрим последовательность расчета конструкций по допускаемым нагрузкам. По расчетной схеме конструкции максимальные напряжения σ_{\max} в опасной точке выражаются через внешнюю нагрузку F .

Если σ_{\max} в опасной точке достигают σ_y , то соответствующая нагрузка называется *опасной* и обозначается F_y .

При дальнейшем наращивании нагрузки напряжение в опасной точке будет оставаться постоянным и равным σ_y (согласно диаграмме Прандтля). Напряжения в других точках системы будут возрастать. Чем больше величина нагрузки, тем большее количество точек «охватывается» пластическими деформациями (напряжения в них становятся равными σ_y).

Неизбежен момент, когда зона пластических деформаций распространится настолько, что дальнейший рост нагрузки вызовет разрушение конструкции или ее геометрическую изменяемость. Соответствующая этому моменту нагрузка F_{\lim} будет являться *предельной (разрушающей)*.

Допускаемое (безопасное) значение нагрузки определяется введением в расчет коэффициента безопасности системы n_F , который устанавливается из опыта эксплуатации подобных конструкций, но не может быть меньше n_σ (чаще всего $n_F = (1,15 \dots 1,21)n_\sigma$):

$$[F] = \frac{F_{\lim}}{n_F}.$$

Условие прочности имеет вид

$$F \leq [F], \quad (2.17)$$

где F – внешняя нагрузка, действующая на конструкцию в процессе эксплуатации.

При рабочей нагрузке $F \leq [F]$ в наиболее опасных точках системы напряжение может быть близким или даже равным пределу текучести материала. Это не сказывается на условиях эксплуатации, но позволяет или снизить расход материала на изготовление конструкции, или при тех же его затратах повысить рабочие нагрузки.

2.15 Расчет по предельным состояниям

Принято считать, что рассмотренные выше методы расчета имеют существенный недостаток – *один коэффициент запаса* на все случаи работы сооружения. Исследования работы строительных конструкций показали, что аварии возникают в результате случайного совпадения нескольких факторов: отклонение нагрузки, снижение механических свойств материалов, неблагоприятные условия эксплуатации и т. д.

Указанный недостаток был устранен в методе расчета по предельным состояниям, принятом в 1955 г. для выполнения расчетов в строительстве. Конечно, новый метод не возник на пустом месте. Он использует основные принципы предшествующих расчетов.

Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, когда она теряет способность к сопротивлению внешним нагрузкам или ее эксплуатация становится затруднительной.

Согласно действующим нормативным документам (строительным нормам) предельные состояния подразделяются на две группы:

- *первая группа* (по потере несущей способности – полной непригодности к эксплуатации): хрупкое, пластичное, усталостное или иного характера разрушение; потеря устойчивости формы или положения; качественное изменение конфигурации; резонансные колебания; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации: текучесть или ползучесть материалов, сдвиги в соединениях, чрезмерное раскрытие трещин;
- *вторая группа* (по непригодности к нормальной эксплуатации – ограниченности эксплуатации, предусмотренной проектом): появление недопустимо больших перемещений (прогибов, осадок), колебаний, трещин и т. п.

Цель расчета – оградить сооружение от появления при эксплуатации какого-либо вида предельного состояния. Рассмотрим последовательность расчета по предельным состояниям.

Характеристические и расчетные воздействия. По нормативным документам¹⁾ устанавливаются *характеристические нагрузки* F_n – наибольшие нагрузки при нормальной эксплуатации зданий и сооружений. Далее определяются *расчетные нагрузки* F (F_d) – наибольшие нагрузки, которые могут появиться при случайном отклонении от нормативных нагрузок,

$$F = F_n \gamma_f,$$

где γ_f – частный коэффициент для воздействия, учитывающий возможность неблагоприятных отклонений значения воздействия от репрезентативного значения (коэффициент надежности по нагрузке).

¹⁾ СН 2.01.01-2022. Основы проектирования строительных конструкций.

После того, как установлены нагрузки, определяются напряжения и перемещения в элементах системы.

Характеристическое и расчетное сопротивление. По нормативным документам¹⁾ устанавливается *характеристическое сопротивление* R_k .

Например, для прокатной стали в качестве R_k принимается наименьшее контролируемое значение предела текучести σ_y , установленное ГОСТами на металл. Если допускается работа растянутых металлических элементов за пределом текучести, то в качестве R_k принимается наименьшее значение предела прочности.

Расчетное значение сопротивления R (R_d) допускается определять непосредственно из характеристического значения сопротивления материала или изделия, по формуле

$$R = \frac{R_k}{\gamma_M},$$

где γ_M – частный коэффициент для характеристики свойства материала и изделия, учитывающий возможные неблагоприятные отклонения характеристики свойства материала или изделия от характеристического значения ($\gamma_M > 1$).

Расчет на прочность. При расчетах на прочность (по первому предельному состоянию) в конструкции ограничиваются наибольшие напряжения. *Условие прочности* имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq R\gamma_c, \quad (2.18)$$

где γ_c – коэффициент условий работы (в большинстве случаев $\gamma_c \leq 1$).

Следовательно, формально условие прочности по первому предельному состоянию (2.18) совпадает с условием прочности (2.16) по допускаемым напряжениям, где вместо $[\sigma]$ взято $R\gamma_c$ ²⁾.

Расчет на жесткость. В случае расчета на жесткость (по второму предельному состоянию) в системе ограничивают максимальные перемещения δ_{\max} . *Условие жесткости* имеет вид

$$\delta_{\max} \leq [\delta], \quad (2.19)$$

где $[\delta]$ – допускаемое значение перемещений.

Замечание. Метод расчета по предельным состояниям позволяет производить прочностные расчеты конструкций, как в предположении упругой работы материала, так и с учетом пластических деформаций (по диаграмме Прандтля).

¹⁾ СП 5.04.01-2021. Стальные конструкции; СП 5.03.01-2020. Бетонные и железобетонные конструкции.

²⁾ В дальнейшем будем считать коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$.

Но этот метод имеет весьма существенный недостаток. В упругой стадии работы можно найти и напряжения, и перемещения. Но в пластической стадии для определения и проверки перемещений указанным методом пользоваться нельзя. Между тем, изменение геометрической формы любой конструкции допустимо лишь до некоторого предела, зависящего от назначения конструкции, степени ее ответственности и условий эксплуатации.

2.16 Расчеты стержней при растяжении-сжатии

Расчеты на прочность при упругой работе материала. Если стержень имеет постоянную площадь поперечного сечения по длине, то опасным является сечение, в котором возникает наибольшая продольная сила N_{\max} . В этом случае условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (2.20)$$

где σ_{\max} – максимальное напряжение в стержне;

N_{\max} – продольная сила в опасном сечении;

A – площадь поперечного сечения ($A = \text{const}$);

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Если площадь поперечного сечения переменна по длине стержня, то опасным является сечение, для которого максимально отношение N/A . Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma].$$

На практике используются *три типа расчетов на прочность*:

- *поверочный расчет* выполняется, если известны размеры стержней, внешние нагрузки и допускаемые напряжения. Вычисляются максимальные рабочие напряжения и сравниваются с допускаемыми напряжениями. После этого делается заключение, выполняется или не выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma];$$

- *подбор размеров поперечных сечений* элементов конструкций производится, если заданы внешние нагрузки (следовательно, известны внутренние продольные силы N) и допускаемые напряжения. Тогда из условия (2.20) для опасного сечения следует

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}; \quad (2.21)$$

- *определение грузоподъемности (несущей способности)* проводится, если известны размеры сечений элементов и допускаемые напряжения. Тогда величина продольной силы в опасном сечении

$$N_{\max} \leq A[\sigma].$$

По ней вычисляется максимальная величина внешней нагрузки F_{\max} . Эту задачу решают, главным образом, при реконструкции сооружений, когда необходимо выяснить, смогут ли существующие сооружения выдержать возросшие нагрузки.

Замечание. При расчетах строительных элементов конструкций используются те же типы расчетов на прочность. Вместо допускаемого напряжения применяется расчетное сопротивление R .

В упругой стадии работы стержней при растяжении-сжатии может производиться расчет на жесткость, когда ограничивают максимальные перемещения. Согласно *условию жесткости* (2.19) имеем

$$\delta_{\max} \leq [\delta],$$

где δ_{\max} – максимальные перемещения;
 $[\delta]$ – допускаемое значение перемещений.

Расчеты на прочность с учетом пластических деформаций (расчеты по несущей способности). При растяжении и сжатии напряжения по площади поперечного сечения стержня распределяются равномерно. Поэтому для *статически определимых систем* расчеты по всем трем методам (по допускаемым напряжениям, допускаемым нагрузкам и предельным состояниям) дают один и тот же результат. Для *статически неопределимых систем* результаты расчета различаются.

Считается, что деформирование материала подчиняется диаграмме Прандтля (см. подразд. 2.13). Расчет ведется в следующем порядке:

- 1) определяются продольные силы и напряжения в стержнях, выраженные через внешнюю нагрузку F ;
- 2) напряжения в наиболее нагруженном стержне σ_{\max} приравниваются σ_y и вычисляется *опасная нагрузка* F_y ;
- 3) предполагается, что нагрузка увеличивается так, чтобы напряжения в других стержнях достигали значения σ_y ; составляется *уравнение предельного равновесия*, из которого определяется *предельная нагрузка* F_{\lim} .

Далее производится один из типов расчетов:

- *поверочный расчет* выполняется, если известны размеры стержней, внешняя нагрузка F и коэффициент запаса n_F . Находится допускаемая нагрузка $[F] = F_{\lim}/n_F$ и проверяются выполненные условия прочности

$$F \leq [F];$$

- *определение грузоподъемности (несущей способности)* проводится, если известны размеры стержней и коэффициент запаса. Максимальная нагрузка, которая может быть воспринята конструкцией,

$$F_{\max} = [F] = F_{\text{lim}}/n_F;$$

- *определение запаса прочности* выполняется, если известны размеры стержней и внешняя нагрузка F . Коэффициент запаса

$$n_F = F_{\text{lim}}/F.$$

☑ **ПРИМЕР 2.5.** Система состоит из абсолютно жесткого бруса и двух стальных стержней 1 и 2 (рисунок 2.26, а). Длины стержней $l_1 = 1,5$ м; $l_2 = 2$ м; площади сечений $A_1 = 1$ см²; $A_2 = 1,4$ см²; угол $\alpha = 30^\circ$; предел текучести $\sigma_u = 240$ МПа, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, коэффициенты запаса прочности по напряжениям и нагрузкам одинаковы ($n_\sigma = n_F = n$).

Требуется:

1) определить внутренние продольные силы и напряжения в стержнях, выраженные через силу F ;

2) определить грузоподъемность системы, проведя расчет по допускаемым напряжениям;

3) определить грузоподъемность, проведя расчет по допускаемым нагрузкам.

1 Определение напряжений в стержнях

Уравнение статики. Отбросим опорные шарниры стержней и учтем их влияние на конструкцию продольными силами N_1, N_2 (рисунок 2.26, б). Если отбросить опору D , то появятся две неизвестные составляющие опорной реакции. Получаем четыре неизвестных усилия. Так как в задачах плоской статики можно составить только три независимых уравнения равновесия, то рассматриваемая система является один раз статически неопределимой (см. подразд. 1.6).

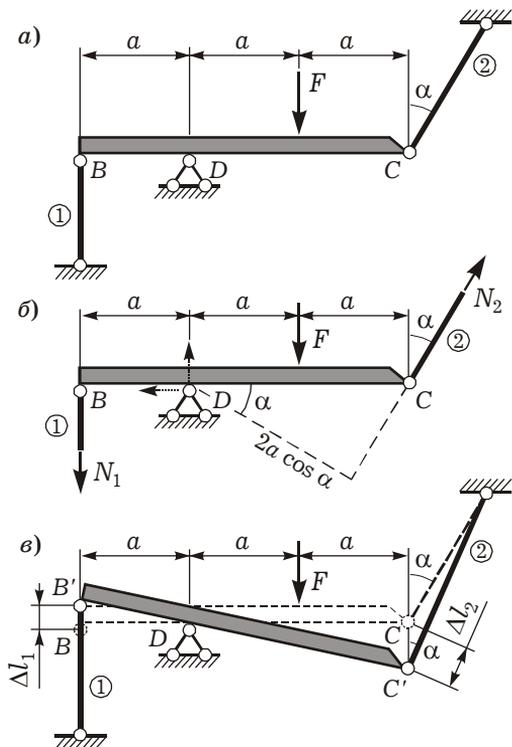


Рисунок 2.26

Исследуем условия равновесия бруса. Реакции опоры D нас не интересуют, поэтому составим уравнение моментов относительно точки D , в которое войдут обе искомые силы N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned} N_1 a + N_2 \cdot 2a \cdot \cos \alpha - Fa &= 0, \\ N_1 + 2 \cos \alpha \cdot N_2 &= F. \end{aligned} \quad (a)$$

Уравнение совместности перемещений. Для составления дополнительного уравнения совместности перемещений рассмотрим деформированную конструкцию (рисунок 2.26, в). В результате удлинения стержней брус повернется вокруг шарнира D , оставаясь прямым, т. е. из положения BDC он перейдет в положение $B'DC'$. Перемещение шарнира B равно удлинению первого стержня $BB' = \Delta l_1$, а перемещение шарнира C

$$CC' = \Delta l_2 / \cos \alpha.$$

Из подобия треугольников DBB' и DCC' получаем

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2 / \cos \alpha}{2a}, \quad \Delta l_2 = 2\Delta l_1 \cos \alpha.$$

Подставив сюда выражения полных удлинений стержней через продольные силы

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2},$$

получим еще одно уравнение, связывающее искомые силы N_1 и N_2 :

$$N_2 = 2 \frac{l_1 A_2}{l_2 A_1} N_1 \cos \alpha. \quad (б)$$

Продольные силы в стержнях. У нас имеется система из двух уравнений ((а) и (б)) относительно двух неизвестных величин. Для ее решения подставим второе уравнение в первое:

$$\left(1 + 4 \frac{l_1 A_2}{l_2 A_1} \cos^2 \alpha \right) N_1 = F.$$

С учетом числовых данных $N_1 = 0,241F$. Из соотношения (б) следует, что $N_2 = 0,438F$.

Нормальные напряжения в стержнях следующие:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,241F}{1 \cdot 10^{-4}} = 2410 F \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right); \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,438F}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 3130 F \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right).$$

Так как $\sigma_2 > \sigma_1$, то более нагруженным является стержень 2.

2 Расчет по допускаемым напряжениям

Определим F_{\max} – максимальное значение внешней силы F , при котором условие прочности выполняется в обоих стержнях. Для этого напряжение в более нагруженном втором стержне приравняем к допускаемому напряжению:

$$\sigma_2 = 3130 F_{\max} = [\sigma]; \quad F_{\max} = \frac{[\sigma]}{3130} = \frac{160 \cdot 10^6}{3130} = 51,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 51,1 \text{ кН}.$$

3 Расчет по допускаемым нагрузкам

Найдем опасную нагрузку F_y , при которой напряжения в наиболее нагруженном стержне σ_{\max} достигают предела текучести:

$$\sigma_{\max} = 3130 F_y = \sigma_y,$$

тогда
$$F_y = \frac{\sigma_y}{3130} = \frac{240 \cdot 10^6}{3130} = 76,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 76,7 \text{ кН}.$$

Следует отметить, что при $F = F_y$ весь материал стержня 2 перейдет в пластическое состояние, стержень 1 останется упругим.

Согласно диаграмме Прандтля при дальнейшем увеличении нагрузки сверх опасной F_y напряжения в стержне 2 остаются постоянными и равными пределу текучести. Напряжения в стержне 1 растут. Нагрузка, при которой во всех точках системы (и в стержне 1, и в стержне 2) напряжения достигают предела текучести и система находится в равновесии, является *предельной*.

Предельную нагрузку определим из условия предельного равновесия. Для этого в уравнении равновесия (а) выразим продольные силы в стержнях через напряжения ($N_1 = \sigma_1 A_1$; $N_2 = \sigma_2 A_2$)

$$\sigma_1 A_1 + 2 \cos \alpha \cdot \sigma_2 A_2 = F$$

и приравняем напряжения к пределу текучести ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$), а силу F – к предельной нагрузке ($F = F_{\text{lim}}$):

$$F_{\text{lim}} = \sigma_y (A_1 + 2A_2 \cos \alpha). \quad (б)$$

Условие (б) называется *условием предельного равновесия*, так как при увеличении нагрузки сверх F_{lim} внутренние силы не будут уравновешивать внешнюю нагрузку, система станет геометрически изменяемой.

Из условия (б)

$$F_{\text{lim}} = 240 \cdot 10^6 (1 + 2 \cdot 1,4 \cdot \cos 30^\circ) \cdot 10^{-4} = 82,2 \cdot 10^3 \text{ Н} = 82,2 \text{ кН}.$$

Определим коэффициент запаса прочности и допускаемую нагрузку

$$n = \frac{\sigma_y}{[\sigma]} = \frac{240 \cdot 10^6}{160 \cdot 10^6} = 1,5, \quad [F] = \frac{F_{\text{lim}}}{n} = \frac{82,2 \cdot 10^3}{1,5} = 54,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 54,8 \text{ кН}.$$

Максимальное значение внешней силы

$$F_{\max} = [F] = 54,8 \text{ кН}.$$

Выводы. Разница в значениях максимальной внешней нагрузки

$$\Delta(F_{\max}) = \frac{54,8 - 51,1}{51,1} \cdot 100\% = 7,2\%.$$

Таким образом, при расчете по допускаемым нагрузкам несущая способность (грузоподъемность) оказалась на 7,2% выше, чем при расчете по допускаемым напряжениям, т. е. расчет по допускаемым нагрузкам позволяет проектировать более экономичные конструкции, обеспечивая равнопрочность их элементов.

2.17 Влияние температуры и радиации на механические характеристики материалов

Деление материалов на пластичные и хрупкие в зависимости от величины остаточного удлинения является условным. Свойства пластичности во многом зависят от внешних условий, при которых производятся испытания. Так, при низких температурах сталь может стать хрупким материалом, а образец из чугуна, испытываемый при высоком давлении, разрушается с образованием шейки и ведет себя, как пластичный материал. Одна и та же высоколегированная сталь может быть пластичной после отпуска и хрупкой после закалки.

Влияние температуры на свойства металлов. При повышенных температурах модули упругости и предел текучести, как правило, уменьшаются. Коэффициент Пуассона зависит от температуры незначительно.

Для описания зависимости модулей упругости от температуры предлагается использовать формулу, введенную Дж. Ф. Беллом¹⁾ после экспериментального исследования более 500 металлов и сплавов:

$$G(T) = G(0)\varphi(T); \quad E(T) = E(0)\varphi(T);$$

$$\varphi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \leq 0,06; \\ 1,03[1 - T/(2T_m)], & 0,06 < T/T_m \leq 0,57, \end{cases} \quad (2.22)$$

где T – температура материала, К;
 $G(T), E(T)$ – модуль сдвига и модуль Юнга при температуре T ;
 $G(0), E(0)$ – те же модули при так называемой нулевой температуре;
 $\varphi(T)$ – линейная функция температуры;
 T_m – температура плавления материала.

Значения $G(0), E(0)$ легко получить, используя соотношения (2.22), если известны величины соответствующих модулей при комнатной температуре и температура плавления материала.

Зависимость предела текучести от температуры экспериментально исследовалась многими механиками. Один из способов ее описания предложил Н. А. Махутов²⁾:

$$\sigma_y(T) = \sigma_{y0} e^{k(1/T - 1/T_0)},$$

где σ_{y0} – предел текучести при температуре T_0 , $\sigma_{y0} = \sigma_y(T_0)$;
 k – экспериментальная константа материала.

¹⁾ Белл Джеймс Фредерик (J. F. Bell) (1914–1995) – профессор физики университета Джона Гопкинса, США. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. – М.: Наука, 1984. – 600 с.

²⁾ Махутов Николай Андреевич (род. 1937) – чл.-кор. РАН. Механика малоциклового разрушения. – М.: Наука, 1986. – 264 с.

Например, для сплава Д16Т: $T_m = 933 \text{ К}$,
 $\kappa = 301 \text{ К}^{-1}$, $G(0) = 0,308 \cdot 10^{11} \text{ Па}$,
 $E(0) = 0,829 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Изменение диаграммы растяжения образца в поле повышенных температур схематично показано на рисунке 2.27. Диаграмма наклоняется вправо (за счет уменьшения модуля Юнга), становится ниже (уменьшается предел текучести) и вытягивается вдоль оси деформаций.

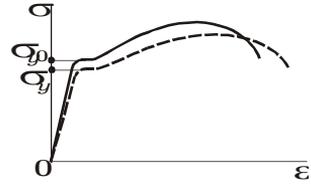


Рисунок 2.27

Влияние радиации на свойства материалов. При облучении элементов конструкций нейтронами, ионами, электронами изменяются механические свойства материалов: твердость, предел текучести, пластичность, ползучесть. Особый интерес представляет *нейтронное облучение*. Согласно экспериментальным данным рост величины нейтронного потока $I = \varphi t$ (φ — интенсивность потока, t — время) при малых деформациях, как правило, приводит к радиационному упрочнению материала и росту предела текучести. Остановимся на исследовании этого явления при постоянной температуре.

Для аналитического описания радиационного упрочнения материала предлагается следующая формула:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + A \sqrt{1 - e^{-\xi I}} \right), \quad (2.23)$$

где σ_y , σ_{y0} — пределы текучести облученного и необлученного материалов.

Наличие в формуле (2.23) двух констант A и ξ позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать экспериментальные данные. Здесь учтено, что с ростом дозы облучения происходит насыщение, и упрочнение прекращается. Также при отсутствии радиации ($I = 0$) из формулы следует нулевое упрочнение ($\sigma_y = \sigma_{y0}$), что выгодно отличает ее от формулы Мэйкина и Минтера¹⁾ для стальных сплавов.

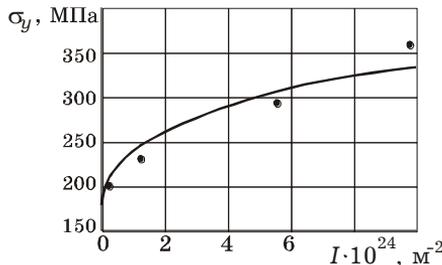


Рисунок 2.28

На рисунке 2.28 показаны точками экспериментальные значения пределов текучести алюминиевого сплава 356 в зависимости от величины нейтронного потока [25]: $A = 1,09$;
 $\xi = 9,73 \cdot 10^{-26} \text{ м}^2/\text{нейтрон}$.

¹⁾ Makin, M. J. Acta Metall / M. J. Makin, F. J. Minter. — 1960. — Vol. 8. — 691–699.

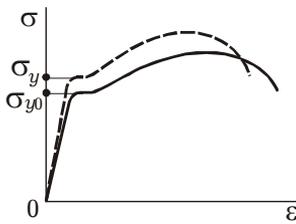


Рисунок 2.29

Соответствие экспериментальных точек и расчетных данных (сплошная кривая) в достаточной степени удовлетворительно.

Влияние радиации на константы упругости – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д. – незначительно. Изменение диаграммы растяжения в радиационном поле схематично показано на рисунке 2.29. У облученного образца диаграмма становится уже и выше.

2.18 Вязкоупругие свойства материалов

Понятие о реономных свойствах материалов. Полимерные материалы и бетоны при нормальных рабочих температурах, а металлы при нагреве проявляют в процессе эксплуатации *реономные* свойства. Так называются механические свойства материалов, существенно зависящие от времени. Эту зависимость можно исследовать при растяжении цилиндрических образцов.

Ползучестью, или *крипом*, называется процесс изменения деформаций со временем при постоянном напряжении. Соответствующие графики называются *кривыми ползучести*.

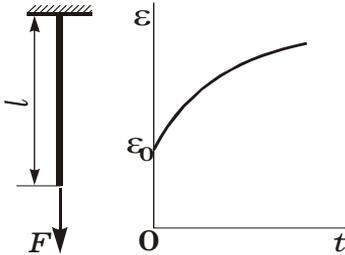


Рисунок 2.30

На рисунке 2.30 схематически показаны условия испытания и кривая ползучести. Верхний конец образца закрепляется, к нижнему сечению прикладывается нагрузка. Ведется наблюдение за изменением длины в расчетной части образца и строится кривая изменения деформации ε от времени t . Деформация увеличивается от своего начального значения ε_0 , которое соответствует «мгновенно» приложенной нагрузке F .

Явление уменьшения напряжения в образце при постоянной деформации называется *релаксацией*. Предположим, что образец «мгновенно» растянули так, что расчетная длина l_0 стала равной l (рисунок 2.31). Для этого потребовалась сила F_1 . Образец закрепили в растянутом состоянии на некоторое время. Затем его освободили от закрепления и вновь приложили такую нагрузку, чтобы расчетную часть образца

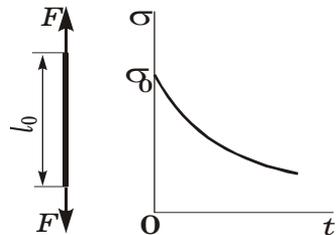


Рисунок 2.31

растянуть до величины l . Оказывается, потребовалась нагрузка F_2 , меньшая первоначальной F_1 . Поэтому говорят, что напряжение, требующееся для поддержания постоянной деформации, падает, уменьшается, *релаксирует*.

Ядра ползучести и релаксации. В реальных элементах конструкций ползучесть и релаксация проявляются одновременно, взаимосвязано. Их можно отразить аналитически, если ввести время в связь напряжения и деформации образца при растяжении.

Предположим, что всё предшествующее время действия напряжений влияет на деформацию в данный момент. Тогда соответствующие уравнения называют *наследственными соотношениями теории линейной вязкоупругости* и записывают в виде, предложенном Больцманом¹⁾:

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) - \int_0^t R(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau.$$

Функцию памяти $\Gamma(t)$ называют *ядром ползучести*, а $R(t)$ – *ядром релаксации* материала при растяжении. Подставив $\sigma(t)$ из второго уравнения в первое и потребовав его тождественного выполнения, получим соотношение, связывающее ядра между собой:

$$R(t) - \Gamma(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau)R(\tau)d\tau.$$

Следовательно, вполне достаточно определить одно из ядер экспериментально, второе можно получить аналитически. При других видах деформирования (изгиб, кручение) напряжения с деформациями можно связать подобным образом.

На практике в основном используются следующие три аналитические выражения для ядер ползучести.

▪ *Экспоненциальное ядро*

$$\Gamma(t) = Ae^{-pt} \quad (A > 0; p > 0).$$

Наличие в этом представлении только двух констант материала A и p затрудняет его применение для описания экспериментальных данных в широком диапазоне времени, особенно в начальный период нагружения.

¹⁾ *Больцман* Людвиг (L. Boltzmann) (1844–1906) – австрийский физик, один из основателей статистической физики и механики, иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук (1899).

- *Степенное ядро (Дуффинга¹⁾)* имеет особенность при $t = 0$, что соответствует высокой скорости деформирования материала в момент приложения нагрузки

$$\Gamma(t) = \frac{C}{t^{1-\beta}} \quad (0 < \beta < 1).$$

Ограничение на константу β связано с тем, что при $\beta = 0$ скорость деформации и сама деформация в момент приложения нагрузки становятся бесконечно большими. Ядро хуже работает при достаточно больших временах нагружения.

- *Ядро Ржаницына²⁾*

$$\Gamma(t) = \frac{Ae^{-pt}}{t^{1-\beta}} \quad (p > 0; 0 < \beta < 1).$$

Это типичное ядро, в котором объединяются экспоненциальные и степенные свойства. Оно является наиболее применяемым в настоящее время для практических расчетов. В качестве примера приведем параметры ядра релаксации для фторопласта [21]:

$$A = 0,02366 \text{ с}^{-\beta}, \quad p = 3,33 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad \beta = 0,05.$$

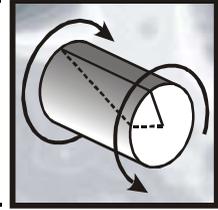
По изотермической радиационной ползучести экспериментальные данные практически отсутствуют. Радиационное упрочнение материала приводит к уменьшению скорости движения дислокаций (микрорповреждений) и замедлению ползучести. Но увеличивающееся при этом количество точечных дефектов способствует убыстрению ползучести, например, для урана – в 50–100 раз. Наряду с явлением ускоренной ползучести под облучением наблюдается также ускоренная релаксация напряжений как в делящихся, так и в неделящихся материалах.

¹⁾ Георг *Дуффинг* (Georg Wilhelm Christian Caspar Duffing) (1861–1944) — немецкий инженер и изобретатель. В 1918 году математически описал колебания и их резонансы дифференциальным уравнением, получившим его имя (Уравнение Дуффинга).

²⁾ *Ржаницын* Алексей Руфович (1911–1987) – выдающийся советский ученый. Разработал теорию составных стержней, которая в настоящее время широко применяется при расчете многоэтажных зданий с учетом податливости соединений, метод расчета составных стержней по предельному состоянию.

3

СДВИГ. КРУЧЕНИЕ



В предыдущих разделах было показано, что в различных сечениях стержня возникают и нормальные, и касательные напряжения, причем они обычно сопутствуют друг другу. На практике во многих случаях расчета на прочность вполне достаточно определить *наибольшие нормальные напряжения*. Таковы, например, расчеты на растяжение-сжатие.

Однако часто весьма существенными оказываются касательные напряжения, в результате чего разрушение элемента может произойти от взаимного сдвига его частей. В таких случаях прочность проверяют исходя из *наибольших касательных напряжений*.

3.1 Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется такое *напряженное состояние*, при котором на гранях выделенного из стержня элемента возникают только касательные напряжения (рисунок 3.1). Такие грани называются *площадками чистого сдвига*.

Деформация чистого сдвига характеризуется *изменением первоначально прямых углов* (см. подразд. 1.5).

Реализуется чистый сдвиг, например, при *срезе и кручении*. Пусть к брусу приложены перпендикулярно его оси две равные по модулю, но противоположно направленные силы F , действующие весьма близко друг от друга (рисунок 3.2, а).

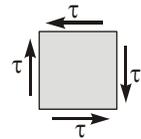


Рисунок 3.1

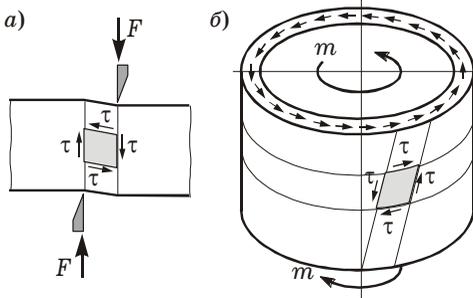


Рисунок 3.2

При достаточной величине этих сил произойдет срез – отделение одной части бруса от другой (например, при разрезании ножницами прута, полосы и т. д.).

Другим примером, иллюстрирующим состояние чистого сдвига, служит скручивание тонкостенной трубки (рисунок 3.2, б) моментом m .

Деформации при чистом сдвиге. Предположим, что из стержня можно вырезать элемент $abcd$, на гранях которого возникают только касательные напряжения (рисунок 3.3, а).

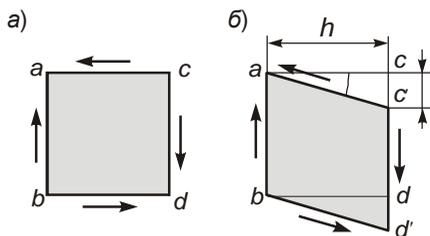


Рисунок 3.3

Поскольку по граням элемента нет нормальных напряжений, то вдоль них нет и удлинений. В то же время грани ab и cd смещаются относительно друг друга, происходит изменение прямых углов. Предположим, что грань cd относительно ab заняла положение $c'd'$ (рисунок 3.3, б).

Полным сдвигом называется величина абсолютного смещения граней:

$$\delta = cc'.$$

Величина δ зависит от расстояния h между смещающимися гранями.

Относительный сдвиг (угол сдвига) γ – это величина изменения прямого угла (выражается в радианах). В силу малости деформаций $\gamma \ll 1$, следовательно, $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$, поэтому

$$\gamma = \delta / h. \quad (3.1)$$

Закон Гука при чистом сдвиге. В пределах упругости касательные напряжения τ связаны с относительным сдвигом γ *законом Гука*

$$\tau = G\gamma, \quad (3.2)$$

где G – *модуль сдвига*, который выражается через введенные ранее модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Как отмечалось в п. 2.2, коэффициент Пуассона $0 < \nu \leq 0,5$. Отсюда $G = (0,33 \dots 0,5)E$. Для стали, например,

$$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \nu = 0,3; \quad G = \frac{2,06 \cdot 10^{11}}{2(1 + 0,3)} \approx 0,79 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Испытания на сдвиг. Закон Гука при сдвиге подтвержден экспериментально. Чаще всего испытания на сдвиг проводят путем скручивания тонкостенных трубчатых образцов (см. рисунок 3.2, б). При этом в них возникает однородная деформация сдвига.

Диаграмма $\tau \sim \gamma$ при чистом сдвиге сходна с диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$ при растяжении (рисунок 3.4). На ней можно выделить аналогичные характерные точки: τ_{pr} – предел пропорциональности; τ_e – предел упругости; τ_y – предел текучести; τ_u – предел прочности.

Для изотропных материалов испытания на сдвиг не имеют самостоятельного значения. Специальным выбором осей координат сдвиг может быть сведен к суперпозиции растяжения и сжатия. Это позволяет теоретически построить диаграмму сдвига по диаграммам растяжения и сжатия и установить связь между механическими характеристиками растяжения и сдвига.

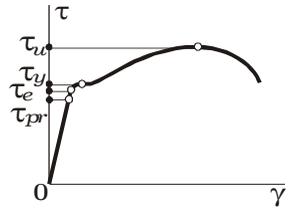


Рисунок 3.4

3.2 Расчет соединений, работающих на сдвиг

В отдельных сечениях некоторых конструкций возникают значительные касательные напряжения. В этих же сечениях, как правило, возникают и нормальные напряжения, а потому они не являются площадками чистого сдвига. Однако если нормальные напряжения в них значительно меньше касательных, то в *приближенных* расчетах учитываются только последние, а указанные сечения при этом рассматриваются как площадки чистого сдвига.

Понятие о срезе. *Срезом* называется такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях стержня отличны от нуля только поперечные силы (Q_y или Q_x).

С достаточной степенью точности можно считать, что деформация среза возникает при действии двух равных, близко расположенных сил, которые направлены противоположно друг другу в разные стороны перпендикулярно продольной оси бруса.

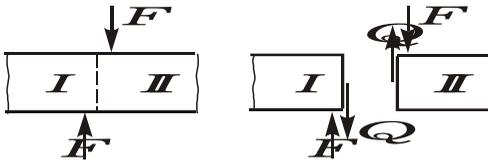


Рисунок 3.5

Проведенное в зоне сдвига поперечное сечение, разделит стержень на две части (рисунок 3.5).

Из условия равновесия отсеченных частей следует, что поперечная сила в этом сечении $Q = F$.

Поперечная сила Q является равнодействующей внутренних сил τdA на бесконечно малых площадках срезаемого сечения:

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (3.3)$$

Расчетная практика показывает, что касательные напряжения среза τ вполне допустимо считать *равномерно распределенными* по площади поперечного сечения A (рисунок 3.6). Тогда из (3.3) получаем

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (3.4)$$

Из соотношений (3.1)–(3.4) следует полный сдвиг

$$\delta = \frac{Qh}{GA} = \frac{Fh}{GA},$$

где h – расстояние между внешними силами F .

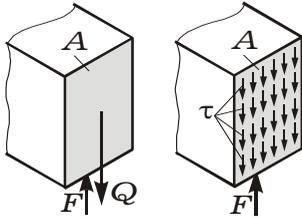


Рисунок 3.6

Потенциальная энергия деформации при сдвиге определяется как работа средней силы $Q/2$ на полном перемещении δ :

$$U = \frac{1}{2} Q\delta = \frac{Q^2 h}{2GA} = \frac{F^2 h}{2GA},$$

где GA – жесткость поперечного сечения стержня при сдвиге (по типу EA – жесткости поперечного сечения стержня при растяжении-сжатии).

Расчеты на прочность при сдвиге (срезе). Условие прочности в расчетах по методу допустимых напряжений в этом случае имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau]. \quad (3.5)$$

По методу предельных состояний принимается следующее условие:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq R_s. \quad (3.6)$$

Здесь τ_{\max} – наибольшие касательные напряжения среза;
 Q_{\max} – поперечная сила среза;
 A – площадь среза;
 $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение;
 R_s – расчетное сопротивление срезу.

Величины $[\tau]$ и R_s устанавливаются по результатам испытаний аналогично допускаемому напряжению $[\sigma]$ и расчетному сопротивлению R при растяжении. Для большинства материалов $[\tau] = (0,55 \dots 0,8)[\sigma]$; $R_s = (0,55 \dots 0,8)R$.

В инженерной практике на срез рассчитывают сварные и заклепочные соединения, болты, шпонки и другие детали.

Расчет на срез во многих случаях сопровождается расчетом на смятие. Под *смятием* понимают пластическую деформацию в местах соприкосновения сжатых элементов (т. е. на поверхностях контакта). Смятие носит местный характер, так как возникающие напряжения быстро затухают по мере удаления от поверхности контакта.

3.3 Кручение стержня круглого поперечного сечения

Кручением называют такой вид деформирования стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент M_z . Остальные силовые факторы равны нулю.

Кручению подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей, станков и машин, оси локомотивов, элементы пространственных конструкций. В брусе с прямой осью кручение создается только при действии на него моментов (пар сил), плоскости действия которых перпендикулярны оси бруса.

Исследования показывают, что характер деформирования бруса в большой степени зависит от формы его поперечного сечения.

Крутящий момент. Для крутящего момента M_z , независимо от формы поперечного сечения, принято следующее *правило знаков* (рисунок 3.7): если наблюдатель видит со стороны внешней нормали к сечению момент M_z направленным против часовой стрелки, то он положительный, по часовой стрелке – отрицательный.

Знак крутящего момента для материала бруса принципиального значения не имеет. Он используется при анализе напряженного состояния и для установления направлений напряжений. Чаще всего безразлично, закручивают брус вправо или влево.

Вопрос о нахождении опасных сечений бруса, нагруженного несколькими внешними крутящими моментами, решается так же, как при растяжении-сжатии, т. е. в результате построения эпюры внутренних крутящих моментов (см. пример 1.2).

В технике наибольшее распространение получили стержни (брусья) круглого или кольцевого поперечного сечения.

Задачи. При расчете стержня на кручение рассматривают обычно *две основные задачи*:

- определение напряжений в поперечных сечениях;
- определение угловых перемещений (углов закручивания).

Гипотезы. В основу технической теории кручения круглых стержней положены следующие *допущения*:

- в процессе кручения поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к оси бруса (гипотеза плоских сечений Бернулли (см. подразд. 1.2));
- расстояния между поперечными сечениями не изменяются, т. е. длина бруса остается постоянной;
- поперечные сечения поворачиваются относительно друг друга как жесткие диски, не деформируясь в своей плоскости (т. е. радиусы поперечных сечений не искривляются).

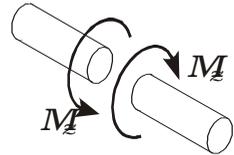


Рисунок 3.7

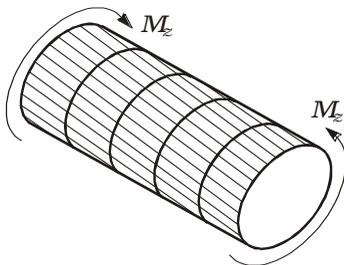


Рисунок 3.8

Справедливость этих предположений подтверждается экспериментально, а также точным решением задачи методами теории упругости без принятия каких-либо дополнительных гипотез.

Решение, полученное этим путем, показывает, что круглые поперечные сечения бруса действительно остаются плоскими и поворачиваются как жесткое целое (рисунок 3.8). Угол поворота для разных сечений будет различным. В поперечных сечениях

возникают только касательные напряжения.

Деформации при кручении. Выделим из круглого бруса малый элемент длиной dz . В нем, в свою очередь, двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ вырежем элементарное кольцо (рисунок 3.9, а), что позволит считать напряжения равномерно распределенными по кольцевому сечению.

Предположим, что в процессе деформирования правое сечение кольца повернулось относительно левого на угол $d\varphi$.

Мерой деформации кручения является *относительный угол закручивания* – угол закручивания, приходящийся на единицу длины,

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (3.7)$$

где dz – расстояние между сечениями, которые поворачиваются относительно друг друга на угол $d\varphi$.

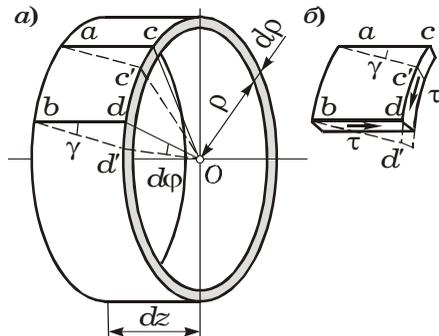


Рисунок 3.9

Величина θ играет при кручении такую же роль, как относительное удлинение (продольная деформация) ε при растяжении.

Однако к деформации кручения можно подойти и с другой стороны. При закручивании рассматриваемого цилиндра образующие ac и bd перемещаются в положения ac' и bd' , а радиусы Oc и Od – в положения Oc' и Od' . В результате этого бесконечно малый элемент боковой поверхности $abcd$ претерпевает *чистый сдвиг*.

С одной стороны – отрезок $cc' = \rho d\varphi$ как дуга окружности, с другой – $cc' = \tau \gamma dz \approx \gamma dz$ как полный сдвиг.

Приравнивая эти значения, имеем

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

Угол γ представляет собой *угол сдвига*. С учетом (3.7)

$$\gamma = \rho\theta. \quad (3.8)$$

Напряжения. Закон Гука при кручении. В поперечных сечениях закручиваемого бруса возникают только касательные напряжения τ . Парные касательные напряжения возникают в продольных плоскостях – в осевых сечениях (рисунок 3.9, б).

Используя закон Гука для чистого сдвига (3.2) и соотношение (3.8), получим *закон Гука при кручении*

$$\tau = G\rho\theta, \quad (3.9)$$

где τ – касательные напряжения в рассматриваемой точке поперечного сечения стержня;

G – модуль сдвига;

ρ – радиальная координата рассматриваемой точки сечения;

θ – относительный угол закручивания.

Согласно принятым допущениям величина θ одинакова для всех элементарных колец, из которых может быть составлен круглый брус. Модуль сдвига – также величина постоянная. Следовательно, касательные напряжения распределены вдоль радиуса поперечного сечения по линейному закону.

3.4 Связь касательных напряжений и крутящего момента

Крутящий момент M_z является результирующим моментом внутренних элементарных касательных сил τdA (рисунок 3.10) и может быть представлен в интегральном виде:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA, \quad (3.10)$$

где ρ – плечо элементарной силы τdA относительно продольной оси бруса;

dA – площадь элементарной площадки.

Зависимость (3.10) является частным случаем общей формулы (1.1), взятой в полярной системе координат.

Заметим, что касательные напряжения τ на элементарной площадке перпендикулярны к ее радиусу-вектору, иначе возникало бы растяжение или сжатие поперечного сечения стержня в его плоскости. Это противоречило бы исходному предположению об отсутствии в сечении других внутренних силовых факторов, кроме M_z .

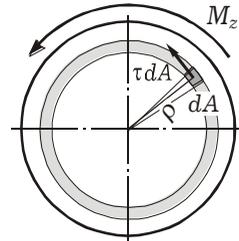


Рисунок 3.10

Подставляя соотношение (3.9) в (3.10), получаем

$$M_z = G\theta \int_A \rho^2 dA. \quad (3.11)$$

Интеграл, входящий в соотношение (3.11), представляет собой чисто геометрическую характеристику, измеряется в *метрах в четвертой степени* и носит название *полярного момента инерции* сечения:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (3.12)$$

Таким образом, используя определение (3.12), имеем

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}, \quad (3.13)$$

где GJ_p – жесткость поперечного сечения стержня при кручении.

Подставляя соотношение (3.13) в выражение закона Гука (3.9), получим связь касательных напряжений τ и крутящего момента M_z :

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho, \quad (3.14)$$

где ρ – радиус-вектор рассматриваемой точки (элементарной площадки) поперечного сечения.

Для каждого поперечного сечения стержня $M_z = \text{const}$, $J_p = \text{const}$. Следовательно, касательные напряжения τ распределены вдоль радиуса сечения по линейному закону и имеют наибольшие значения τ_{\max} в точках, наиболее удаленных от центра тяжести (рисунок 3.11).

Из формулы (3.14) следует, что

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} \rho_{\max}.$$

Введем величину

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}. \quad (3.15)$$

Она называется *полярным моментом сопротивления* сечения и измеряется в *кубических метрах*.

Окончательно получаем

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}. \quad (3.16)$$

Выражения (3.14), (3.16) являются основными расчетными формулами для определения касательных напряжений в стержнях с круговым поперечным сечением.

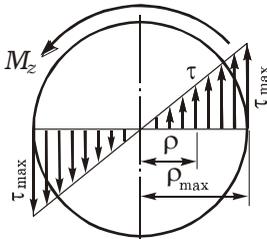


Рисунок 3.11

3.5 Перемещения. Потенциальная энергия деформации

Перемещения при кручении. Через относительный угол закручивания θ определяется перемещение при кручении. Для элемента стержня длиной dz (рисунок 3.12, а) согласно формулам (3.7), (3.13)

$$d\varphi = \theta dz = \frac{M_z dz}{GJ_p}. \quad (3.17)$$

Отсюда следует *полный угол закручивания* (взаимный угол поворота двух сечений)

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p}, \quad (3.18)$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота φ (рисунок 3.12, б).

Если по длине стержня крутящий момент не изменяется и жесткость постоянна ($M_z = \text{const}$, $GJ_p = \text{const}$), то из формулы (3.18) получаем

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}. \quad (3.19)$$

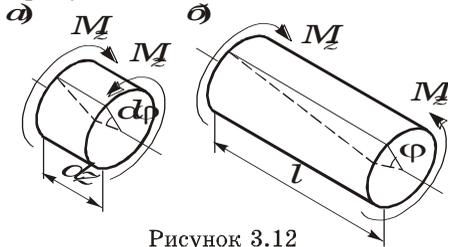


Рисунок 3.12

Потенциальная энергия деформации. Для элемента стержня длиной dz (см. рисунок 3.12, а) потенциальная энергия деформации определяется как работа среднего момента $M_z / 2$ на полном угле закручивания $d\varphi$: $dU = \frac{1}{2} M_z d\varphi$.

Подставив сюда выражение (3.17) для $d\varphi$, получим

$$dU = \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}. \quad (3.20)$$

Потенциальная энергия во всем стержне определится интегрированием формулы (3.20) по длине l

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}. \quad (3.21)$$

Если крутящий момент по длине l стержня (участка) не изменяется и жесткость постоянна, то из выражения (3.21) получаем формулу потенциальной энергии для стержня (участка)

$$U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}.$$

3.6 Геометрические характеристики сечений при кручении

Определим величины введенных выше геометрических характеристик: полярного момента инерции J_p и полярного момента сопротивления W_p для сечений в виде круга и кольца.

Полярные моменты инерции. Подставим в выражение (3.12) вместо dA площадь пояска $dA = \rho d\rho d\varphi$ (рисунок 3.13) и примем пределы интегрирования, позволяющие заметить всю площадь поперечного сечения. Для стержня сплошного кругового сечения

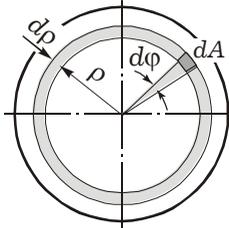


Рисунок 3.13

$$J_p = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho d\varphi,$$

где d – диаметр кругового сечения.

Вычислив интегралы, получим формулу полярного момента инерции для круга

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (3.22)$$

Если же в стержне диаметром d имеется центральная внутренняя полость диаметром d_0 (рисунок 3.14), то

$$J_p = \int_0^{2\pi} \int_{d_0/2}^{d/2} \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Отсюда следует полярный момент инерции для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right).$$

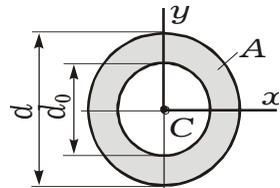


Рисунок 3.14

Полярные моменты сопротивления. Соответственно полученным выражениям для J_p определяем полярный момент сопротивления W_p (3.15).

Для сплошного сечения диаметром d ($\rho_{\max} = d/2$)

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3, \quad (3.23)$$

для кольцевого сечения с наружным диаметром d , внутренним d_0 по-прежнему $\rho_{\max} = d/2$ и полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right) \approx 0,2d^3 \left(1 - \frac{d_0^4}{d^4} \right).$$

Замечание. Для сложных сечений полярный момент инерции J_p , в силу аддитивности¹⁾ интеграла, можно вычислить как сумму (разность) моментов инерции отдельных частей сечения. Полярный же момент сопротивления W_p этим свойством не обладает и всегда вычисляется по формуле (3.15) $W_p = J_p / \rho_{\max}$.

3.7 Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Теория кручения круглого бруса используется главным образом при расчете валов различных машин и механизмов. Их следует рассчитывать *по допускаемым напряжениям* $[\tau]$.

Условие прочности. Условие прочности при кручении, как и при сдвиге (3.5), (3.6), ограничивает наибольшие касательные напряжения, возникающие в опасных сечениях. Для стержней круглого поперечного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.24)$$

где τ_{\max} – наибольшие касательные напряжения при кручении;

$M_{z \max}$ – крутящий момент в опасном сечении;

W_p – момент сопротивления опасного сечения;

Опасное сечение круглого стержня соответствует максимальному крутящему моменту M_z , или максимуму отношения M_z / W_p . В строительстве вместо $[\tau]$ применяется расчетное сопротивление при срезе R_s .

Расчет на прочность. Различают *три типа расчетов на прочность* при кручении брусев:

- проверка напряжений (поверочный расчет);
- подбор размеров сечения (проектный расчет);
- определение грузоподъемности.

При проверке напряжений по заданным нагрузке и размерам бруса определяются в опасном сечении наибольшие касательные напряжения и сравниваются с допускаемыми (расчетным сопротивлением). Если условие (3.24) не выполняется, то нужно изменить размеры сечения бруса или уменьшить нагрузку.

При подборе размеров сечения из (3.24) определяется W_p опасного сечения, по которому с помощью формулы (3.23) вычисляется диаметр круглого (или кольцевого) бруса:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{M_{z \max}}{[\tau]}; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{z \max}}{\pi [\tau]}} \approx \sqrt[3]{\frac{5 M_{z \max}}{[\tau]}}.$$

¹⁾ *Свойство аддитивности интеграла:* интеграл по сумме площадей равен сумме интегралов по каждой из площадей в отдельности.

При определении грузоподъемности по известному допускаемому напряжению и полярному моменту сопротивления определяется максимальный крутящий момент

$$M_{z \max} = W_p [\tau].$$

По его величине устанавливаются допустимые внешние нагрузки.

Расчет на жесткость. В ряде случаев отвечающий условию прочности стержень (вал) не является достаточно жестким для того, чтобы обеспечить надлежащую работу механизма. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания. Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают не только на прочность, но и на жесткость.

Условие жесткости бруса при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{M_{z \max}}{GJ_p} \leq [\theta],$$

где θ_{\max} – наибольший относительный угол закручивания бруса;
 $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый от $0,15^\circ$ до 2° на 1 м длины стержня.

3.8 Кручение стержней некруглого поперечного сечения

Общая методика расчета. Определение напряжений в стержне с некруглым поперечным сечением представляет собой довольно сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Гипотеза плоских сечений здесь не выполняется. Сечения заметно искривляются (рисунок 3.15), в результате чего меняется вся картина распределения напряжений.

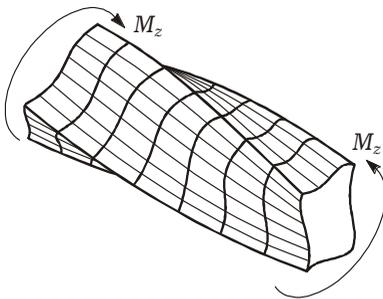


Рисунок 3.15

При определении углов сдвига необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также и местный перекося, связанный с искривлением сечений. Кроме того, задача резко усложняется тем, что для некруглого сечения напряжения должны определяться как функции уже не одной независимой переменной (ρ), а двух (x и y). Рассмотрим некоторые результаты, полученные методами теории упругости.

Условие парности позволяет установить, что касательные напряжения для точек, расположенных в поперечных сечениях

вблизи контура, направлены по касательной к дуге контура. В то же время во внешних углах поперечного сечения касательные напряжения обращаются в нуль.

Обобщая результаты, полученные ранее, можно предположить с достаточной степенью точности, что для стержня некруглого поперечного сечения основные расчетные формулы можно принять в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_t}; \quad \varphi = \frac{M_z l}{GJ_t}; \quad M_z = GJ_t \theta;$$

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2}{2GJ_t} dz, \quad (3.25)$$

где W_t, J_t – геометрические характеристики типа моментов сопротивления и инерции сечения рассматриваемой формы, для круглого сечения они совпадают с полярными моментами сопротивления и инерции W_p и J_p ;

U – потенциальная энергия деформации стержня некруглого поперечного сечения.

Кручение бруса прямоугольного сечения. Геометрические характеристики W_t и J_t вычисляются по формулам

$$W_t = \alpha hb^2; \quad J_t = \beta hb^3, \quad (3.26)$$

где h, b – высота и ширина поперечного сечения;
 α, β – безразмерные коэффициенты.

На рисунке 3.16 показана эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения, полученная численно методами теории упругости. В углах напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают по серединам больших сторон в точках А:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_t}. \quad (3.27)$$

Напряжения в точках В получим, умножив максимальные касательные напряжения на поправочный коэффициент:

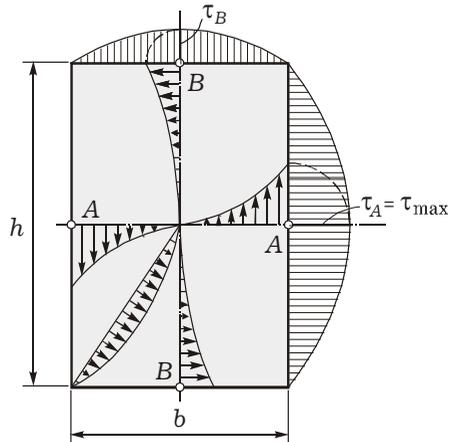


Рисунок 3.16

$$\tau_B = \eta \tau_{\max}. \quad (3.28)$$

Коэффициенты α , β и η зависят только от отношения сторон h/b . Их значения задаются в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов α , β и η при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	>10
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Формулы (3.25)–(3.28) будут использованы далее при рассмотрении сложного деформирования стержневых систем (см. разд. 8).

Кручение бруса эллиптического сечения. Геометрические характеристики W_t и J_t для эллиптического сечения (рисунок 3.17) принимают вид

$$W_t = \pi a^2 b / 2; \quad J_t = \pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2),$$

где a, b – длины полуосей сечения.

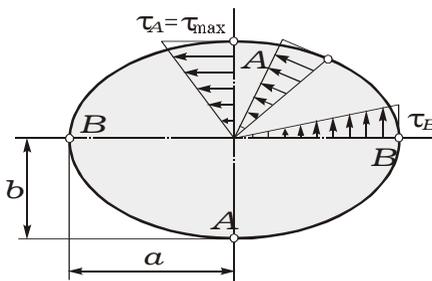


Рисунок 3.17

Наибольшие напряжения достигаются в точках A по концам малой оси:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_t}.$$

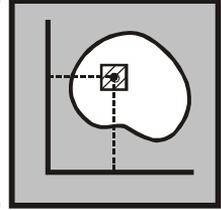
Напряжения в точках B

$$\tau_B = \frac{b}{a} \tau_A.$$

Эпюры касательных напряжений показаны на рисунке 3.17.

4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ



Для расчета напряжений и перемещений при растяжении-сжатии нам понадобилась единственная геометрическая характеристика сечения – его площадь A . При кручении мы сталкивались с более сложными характеристиками, например такими, как полярный момент инерции J_p и полярный момент сопротивления W_p . При решении задач, связанных с изгибом, возникает необходимость использования некоторых новых геометрических характеристик сечений стержней. В силу своего узкого прикладного характера они изучаются в курсе сопротивления материалов.

4.1 Статические моменты и центр тяжести сечения

Поперечное сечение стержня будем рассматривать как фигуру площадью A на плоскости, в которой введены декартовы координаты x, y (рисунок 4.1). Эту фигуру разобьем на элементарные площадки dA , каждая из которых имеет координаты x и y . Тогда *площадь сечения*

$$A = \int_A dA.$$

Элементарными статическими моментами площадки dA будут произведения ее площади на координаты, численно равные расстоянию до соответствующих осей:

$$dS_x = y dA; \quad dS_y = x dA.$$

Просуммируем эти выражения элементарных моментов по всей площади сечения A . Получим *статические моменты* S_x, S_y плоского сечения относительно осей x, y :

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \quad (4.1)$$

В зависимости от знака координат (положения осей) статические моменты могут принимать и положительные, и отрицательные, и нулевые значения. Их размерность – *кубический метр* (м^3).

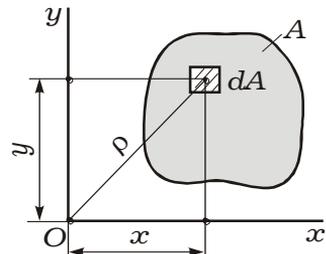


Рисунок 4.1

Статические моменты сложных сечений. Как и всякие интегралы, статические моменты (4.1) аддитивны по области интегрирования. Иными словами, если сложное сечение разбить на простые фигуры, то статический момент всего сечения относительно любой оси (например, x) равен алгебраической сумме статических моментов составляющих фигур относительно той же оси:

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + \dots + S_x^{(n)},$$

где n – количество простых фигур, составляющих сечение.

Изменение статических моментов при параллельном переносе осей координат. Предположим, что координатные оси перенесены параллельно самим себе (рисунок 4.2). Новые координаты x_1, y_1 площадки dA связаны со старыми x, y соотношениями

$$x_1 = x - b; \quad y_1 = y - a. \quad (4.2)$$

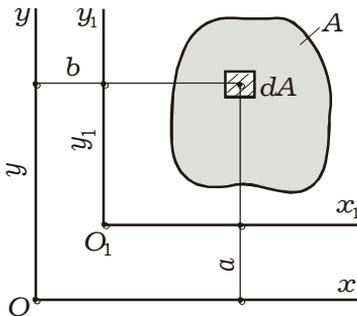


Рисунок 4.2

Получим выражения для статических моментов S_{x_1}, S_{y_1} в новой системе координат через статические моменты S_x, S_y в старых осях. Для S_{x_1} , используя выражение (4.2), имеем

$$\begin{aligned} S_{x_1} &= \int_A y_1 dA = \\ &= \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - a \int_A dA. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части является статическим моментом (4.1) относительно старой оси x , второй интеграл – площадь фигуры A .

В результате, проделав подобную операцию и для S_{y_1} , получим формулы преобразования статических моментов при параллельном переносе осей координат:

$$S_{x_1} = S_x - aA; \quad S_{y_1} = S_y - bA, \quad (4.3)$$

где a, b – расстояния между осями x и x_1, y и y_1 (с учетом знака).

Центр тяжести сечения. Величины a, b в формулах (4.3) могут быть любыми: как положительными, так и отрицательными. Поэтому их всегда можно подобрать (причем единственным образом) так, чтобы статические моменты в новой системе координат обращались в нуль: $S_{x_1} = 0; S_{y_1} = 0$.

Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются *центральными*. Точка пересечения центральных осей является *центром тяжести* поперечного сечения.

Предположим, что система координат Sx_1y_1 центральная (рисунок 4.3). Расстояния от некоторых произвольно взятых осей x, y до центральных осей x_1, y_1 следующие: $b = x_c$; $a = y_c$. Используя соотношения (4.3) и учитывая, что $S_{x_1} = 0$; $S_{y_1} = 0$, получаем

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (4.4)$$

Эти формулы служат для определения координат центра тяжести сечения C в произвольно выбранной системе координат Oxy .

Следствие. Если известно положение центра тяжести сечения, то статические моменты можно определить из формул (4.4):

$$S_x = y_c A; \quad S_y = x_c A. \quad (4.5)$$

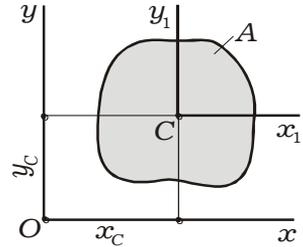


Рисунок 4.3

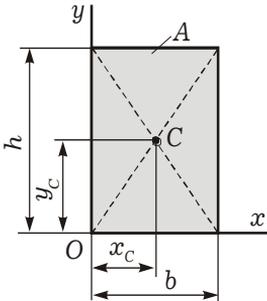


Рисунок 4.4

☑ **ПРИМЕР 4.1.** Для прямоугольника с длинами сторон b, h (рисунок 4.4) требуется: вычислить статические моменты относительно осей x, y .

Координаты центра тяжести C прямоугольника:

$$x_c = \frac{b}{2}; \quad y_c = \frac{h}{2},$$

площадь сечения $A = bh$.

Используя формулы (4.5), получаем

$$S_x = \frac{bh^2}{2}; \quad S_y = \frac{hb^2}{2}.$$

4.2 Моменты инерции сечения

Если элементарные площади dA умножить на квадраты расстояний до некоторых осей x, y (см. рисунок 4.1) и просуммировать эти произведения по всей площади сечения, то получатся геометрические характеристики, называемые *осевыми моментами инерции*:

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.6)$$

Интеграл произведений элементарных площадей dA на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей x, y называется *центробежным моментом инерции*

$$J_{xy} = \int_A xy dA . \quad (4.7)$$

Интеграл произведений элементарных площадей dA на квадраты расстояний до точки (полюса O) представляет собой *полярный момент инерции* площади сечения

$$J_p = \int_A \rho^2 dA .$$

Полярный момент инерции был введен ранее, при изучении кручения стержней (см. разд. 3).

Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. Центробежный момент инерции может принимать любые алгебраические значения, включая нулевое, в зависимости от расположения сечения относительно осей координат. Моменты инерции измеряются в *метрах в четвертой степени* (м^4).

Моменты инерции сложных сечений. При вычислении моментов инерции сложного сечения пользуются тем же принципом, что и при определении статических моментов. Сечение разбивают на простейшие составные части, для каждой из которых находят собственный момент инерции относительно заданной оси. Тогда момент инерции всего сечения равен алгебраической сумме моментов инерции составных частей:

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + \dots + J^{(n)} ,$$

где n – количество простых фигур, составляющих сечение.

Это правило справедливо для всех видов моментов инерции (осевых, центробежных, полярных). Нельзя суммировать моменты инерции составных частей сечения, взятые относительно разных осей.

Связь полярного и осевых моментов инерции. Радиус-вектор ρ элементарной площадки dA

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

(см. рисунок 4.1). Поэтому, преобразуя выражение для полярного момента инерции

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA ,$$

получаем, что он равен сумме осевых моментов инерции:

$$J_p = J_x + J_y . \quad (4.8)$$

Моменты сопротивления, радиусы инерции. Используя моменты инерции, можно ввести новые геометрические характеристики сечения.

Осевые моменты сопротивления сечения определяются отношениями

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}, \quad (4.9)$$

где y_{\max} , x_{\max} – расстояния от осей x , y до наиболее удаленных точек сечения (рисунок 4.5), причем они берутся по абсолютной величине.

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}},$$

где ρ_{\max} – радиус-вектор точки сечения, наиболее удаленной от начала координат.

Осевыми радиусами инерции сечения называются следующие величины:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (4.10)$$

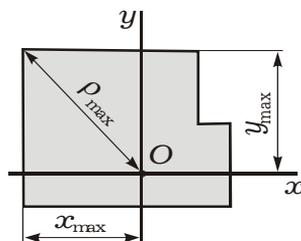


Рисунок 4.5

Моменты сопротивления и радиусы инерции всегда положительны. Размерность моментов сопротивления – *кубический метр* (м^3), радиусов инерции – *метр* (м).

Введенные геометрические характеристики плоских сечений часто используются в практических расчетах стержней при различных видах деформирования.

4.3 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат

Общий случай. Будем считать, что нам известны моменты инерции и статические моменты некоторого сечения относительно осей x , y . Получим выражения для моментов инерции при переносе системы координат Oxy в положение $O_1x_1y_1$ (см. рисунок 4.3). В новых осях

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad J_{x_1y_1} = \int_A x_1y_1 dA. \quad (4.11)$$

Новые координаты площадки dA связаны со старыми зависимостями (4.2): $x_1 = x - b$; $y_1 = y - a$. Подставив их в выражения (4.11) и воспользовавшись свойством аддитивности интеграла, получим сначала соотношение для момента инерции J_{x_1} и, по аналогии, для моментов инерции J_{y_1} и $J_{x_1y_1}$:

$$J_{x_1} = \int_A (y - a)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Здесь первый интеграл – момент инерции J_x в старой системе координат, второй – статический момент S_x , третий интеграл – площадь сечения A . В результате имеем

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x - 2aS_x + a^2A; & J_{y_1} &= J_y - 2bS_y + b^2A; \\ J_{x_1y_1} &= J_{xy} - bS_x - aS_y + abA. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формулы (4.12) позволяют при параллельном переносе осей координат вычислять новые моменты инерции через статические моменты и моменты инерции сечения в старой системе координат.

Переход от центральных осей к нецентральных. Пусть старая система координат Cxy – центральная (рисунок 4.6) тогда $S_x = 0$, $S_y = 0$, и из выражений (4.12) следуют *укороченные формулы*:

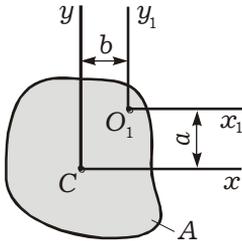


Рисунок 4.6

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2A; & J_{y_1} &= J_y + b^2A; \\ J_{x_1y_1} &= J_{xy} + abA. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из первых двух соотношений (4.13) видно, что $J_x \leq J_{x_1}$; $J_y \leq J_{y_1}$ для любых a, b . Следовательно, в семействе параллельных осей минимальные осевые моменты инерции получаются относительно *центральных осей*.

При параллельном переносе осей (если исходные оси центральные) осевые моменты инерции *увеличиваются* на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Переход от нецентральных осей к центральным. При переходе от нецентральных осей координат $O_1x_1y_1$ к центральным осям Cxy можно использовать формулы, следующие из (4.13):

$$J_x = J_{x_1} - a^2A; \quad J_y = J_{y_1} - b^2A; \quad J_{xy} = J_{x_1y_1} - abA. \quad (4.14)$$

При вычислении центробежного момента инерции по последней формуле в (4.12)–(4.14) необходимо учитывать знаки величин a и b .

4.4 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Рассмотрим, как изменяются моменты инерции при повороте системы координат Oxy на некоторый угол α в положение Ouv (рисунок 4.7). Выразим новые моменты инерции плоского сечения

$$J_u = \int_A v^2 dA; \quad J_v = \int_A u^2 dA; \quad J_{uv} = \int_A uv dA \quad (4.15)$$

через моменты инерции в старых осях J_x, J_y, J_{xy} и угол α .

Проекция ломаной линии $O123$ равна проекции замыкающей $O3$; с учетом этого находим выражение новых координат u, v площадки dA через старые x, y :

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha;$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (4.16)$$

Подставив (4.16) в первую из формул (4.15), получим осевой момент инерции в новых осях:

$$\begin{aligned} J_u &= \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dF - \sin 2\alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA. \end{aligned}$$

Отсюда, и по аналогии для моментов инерции J_v, J_{uv} , следует:

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha;$$

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha; \quad (4.17)$$

$$J_{uv} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha. \quad (4.18)$$

Полученные формулы описывают изменения моментов инерции при повороте осей вокруг начала координат на некоторый угол α .

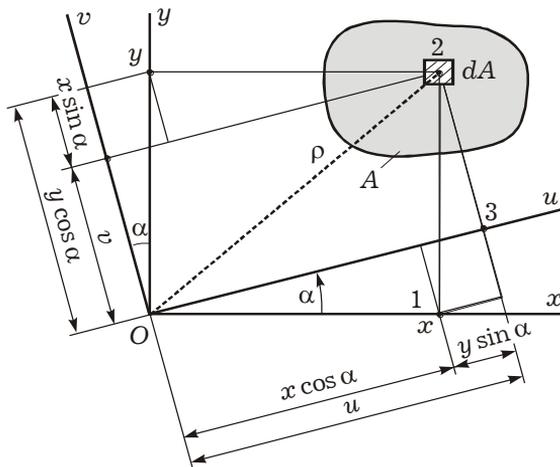


Рисунок 4.7

Следствие. Возьмем два уравнения системы (4.17). Складывая их почленно, учитывая зависимость (4.8) $J_p = J_x + J_y$ и простейшие тригонометрические соотношения, получим

$$J_u + J_v = J_x + J_y = J_p.$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей остается постоянной при повороте осей вокруг начала координат на любой угол α .

4.5 Главные оси и главные моменты инерции

Главные оси инерции. При повороте осей вокруг начала координат сумма осевых моментов инерции остается постоянной, но каждый из них изменяется. Доказано, что можно найти такое положение осей (значение угла поворота α), при котором осевые моменты инерции *экстремальны*: относительно одной оси момент инерции будет *наибольшим* (J_{\max}), а относительно другой, ей перпендикулярной, – *наименьшим* (J_{\min}).

Система координат, относительно которой осевые моменты инерции экстремальны, называется *главной*. Соответствующие оси называются *главными осями инерции*.

Главные оси инерции, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции*. Моменты инерции относительно главных центральных осей называются *главными центральными моментами инерции*.

Найдем угол α_0 , на который нужно повернуть произвольную систему координат Oxy , чтобы попасть в главные оси инерции. Для этого исследуем на экстремум¹⁾ первое из соотношений (4.17). Возьмем первую производную по α и приравняем ее к нулю:

$$\left. \frac{\partial J_u}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} = -2J_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 - 2J_{xy} \cos 2\alpha_0 + 2J_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0;$$

$$(J_y - J_x) \sin 2\alpha_0 - 2J_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (4.19)$$

¹⁾ *Достаточное условие экстремума функции:* если в точке $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 будет точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$; x_0 – точка максимума, если $f''(x_0) < 0$.

Нетрудно проверить, что вторая производная

$$\left. \frac{\partial^2 J_u}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

следовательно, условия экстремума выполнены. Таким образом, формула (4.19) позволяет вычислить величину угла поворота произвольной системы координат к главным осям инерции.

Формула (4.19) дает два значения угла: α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$, т. е. в общем случае существуют две взаимно перпендикулярные главные центральные оси.

С л е д с т в и е . В главных осях центробежный момент инерции равен нулю.

В этом легко убедиться, используя предыдущие выкладки и формулу (4.18):

$$J_{uv} = \left[J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha \right] \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

Верно и обратное: если в некоторой системе координат центробежный момент инерции равен нулю, то эта система главная.

Частные случаи. Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет главной. Так как для любой элементарной площадочки $dA(x, y)$ существует ей симметричная относительно оси y площадочка $dA(-x, y)$ (рисунок 4.8), то их суммарный элементарный центробежный момент инерции

$$dJ_{xy} = xy dA + (-x)y dA = 0.$$

Покрыв такими симметричными площадочками всё сечение, получим, что его центробежный момент инерции $J_{xy} = 0$. Следовательно, система координат Oxy является главной.

У сечений, имеющих более двух осей симметрии (например, круг, квадрат, равносторонний треугольник), все центральные оси главные.

Для доказательства рассмотрим квадратное сечение (рисунок 4.9). Оси симметрии x, y — главные центральные, следовательно, $J_x = J_y, J_{xy} = 0$. Из соотношения (4.18) получаем, что

$$J_{uv} = 0$$

при любом α_0 . Таким образом, повернув оси x, y на любой угол α_0 , попадем также в главные центральные оси u, v .

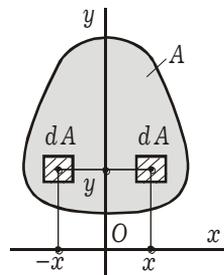


Рисунок 4.8

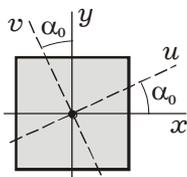


Рисунок 4.9

Главные моменты инерции. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*. Для получения их значений необходимо при помощи выражения (4.19) исключить угол α из первых двух формул (4.17). Учитывая, что

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}; \quad \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

получаем

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_y - J_x)^2}{4} + J_{xy}^2}.$$

После того как сечение вычерчено в масштабе, нетрудно визуально установить, которой из двух главных осей соответствует максимальный и которой – минимальный момент инерции.

4.6 Геометрические характеристики простейших фигур

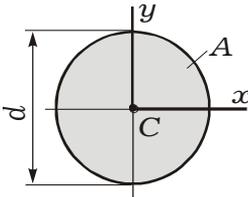


Рисунок 4.10

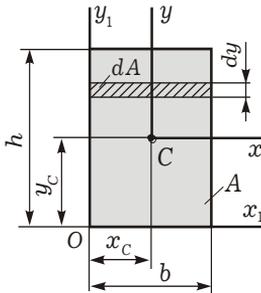


Рисунок 4.11

Круг. Для круга оси x, y равноправны (рисунок 4.10), следовательно, $J_x = J_y$. Так как их сумма постоянна и в соответствии с (4.8) равна полярному моменту инерции (см. разд. 3), то

$$J_x + J_y = J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Осевые моменты сопротивления (4.9)

$$W_x = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_y = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Прямоугольник. Выделим в нем площадку $dA = b dy$ (рисунок 4.11). Тогда

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = b \int_0^h y_1^2 dy_1 = \frac{b y_1^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Аналогично $J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}$.

Моменты инерции относительно главных центральных осей S_{xy} получим, используя укороченные формулы (4.14) перехода от нецентральных осей к центральным:

$$J_x = J_{x_1} - y_C^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Прямоугольный треугольник. Выделим в треугольнике (рисунок 4.12) площадку

$$dA = c dy_1,$$

где c – ширина треугольника на расстоянии y_1 от оси x_1 .

Из подобия треугольников следует

$$\frac{c}{h - y_1} = \frac{b}{h}; \quad c = \frac{b}{h}(h - y_1).$$

Подставив это в общее выражение для момента инерции (4.6), получаем J_{x_1} , а затем по аналогии – J_{y_1} :

$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h y_1^2 (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{12}.$$

Центральные моменты инерции для треугольника вычислим, используя формулы (4.14):

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9} \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36}.$$

Геометрические характеристики этих и других часто встречающихся сечений приведены в таблице Б.18 (приложение Б). Их используют для вычисления геометрических характеристик сложных сечений, которые разбить на простые фигуры.

☑ ПРИМЕР 4.2. Для поперечного сечения бруса, состоящего из стального листа 7×1000 мм и двух приваренных к нему двутавров № 24 (рисунок 4.13), требуется: определить положение главных центральных осей; вычислить главные центральные моменты инерции и радиусы инерции.

Главные центральные оси. Сечение симметрично относительно двух осей, поэтому положение его центра тяжести очевидно. Главными центральными осями являются оси симметрии x , y . Моменты инерции относительно этих осей J_x , J_y будут главными центральными моментами инерции.

Геометрические характеристики составных частей сечения. Разбиваем сечение на три части: 1 – лист (прямоугольник с высотой $h_1 = 100$ см и шириной $b_1 = 0,7$ см); 2 и 3 – двутавры № 24. Проводим для каждой части собственные главные центральные оси.

Прямоугольник. Вычисляем:

- площадь $A^{(1)} = bh = 0,7 \cdot 100 = 70 \text{ см}^2$;
- моменты инерции относительно собственных главных центральных осей x , y , совпадающих с главными центральными осями всего сечения:

$$J_x^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{0,7 \cdot 100^3}{12} = 58300 \text{ см}^4; \quad J_y^{(1)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{100 \cdot 0,7^3}{12} = 2,86 \text{ см}^4.$$

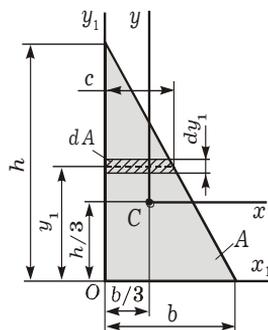


Рисунок 4.12

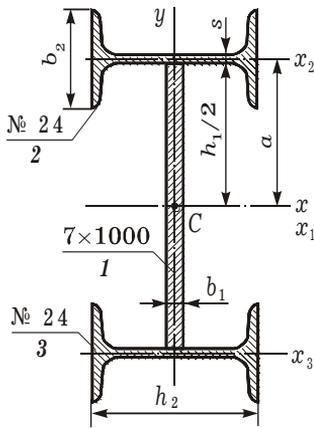


Рисунок 4.13

Двутавр № 24. Из сортамента (таблица В.4) выписываем данные:

- площадь $A^{(2)} = 34,8 \text{ см}^2$;
- толщина стенки $s = 0,56 \text{ см}$;
- моменты инерции относительно собственных главных центральных осей x_2, y :

$$J_{x_2}^{(2)} = J_{yT} = 198 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(2)} = J_{xT} = 3460 \text{ см}^4,$$

где индекс «Т» указывает на то, что соответствующие значения моментов инерции взяты в таблицах сортамента.

Ось y – центральная и для двутавра, и для всего сечения. Перейдем от собственной центральной оси x_2 двутавра к нецентральной для него оси x по формуле (4.13):

$$J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + a^2 A^{(2)} = 198 + 50,3^2 \cdot 34,8 = 88200 \text{ см}^4,$$

где a – расстояние между осями x_2 и x :

$$a = h_1/2 + s/2 = 100/2 + 0,56/2 = 50,3 \text{ см}.$$

Геометрические характеристики всего сечения. Моменты инерции сечения вычисляются как сумма моментов инерции отдельных его частей относительно той же оси:

$$J_x = J_x^{(1)} + 2J_x^{(2)} = 58300 + 2 \cdot 88200 = 235000 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} = 2,86 + 2 \cdot 3460 = 6923 \text{ см}^4.$$

Полная площадь сечения $A = A^{(1)} + 2A^{(2)} = 70 + 2 \cdot 34,8 = 139,6 \text{ см}^2$.

Радиусы инерции сечения находим по формулам (4.10):

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{235000}{139,6}} = 41,0 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{6923}{139,6}} = 7,04 \text{ см}.$$

Рассмотренное сечение имело две оси симметрии, которые и являлись главными центральными осями инерции. Если сечение имеет только одну ось симметрии или не имеет их совсем, то необходимо предварительно найти центр тяжести и провести через него главные оси.

☑ ПРИМЕР 4.3. Для поперечного сечения бруса (рисунок 4.14) требуется: определить положение главных центральных осей; вычислить главные центральные моменты инерции и радиусы инерции.

Главные центральные оси. Центр тяжести сечения будет находиться на оси y , так как она является осью симметрии и, следовательно, главной центральной осью инерции.

Для нахождения второй главной центральной оси следует определить центр тяжести сечения. Проведем по нижней кромке сечения вспомогательную ось x' , от которой будем отсчитывать координату центра тяжести y_C .

Геометрические характеристики составных частей сечения. Разобьем сечение на три части ($k = 1, 2, 3$), для каждой из которых вычислим:

- площадь A_k ;
- статический момент $S_{x'}^{(k)}$ относительно вспомогательной оси x' ;
- моменты инерции относительно собственных главных центральных осей $J_{x_k}^{(k)}, J_y^{(k)}$ (ось y – главная центральная для всех трех фигур).

1 Прямоугольник с центром тяжести в точке C_1 :

$$A_1 = 4c \cdot 6c = 24c^2;$$

$$S_{x'}^{(1)} = A_1 \cdot 3c = 24c^2 \cdot 3c = 72c^3;$$

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{4c(6c)^3}{12} = 72c^4;$$

$$J_y^{(1)} = \frac{6c(4c)^3}{12} = 32c^4.$$

2 Квадратный вырез с центром тяжести в точке C_2 :

$$A_2 = (2c \cdot 2c) = 4c^2;$$

$$S_{x'}^{(2)} = A_2 \cdot c = 4c^2 \cdot c = 4c^3;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = J_y^{(2)} = \frac{2c(2c)^3}{12} = 1,333c^4.$$

В дальнейшем, при нахождении общих характеристик всего сечения, эти величины необходимо использовать со знаком «минус», т. к. они характеризуют вырез, т. е. «отрицательную» площадь.

3 Полукруг диаметром $d = 4c$ с центром тяжести в точке C_3 , расположенным на расстоянии $2d/(3\pi) = 8c/(3\pi)$ от нижней грани:

$$A_3 = \pi d^2/8 = 2\pi c^2; \quad S_{x'}^{(3)} = A_3 \left(6c + \frac{8c}{3\pi} \right) = 2\pi c^2 \cdot 6,85c = 43,03c^3;$$

$$J_{x_3}^{(3)} = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00686 d^4 = 0,00686 (4c)^4 = 1,756c^4;$$

$$J_y^{(3)} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi (4c)^4}{128} = 6,283c^4.$$

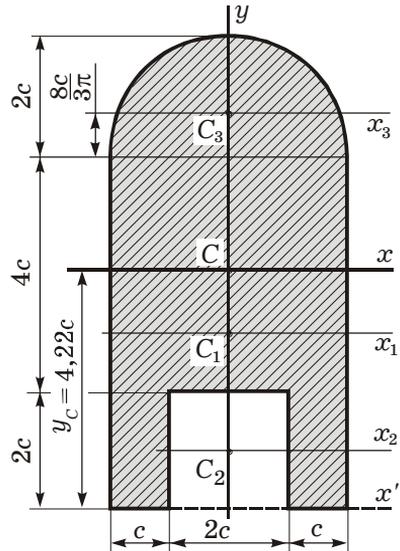


Рисунок 4.14

Центр тяжести сечения. Полная площадь сечения

$$A = 24c^2 - 4c^2 + 2\pi c^2 = 26,28c^2.$$

Используя формулу (4.4), определяем координату центра тяжести

$$y_C = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\sum S_{x'}^{(k)}}{\sum A_k} = \frac{72c^3 - 4c^3 + 43,03c^3}{26,28c^2} = 4,22c.$$

Геометрические характеристики всего сечения. Главными центральными осями инерции будут оси x , y . Вычислим относительно них моменты инерции:

$$J_x = \sum J_x^{(k)}; \quad J_y = \sum J_y^{(k)},$$

где $J_x^{(k)}$, $J_y^{(k)}$ – моменты инерции k -й части относительно осей x , y .

Главная центральная ось x всего сечения не является центральной для его составных частей. Поэтому используем «укороченные» формулы (4.13) для перехода от центральных осей x_1 , x_2 , x_3 отдельных фигур к нецентральной для них оси x :

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} + (y_C - 3c)^2 A_1 = 72c^4 + (4,22c - 3c)^2 \cdot 24c^2 = 108c^4;$$

$$J_x^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} + (y_C - c)^2 A_2 = 1,333c^4 + (4,22c - c)^2 4c^2 = 42,8c^4;$$

$$J_x^{(3)} = J_{x_3}^{(3)} + \left(6c - y_C + \frac{8c}{3\pi}\right)^2 A_3 = 1,756c^4 + (2,63c)^2 2\pi c^2 = 45,2c^4.$$

Главные центральные моменты инерции всего сечения

$$J_x = 108c^4 - 42,8c^4 + 45,2c^4 = 110,4c^4;$$

$$J_y = 32c^4 - 1,333c^4 + 6,283c^4 = 36,95c^4.$$

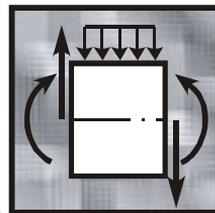
Вычисляем *радиусы инерции*:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{110,4c^4}{26,28c^2}} = 2,05c; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{36,95c^4}{26,28c^2}} = 1,19c.$$

Полученные в этих примерах геометрические характеристики будут использованы далее при исследовании ядра сечения (см. подразд. 6.3).

5

ПРЯМОЙ ИЗГИБ



При центральном растяжении-сжатии и кручении прямых брусьев их оси остаются прямыми и после деформации, а при изгибе происходит их искривление. Изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации элементов конструкций. Прямой стержень, работающий на изгиб, часто называют *брусом* или *балкой*.

5.1 Внутренние усилия при изгибе

Основные понятия. *Изгиб* – это такой вид деформирования, при котором в поперечных сечениях стержней возникают изгибающие моменты $M = \{M_x, M_y\}$. Если все остальные внутренние силовые факторы равны нулю, то изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях кроме изгибающего момента присутствует поперечная сила $Q = \{Q_x, Q_y\}$, то изгиб называется *поперечным*.

Силовая плоскость – это плоскость, в которой приложены внешние нагрузки. *Силовая линия* – это линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения (рисунок 5.1).

Пусть все нагрузки приложены в одной силовой плоскости, тогда изгиб называется *плоским*. Если при этом силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, то изгиб будет *прямым*. В противном случае изгиб является *косым* (см. разд. 6).

При *прямом чистом изгибе* в сечениях возникают только изгибающие моменты M_x (или M_y), в случае *прямого поперечного изгиба* – изгибающие моменты и поперечные силы M_x и Q_y (или M_y и Q_x).

При построении эпюр внутренних усилий поперечная сила Q направляется так, чтобы она вращала оставленную часть стержня по часовой стрелке. *Изгибающий момент* прикладывается к сечению

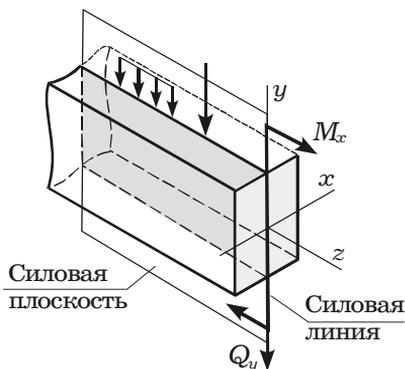


Рисунок 5.1

так, чтобы верхние волокна балки испытывали сжатие, а нижние – растяжение (рисунок 5.2). Для многих строительных материалов растяжение опаснее сжатия, поэтому эпюра изгибающих моментов строится *на растянутом волокне*. Для этого отрицательные значения моментов откладываются сверху оси стержня, положительные – снизу (см. подразд. 1.8).

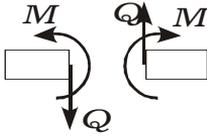


Рисунок 5.2

Иногда при прямом изгибе нижние индексы x, y в обозначениях M и Q для простоты не пишут.

Дифференциальные соотношения при прямом изгибе. Рассмотрим балку, на которую действует плоская система сил, в том числе гладкая распределенная нагрузка $q(z)$, направленная вдоль оси y . Двумя близкими сечениями z и $z + dz$ выделим малый элемент балки (рисунок 5.3, а), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты.

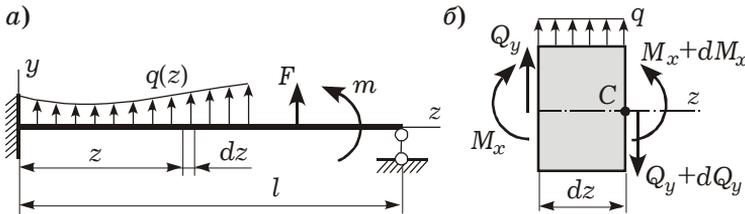


Рисунок 5.3

В силу малости элемента dz нагрузку, распределенную по его длине, можно считать равномерной. Со стороны левой отброшенной части на него действуют M_x и Q_y , со стороны правой – $M_x + dM_x$ и $Q_y + dQ_y$ (рисунок 5.3, б). Величины приращения внутренних усилий dQ_y, dM_x малы в силу малости dz .

Вся балка находится в равновесии, поэтому в равновесии должен находиться и ее элемент dz . Приравниваем к нулю сумму проекций всех сил на ось y :

$$Q_y + qdz - Q_y - dQ_y = 0; \quad qdz - dQ_y = 0.$$

Отсюда

$$q = \frac{dQ_y}{dz}, \quad (5.1)$$

т. е. первая производная от поперечной силы вдоль оси балки совпадает с величиной интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки.

Приравниваем к нулю сумму всех моментов относительно центра тяжести правого сечения (точки С):

$$-M_x - Q_y dz - q \frac{dz^2}{2} + M_x + dM_x = 0.$$

Пренебрегая слагаемым $q(dz)^2/2$ как величиной второго порядка малости и приводя подобные члены, получаем

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad (5.2)$$

т. е. первая производная от изгибающего момента вдоль оси балки представляет собой величину поперечной силы.

Из двух дифференциальных зависимостей (5.1), (5.2) легко вывести третью:

$$q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}. \quad (5.3)$$

С л е д с т в и я из соотношений (5.1)–(5.3):

- если на участке балки действует равномерно распределенная нагрузка ($q = \text{const}$), то величина поперечной силы Q_y линейно возрастает при направлении q вверх и убывает, если q направлена вниз;
- если на участке балки распределенная нагрузка отсутствует, то поперечная сила постоянна;
- если на участке балки поперечная сила положительна ($Q_y > 0$), то алгебраическая величина изгибающего момента M_x на этом участке возрастает;
- при $Q_y < 0$ величина момента M_x убывает;
- если в некотором сечении $Q_y = 0$, то M_x имеет здесь экстремум;
- если на всём участке балки поперечная сила Q_y равна нулю, то эпюра изгибающих моментов M_x постоянна;
- если эпюра Q_y постоянна, то эпюра M_x изменяется линейно;
- если эпюра Q_y линейна, то эпюра M_x ограничена параболой; направление выпуклости параболы на эпюре изгибающих моментов совпадает с направлением распределенной нагрузки;
- в сечении, где приложена сосредоточенная поперечная сила, эпюра Q_y имеет скачок на величину этой силы, а эпюра M_x – излом, направление которого совпадает с направлением силы.

Эти правила значительно упрощают процесс построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, позволяя не прибегать к составлению аналитических выражений функций $Q_y(z)$ и $M_x(z)$. Эпюры Q_y и M_x можно строить по характерным точкам, вычисляя значения внутренних усилий только на границах участков и в точках экстремумов (см. подразд. 1.8, 1.9).

5.2 Закон Гука при чистом изгибе

Рассмотрим *прямой чистый изгиб балки* постоянного поперечного сечения, симметричного относительно вертикальной оси. В этом случае по длине балки поперечная сила отсутствует ($Q_y = 0$), а внутренний изгибающий момент M_x постоянен. Кроме того, напряженно-деформированное состояние балки также однородно по длине.

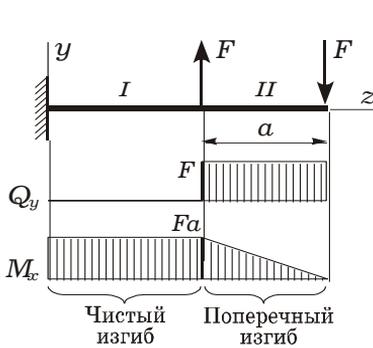


Рисунок 5.4

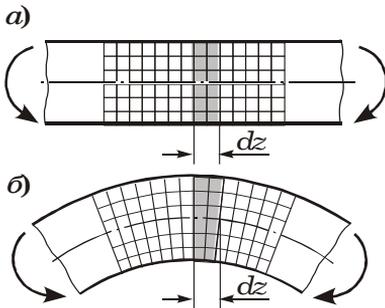


Рисунок 5.5

Условия чистого изгиба могут возникать при различных внешних нагрузках. На рисунке 5.4 изображена балка, у которой участок I испытывает чистый изгиб, участок II – поперечный.

Гипотезы и допущения. Нанесем на поверхности балки продольными и поперечными линиями сеть квадратов (рисунок 5.5, а). При изгибе продольные линии на боковых поверхностях искривляются, расстояние между ними практически не меняется. Следовательно, можно считать, что слои балки друг на друга не давят (*допущение о ненадавливаемости продольных волокон*).

Поперечные линии поворачиваются, оставаясь прямыми и перпендикулярными к изогнутой оси балки (рисунок 5.5, б). Следовательно, поперечные сечения после нагружения остаются плоскими (*гипотеза Бернулли*).

Принятые упрощения вполне приемлемы для областей, удаленных от мест приложения сосредоточенных нагрузок.

Деформации. Рассмотрим участок балки в состоянии чистого изгиба. Так как во всех сечениях участка момент M_x одинаков, то и деформация (изменение кривизны) тоже будет одной и той же. Следовательно, ось стержня принимает форму *дуги окружности*.

Верхние волокна балки удлиняются, нижние – укорачиваются. При постепенном переходе от удлиняющихся к укорачивающимся волокнам встречается промежуточный слой волокон, которые не меняют своей длины. Этот слой называется *нейтральным*, а линия его пересечения с плоскостью поперечного сечения – *нейтральной осью* (*нейтральной линией*).

Двумя близкими сечениями выделим в балке малый элемент dz (см. рисунок 5.5) и рассмотрим его деформирование отдельно (рисунок 5.6). Примем левое сечение условно неподвижным. Тогда в результате изгиба произойдет поворот правого сечения на некоторый угол $d\theta$, верхние слои удлинятся, а нижние укоротятся. Отрезок cd своей длины не изменит, так как он принадлежит нейтральному слою:

$$cd = cd' = \rho d\theta,$$

где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки.

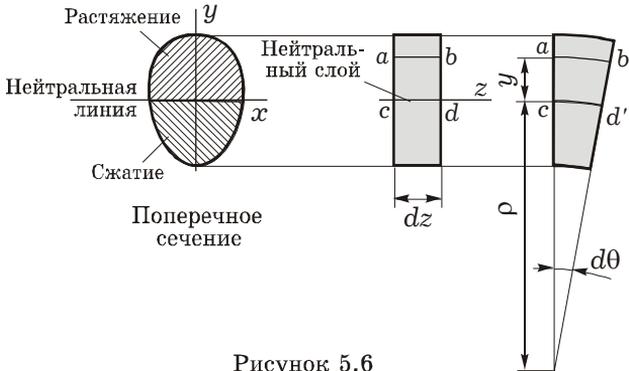


Рисунок 5.6

Произвольное волокно, взятое на расстоянии y от нейтрального слоя, обозначим ab . После приложения нагрузки оно изменит свою длину и займет положение ab' . В соответствии с соотношением (2.2) ($\varepsilon = \Delta l / l$) подсчитаем относительное удлинение этого волокна:

$$\varepsilon = \frac{ab' - ab}{ab}.$$

Так как $ab = cd = \rho d\theta$; $ab' = (\rho + y)d\theta$, то

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}.$$

Таким образом, *относительная линейная деформация*

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (5.4)$$

Закон Гука. Будем считать, что каждое продольное волокно балки при изгибе находится в состоянии одноосного растяжения-сжатия (в силу допущения о ненадавливаемости продольных волокон). Для волокна ab можно применить закон Гука при растяжении ($\sigma = E\varepsilon$). Подставив в него выражение для деформации (5.4), получим *закон Гука при чистом изгибе*

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y, \quad (5.5)$$

где E – модуль Юнга;

ρ – радиус кривизны изогнутой нейтральной оси балки;

y – расстояние от рассматриваемого волокна до нейтрального слоя.

Следствие. Нормальные напряжения при чистом изгибе в поперечном сечении стержня изменяются по линейному закону. Нейтральная линия является геометрическим местом точек, в которых нормальные напряжения равны нулю ($\sigma = 0$).

5.3 Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим *чистый изгиб в вертикальной плоскости*, при котором в сечениях балки возникает только изгибающий момент M_x . Предположим, что при этом растянуты верхние волокна, как это было принято при выводе закона Гука (рисунок 5.7). В сечениях присутствуют только нормальные напряжения σ .

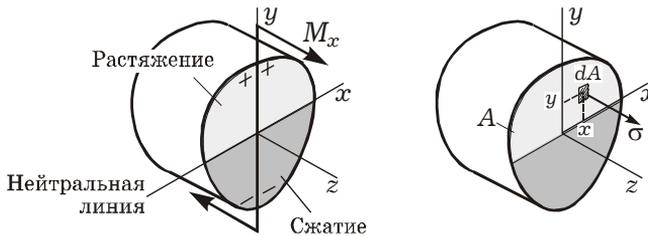


Рисунок 5.7

Выбор системы координат. Выберем систему координат в поперечном сечении балки, учитывая, что только $M_x \neq 0$. Все остальные внутренние силовые факторы, в том числе продольная сила N и изгибающий момент M_y , обращаются в нуль.

Начало координат совместим с центром тяжести поперечного сечения. Ось z направим по нормали к сечению, ось x – по нейтральной линии, ось y – перпендикулярно к оси x вверх.

Продольную силу получим, проинтегрировав в соответствии с формулой (1.1) элементарную силу σdA по всей площади поперечного сечения A :

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (5.6)$$

Подставим (5.5) в (5.6). С учетом того, что $E/\rho = \text{const}$,

$$N = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_x,$$

где $S_x = \int_A y dA$ – статический момент площади сечения.

Чтобы в сечении продольная сила не возникала ($N = 0$), статический момент должен быть равен нулю ($S_x = 0$), следовательно, выбранная система координат должна быть *центральной*.

Горизонтальный изгибающий момент получим, проинтегрировав в соответствии с формулой (1.1) момент относительно оси y элементарной силы $x\sigma dA$:

$$M_y = \int_A x \sigma dA. \quad (5.7)$$

Подставив закон Гука (5.5) в соотношение (5.7), получим

$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = \frac{E}{\rho} J_{xy}, \quad (5.8)$$

где $J_{xy} = \int_A xy dA$ – центробежный момент инерции.

Так как изгибающий момент в горизонтальной плоскости сечения $M_y = 0$, то из (5.8) следует, что центробежный момент инерции равен нулю ($J_{xy} = 0$). Поэтому выбранная система координат должна быть *главной*.

Следовательно, прямой чистый изгиб бруса под действием изгибающего момента M_x происходит только тогда, когда оси координат x, y являются *главными центральными* осями сечения.

Связь нормальных напряжений с изгибающим моментом. Изгибающий момент M_x представляет собой результирующий момент внутренних продольных сил σdA , возникающих на бесконечно малых площадках поперечного сечения балки (см. рисунок 5.7). Он может быть выражен в интегральном виде

$$M_x = \int_A y \sigma dA, \quad (5.9)$$

где y – плечо элементарной силы σdA относительно оси x .

Подставив в (5.9) напряжение σ из закона Гука (5.5) и учитывая, что $E/\rho = \text{const}$, имеем

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E J_x}{\rho}. \quad (5.10)$$

Напоминаем, что $\int_A y^2 dA = J_x$ – осевой момент инерции сечения.

Преобразовывая выражение (5.10), получаем выражение *кривизны балки* $1/\rho$ при чистом изгибе:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad (5.11)$$

где EJ_x – жесткость поперечного сечения при изгибе.

В то же время из закона Гука (5.5) следует, что кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey}. \quad (5.12)$$

Приравнивая правые части выражений (5.11), (5.12), имеем

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (5.13)$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

J_x – момент инерции относительно главной центральной оси;

y – координата рассматриваемой точки в поперечном сечении.

Знак напряжений связан с направлением оси y и изгибающего момента. Если M_x направлен противоположно тому моменту, который показан на рисунке 5.7 (т. е. растянуты нижние волокна), то в формуле (5.13) появляется знак «-». Поэтому в (5.11), (5.13) вводим «±» и окончательно принимаем

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y; \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (5.14)$$

На практике по направлению момента всегда видно, какие волокна сечения растянуты, а какие сжаты. Следовательно, при конкретных расчетах напряжений и кривизны по формулам (5.14) легко можно установить нужный знак.

Распределение нормальных напряжений по сечению. Согласно (5.14) нормальные напряжения изменяются по высоте сечения линейно. Максимальные значения достигаются на крайних волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси x (рисунок 5.8):

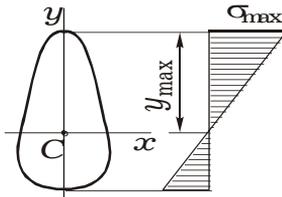


Рисунок 5.8

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{J_x} y_{\max}.$$

Так как $J_x / y_{\max} = W_x$ – осевой момент сопротивления, то

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{W_x}. \quad (5.15)$$

Если сечение симметрично относительно нейтральной оси x (рисунок 5.9, а, б, в), то нормальные напряжения на крайних верхних и нижних волокнах одинаковы по абсолютной величине (рисунок 5.9, г). Их знак устанавливается по направлению момента M_x .

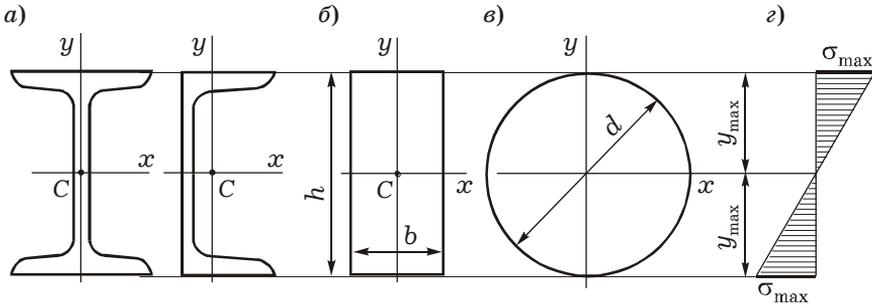


Рисунок 5.9

Формула (5.15) является основной в расчетах на прочность при изгибе. Она показывает, что наиболее экономичными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшей затратой материала получается наибольшая величина момента сопротивления W_x . Это позволяет снизить рабочие напряжения в балке. Чтобы форма сечений по возможности была рациональной, необходимо распределять площадь сечения подалеже от нейтральной оси. Так возникли стандартные тонкостенные профили, такие как *двутавры* и *швеллеры* (см. рисунок 5.9, а). При изгибе балок в вертикальной плоскости подобные профили дают существенную выгоду по сравнению с прочими формами поперечных сечений.

5.4 Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе

Энергия упругих деформаций элемента стержня dz при чистом изгибе определяется работой момента M_x на взаимном угловом перемещении $d\theta$ двух сечений (рисунок 5.10)

$$dU = \frac{1}{2} M_x d\theta.$$

Используя зависимость (5.11), получим

$$d\theta = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_x dz}{EJ_x}.$$

Отсюда следует выражение для элементарной потенциальной энергии

$$dU = \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x}.$$

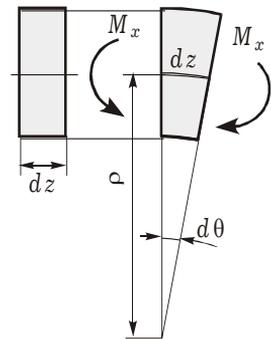


Рисунок 5.10

Полную потенциальную энергию деформации получим, проинтегрировав последнее выражение по длине балки l :

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x}. \quad (5.16)$$

Если изгибающий момент и жесткость балки постоянны по ее длине, то из (5.16) следует:

$$U = \frac{M_x^2 l}{2EJ_x}.$$

Это же выражение определяет потенциальную энергию деформации участка балки длиной l с постоянной жесткостью.

5.5 Напряжения при поперечном изгибе

Рассмотрим *поперечный изгиб в вертикальной плоскости*, при котором в сечениях балки присутствуют и изгибающий момент M_x , и поперечная сила Q_y . При этом возникают не только нормальные σ , но и *касательные напряжения* τ (рисунок 5.11). Их наличие свидетельствует о том, что продольные волокна балки испытывают и линейные, и сдвиговые деформации, т. е. волокна не только удлиняются (укорачиваются), но и перекашиваются. Свидетельством этому является незначительное *искривление поперечных сечений*.

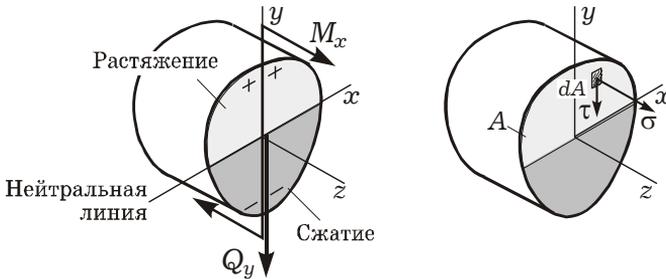


Рисунок 5.11

Нормальные напряжения. Опыты показывают, что если сила Q_y *постоянна* по длине стержня, то перекосы всех сечений одинаковы по значению и направлению. Следовательно, линейные деформации волокон оказываются такими же, как и при чистом изгибе. Поэтому формулы для определения напряжений и кривизны балки

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y; \quad \sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y; \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_x}{EJ_x}$$

применимы и для поперечного изгиба. Если Q_y изменяется вдоль участка стержня, то эти формулы дают погрешность порядка h/l по

сравнению с единицей (h – размер поперечного сечения в плоскости изгиба, l – длина участка). Для балок эта погрешность мала.

Примерно такого же порядка погрешность и в отступлении от гипотезы плоских сечений, поэтому в дальнейшем будем считать гипотезу Бернулли справедливой и для поперечного изгиба.

Касательные напряжения. Принимая гипотезу плоских сечений, мы предполагаем, что при деформации каждое продольное волокно остается нормальным к поперечным сечениям. А это значит, что в плоскости zy деформации сдвига γ считаются равными нулю. Поэтому если мы попытаемся найти τ по деформации сдвига γ с помощью закона Гука так же, как это было сделано для нормальных напряжений при переходе от (5.4) к (5.5), то получим: $\tau = G\gamma = 0$. Но мы только что пришли к выводу, что если при поперечном изгибе $Q_y \neq 0$, то и $\tau \neq 0$. Полученное противоречие, как видно, является следствием гипотезы плоских сечений, которая как раз и пренебрегает сдвигами.

Поперечная сила является равнодействующей элементарных распределенных сил, лежащих в плоскости сечения (см. рисунок 5.11):

$$Q_y = \int_A \tau dA.$$

Задача по определению напряжений всегда статически неопределима и требует привлечения геометрических и физических уравнений. Однако можно принять такие гипотезы о распределении напряжений, что задача станет статически определимой.

Двумя близкими поперечными сечениями выделим элемент балки малой длины dz (рисунок 5.12, а).

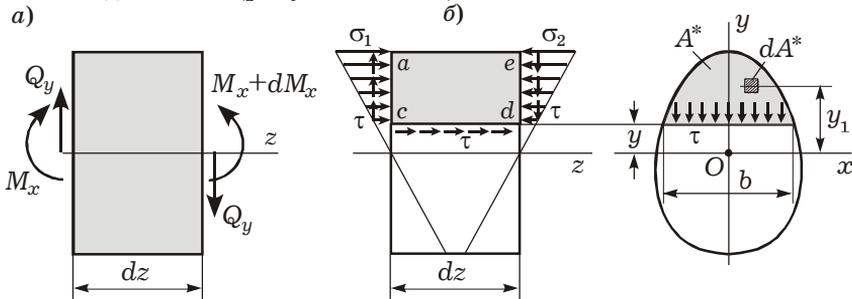


Рисунок 5.12

В левом и правом сечениях внутренние изгибающие моменты отличаются на малую величину dM_x , а поперечные силы считаются постоянными. Проведем продольное сечение, образовав элемент $acde$. На грани ac возникают нормальные напряжения $\sigma_1 = (M_x/J_x)y_1$, на грани ed – $\sigma_2 = [(M_x + dM_x)/J_x]y_1$ (рисунок 5.12, б).

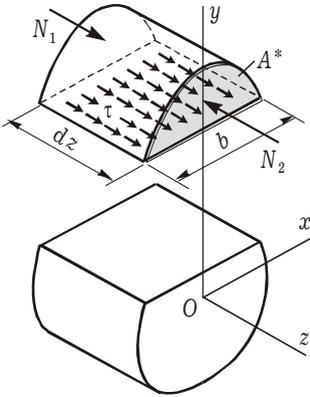


Рисунок 5.13

Равнодействующая внутренних продольных сил, распределенных по левой грани (рисунок 5.13),

$$N_1 = \int_{A^*} \sigma_1 dA = \frac{M_x}{J_x} \int_{A^*} y_1 dA = \frac{M_x}{J_x} S_x^*,$$

где A^* – площадь отсеченной части поперечного сечения;

S_x^* – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси.

Аналогично на правой грани

$$N_2 = \int_{A^*} \sigma_2 dA = \frac{M_x + dM_x}{J_x} S_x^*.$$

Элемент находится в сжатой зоне балки, поэтому обе равнодействующие N_1 и N_2 направлены навстречу друг другу. Их разность уравнивается касательными силами на нижней грани cd .

Предположим, что касательные напряжения τ распределены по ширине поперечного сечения *равномерно*. Это допущение тем справедливее, чем меньше ширина сечения b по сравнению с его высотой h ($h/b \geq 2$). Тогда равнодействующая касательных сил равна значению напряжений, умноженному на площадь нижней грани: $\tau b dz$.

Составляя уравнение равновесия элемента в виде суммы проекций на горизонтальную ось действующих сил, получаем

$$N_1 - N_2 + \tau b dz = 0; \quad \tau b dz = N_2 - N_1 = \frac{dM_x}{J_x} S_x^*,$$

отсюда $\tau = \frac{dM_x S_x^*}{dx J_x b}$.

Используя дифференциальную зависимость между поперечной силой и изгибающим моментом (5.2), получаем окончательное выражение касательных напряжений в продольных сечениях балки

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b}. \quad (5.17)$$

Формула (5.17) была предложена Д. И. Журавским¹⁾ в 1858 г., поэтому названа его именем. На основании теоремы парности касательных напряжений она позволяет определять соответствующие напряжения и в поперечных сечениях балки.

¹⁾ Журавский Дмитрий Иванович (1821–1891) – русский ученый и инженер, основатель русской научной школы в области строительной механики.

Для произвольного поперечного сечения величины, входящие в формулу (5.17), имеют следующий смысл:

Q_y – абсолютная величина поперечной силы в том сечении, где вычисляются касательные напряжения;

S_x^* – абсолютная величина статического момента отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси (той части площади A^* , которая заключена между линией, где определяются τ , и краем сечения);

J_x – момент инерции этого сечения относительно его нейтральной линии (главной центральной оси);

b – ширина сечения на уровне, где определяются τ .

Следствие. Зависимость касательных напряжений от координаты y в поперечном сечении определяется через статический момент отсеченной части сечения S_x^* . Для крайних волокон сечения $S_x^* = 0$ и, следовательно, $\tau = 0$. Для части сечения, расположенной выше или ниже нейтральной линии ($y = 0$), статический момент максимален, а вместе с ним и касательные напряжения. Таким образом, касательные напряжения достигают максимума на нейтральной оси и обращаются в нуль на внешних волокнах поперечного сечения.

Справедливость формулы Журавского. Вывод формулы Журавского проводился в предположении, что при изгибе в вертикальной плоскости касательные напряжения в поперечных сечениях параллельны только оси y . Рассмотрим, в чем приближенность формулы, на примере (рисунок 5.14) кругового поперечного сечения. Касательное напряжение τ , параллельное вертикальной оси, разложим на две составляющие: τ_t – касательная к контуру, τ_n – нормальная к нему. По условию нагружения внешняя поверхность стержня свободна от касательных сил, так как вдоль его оси нет нагрузки.

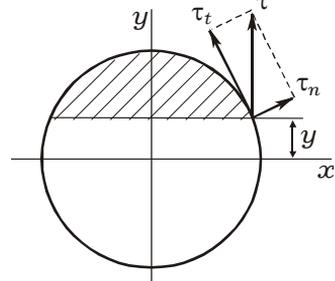


Рисунок 5.14

Поэтому и парные к ним напряжения τ_n должны быть равными нулю. Тогда получаем, что полные касательные напряжения τ вблизи контура направлены к нему по касательной и имеют составляющие и по оси y , и по оси x . Методами теории упругости можно показать, что в большинстве случаев составляющие по оси x малы по сравнению с составляющими по оси y .

Гипотезы, положенные в основу вывода формулы Журавского, справедливы только для узких прямоугольных сечений ($h/b > 2$). Однако в инженерной практике ею можно пользоваться и в других случаях. Исключением являются те места сечения, которые представляют собой узкие прямоугольники, расположенные перпендикулярно к поперечной силе Q : полки двутавров, швеллеров и т. д.

5.6 Распределение напряжений по прямоугольному и двутавровому сечениям

При поперечном изгибе в сечениях балки присутствуют изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y , следовательно, появляются нормальные и касательные напряжения.

Прямоугольное сечение. Пусть сечение балки представляет собой прямоугольник со сторонами b и h (рисунок 5.15).

Нормальные напряжения распределены по высоте сечения линейно, достигая максимума на крайних волокнах,

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M_x}{bh^2},$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

y – ордината точки в поперечном сечении;

J_x – момент инерции прямоугольника относительно главной центральной оси x ; $J_x = bh^3/12$;

W_x – момент сопротивления прямоугольника; $W_x = bh^2/6$.

Касательные напряжения определяются формулой Журавского (5.17). Статический момент отсеченной части сечения вычисляется как произведение заштрихованной площади на координату ее центра тяжести:

$$S_x^* = A y_c^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

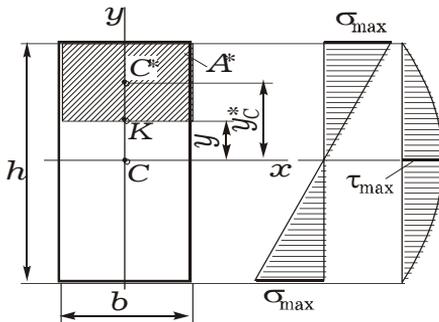


Рисунок 5.15

Отсюда

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Следовательно, эпюра касательных напряжений по высоте сечения ограничена параболой (см. рисунок 5.15). Наибольшие напряжения имеют место при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}.$$

Двутавровое сечение. Пусть балка имеет двутавровое сечение (рисунок 5.16, а). Приблизительно принимаем его составленным из трех прямоугольников (рисунок 5.16, б).

Нормальные напряжения в нем, как и для прямоугольного сечения, определяются соотношениями:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Момент инерции J_x и момент сопротивления W_x для стандартных двутавров приведены в таблицах сортамента, для составных (сварных) – вычисляются по формулам разд. 4. Эпюра σ прямолинейна, проходит через центр тяжести сечения.

Касательные напряжения вычислим по формуле Журавского (5.17) в указанных на рисунке 5.16, а четырех точках.

В верхней точке 1

$$\tau = \frac{Q_y S_1^*}{J_x b} = 0,$$

так как $S_1^* = 0$ – статический момент отсеченной в точке 1 верхней части поперечного сечения нулевой площади.

Для точки 2 получаем (см. рисунок 5.16, б)

$$\tau_2 = \frac{Q_y S_2^*}{J_x b_2}, \quad \text{где } S_2^* = S_2^* = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)bt; \quad b_2 = b.$$

В точке 3

$$\tau_3 = \frac{Q_y S_3^*}{J_x b_3}, \quad \text{где } S_3^* = S_{x_3}^* = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)bt; \quad b_3 = s.$$

Так как $b \gg s$, то $\tau_2 \ll \tau_3$.

В точке 4, по сравнению с точкой 3, увеличится статический момент. Для стандартных двутавров его можно не вычислять, а взять из таблиц сортамента. По своей величине $\tau_4 > \tau_3$, так как

$$S_{x_4}^* > S_{x_3}^*.$$

Эпюра касательных напряжений в пределах стенки двутавра ограничена параболой (рисунок 5.16, в).

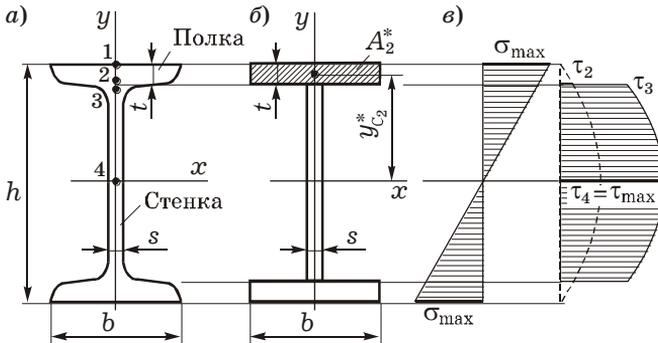


Рисунок 5.16

Замечание. В месте сопряжения полки со стенкой ширина сечения скачком меняется от величины b до s . При вычислении касательных напряжений в волокнах, принадлежащих полкам (точка 2), в формулу (5.17) мы подставили ширину полки b . Получилось параболическое очертание эпюры, показанное на рисунке 5.16, в штриховой линии. Однако эта часть эпюры носит весьма условный характер, так как допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения здесь несправедливо. На практике эпюру τ для двутавров строят только в пределах стенки.

☑ **ПРИМЕР 5.1.** Сопоставить абсолютные значения максимальных нормальных и касательных напряжений в консольном стержне прямоугольного поперечного сечения (рисунок 5.17).

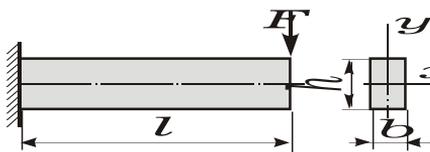


Рисунок 5.17

Так как $Q_y = F$, $M_{x \max} = Fl$, то

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{2bh}; \quad \sigma_{\max} = \frac{Fl}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{h}{4l}.$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения относятся к максимальным нормальным напряжениям примерно как высота сечения к длине стержня. Но так как $h \ll l$, то $\tau_{\max} \ll \sigma_{\max}$ и касательные напряжения при прочностных расчетах стержней сплошного сечения можно не учитывать.

5.7 Касательные напряжения при изгибе тонкостенных стержней

Выше было рассмотрено распределение касательных напряжений в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе. Предполагалось, что напряжения τ *параллельны* поперечной силе Q_y .

Если сечение представляет собой *незамкнутый тонкостенный профиль*, то картина распределения касательных напряжений существенно меняется (рисунок 5.18). В общем случае толщина сечения δ может быть переменной вдоль средней линии профиля.

В точках сечения вблизи наружного и внутреннего контуров напряжения τ направлены касательно к контурам. Из-за малости δ можно считать, что τ постоянны по толщине и направлены по касательной к средней линии сечения.

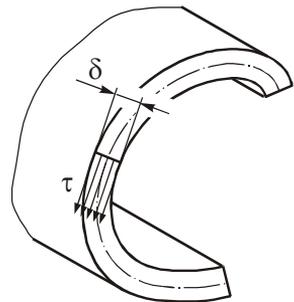


Рисунок 5.18

Формула Журавского для тонкостенных стержней. Рассмотрим элемент балки тонкостенного сечения, выделенный двумя сечениями z и $z + dz$ (рисунок 5.19, а).

Вывод формулы Журавского производится по тому же принципу, что и для бруса сплошного сечения. Отличие здесь в выполнении продольного разреза, который следует проводить плоскостью, нормальной к срединной линии профиля (рисунок 5.19, б).

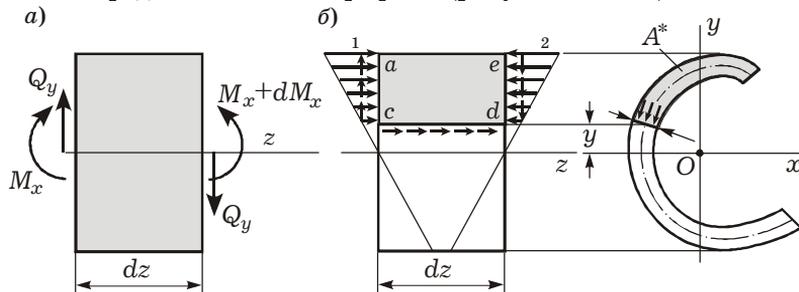


Рисунок 5.19

Повторив с учетом сделанного изменения все рассуждения подразд. 5.5, приходим к формуле Журавского для тонкостенных стержней:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta}, \quad (5.18)$$

где Q_y – абсолютная величина поперечной силы в том сечении, где вычисляются касательные напряжения;

S_x^* – статический момент отсеченной части поперечного сечения;

J_x – момент инерции этого сечения относительно главной центральной оси;

δ – толщина сечения на уровне, где определяются τ .

В таких сечениях, как двутавр, швеллер и др., касательные напряжения в стенке *параллельны* силе Q_y , в полках – *перпендикулярны* к ней (рисунок 5.20). Напряжения в полках и в стенке образуют единый поток.

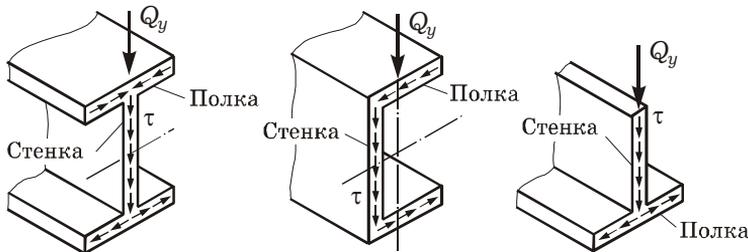


Рисунок 5.20

Формула (5.18) дает возможность вычислить касательные напряжения в любой точке тонкостенного профиля и построить *полную эпюру касательных напряжений*.

Полная эпюра касательных напряжений для двутавра. Рассмотрим сечение двутавровой балки, испытывающей поперечный изгиб в вертикальной плоскости (рисунок 5.21, а). Будем пренебрегать уклоном полок и считать, что они имеют постоянную, указанную в сортаменте толщину t . Определим касательные напряжения в отмеченных на рисунке 5.21, б четырех точках. В каждой из них будем проводить сечение *перпендикулярно средней линии профиля*.

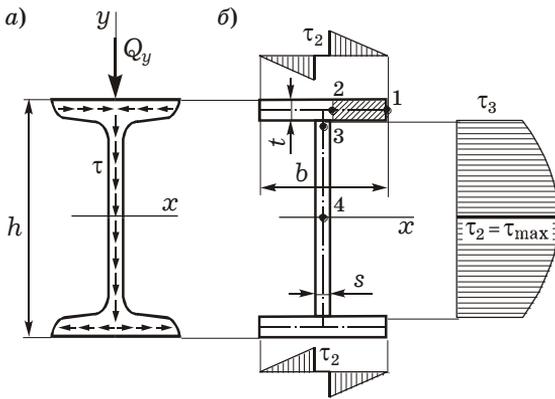


Рисунок 5.21

На участке полки между точками 1 и 2

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta};$$

$$S_x^* = \left(\frac{b}{2} - x \right) t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right);$$

$$\delta = t,$$

следовательно,

$$\tau = \frac{Q_y}{J_x} \left(\frac{b}{2} - x \right) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Координата x точки, в которой определяется τ , входит в это выражение в первой степени, следовательно, эпюра τ в пределах полки будет *прямолинейной*.

В точке 1 касательные напряжения $\tau_1 = 0$, так как отсеченная часть имеет нулевую площадь.

$$\text{Для точки 2 } \tau_2 = \frac{Q_y}{J_x} \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

На рисунке 5.21, б заштрихована отсеченная часть для точки 2.

В точках 3 и 4, принадлежащих стенке, сечение проводится горизонтально, перпендикулярно поперечной силе. Касательные напряжения τ_3 и τ_4 вычислены ранее (см. подразд. 5.6).

Эпюра τ для двутавра имеет вид, показанный на рисунке 5.21, б.

Замечание. Форма и размеры стандартных тонкостенных профилей (двутавров, швеллеров) подобраны таким образом, что касательные напряжения в полках в несколько раз меньше напряжений в стенке. Поэтому на практике вполне достаточно строить эпюру τ только для стенки (см. рисунок 5.16).

5.8 Расчеты на прочность при изгибе

При изгибе в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения. Рассматривая распределение σ и τ по сечению, можно заметить следующие важные особенности:

- нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси; в этих точках касательные напряжения, как правило, равны нулю или малы;
- касательные напряжения обычно максимальны на нейтральной оси или вблизи нее, т. е. там, где нормальные напряжения равны нулю или малы.

Поэтому при расчете на прочность балок *можно пренебречь взаимным влиянием нормальных и касательных напряжений* и сформулировать *раздельно* условия прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Условие прочности по нормальным напряжениям. Рассмотрим балку из материала, *одинаково работающего на растяжение и сжатие* (например, сталь, дерево).

Если балка имеет *постоянное* сечение по длине, то опасным является сечение, в котором возникает максимальный изгибающий момент $M_{x \max}$. Условие прочности по нормальным напряжениям можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.19)$$

где σ_{\max} – наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение;

$M_{x \max}$ – изгибающий момент в опасном сечении;

W_x – момент сопротивления опасного сечения (момент сопротивления изгибу);

$[\sigma]$ – допускаемые нормальные напряжения, вместо которых при расчете строительных конструкций используется расчетное сопротивление R .

Если поперечное сечение балки *переменно* по длине, то опасное сечение соответствует максимуму отношения M_x / W_x . Условие прочности в этом случае

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M_x}{W_x} \right)_{\max} \leq [\sigma].$$

На практике используются *три типа расчетов на прочность*:

- *поверочный расчет* выполняется, если известны размеры стержней, внешние нагрузки и допускаемые напряжения. Вычисляются максимальные рабочие напряжения и сравниваются с

допускаемыми напряжениями. После этого делается вывод, выполняется или не выполняется условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma];$$

- *подбор размеров поперечного сечения* балки производится, если заданы внешние нагрузки (следовательно, известны внутренние изгибающие моменты) и допускаемые напряжения. Тогда из условия (5.19) для опасного сечения следует

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]}. \quad (5.20)$$

По известному W_x определяются необходимые размеры сечения;

- *определение грузоподъемности (несущей способности)* проводится, если известны размеры сечений элементов и допускаемые напряжения. Тогда величина изгибающего момента в опасном сечении

$$M_{x \max} \leq W_x [\sigma].$$

По ней вычисляется максимальная величина внешней нагрузки. Эту задачу чаще всего решают при реконструкции сооружений.

Заметим, что для балок, материал которых по-разному работает на растяжение и сжатие, необходимо обязательно учитывать знак напряжений. При этом используются разные допускаемые напряжения при работе на растяжение и сжатие – $[\sigma]_t$ и $[\sigma]_c$. Для строительных конструкций используются соответствующие расчетные сопротивления.

Условие прочности по касательным напряжениям. Для тонкостенных профилей (швеллер, двутавр, уголок и др.) необходимо дополнительно выполнять проверку прочности по касательным напряжениям. Условие прочности по τ имеет вид

$$\tau_{\max} \leq \frac{Q_y S^*}{I_x R_s}, \quad (5.21)$$

где τ_{\max} – максимальное касательное напряжение в опасном сечении;
 Q_y – наибольшая по абсолютному значению поперечная сила;
 $[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения, вместо которых при расчете строительных конструкций используется расчетное сопротивление сдвигу (срезу, скалыванию) R_s .

Остальные обозначения те же, что и в формуле (5.18).

Для стандартных профилей если выполняется условие прочности по σ , то обычно выполняется и условие прочности по τ .

Если размеры сечения выбраны из условия прочности по нормальным напряжениям (5.20), а условие (5.21) не выполняется, следует провести коррекцию размеров.

5.9 Расчет балок с учетом развития пластических деформаций

Во всех предыдущих расчетах при изгибе предполагалось, что материал балки работает *упруго*, т. е. напряжения и деформации прямо пропорциональны друг другу.

Нормальные напряжения изменяются по высоте сечения линейно, достигая наибольших значений в крайних волокнах:

$$\sigma_{\max} = M_x / W_x .$$

В «упругих» расчетах на прочность за *опасное* принимается такое состояние балки, когда σ_{\max} достигают предела текучести σ_y . Но балка еще сохраняет способность воспринимать внешнюю нагрузку, так как в средних волокнах имеет место недонапряжение. Поэтому средние волокна являются своеобразным резервом повышения несущей способности балки, если допустить появление пластических деформаций.

Предельное состояние. Рассмотрим статически определимую балку (рисунок 5.22, а). Материал пластичный, одинаково хорошо сопротивляется растяжению и сжатию (пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы, $\sigma_{yt} = \sigma_{yc} = \sigma_y$), его деформирование подчиняется диаграмме Прандтля (см. подразд. 2.13). Поперечное сечение балки имеет две оси симметрии: x и y (рисунок 5.23, а). Опасным будет сечение с наибольшим изгибающим моментом $M_{x \max}$.

Проследим за работой балки при постепенном увеличении внешней нагрузки F .

Упругая стадия. Эпюра нормальных напряжений в опасном сечении прямолинейна, максимальные напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = M_{x \max} / W_x$$

не превышают предела текучести σ_y (рисунок 5.23, б).

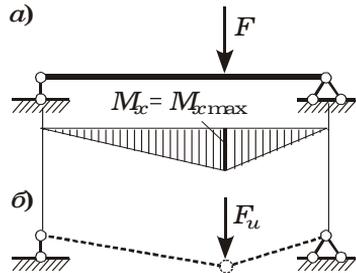


Рисунок 5.22

Упругопластическая стадия. При увеличении нагрузки крайние волокна первыми достигнут предела текучести (рисунок 5.23, в), после чего рост напряжений в них прекратится, а деформации будут продолжать расти. Дальнейшее увеличение нагрузки приведет к тому, что текучесть материала будет проникать глубже по сечению, захватывая новые волокна, но в средней части сохранится *упругое ядро* высотой η (рисунок 5.23, г). При дальнейшем росте нагрузки высота упругого ядра постепенно уменьшается.

Предельное пластическое состояние наступит, когда текучесть распространится по всему поперечному сечению, так как после этого дальнейшая деформация балки происходит без увеличения нагрузки. Напряжения во всех волокнах достигают предела текучести σ_y , эпюра σ прямоугольная (рисунок 5.23, д). Несущая способность балки полностью исчерпана. Внешняя нагрузка достигает предельного значения F_u , в опасном сечении возникает предельный изгибающий момент M_{pl} .

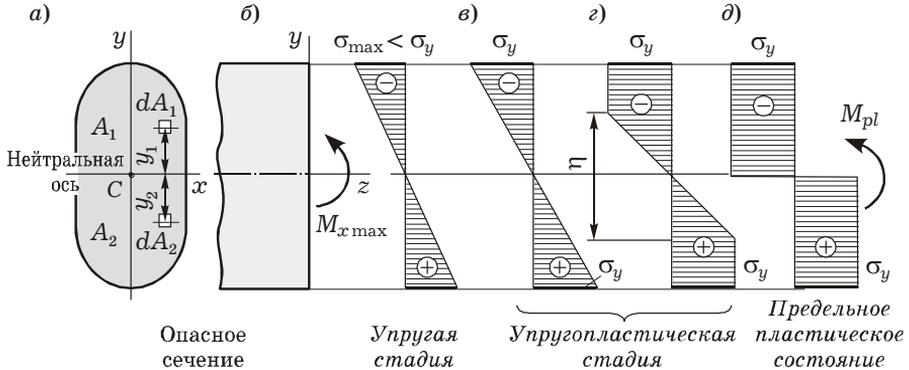


Рисунок 5.23

Явление, при котором напряжения во всех точках сечения равны пределу текучести σ_y , называется *пластическим шарниром*. Он превращает статически определимую балку (см. рисунок 5.22, а) в изменяемую систему (см. рисунок 5.22, б). Вследствие интенсивного нарастания деформаций балка получает *угол перелома* в наиболее опасном сечении. В отличие от идеального шарнира, который не воспринимает изгибающего момента, в пластическом шарнире действует момент M_{pl} . Пластический шарнир является односторонним: он исчезает при действии в этом сечении момента обратного (по отношению к M_{pl}) знака или при разгрузке балки.

Несущая способность в предельном состоянии. Для определения величины предельного изгибающего момента M_{pl} выделим две элементарные площадки dA_1 и dA_2 , расположенные в верхней и нижней частях сечения. Их расстояния от нейтральной оси x обозначим через y_1 и y_2 (см. рисунок 5.23, а). Момент элементарной силы $\sigma_y dA_1$, действующей на первую площадку, относительно нейтральной оси равен $y_1 \sigma_y dA_1$. Аналогично для нижней площадки получаем элементарный момент $y_2 \sigma_y dA_2$. Оба эти момента имеют одинаковые знаки, так как вращают свои площадки относительно оси x в одну и ту же сторону. Суммируя их по верхней и нижней частям поперечного сечения, получаем выражение для предельного момента

$$M_{pl} = \int_{A_1} y_1 \sigma_y dA + \int_{A_2} y_2 \sigma_y dA = \sigma_y \left(\int_{A_1} y_1 dA + \int_{A_2} y_2 dA \right) = \sigma_y (S_1 + S_2),$$

где

$$S_1 = \int_{A_1} y_1 dA, \quad S_2 = \int_{A_2} y_2 dA -$$

статические моменты соответственно верхней и нижней частей поперечного сечения относительно нейтральной оси x , взятые по модулю.

Сумма этих статических моментов называется *пластическим моментом сопротивления* (по аналогии с моментом сопротивления W_x при обычном расчете):

$$W_{pl} = S_1 + S_2. \quad (5.22)$$

Для сечений, имеющих две оси симметрии, из (5.22) следует

$$W_{pl} = 2S_x,$$

где S_x – статический момент половины сечения относительно оси x .

Таким образом, предельный изгибающий момент

$$M_{pl} = \sigma_y W_{pl}. \quad (5.23)$$

У реальных сечений отношение W_{pl} / W_x всегда больше единицы. Так, у прямоугольного сечения

$$W_{pl} = 2 \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6},$$

следовательно, $W_{pl} / W_x = 1,5$.

В таком же отношении находятся соответствующие изгибающие моменты M_{pl} и $M_y = \sigma_y W_x$, т. е. учет образования пластического шарнира позволяет повысить несущую способность балок прямоугольного сечения в 1,5 раза по сравнению с обычным, «упругим», расчетом.

Для других форм поперечного сечения указанное отношение иное, причем оно тем меньше, чем рациональнее распределен материал по высоте балки с точки зрения обычного расчета. Для прокатных двутавровых балок и швеллеров $W_{pl} = 1,12 \dots 1,17 W_x$ при изгибе в плоскости стенки и $W_{pl} = 1,2 W_x$ при изгибе параллельно полкам.

Продольная сила в поперечном сечении при изгибе равна нулю:

$$N = \int_{A_1} (-\sigma_y) dA + \int_{A_2} \sigma_y dA = \sigma_y (A_2 - A_1) = 0.$$

Поэтому в пластическом шарнире площадь сжатой зоны сечения всегда должна быть равна площади растянутой зоны $A_2 = A_1$, так как действующие в них напряжения одинаковы и равны σ_y .

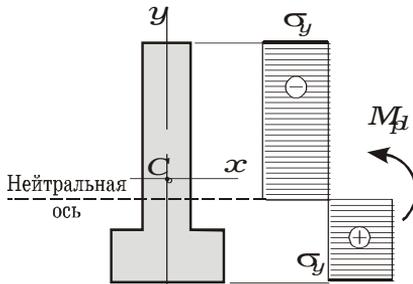


Рисунок 5.24

Таким образом, нейтральная ось делит площадь опасного сечения на две равновеликие части. Поэтому в несимметричном поперечном сечении нейтральная ось в предельном состоянии не проходит через центр тяжести сечения (рисунок 5.24).

Замечание. Изложенная теория изгиба с учетом пластических деформаций не учитывает влияние поперечной силы при поперечном изгибе. Как показывает практика, это влияние невелико, и им можно пренебречь.

5.10 Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Перемещения при изгибе. Различают два типа перемещений:

- *линейные* – прогибы $y(z)$;
- *угловые* – углы поворота $\theta(z)$ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных осей или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования (рисунок 5.25).

Допущение о малости деформаций (см. подразд. 1.2) позволяет считать, что прогибы направлены перпендикулярно продольной оси z недеформированной балки; углы поворота настолько малы, что можно принять $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$.

Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg} \theta = dy/dz$ с достаточной степенью точности угол поворота сечения будет равным первой производной от прогиба по абсциссе сечения:

$$\theta(z) = dy/dz = y'.$$

Прогиб *вверх* считается положительным, *вниз* – отрицательным. Угол принимается положительным, если поперечное сечение поворачивается *против часовой стрелки*, отрицательным – если поворот происходит *по часовой стрелке*.

Кривая, в которую превращается продольная ось балки при деформировании, называется *упругой линией*. Для определения перемещений необходимо знать ее уравнение.



Рисунок 5.25

Уравнение упругой линии балки. Из курса математического анализа известно, что кривизна $1/\rho$ некоторой линии $y = y(z)$ связана с уравнением кривой соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

С другой стороны, согласно (5.11)

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_x(z)}{EJ_x}.$$

Приравнивая правые части этих формул, получаем *точное дифференциальное уравнение упругой линии балки*:

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x(z)}{EJ_x}. \quad (5.24)$$

Уравнение (5.24) нелинейное, его интегрирование связано с большими трудностями. Однако из-за малости углов поворота $\theta(z) = y'$ их квадратами можно пренебречь как величинами весьма малыми по сравнению с единицей. Тогда это уравнение упрощается:

$$y'' = \pm \frac{M_x}{EJ_x}.$$

Выбор знака зависит от принятой системы координат. Если внутренний изгибающий момент направлен так, что увеличивает кривизну изогнутого стержня, то в последнем уравнении следует сохранить только знак «плюс»:

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (5.25)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением упругой линии балки*. Оно является *приближенным*, так как использовано допущение о малости углов поворота. Кроме этого, не учтены деформации сдвига, связанные с наличием поперечных сил. Однако в подавляющем большинстве случаев влияние поперечных сил несущественно и им можно пренебречь.

Уравнение (5.25) с достаточной для практических целей точностью позволяет определять прогибы и углы поворота в любом сечении балки от любой нагрузки. Для балки постоянного сечения его удобно записывать в виде

$$EJ_x y'' = M_x. \quad (5.26)$$

Используя (5.26) и полученные ранее дифференциальные зависимости (5.2), (5.3) между q , Q_y и M_x

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}; \quad q = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2M_x}{dz^2},$$

получаем, что для балки с постоянным сечением справедливы следующие уравнения:

$$Q_y = EJ_x y''; \quad q = EJ_x y'''. \quad (5.27)$$

Из (5.27) следует, что форма изогнутой оси балки, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки ($q = \text{const}$), описывается уравнением четвертого порядка. Если $q = 0$ ($Q_y = \text{const}$), то форму описывает кривая третьего порядка, при $Q_y = 0$ (чистый изгиб, $M_x = \text{const}$) – второго порядка, в частности, окружность.

З а м е ч а н и е. Если стержень достаточно гибок и возникающие деформации конечны (т. е. не выполняется гипотеза малости деформаций и величина y' не мала по сравнению с единицей), то нужно применять точное дифференциальное уравнение упругой линии (5.24). Кроме этого, при расчете гибких стержней уравнения равновесия обязательно должны составляться по деформированной схеме (с учетом перемещений внешних нагрузок за счет изгиба конструкции).

5.11 Определение перемещений при изгибе

Метод непосредственного интегрирования. Перемещения балки при изгибе – прогиб $y(z)$ и угол поворота сечения $\theta(z)$ – для нагрузок простого вида можно получать методом непосредственного интегрирования уравнения (5.25). Тогда в результате двукратного интегрирования имеем

$$\theta = y' = \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C_1; \quad y = \iint \frac{M_x}{EJ_x} dz dz + C_1 z + C_2. \quad (5.28)$$

Константы интегрирования C_1, C_2 в выражении (5.28) определяются из граничных условий (условий закрепления стержня).

☑ **ПРИМЕР 5.2.** Для балки постоянной жесткости ($EJ_x = \text{const}$), показанной на рисунке 5.26, а, требуется найти прогиб y_A и угол поворота θ_A в сечении А.

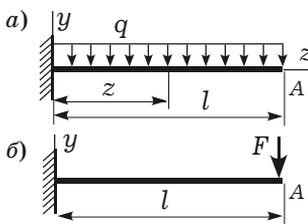


Рисунок 5.26

Изгибающий момент в сечении с координатой z

$$M_x = -\frac{q(l-z)^2}{2}.$$

Подставив это выражение в уравнение (5.24), получим

$$y'' = -\frac{q}{EJ_x} \frac{(l-z)^2}{2}.$$

Проинтегрируем его два раза:

$$\theta = y' = \frac{q}{2EJ_x} \frac{(l-z)^3}{3} + C_1; \quad y = -\frac{q}{6EJ_x} \frac{(l-z)^4}{4} + C_1 z + C_2. \quad (a)$$

Константы интегрирования C_1 , C_2 определяются из условия равенства нулю в заделке прогиба и угла поворота сечения, т. е. при $z = 0$ получаем $y(0) = 0$, $\theta(0) = y'(0) = 0$. Удовлетворяя эти требования в (a), имеем

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \frac{ql^3}{6EJ_x} + C_1 = 0; & C_1 &= -\frac{ql^3}{6EJ_x}; \\ y(0) &= -\frac{ql^4}{24EJ_x} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; & C_2 &= \frac{ql^4}{24EJ_x}. \end{aligned}$$

Подставив константы интегрирования в (a), получим формулы для определения перемещений в любом сечении рассматриваемой балки. Например, перемещения сечения A следуют при значении $z = l$:

$$\theta_A = y'(l) = -\frac{ql^3}{6EJ_x}; \quad y_A = y(l) = -\frac{ql^4}{8EJ_x}. \quad (б)$$

Если на консольную балку в точке A действует сосредоточенная сила F (рисунок 5.26, б), то прогиб в (б) принимает вид

$$y_A = y(l) = -\frac{Fl^3}{3EJ_x}.$$

З а м е ч а н и е. Метод прямого интегрирования становится неудобен, если действуют несколько внешних нагрузок. Балку приходится разбивать на характерные участки. Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии нужно проводить *внутри каждого из участков в отдельности*, что приведет в данном случае к появлению двух констант интегрирования. В результате этих констант будет в два раза больше количества участков. Их необходимо определять из условий закрепления балки и сопряжения участков, что приведет к громоздкости математических выкладок. Избежать этого можно, если воспользоваться другими методами определения перемещений, например, методом начальных параметров.

Метод начальных параметров. Рассмотрим балку постоянной жесткости (рисунок 5.27), на которую действуют различные виды нагрузок. Опоры отброшены, их действие заменено опорными реакциями. Условимся:

- начало координат помещать на левом конце балки;
- сосредоточенный момент m привязывать к своему сечению, т. е. представлять в виде произведения $m(z - a)^0$, где a – расстояние от начала координат до сечения, в котором момент приложен;
- распределенную нагрузку, не доходящую до правого конца балки, продлевать до этого конца, одновременно уравновешивая противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности;

- интегрирование выражений для изгибающего момента, содержащих скобки, проводить без раскрытия скобок.

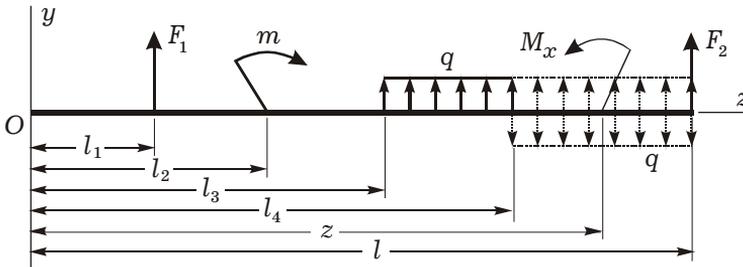


Рисунок 5.27

Выполнение перечисленных условий позволяет ограничиться составлением и интегрированием всего лишь *одного* дифференциального уравнения – уравнения последнего (крайнего правого) участка балки. В результате этого всегда образуются две константы интегрирования независимо от количества участков.

Уравнение для любого промежуточного участка может быть получено из общего уравнения путем исключения слагаемых, которые содержат нагрузки, примененные правее рассматриваемого участка.

Таким образом, при определении перемещений методом начальных параметров *следует учитывать только те нагрузки, которые расположены слева от рассматриваемого сечения.*

Левый конец балки совместим с началом координат. Используя метод сечений, составим выражение для изгибающего момента M_x на последнем, пятом, участке балки:

$$M_x = F_1(z - l_1) + m + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}. \quad (5.29)$$

Здесь распределенная нагрузка продолжена до конца балки и снизу введена соответствующая компенсация. Это сделано для того, чтобы момент M_x на других участках балки можно было получить из соотношения (5.29), отбрасывая все нагрузки, расположенные правее сечения. Поэтому все распределенные нагрузки должны заканчиваться на правом конце балки. Сила F_2 не входит в это уравнение, так как расположена правее рассматриваемого сечения.

Подставим полученное выражение для момента M_x в дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EJ_x y'' = F_1(z - l_1) + m + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}.$$

При интегрировании этого уравнения внешний момент будем привязывать к своему сечению: $m = m(z - l_2)^0$. Тогда

$$EJ_x y' = EJ_x \theta_0 + F_1 \frac{(z-l_1)^2}{2} + m(z-l_2) + \frac{q(z-l_3)^3}{6} - \frac{q(z-l_4)^3}{6};$$

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + F_1 \frac{(z-l_1)^3}{6} + m \frac{(z-l_2)^2}{2} + \frac{q(z-l_3)^4}{24} - \frac{q(z-l_4)^4}{24}. \quad (5.30)$$

Здесь θ_0 , y_0 – константы интегрирования. Для выяснения их механического смысла рассмотрим крайнее левое сечение. Из выражений (5.30), отбрасывая все нагрузки, расположенные правее сечения $z = 0$, получаем

$$EJ_x y'|_{z=0} = EJ_x \theta_0; \quad EJ_x y|_{z=0} = EJ_x y_0.$$

Следовательно, величины θ_0 и y_0 являются *углом поворота и прогибом крайнего левого сечения балки*. Поэтому их называют *начальными параметрами* балки.

Для балки на двух опорах (рисунок 5.28, а) величины θ_0 , y_0 определяются из условия равенства нулю прогиба на обеих опорах ($y = 0$ при $z = 0$ и $z = l$). Если один конец балки заделан (рисунок 5.28, б), то начальные параметры будут следующими: $\theta_0 = 0$, $y_0 = 0$.

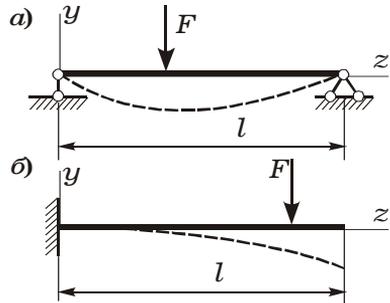


Рисунок 5.28

Другие методы определения перемещений в стержневых системах при изгибе рассмотрены в разд. 9.

5.12 Примеры расчета балок при прямом изгибе

✓ ПРИМЕР 5.3. Рассмотрим прочностной расчет стальной двутавровой балки при прямом изгибе. Балка (рисунок 5.29, а) нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенными силами $F = qa$ и моментом $m = qa^2$. Значения $q = 13$ кН/м, $a = 2$ м.

Расчетное сопротивление при изгибе $R = 210$ МПа, расчетное сопротивление сдвигу $R_s = 130$ МПа, предел текучести $\sigma_y = 240$ МПа. Требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать по сортаменту номер двутавра;
- 3) проверить прочность двутавра по касательным напряжениям;
- 4) в сечении балки над левой опорой построить эпюры нормальных и касательных напряжений;
- 5) определить предельную интенсивность распределенной нагрузки q_u , при которой в опасном сечении образуется пластический шарнир;

б) методом начальных параметров определить прогиб балки посередине пролета и показать общее очертание упругой оси.

Эпюры внутренних усилий – поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x (рисунок 5.29, б, в) – ранее построены в примере 1.4.

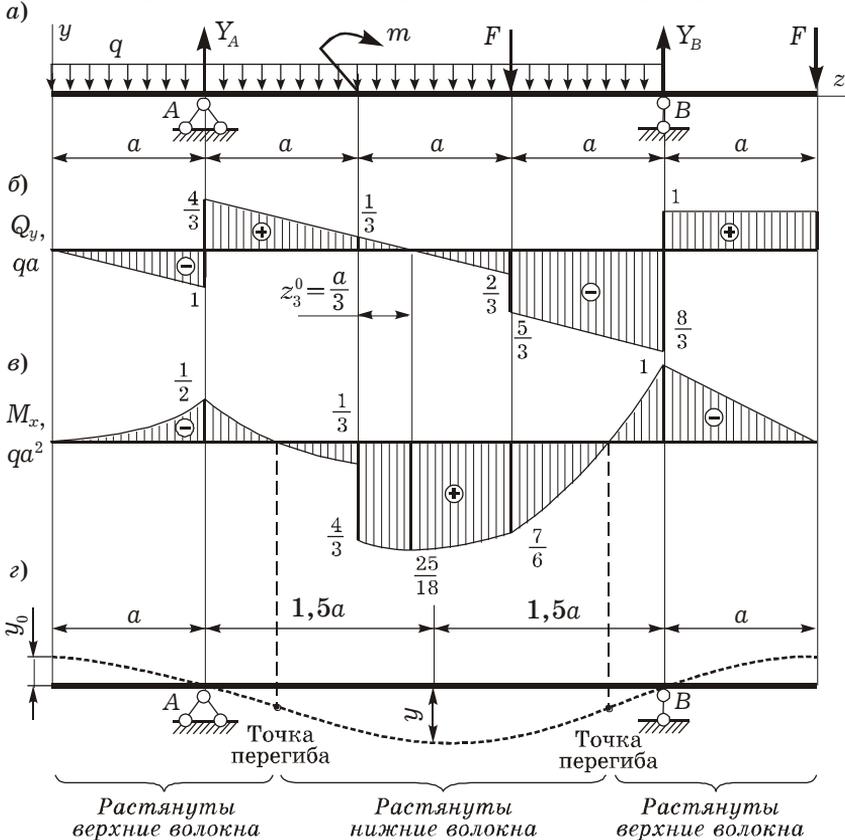


Рисунок 5.29

Подбор размеров поперечного сечения выполним по абсолютной величине максимального изгибающего момента:

$$M_{x \max} = (25/18)qa^2 = (25/18) \cdot 13 \cdot 2^2 = 72,22 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Сечение балки, в котором он действует, называется *опасным*.

Из условия прочности при изгибе (5.20) определяем требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{R} = \frac{72,22 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 350 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Используя таблицы сортамента, принимаем двутавр № 27, у которого $W_x = 371 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Выписываем из сортамента необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики выбранного двутавра: $h = 27 \text{ см}$; $b = 12,5 \text{ см}$; $s = 0,6 \text{ см}$; $t = 0,98 \text{ см}$; $J_x = 5010 \text{ см}^4$; $S_x^* = 210 \text{ см}^3$.

Проверку прочности по касательным напряжениям выполняем для сечения с максимальной по абсолютной величине поперечной силой:

$$Q_{y \max} = (8/3)qa = (8/3) \cdot 13 \cdot 2 = 69,33 \text{ кН.}$$

Максимальные касательные напряжения в балке

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} S_x^*}{J_x s} = \frac{69,33 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 48,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 48,4 \text{ МПа.}$$

Это не превышает расчетного сопротивления сдвигу $R_s = 130 \text{ МПа}$, поэтому условие прочности по касательным напряжениям (5.21) для выбранного двутавра выполняется.

Построение эпюр нормальных и касательных напряжений. В заданном поперечном сечении балки (сечение A над левой опорой) вычисляем действующие изгибающий момент и поперечную силу:

$$M_x^A = qa^2/2 = 13 \cdot 2^2/2 = 26 \text{ кН·м;}$$

$$Q_y^A = (4/3)qa = (4/3) \cdot 13 \cdot 2 = 34,67 \text{ кН.}$$

Нормальные напряжения по поперечному сечению распределены линейно. Эпюра изгибающих моментов в рассматриваемом сечении расположена сверху над осью балки, следовательно, растянуты верхние волокна. Максимальные и минимальные напряжения возникают в верхних и нижних волокнах сечения:

$$\sigma_{\max}^A = \frac{M_x^A}{W_x} = \frac{26 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} = 70,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,1 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\min}^A = -\sigma_{\max}^A = -73,7 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения вычисляем в четырех пронумерованных характерных точках сечения, принимая полки двутавра прямоугольными. Для первой точки $\tau_1^A = 0$ из-за равенства нулю площади отсеченной части сечения.

Статический момент отсеченной во второй точке части поперечного сечения вычисляем как произведение координаты центра тяжести полки двутавра $(h/2 - t/2)$ на ее площадь bt :

$$S_{x_2}^* = (h/2 - t/2)bt = (27/2 - 0,98/2) \cdot 12,5 \cdot 0,98 = 159,4 \text{ см}^3,$$

тогда

$$\tau_2^A = \frac{Q_y^A S_{x_2}^*}{J_x b} = \frac{34,67 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 12,5 \cdot 10^{-2}} = 0,88 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,88 \text{ МПа.}$$

Так как сечения, проведенные через вторую и третью точки, практически совпадают, то и соответствующие статические моменты отсеченных площадей $S_{x_3}^* = S_{x_2}^*$. Отличие только в ширине сечения, проведенного через точку 3, здесь она равна s . Поэтому

$$\tau_3^A = \frac{Q_y^A S_{x_2}^*}{J_x s} = \frac{34,67 \cdot 10^3 \cdot 159,4 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 18,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,4 \text{ МПа}.$$

Продольное сечение, проведенное через четвертую точку, делит поперечное сечение пополам. Статический момент половины сечения двутавра приведен в сортаменте, поэтому $S_{x_4}^* = S_x^*$. Отсюда

$$\tau_4^A = \tau_{\max}^A = \frac{Q_y^A S_x^*}{J_x s} = \frac{34,67 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 24,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,2 \text{ МПа}.$$

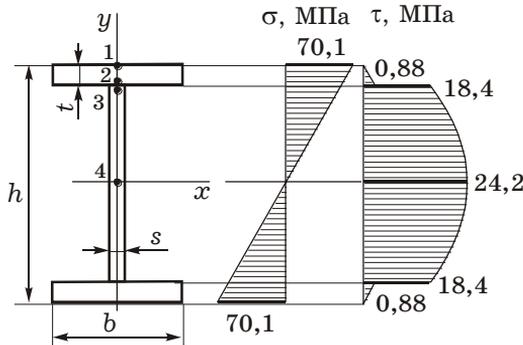


Рисунок 5.30

По вычисленным значениям нормальных и касательных напряжений в указанных точках сечения над левой опорой балки строим соответствующие эпюры (рисунок 5.30).

Следует обратить внимание на то, что в третьей точке касательные напряжения скачком увеличиваются более чем в 20 раз. Это происходит из-за соответствующего уменьшения ширины поперечного сечения.

Расчет балки с учетом пластических деформаций. Определим, при какой интенсивности распределенной нагрузки q_u в сечении с наибольшим изгибающим моментом образуется пластический шарнир. Для этого приравняем максимальный момент, выраженный через эту нагрузку, $M_{x \max} = (25/18)q_u a^2$ к предельному моменту, который в соответствии с формулой (5.23) будет $M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$. Через W_{pl} обозначен пластический момент сопротивления сечения:

$$W_{pl} = 2 S_x = 2 \cdot 210 \cdot 10^{-6} = 420 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Приравнявая моменты, получаем

$$(25/18)q_u a^2 = s_y W_{pl};$$

$$q_u = \frac{18 s_y W_{pl}}{25 a^2} = \frac{18 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 420 \cdot 10^{-6}}{25 \cdot 4} = 18,1 \cdot 10^3 \text{ Н/м} = 18,1 \text{ кН/м}.$$

Следовательно, при величине интенсивности распределенной нагрузки $q = q_u = 18,1 \text{ кН/м}$ в опасном сечении балки может образоваться пластический шарнир, если материал двутавра идеально упругопластический.

Определение перемещений. Методом начальных параметров определим прогиб балки посередине пролета (при $z = 2,5a$). Для этого распределенную нагрузку продолжим до конца балки и снизу введем соответствующую компенсацию (рисунок 5.31, штриховые линии).

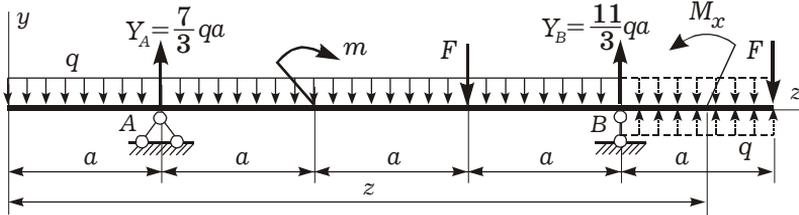


Рисунок 5.31

Составим выражение изгибающего момента M_x на пятом участке:

$$M_x = -\frac{qz^2}{2} + Y_A(z-a) + m(z-2a)^0 - F(z-3a) + Y_B(z-4a) + q\frac{(z-4a)^2}{2}.$$

Подставив его в дифференциальное уравнение упругой линии балки $EJ_x y'' = M_x$ и учитывая значения сил и моментов, получим

$$EJ_x y'' = -\frac{qz^2}{2} + \frac{7qa}{3}(z-a) + qa^2(z-2a)^0 - qa(z-3a) + \frac{11qa}{3}(z-4a) + q\frac{(z-4a)^2}{2}.$$

Проинтегрируем это выражение два раза:

$$EJ_x y' = EJ_x \theta_0 - \frac{qz^3}{6} + \frac{7qa}{3} \frac{(z-a)^2}{2} + qa^2(z-2a) - qa \frac{(z-3a)^2}{2} + \frac{11qa}{3} \frac{(z-4a)^2}{2} + q \frac{(z-4a)^3}{6};$$

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z - \frac{qz^4}{24} + \frac{7qa}{3} \frac{(z-a)^3}{6} + qa^2 \frac{(z-2a)^2}{2} - qa \frac{(z-3a)^3}{6} + \frac{11qa}{3} \frac{(z-4a)^3}{6} + q \frac{(z-4a)^4}{24}.$$

Начальные параметры θ_0 , y_0 определим из граничных условий закрепления балки. Так как на опорах ($z = a$; $z = 4a$) прогибы равны нулю, то должны выполняться два условия:

$$y|_{z=a} = 0; \quad y|_{z=4a} = 0.$$

Подставим их в выражение для прогиба, не учитывая при этом слагаемые, которые соответствуют нагрузкам, расположенным правее рассматриваемой опоры. В результате получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения начальных параметров:

$$EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 a - \frac{qa^4}{24} = 0;$$

$$EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 \cdot 4a - \frac{q(4a)^4}{24} + \frac{7qa}{3} \frac{(3a)^3}{6} + qa^2 \frac{(2a)^2}{2} - qa \frac{a^3}{6} = 0.$$

После упрощения

$$y_0 + \theta_0 a = \frac{qa^4}{24EJ_x}; \quad y_0 + 4a\theta_0 = -\frac{5qa^4}{3EJ_x}.$$

Отсюда

$$\theta_0 = -\frac{41}{72} \frac{qa^3}{EJ_x}; \quad y_0 = \frac{11}{18} \frac{qa^4}{EJ_x}.$$

Прогиб балки посередине пролета, т. е. в сечении с координатой $z = 2,5a$, будет следующий:

$$\begin{aligned} EJ_x y|_{z=2,5a} &= \frac{11}{18} qa^4 - \frac{41}{72} qa^3 \cdot 2,5a - \frac{q(2,5a)^4}{24} + \frac{7qa}{3} \frac{(1,5a)^3}{6} + qa^2 \frac{(0,5a)^2}{2} = \\ &= -\frac{385}{384} qa^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y|_{z=2,5a} &= -\frac{385}{384} \frac{qa^4}{EJ_x} = -\frac{385 \cdot 13 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{384 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = -2,08 \cdot 10^{-2} \text{ м} = \\ &= -2,08 \text{ см}. \end{aligned}$$

Общее очертание упругой оси балки показано на эпюре изгибающих моментов (см. рисунок 5.29, е). При построении этой кривой учтены знаки прогибов y_0 и $y|_{z=2,5a}$. Направление выпуклости линии определяется растянутыми верхними или нижними волокнами, т. е. расположением эпюры моментов. Перегибы упругой оси наблюдаются в тех сечениях, в которых эпюра моментов проходит через нуль, меняя знак.

☑ **ПРИМЕР 5.4.** Установить, насколько экономична и рациональна двутавровая балка, подобранная в предыдущем примере, по сравнению с балками других сечений (рисунок 5.32) при сохранении той же грузоподъемности.

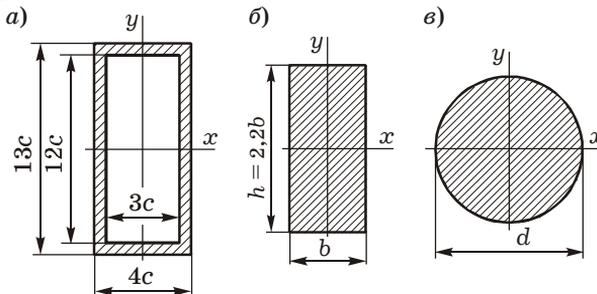


Рисунок 5.32

Выписываем требуемый момент сопротивления из примера 5.3:

$$W_x = 350 \text{ см}^3.$$

Двутавровое сечение. Площадь двутавра № 27, подобранного в примере 5.3 под заданную нагрузку: $A = 40,2 \text{ см}^2$.

Сечение коробчатого типа (см. рисунок 5.32, а). Момент инерции равен разности моментов инерции двух составляющих его прямоугольников:

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)}, \quad J_x^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{4c(13c)^3}{12} = 732,3c^4;$$

$$J_x^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{3c(12c)^3}{12} = 432c^4; \quad J_x = (732,3 - 432)c^4 = 300,3c^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{300,3c^4}{6,5c} = 46,2c^3,$$

откуда

$$c \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{46,2}} = \sqrt[3]{\frac{350 \cdot 10^{-6}}{46,2}} = 0,0196 \text{ м} = 1,96 \text{ см}.$$

Принимаем $c = 2 \text{ см}$. Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = b_1 h_1 - b_2 h_2 = 13c \cdot 4c - 12c \cdot 3c = 16c^2 = 16 \cdot 2^2 = 64 \text{ см}^2.$$

Прямоугольное сечение (см. рисунок 5.32, б). Момент сопротивления прямоугольника

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, \text{ откуда } \frac{h}{b} = \frac{h^3}{6W_x}.$$

Отношение сторон $h / b = 2,2$. Тогда

$$2,2 = \frac{h^3}{6W_x}; \quad h = \sqrt[3]{2,2 \cdot 6W_x} = \sqrt[3]{13,2 \cdot 350 \cdot 10^{-6}} = 0,167 \text{ м} = 16,7 \text{ см},$$

$$b = \frac{h}{2,2} = \frac{16,7}{2,2} = 7,58 \text{ см}.$$

Принимаем $h = 16,7 \text{ см}$, $b = 7,6 \text{ см}$, тогда $A = hb = 16,7 \cdot 7,6 = 127 \text{ см}^2$.

Круглое сечение (см. рисунок 5.32, в). Момент сопротивления

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 350 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 0,153 \text{ м} = 15,3 \text{ см}.$$

$$\text{Площадь сечения } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15,3^2}{4} = 184 \text{ см}^2.$$

Вычисленные площади и их отношения к площади двутавра приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Параметры сечений при одинаковой грузоподъемности

Форма сечения	Двутавр	Коробчатое сечение	Прямоугольное сечение	Круглое сечение
Площадь поперечного сечения, см ²	40,2	64	127	184
Отношение к площади двутавра	1	1,59	3,16	4,58

Как следует из приведенных расчетов, двутавр является наиболее рациональным (наименее материалоемким) по сравнению с коробчатым, прямоугольным и круглым сечениями. Это и обуславливает широкое применение двутавровых балок в строительстве и различных отраслях промышленности.

5.13 Балка на упругом основании

В инженерной практике часто встречаются балочные элементы конструкций, лежащие на *сплошном упругом основании*. К таким конструкциям могут быть отнесены шпалы железнодорожного пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин, опирающиеся на грунты, балки, плавающие в жидкости, и др. (рисунок 5.33). Кроме того, к таким конструкциям относятся также и рельсы, у которых число опор бесконечно велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной.

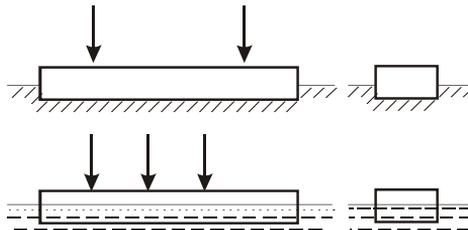


Рисунок 5.33

Расчет балки на упругом основании в строгой математической постановке сводится к решению контактной задачи между конструкцией и основанием. Сложность решения подобных задач общеизвестна (см. разд. 13), поэтому для инженерных расчетов применяются приближенные подходы.

Характеристика упругого основания. Рассмотрим балку, нагруженную произвольной распределенной по поверхности нагрузкой $q_0(z)$ и лежащую на упругом основании (рисунок 5.34). Балка изгибается, основание сжимается, причем в зоне сжатия осадка основания равна прогибу балки $y(z)$. Со стороны основания возникает

распределенная реакция, которая воздействует на балку в виде поверхностной нагрузки интенсивностью $q_r(z)$.

Примем следующие допущения:

- основание *упругое*, т. е. зависимость между осадкой поверхности основания (прогибом балки) $y(z)$ и реакцией (отпором) основания $q_r(z)$ описывает линейная модель Винклера¹⁾:

$$q_r(z) = -ky(z), \quad (5.31)$$

где k – коэффициент постели (коэффициент жесткости основания); знак минус указывает на то, что реакция q_r направлена в сторону, противоположную прогибу y ;

- связь балки с основанием предполагается *неотрывной*, т. е. основание может испытывать как сжимающие, так и растягивающие напряжения;
- основание считается *несвязным*, т. е. давление от балки передается только в одну точку на поверхности основания, не связанную с соседними точками.

В соответствии с указанными допущениями механическая модель основания Винклера может быть представлена в виде системы пружин, не имеющих горизонтальных связей (рисунок 5.35). При действии нагрузки отдельные пружины сжимаются, но не вовлекают в работу соседние пружины.

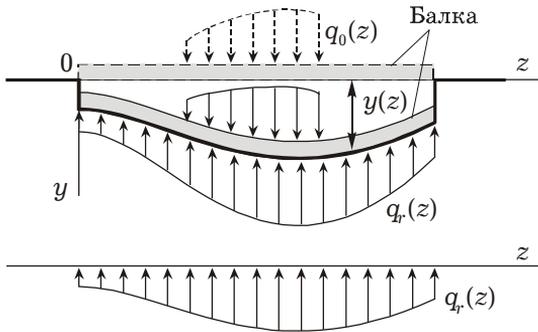


Рисунок 5.34

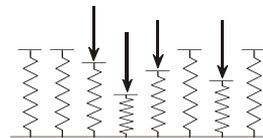


Рисунок 5.35

З а м е ч а н и е. В действительности основание получает не только упругие, но и остаточные деформации, однако в рамках рассматриваемой модели будем его считать достаточно уплотненным и работающим лишь в пределах малых упругих деформаций.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании можно получить из соотношения в (5.27)

¹⁾ Винклер Э. (E. Winkler) (1835–1888) – австро-немецкий инженер-строитель.

$q = EJ_x y^{IV}$, если заменить интенсивность распределенной нагрузки q на сумму $q + q_R$:

$$EJ_x y^{IV} = q + q_R.$$

Подставив сюда выражение для реакции основания (5.31), имеем

$$EJ_x y^{IV} + \kappa y = q.$$

Обозначим

$$\frac{\kappa}{EJ_x} = 4k^4. \quad (5.32)$$

Используя соотношение (5.32), получим дифференциальное уравнение балки на упругом основании в каноническом виде

$$y^{IV} + 4k^4 y = \frac{q}{EJ_x}. \quad (5.33)$$

Решение этого уравнения:

$$y(z) = e^{-kz} [C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz)] + e^{kz} [C_3 \sin(kz) + C_4 \cos(kz)] + y^*, \quad (5.34)$$

где первые четыре слагаемые – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (с правой нулевой частью); y^* – любое частное решение уравнения (5.33); константы интегрирования C_1 – C_4 определяются из условий закрепления балки (граничных условий).

Заметим, для очень длинных балок C_3, C_4 в (5.34) следует положить равными нулю исходя из условия ограниченности решения на бесконечности.

Если функция $y(z)$ определена, то с помощью соотношений (5.27) без труда вычисляются изгибающие моменты и поперечные силы в балке.

☑ ПРИМЕР 5.5. Если $q = \text{const}$, то частное решение можно искать в виде константы $y^* = a$. Для определения величины a подставим это выражение в уравнение (5.33), откуда

$$0 + 4k^4 a = \frac{q}{EJ_x}; \quad a = \frac{q}{4k^4 EJ_x} = \frac{q}{\kappa}.$$

Замечание. Если внешняя распределенная нагрузка q отсутствует, то правая часть уравнения (5.33) обращается в нуль, а сосредоточенные силы и моменты учитываются путем наложения соответствующих граничных условий при определении постоянных интегрирования.

5.14 Изгиб бруса большой кривизны. Закон Гука

Основные обозначения. В различных конструкциях часто применяются брусья с криволинейной осью. К ним относятся грузоподъемные крюки, звенья цепей (рисунок 5.36), проушины, обода колес и шкивов, арки и т. п. Оси этих брусьев представляют собой плоские кривые. Брусья с пространственной кривой осью встречаются редко, поэтому здесь не рассматриваются.

Всегда в дальнейшем предполагается, что внешние и внутренние усилия действуют в одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения. Исследование ограничивается теми брусьями, у которых поперечные сечения симметричны относительно плоскости кривизны (рисунок 5.37).

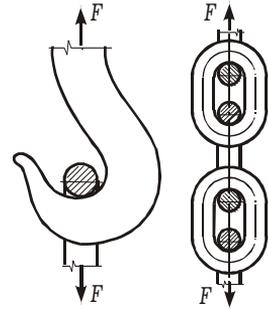


Рисунок 5.36

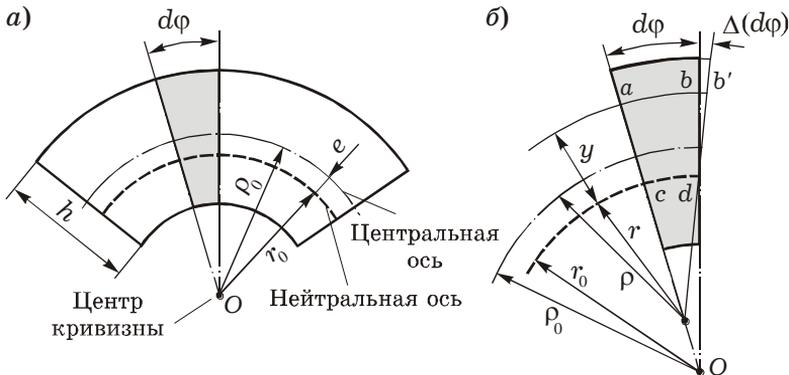


Рисунок 5.37

Введем следующие обозначения (см. рисунок 5.37):

ρ_0, ρ — радиусы кривизны *центральной оси* (проходящей через центры тяжести поперечных сечений) соответственно до и после приложения нагрузки;

r_0, r — радиусы кривизны *нейтральной оси* (где $\sigma = 0$) соответственно до и после приложения нагрузки;

e — эксцентриситет, т. е. расстояние от нейтральной линии до центра тяжести сечения ($e = \rho_0 - r_0$);

y — ордината точки сечения, отсчитываемая от нейтральной оси;

h — наибольшая высота сечения;

A — площадь сечения;

M_x — изгибающий момент относительно центральной оси;

σ – нормальные напряжения в точке сечения с координатой y ;
 E – модуль Юнга материала бруса.

Кривизной стержня называется величина, обратная радиусу кривизны его центральной оси $1/\rho_0$.

Будем различать следующие *типы кривых стержней*:

- стержни *большой кривизны* ($0,2 < h/\rho_0 \leq 1$);
- стержни *малой кривизны* ($0,1 < h/\rho_0 \leq 0,2$);
- пологие стержни ($h/\rho_0 \leq 0,1$).

При расчете кривого бруса на прочность влияние поперечной силы, как правило, не учитывается, так как касательные напряжения при этом сравнительно невелики. Прочность определяется величиной возникающих в его сечениях максимальных нормальных напряжений, зависящих от изгибающего момента. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать *чистый изгиб бруса большой кривизны*.

Закон Гука. Предположим, что имеется участок *бруса большой кривизны* (рисунок 5.37, а), находящийся в состоянии чистого изгиба ($M_x = \text{const}$). Вывод закона Гука проведем по той же схеме, которая применялась для бруса с прямой осью. В основу положим аналогичные предположения: гипотезу плоских сечений (Бернулли); допущение о ненадавливании продольных волокон.

Выделим из бруса двумя близкими и нормальными к его оси сечениями элементарный участок и рассмотрим его деформирование (рисунок 5.37, б).

После приложения нагрузки сечения выделенного элемента повернутся относительно друг друга на угол $\Delta(d\varphi)$ и в слоях бруса возникнут некоторые удлинения (см. рисунок 5.37, б). Рассмотрим волокно ab , взятое на расстоянии y от нейтрального слоя. Его относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{bb'}{ab} = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_0 + y)d\varphi}.$$

Отношение $\Delta(d\varphi)/d\varphi$ получим из условия сохранения длины нейтрального волокна cd . С одной стороны,

$$cd = r_0 d\varphi,$$

с другой –

$$cd = r(d\varphi + \Delta(d\varphi)).$$

Приравнивая правые части $r_0 d\varphi = r(d\varphi + \Delta(d\varphi))$, получаем

$$\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Таким образом, деформация растяжения произвольного волокна определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (5.35)$$

Подставляя деформацию (5.35) в известное соотношение связи напряжений с деформациями при растяжении ($\sigma = E\varepsilon$), получаем закон Гука для бруса большой кривизны

$$\sigma = \frac{Ey}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (5.36)$$

З а м е ч а н и е. Если у бруса $y \ll r_0$, то из формулы (5.36) следует закон Гука для бруса малой кривизны

$$\sigma = Ey \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

При $1/r_0 \rightarrow 0$ полученное выражение совпадает с подобным для прямого бруса.

5.15 Нормальные напряжения в кривом брусе

Пусть сечение бруса симметрично относительно плоскости кривизны (рисунок 5.38). Тогда ось y является осью симметрии. Момент элементарных сил σdA относительно этой оси равен нулю. Равна нулю также продольная сила N :

$$N = \int_A \sigma dA = 0.$$

Подставив сюда выражение для нормального напряжения из (5.36), получим

$$Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_A \frac{y dA}{r_0 + y} = 0,$$

откуда

$$\int_A \frac{y dA}{r_0 + y} = 0. \quad (5.37)$$

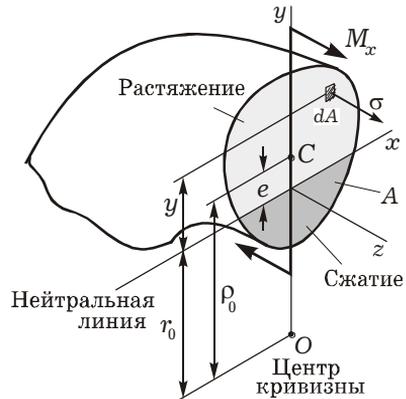


Рисунок 5.38

Этот интеграл мы используем в дальнейших расчетах.

Связь нормальных напряжений с изгибающим моментом. Изгибающий момент является интегральной характеристикой действующих в поперечном сечении нормальных напряжений и следует из соотношения

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

Подставляя сюда вместо напряжения σ его выражение из закона Гука (5.36) и вынося за знак интеграла параметры, не зависящие от координат поперечного сечения, получаем

$$M_x = Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_A \frac{y^2 dA}{r_0 + y}.$$

Добавив в числитель подинтегральной дроби нулевую разность $(yr_0 - yr_0)$, разобьем входящий в последнее выражение интеграл на два слагаемых. Тогда

$$M_x = Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \left(\int_A y dA - r_0 \int_A \frac{y dA}{r_0 + y} \right).$$

Второй интеграл в этом соотношении равен нулю в силу выражения (5.37), а первый интеграл представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной оси, т. е.

$$S_x = \int_A y dA = Ae,$$

где e — эксцентриситет, $e = \rho_0 - r_0$.
В результате изгибающий момент

$$M_x = Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) Ae,$$

отсюда

$$Er_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{M_x}{Ae}.$$

Подставив последнее выражение в закон Гука для кривого бруса (5.36), получим формулу, связывающую нормальные напряжения σ в поперечном сечении и изгибающий момент M_x :

$$\sigma = \frac{M_x}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}. \quad (5.38)$$

Из соотношения (5.38) следует, что нормальные напряжения меняются по высоте сечения *нелинейно*. Эпюра σ представляет собой *гиперболу*, одна из асимптот которой совпадает с осью кривизны (рисунок 5.39).

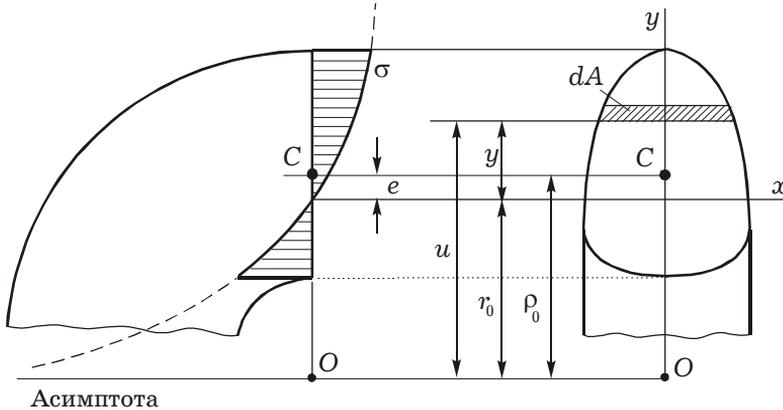


Рисунок 5.39

В зависимости от формы сечения наибольшие напряжения могут быть или вверху его, или внизу.

5.16 Радиус кривизны нейтрального слоя

Для определения радиуса кривизны нейтрального слоя r_0 рассмотрим интеграл (5.37). Введем в нем новую переменную $u = r_0 + y$ (см. рисунок 5.39). Тогда

$$\int_A \frac{y dA}{r_0 + y} = \int_A \frac{(u - r_0) dA}{u} = 0.$$

Разбивая полученный интеграл на два, получаем

$$\int_A dA - r_0 \int_A \frac{dA}{u} = 0.$$

Отсюда

$$r_0 = A / \int_A \frac{dA}{u}. \quad (5.39)$$

Интеграл, стоящий в знаменателе формулы (5.39), представляет собой новую геометрическую характеристику сечения по типу статического момента или момента инерции. Он вычисляется для каждой формы сечения в отдельности.

☑ **ПРИМЕР 5.6.** Вычислить радиус кривизны нейтрального слоя для сечений прямоугольной и круговой форм (рисунок 5.40).

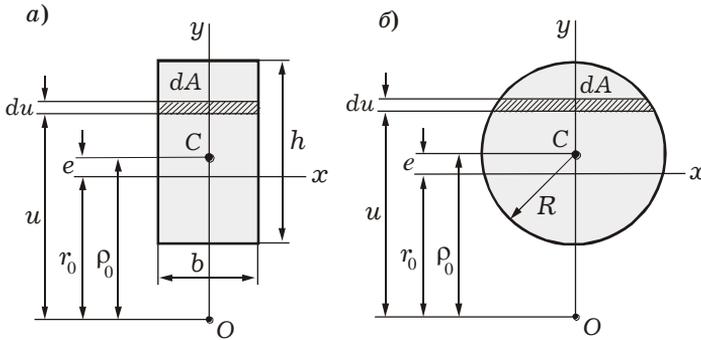


Рисунок 5.40

Для прямоугольника, в соответствии с рисунком 5.40, а, получим

$$\int_A \frac{dA}{u} = b \int_{\rho_0 - h/2}^{\rho_0 + h/2} \frac{du}{u} = b \ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}.$$

Из соотношения (5.39) следует, что

$$r_0 = \frac{h}{\ln[(\rho_0 + 0,5h)/(\rho_0 - 0,5h)]}.$$

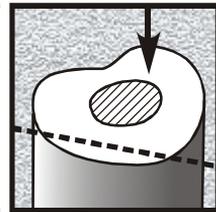
Для кривого бруса круглого поперечного сечения (см. рисунок 5.40, б) после выполнения соответствующего интегрирования получим

$$r_0 = \rho_0 - \frac{1}{2} \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - R^2} \right).$$

Аналогичные формулы можно получить и для сечений другой формы. Значения r_0 для часто встречающихся сечений обычно приведены в справочных таблицах.

6

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ



К сложному сопротивлению относятся те виды деформации бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает более одной составляющей главного вектора и главного момента внутренних сил (N , Q_x , Q_y , M_k , M_x , M_y).

Влияние поперечных сил Q_x , Q_y , как правило, незначительно, и в расчетах на прочность и жесткость им пренебрегают. Поэтому прямой поперечный изгиб, при котором возникают M_x и Q_y или M_y и Q_x , не относится к сложному сопротивлению.

6.1 Косой изгиб

Внутренние усилия. Косым изгибом называется такой вид деформирования, при котором плоскость действия изгибающего момента M не совпадает ни с одной из главных плоскостей¹⁾ стержня.

При плоском косом изгибе (рисунок 6.1) есть единая для всего бруса силовая плоскость, т. е. во всех сечениях углы между линиями действия сил и главными центральными осями одинаковы. В случае пространственного косоуго изгиба нагрузки располагаются в разных продольных плоскостях, из-за этого указанные углы не постоянны по длине бруса.

При поперечном косом изгибе, независимо от того, плоский он или пространственный, в поперечных сечениях бруса возникают четыре силовых фактора: изгибающие моменты M_x , M_y и поперечные силы Q_y , Q_x . Однако влияние поперечных сил незначительно и в расчетах на прочность и жесткость им, как правило, пренебрегают.

Косой изгиб удобно рассматривать как одновременный изгиб в двух главных плоскостях: zx и zy . Для этого изгибающий момент M

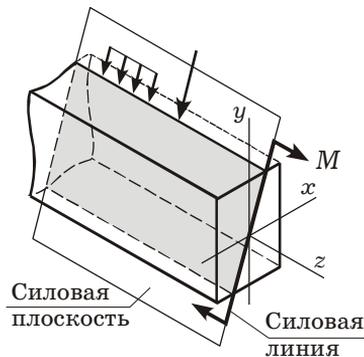


Рисунок 6.1

¹⁾ Главная плоскость – это плоскость, образованная продольной осью стержня z и главной осью инерции (x или y).

(рисунок 6.2, а) в соответствии с принципом суперпозиции раскладывают на две составляющие (рисунок 6.2, б):

$$M_x = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha, \quad (6.1)$$

где M_x, M_y – моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

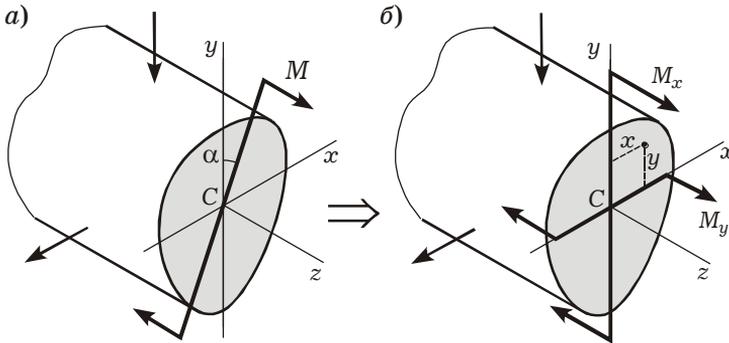


Рисунок 6.2

Напряжения. На основании принципа суперпозиции *нормальные напряжения* определяются как сумма напряжений от каждого из моментов M_x, M_y (см. формулу (5.13)):

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (6.2)$$

где J_x, J_y – главные центральные моменты инерции сечения;
 x, y – координаты точки, в которой определяются напряжения.

Для каждого из поперечных сечений бруса величины M_x, M_y, J_x, J_y постоянные. Поэтому уравнение (6.2) с точки зрения аналитической геометрии описывает плоскость. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали к сечению вектор σ , то концы этих векторов, как и при прямом изгибе, образуют *плоскость*.

Если известен угол α , то, подставив (6.1) в (6.2), получим

$$\sigma = M \left(\frac{\cos \alpha}{J_x} y + \frac{\sin \alpha}{J_y} x \right). \quad (6.3)$$

Уравнение нулевой (нейтральной) линии следует из (6.2) или (6.3) при условии $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x &= 0; \\ \frac{\cos \alpha}{J_x} y + \frac{\sin \alpha}{J_y} x &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

отсюда

$$y = -x \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.5)$$

где x, y – координаты точек сечения, лежащих на нулевой линии; α – угол между силовой линией и осью y .

Из уравнений (6.4), (6.5) следует, что *нейтральная линия проходит через центр тяжести* (начало координат) поперечного сечения и делит его на растянутую и сжатую части (рисунок 6.3). При этом напряжения достигают экстремальных значений в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Для сечений простой формы эти точки устанавливаются визуально, для сложных – с помощью прямых линий, проведенных параллельно нулевой. Эпюра нормальных напряжений строится между этими линиями.

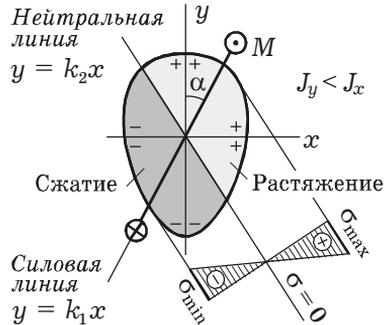


Рисунок 6.3

В общем случае нулевая линия *не перпендикулярна к плоскости изгибающего момента*, как при прямом изгибе. Докажем это. Уравнение силовой линии можно представить в виде $y = k_1 x$, а уравнение нулевой линии $y = k_2 x$. Здесь угловые коэффициенты

$$k_1 = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha; \quad k_2 = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как $k_1 \neq -1/k_2$, то нулевая линия не перпендикулярна¹⁾ силовой. Она повернута к той главной оси, относительно которой момент инерции минимален. При $J_x = J_y$ (например, для круга и квадрата) указанное условие выполняется, но такой изгиб не косой, а прямой.

Выбор знаков. Выше был рассмотрен случай, когда обе компоненты изгибающего момента M_x, M_y растягивают первый квадрант²⁾ поперечного сечения, поэтому оба слагаемых в формуле (6.2) положительны. В общем случае перед ними следует ставить знаки « \pm »:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x. \quad (6.6)$$

Знаки слагаемых в формуле (6.6) должны совпадать со знаками напряжений от изгибающих моментов в первом квадранте.

¹⁾ Условие перпендикулярности двух прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ следующее: $k_1 = -1/k_2$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых.

²⁾ В первом квадранте координаты любой точки сечения положительны.

На рисунке 6.4 показаны различные случаи направления моментов и выбор их знаков.

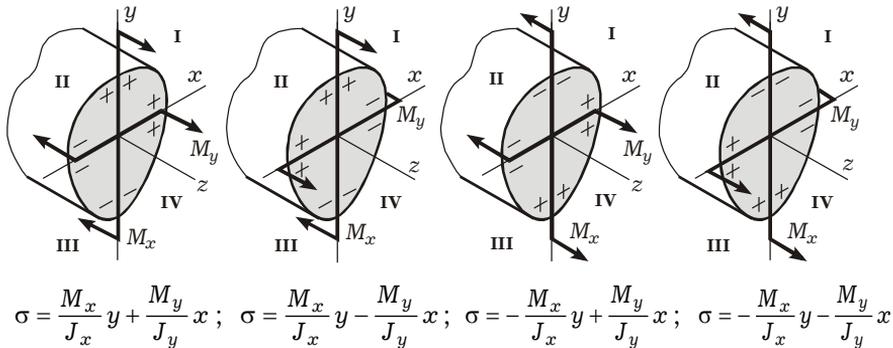


Рисунок 6.4

Расчеты на прочность. Как и при прямом изгибе, расчеты на прочность проводятся по нормальным напряжениям. В опасных сечениях при известных их размерах для наиболее удаленных от нейтральной линии точек проверяется выполнение условия прочности

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x \leq [\sigma].$$

Сложнее осуществить подбор размеров сечения, так как оба слагаемых содержат неизвестные геометрические характеристики. На практике применяют метод проб: назначают размеры поперечного сечения и проверяют его на прочность, затем уточняют, пока не добьются оптимального результата.

Перемещения при косом изгибе. Исходя из принципа независимости действия сил все нагрузки раскладываются на составляющие в главных плоскостях. *Дифференциальные уравнения упругой линии балки* в плоскостях zy и zx имеют вид

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad x'' = \frac{M_y}{EJ_y},$$

где y , x – прогибы соответственно в плоскостях zy и zx .

Из этих дифференциальных уравнений непосредственным интегрированием или методом начальных параметров можно получить перемещения в главных плоскостях. Полные перемещения определяются как их геометрическая сумма.

□ ПРИМЕР 6.1. Требуется определить полный прогиб конца консоли (рисунок 6.5, а).

Раскладываем внешнюю силу F на составляющие в главных плоскостях zy и zx (рисунок 6.5, б): $F = \{F_x, F_y\}$; $F_x = F \sin \alpha$; $F_y = F \cos \alpha$.

Используя результат примера 5.2, определяем перемещения конца консоли в главных плоскостях:

$$y = -\frac{F_y l^3}{3EJ_x}; \quad x = -\frac{F_x l^3}{3EJ_y}.$$

Полный прогиб (см. рисунок 6.5, б) $f = \sqrt{x^2 + y^2}$.

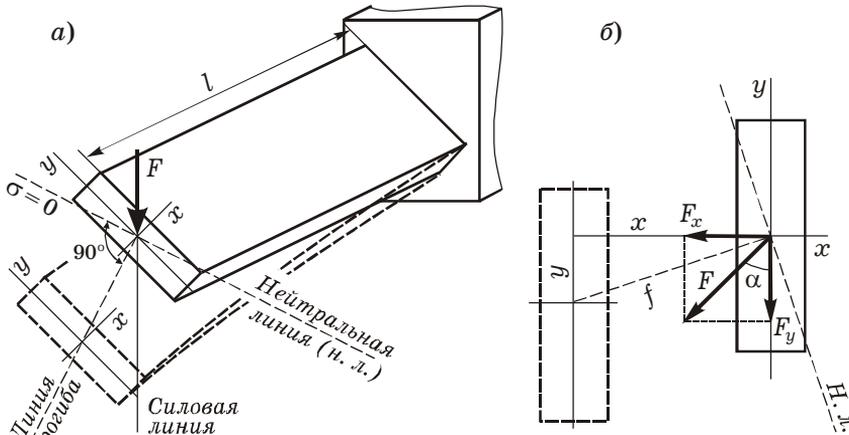


Рисунок 6.5

При плоском косом изгибе стержня *направление полного прогиба* f каждого сечения балки *перпендикулярно нейтральной линии* и, следовательно, не совпадает с силовой линией (см. рисунок 6.5). Именно этим обстоятельством и объясняется термин «косой» изгиб. В общем случае косоуго изгиба изогнутая ось (упругая линия) прямого бруса является пространственной кривой.

6.2 Изгиб с растяжением (сжатием)

Внутренние усилия. Рассмотрим вид сложного сопротивления, когда в сечениях стержня, кроме изгибающих моментов, возникает продольная сила N . При этом необходимо различать:

- *изгиб с растяжением (сжатием) под действием поперечных и продольных нагрузок*, пересекающих ее ось (рисунок 6.6, а). В общем случае в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x, M_y , поперечные силы Q_y, Q_x и продольная сила N ;
- *внецентренное растяжение (сжатие)* – частный случай изгиба с растяжением (сжатием), при котором равнодействующая внешних продольных сил не совпадает с осью стержня, а смещена относительно оси z и остается параллельной ей (рисунок 6.6, б). В поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x, M_y и продольная сила N .

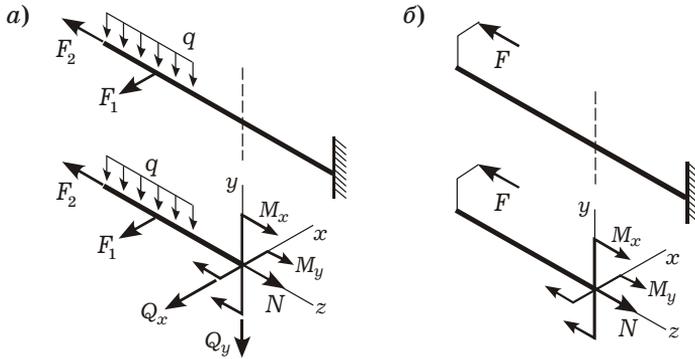


Рисунок 6.6

Как и ранее, в этом разделе расчет ведется по недеформированной схеме. Поэтому стержни должны иметь большую жесткость, так как в случае изгиба со сжатием тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости¹⁾ (см. разд. 10).

Нормальные напряжения. В соответствии с принципом суперпозиции нормальные напряжения в произвольной точке сечения (рисунок 6.7, а) будут вычисляться от каждого из внутренних силовых факторов N , M_x , M_y в отдельности, а затем суммироваться:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x, \quad (6.7)$$

где x , y – координаты рассматриваемой точки;

A – площадь поперечного сечения;

J_x , J_y – главные центральные моменты инерции сечения.

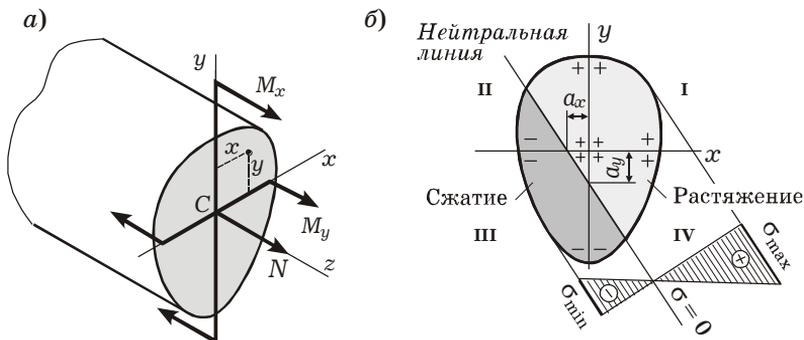


Рисунок 6.7

¹⁾ В задачах устойчивости уравнения равновесия составляются с учетом деформаций стержней (расчет по деформированной схеме).

Уравнение нулевой (нейтральной) линии получим из выражения (6.7), положив $\sigma = 0$:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0. \quad (6.8)$$

Из уравнения (6.8) следует, что нулевая линия не проходит через центр тяжести сечения. Она делит сечение на растянутую и сжатую части. Если продольная сила $N < 0$ (изгиб со сжатием), то площадь сжатой зоны будет больше, чем площадь растянутой. При $N > 0$ (изгиб с растяжением) – наоборот.

Найдем отрезки, которые нулевая линия отсекает на координатных осях (см. рисунок 6.7, б). Для этого используем уравнение (6.8):

$$a_x = x|_{y=0} = -\frac{N J_y}{A M_y}; \quad a_y = y|_{x=0} = -\frac{N J_x}{A M_x}.$$

Напряжения достигают экстремальных значений в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Положение этих точек устанавливается либо визуально, либо с помощью прямых линий, проведенных параллельно нулевой. Суммарная эпюра напряжений строится между этими линиями (см. рисунок 6.7, б).

Выбор знаков. Выше был рассмотрен случай, когда обе компоненты изгибающего момента (M_x , M_y) растягивают первый квадрант поперечного сечения. В общем случае перед ними следует ставить знаки « \pm »:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x. \quad (6.9)$$

Знак первого слагаемого в формуле (6.9) определяется знаком продольной силы N , перед вторым и третьим слагаемыми знаки выбираются так же, как и при косом изгибе (см. рисунок 6.4).

Расчеты на прочность при изгибе с растяжением (сжатием) и косом изгибе проводятся по нормальным напряжениям, которые вычисляются в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Касательные напряжения при этом весьма малы, поэтому в расчетах на прочность брусьев сплошного сечения (не тонкостенных) их можно не учитывать.

Замечание. К сложному сопротивлению относится также *изгиб с кручением*, при котором в поперечных сечениях стержней возникают и изгибающие, и крутящие моменты (M_x , M_y , M_z). В наиболее опасных точках сечений касательные напряжения сравнимы с нормальными и даже могут их превосходить. Однако в соответствующих расчетах на прочность нельзя отдельно применять условия прочности по нормальным и касательным напряжениям. Необходимо использовать одну из *теорий прочности*, которая учитывает и σ , и τ (см. разд. 8).

6.3 Внецентренное растяжение (сжатие)

Пусть для некоторого поперечного сечения равнодействующая внешних сил F проходит через точку $B(x_0, y_0)$ в первом квадранте (рисунок 6.8). Заметим, что точка B может находиться как в сечении, так и вне его. Тогда относительно главных осей возникают три внутренних силовых фактора:

$$N = F; \quad M_x = Fy_0; \quad M_y = Fx_0.$$

Нормальные напряжения в любой точке сечения можно определить по формуле, следующей из (6.7):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = \\ &= F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_0 y}{J_x} + \frac{x_0 x}{J_y} \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В выражении (6.10) все слагаемые положительны, так как продольная сила положительна и первый квадрант растянут (см. рисунок 6.7).

Уравнение нейтральной линии получим из (6.10), приравняв σ к нулю и сократив на F :

$$\frac{1}{A} + \frac{y_0 y}{J_x} + \frac{x_0 x}{J_y} = 0. \quad (6.11)$$

Из уравнения (6.11) следует, что нулевая линия и точка приложения равнодействующей продольной силы всегда расположены по разные стороны от центра тяжести. Это легко увидеть, предположив, что точка приложения силы находится в первом квадранте системы координат. Тогда $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и, следовательно, хотя бы одна из координат x , y точек нулевой линии должна быть отрицательной, чтобы выполнялось уравнение (6.11). Также следует отметить, что положение нулевой линии не зависит от величины и знака силы F .

Найдем отрезки, которые нулевая линия отсекает на координатных осях (рисунок 6.9). Для этого воспользуемся уравнением (6.11):

$$a_x = x|_{y=0} = -\frac{J_y}{Ax_0}; \quad a_y = y|_{x=0} = -\frac{J_x}{Ay_0} \quad (6.12)$$

или
$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_0}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_0},$$

где $i_x = \sqrt{J_x/A}$, $i_y = \sqrt{J_y/A}$ – радиусы инерции.

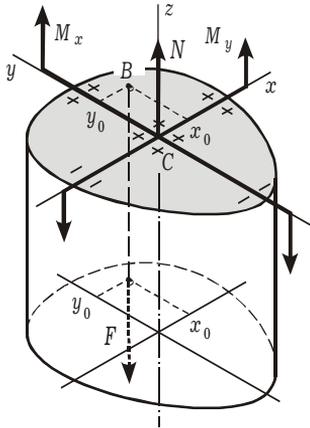


Рисунок 6.8

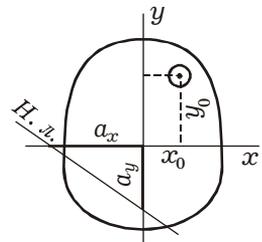


Рисунок 6.9

Следовательно, при приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения нейтральная линия удаляется от него и в пределе ($x_0, y_0 \rightarrow 0$) уходит в бесконечность. Она может пересекать сечение или находиться за его пределами. В первом случае в сечении по разные стороны от нулевой линии возникают растягивающие и сжимающие напряжения. Во втором случае во всех точках сечения напряжения будут одного знака.

Ядро сечения. Затронутый выше вопрос важен для расчета сжатых элементов, выполненных из хрупких материалов. Такие материалы (бетон, кирпич и т. д.) плохо сопротивляются растяжению. Поэтому желательно, чтобы при внецентренном сжатии напряжения были для всего сечения сжимающими. Для этого необходимо, чтобы внешняя результирующая сила была приложена поближе к центру тяжести сечения.

Ядро сечения – это область в окрестности центра тяжести поперечного сечения, такая, что:

- если точка приложения силы F находится внутри ядра, то нулевая линия проходит вне сечения (рисунок 6.10, а);
- если точка приложения силы F находится на границе ядра, то нулевая линия касается контура сечения (рисунок 6.10, б);
- если точка приложения силы F находится вне ядра, то нулевая линия разбивает сечение на растянутую и сжатую области (рисунок 6.10, в–д).

В первых двух случаях напряжения в сечении – одного знака.

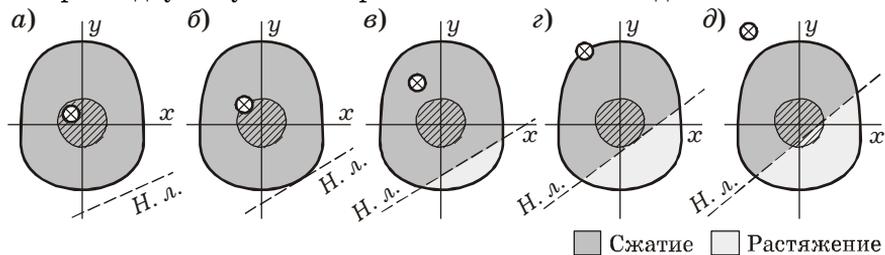


Рисунок 6.10

Существует два способа построения ядра сечения:

1) надо представить себе, что нейтральная линия обкатывает сечение по периметру; тогда точка приложения силы вычертит контуры ядра (см. рисунок 6.10, б).

2) уравнение нейтральной линии (6.11) симметрично относительно координатных пар $(x, y) - (x_0, y_0)$, поэтому можно запустить точку приложения силы по контуру сечения; тогда нулевая линия обкажет границы ядра сечения (см. рисунок 6.10, г).

Порядок построения ядра сечения следующий:

- определить положение центра тяжести сечения и главных центральных осей инерции;

- вычислить площадь A , главные центральные моменты инерции J_x, J_y и радиусы инерции i_x, i_y ;
- если сечение имеет вид многоугольника, то вершины его углов последовательно принимать за точку приложения силы и строить соответствующие нулевые линии. Контур, ограниченный этими нулевыми линиями, образует ядро сечения. Внутренние углы при обходе вершин не рассматриваются.

☑ **ПРИМЕР 6.2.** Определить размеры ядра сечения для стержня, имеющего круглое поперечное сечение радиуса R (рисунок 6.11).

Геометрические характеристики сечения

$$A = \pi R^2; \quad J_x = J_y = \pi R^4 / 4.$$

Из симметрии следует, что ядро сечения должно иметь форму круга. Для определения его радиуса r используем первый способ. Пусть точка B приложения силы находится на оси x , тогда

$$x_0 = r; \quad y_0 = 0.$$

В этом случае нейтральная линия касается контура сечения. Положив в (6.12) $a_x = R$, получим

$$R = -\frac{\pi R^4 / 4}{\pi R^2 r} = \frac{4R^2}{r}.$$

Отсюда радиус ядра сечения $r = R/4$. Заметим, что если точку контура D принять за место приложения силы, то нулевая линия пройдет через точку B ядра сечения параллельно оси y .

☑ **ПРИМЕР 6.3.** Построить ядро сечения для стержня, имеющего прямоугольное поперечное сечение с размерами b и h (рисунок 6.12).

Положение центра тяжести и главных осей инерции очевидно. Площадь и главные центральные моменты инерции сечения следующие:

$$A = bh; \quad J_x = bh^3 / 12; \quad J_y = hb^3 / 12.$$

Для решения задачи используем второй способ, принимая последовательно за точки приложения силы углы контура сечения.

Пусть сила приложена в точке $B(b/2, h/2)$. Тогда $x_0 = b/2, y_0 = h/2$. Найдем отрезки, которые нулевая линия отсекает на координатных осях:

$$a_x = -\frac{J_y}{Ax_0} = -\frac{hb^3 / 12}{bh \cdot b/2} = -\frac{b}{6};$$

$$a_y = -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{bh^3 / 12}{bh \cdot h/2} = -\frac{h}{6}.$$

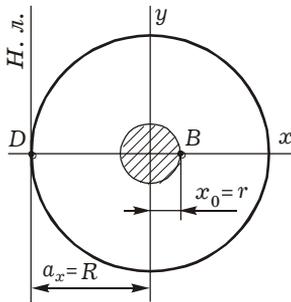


Рисунок 6.11

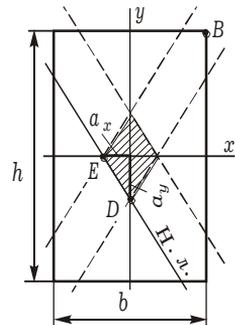


Рисунок 6.12

Откладываем эти отрезки на осях и проводим нейтральную линию (сплошная линия на рисунке 6.12). Перемещая точку приложения силы в другие вершины прямоугольника, строим соответствующие нулевые линии. Заштриховываем полученное ядро сечения. Симметрия его очевидна.

Если точку D принять за точку приложения силы, то нулевая линия пройдет по верхнему основанию прямоугольника. Если силу приложить в точке E , нулевая линия совпадет с правой стороной сечения.

☑ **ПРИМЕР 6.4.** Для поперечного сечения бруса, состоящего из листа стали с размерами 7×1000 мм и двух приваренных к нему двутавров № 24 (рисунок 6.13), требуется построить ядро сечения.

Геометрические характеристики сечения. Сечение имеет две оси симметрии x, y , которые являются главными центральными осями инерции. Главные центральные моменты инерции и площадь для рассматриваемого сечения вычислены ранее (см. пример 4.2):

$$J_x = 235000 \text{ см}^4; J_y = 6923 \text{ см}^4; A = 139,6 \text{ см}^2.$$

Ядро сечения. В силу симметрии сечения его ядро также будет симметрично относительно осей x, y .

Предположим, что сила приложена в точке B с координатами

$$\begin{aligned} x_0 &= h_2/2 = 12 \text{ см}; \\ y_0 &= h_1/2 + s/2 + b_2/2 = \\ &= 50 + 0,28 + 5,75 = 56,0 \text{ см}, \end{aligned}$$

где h_2, s, b_2 – высота, толщина стенки и ширина полки двутавра;

h_1 – высота прямоугольника.

В этом случае нейтральная линия отсекает на осях координат отрезки

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{J_y}{Ax_0} = -\frac{6923}{139,6 \cdot 12} = -4,13 \text{ см}; \\ a_y &= -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{235000}{139,6 \cdot 56} = -30 \text{ см}. \end{aligned}$$

Откладывая эти значения на осях координат, получаем точки 1, 2, через которые проводим прямую (нейтральную линию для силы, приложенной в точке B). Точки 3, 4 принимаем из условия симметрии. Ядро сечения представляет собой ромб, который на рисунке 6.13 заштрихован.

☑ **ПРИМЕР 6.5.** Для поперечного сечения бруса (рисунок 6.14) требуется построить ядро сечения.

Геометрические характеристики сечения. Центр тяжести сечения будет находиться на оси y , так как она является осью симметрии и, следовательно, ядро сечения тоже будет симметрично относительно этой оси. Ордината центра тяжести, величины главных центральных моментов инерции и площадь определены для этого сечения в примере 4.3:

$$y_C = 4,22 \text{ с}; J_x = 110,4 \text{ с}^4; J_y = 36,95 \text{ с}^4; A = 26,28 \text{ с}^2.$$

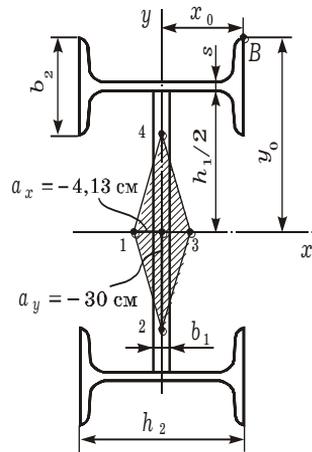


Рисунок 6.13

Ядро сечения. Рассмотрим три точки B, D, E приложения силы в поперечном сечении и построим соответствующие нулевые линии. Точки B', D' дадут нулевые линии, симметричные первым двум относительно оси y .

Предположим, что сила приложена в точке B с координатами

$$x_0 = 2c; \quad y_0 = 6c - y_C = 6c - 4,22c = 1,78c.$$

В этом случае нулевая линия отсекает на осях координат отрезки

$$a_x = -\frac{J_y}{Ax_0} = -\frac{36,95c^4}{26,28c^2 \cdot 2c} = -0,703c;$$

$$a_y = -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{110,4c^4}{26,28c^2 \cdot 1,78c} = -2,36c.$$

Отмечаем полученные отрезки на осях и проводим нулевую линию.

Пусть сила приложена в точке D с координатами

$$x_0 = 2c; \quad y_0 = -y_C = -4,22c.$$

Нулевая линия отсекает на осях координат отрезки

$$a_x = -\frac{J_y}{Ax_0} = -\frac{36,95c^4}{26,28c^2 \cdot 2c} = -0,703c;$$

$$a_y = -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{110,4c^4}{26,28c^2 \cdot (-4,22c)} = 0,995c.$$

Через соответствующие точки проводим нулевую линию.

Если сила приложена в точке E , расположенной на оси y , с координатами $x_0 = 0; y_0 = 3,78c$, то

$$a_x = \infty;$$

$$a_y = -\frac{J_x}{Ay_0} = -\frac{110,4c^4}{26,28c^2 \cdot 3,78c} = -1,11c.$$

Нулевая линия параллельна оси x .

После построения полученных нулевых и им симметричных линий ядро сечения будет иметь вид пятиугольной области вокруг центра тяжести (см. рисунок 6.14). Следует отметить, что внизу размеры ядра сечения у нас несколько увеличены. Если аккуратно обойти точкой приложения силы полуокружность вверху сечения, то форма ядра в том месте будет близка к параболе (штриховая линия).

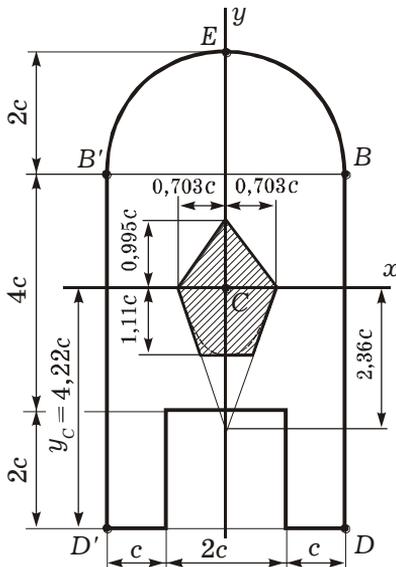
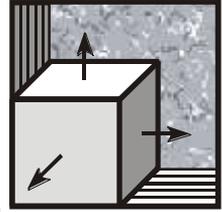


Рисунок 6.14



НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА



Рассмотрено изменение напряжений и деформаций в произвольной точке твердого тела в общем случае нагружения.

7.1 Напряженное состояние в точке

Ранее на примере растяжения мы убедились, что напряжения на площадке, проходящей через заданную точку твердого тела, зависят от ее ориентации. С поворотом площадки меняются и напряжения.

Тензор напряжений. Совокупность всех напряжений, возникающих на множестве площадок, проходящих через рассматриваемую точку, называется *напряженным состоянием в точке*.

Для его описания вырежем вокруг точки элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям и имеют малые длины dx , dy , dz (рисунок 7.1, а). В силу малости параллелепипеда можно считать, что напряжения на его гранях совпадают с напряжениями на параллельных им координатных площадках, проведенных через рассматриваемую точку.

Действующие на гранях параллелепипеда напряжения можно разложить на *нормальные* σ (перпендикулярные граням) и *касательные* τ (лежащие в плоскости граней) составляющие (рисунок 7.1, б).

Нормальное напряжение имеет один индекс, указывающий ось, которой оно параллельно. Для обозначения касательного напряжения применяют два индекса: первый указывает на нормаль к площадке, на которой действует напряжение; второй индекс обозначает ось, которой оно параллельно. Одноименные напряжения, которые действуют на противоположных гранях

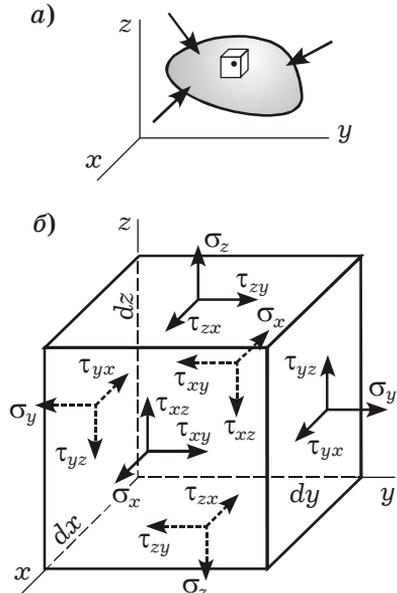


Рисунок 7.1

малого параллелепипеда, мало отличаются друг от друга, поэтому считаем их одинаковыми.

Совокупность напряжений на гранях параллелепипеда образует тензор¹⁾ напряжений T_σ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

В строках содержатся компоненты тензора напряжений, действующие на одной площадке, в столбцах – параллельные одной координатной оси.

Теорема парности касательных напряжений. Рассмотрим условия равновесия выделенного параллелепипеда. Уравнения для сил выполняются тождественно, так как для каждой компоненты напряжений существует такая же по величине компонента, противоположно направленная и действующая на грани такой же площади (силами являются произведения напряжений на площади соответствующих граней). Из уравнения равновесия моментов сил относительно оси x следует

$$\tau_{yz} dx dz dy - \tau_{zy} dx dy dz = 0,$$

отсюда $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Составляя аналогичные уравнения относительно осей y и z , получим, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. Этот результат носит название *теоремы парности касательных напряжений*: одноименные касательные напряжения, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и одновременно направлены либо к общему ребру, либо от него.

Теорема парности касательных напряжений справедлива для всех точек нагруженного тела, независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала.

Следствие. Матрица тензора напряжений (7.1) симметрична относительно своей главной диагонали. Независимыми в ней являются *шесть компонент*: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

7.2 Напряжения на произвольной площадке

Через любую точку твердого тела можно провести бесконечное множество площадок. Выделим одну из них и рассмотрим элементарную пирамидку, образованную координатными гранями и произвольной площадкой (рисунок 7.2, а).

¹⁾ Отметим, что тензор – это математический объект, который имеет более сложный характер, чем вектор. Если вектор можно задать тремя компонентами – числами, то тензор задается девятью компонентами.

Пусть нормаль \bar{v} к площадке составляет с осями координат углы, косинусы которых обозначим l, m, n :

$$\cos(\bar{v}, x) = l; \quad \cos(\bar{v}, y) = m; \quad \cos(\bar{v}, z) = n.$$

Величины l, m, n называются *направляющими косинусами* нормали \bar{v} . Для них выполняется известное из геометрии условие

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (7.2)$$

Площадь наклонной площадки обозначим A . Площади координатных граней A_x, A_y, A_z (индекс указывает нормаль к площадке) связаны с A следующими соотношениями:

$$A_x = Al; \quad A_y = Am; \quad A_z = An. \quad (7.3)$$

Приложим к выделенной элементарной пирамиде действующие на ее гранях напряжения (рисунок 7.2, б). Проекции вектора полного напряжения p_v на косою площадку обозначим p_{vx}, p_{vy}, p_{vz} .

Рассмотрим условия равновесия пирамиды. Составим суммы проекций сил на координатные оси x, y, z :

$$\begin{aligned} p_{vx}A - \sigma_x A_x - \tau_{yx}A_y - \tau_{zx}A_z &= 0; \\ p_{vy}A - \tau_{xy}A_x - \sigma_y A_y - \tau_{zy}A_z &= 0; \\ p_{vz}A - \tau_{xz}A_x - \tau_{yz}A_y - \sigma_z A_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Подставим в систему (7.4) соотношения (7.3). Сократив их на A , получим выражения для компонентов вектора напряжения на произвольной косою площадке через координатные напряжения:

$$\begin{aligned} p_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ p_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ p_{vz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Модуль полного напряжения на площадке $p_v = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2}$.

Таким образом, с помощью компонентов тензора напряжений на трех координатных площадках можно полностью описать напряженное состояние в точке, т. е. определить напряжения на любой площадке, проведенной через рассматриваемую точку.

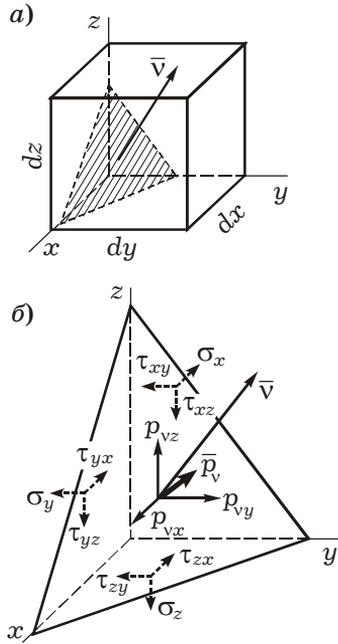


Рисунок 7.2

7.3 Главные оси и главные значения тензора напряжений

Возьмем вырезанный ранее элементарный параллелепипед с «впянной» декартовой системой координат и начнем его мысленно вращать вокруг рассматриваемой точки. Значения компонентов тензора напряжений на его гранях будут изменяться. Доказано, что существует хотя бы одно такое положение параллелепипеда, при котором касательные напряжения на его гранях равны нулю, а нормальные напряжения экстремальны (рисунок 7.3).

Оси координат, относительно которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения экстремальны, называются *главными осями тензора напряжений*. Компоненты напряжений в этих осях обозначаются σ_1 , σ_2 , σ_3 и называются *главными значениями тензора напряжений*, или *главными напряжениями*. Грани параллелепипеда, на которых действуют главные напряжения, называются *главными площадками*.

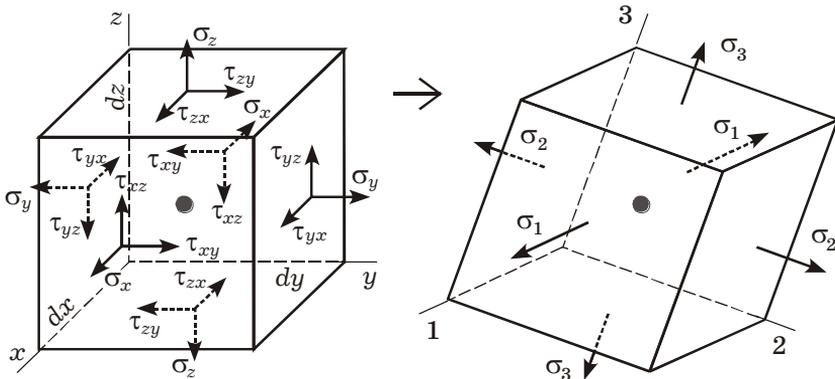


Рисунок 7.3

Главные оси нумеруются так, чтобы для главных значений выполнялось в алгебраическом смысле следующее условие:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (7.6)$$

Матрица тензора напряжений (7.1) в главных осях принимает диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Виды напряженных состояний. На рисунке 7.4 приведены виды напряженного состояния для некоторых типов сопротивления брусьев, которые изучаются в курсе механики материалов.

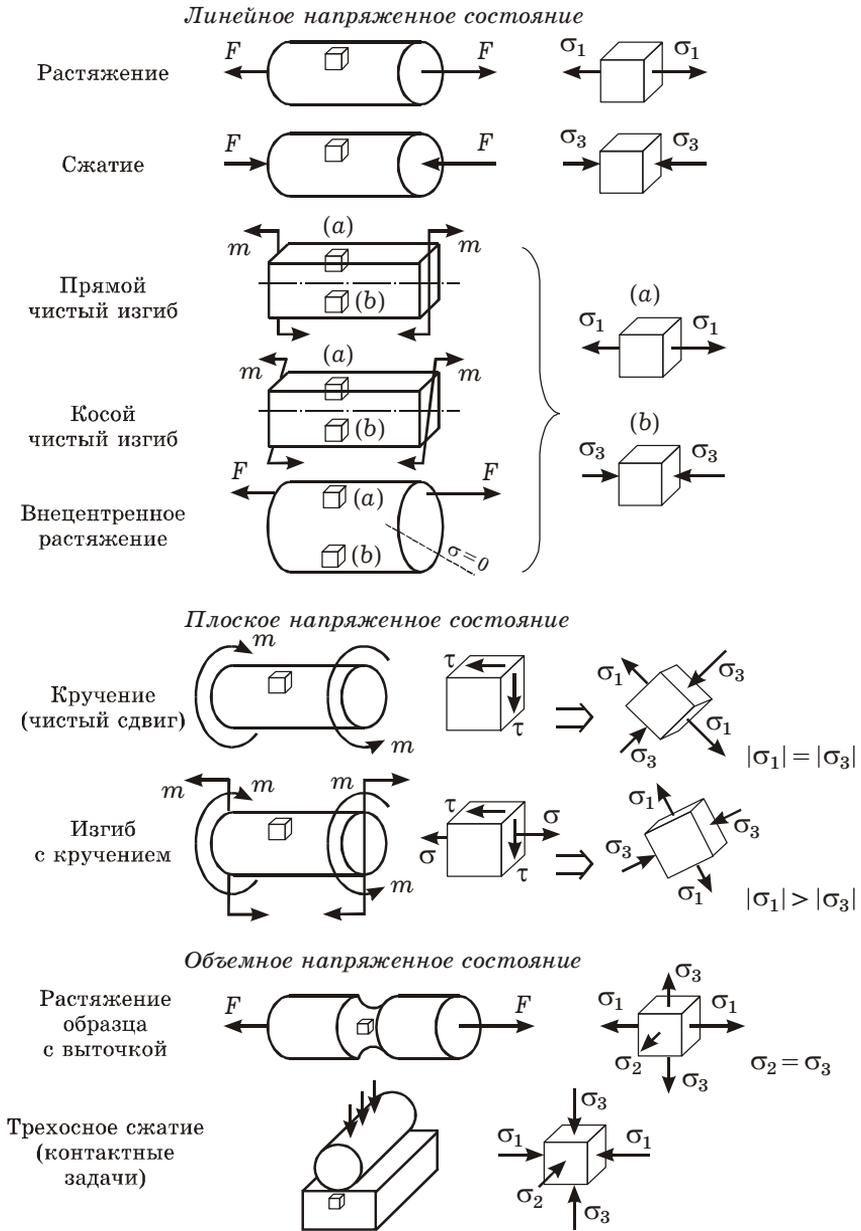


Рисунок 7.4

Если все главные напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называется *объемным (трехосным)*. Когда одно из них нулевое, напряженное состояние – *плоское (двухосное)*. Если одновременно равны нулю два главных напряжения, имеем *линейное (одноосное)* напряженное состояние.

Кроме этого, большое значение имеет знак главных напряжений. Практически все материалы по-разному разрушаются в зависимости от того, являются ли напряжения растягивающими или сжимающими. Как показывает опыт, большинство материалов способны воспринимать весьма большие напряжения при всестороннем сжатии, в то время как одноосное растяжение вызывает разрушение при весьма низких напряжениях. Имеются напряженные состояния, при которых разрушение происходит хрупко, без образования пластических деформаций, а есть такие, при которых тот же материал способен пластически деформироваться, например, чугун при всестороннем равномерном давлении. Таким образом, вид напряженного состояния имеет существенное значение при исследовании вопросов прочности.

7.4 Вычисление главных значений тензора напряжений

Рассмотрим процедуру определения величин главных напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) по известным значениям шести координатных компонент тензора напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$).

Определение положения главных площадок. Возвращаясь к рисунку 7.2 и соотношениям (7.5), положим, что наклонная площадка является *главной*. Тогда нормаль к ней является главной осью. Так как касательные напряжения на главной площадке отсутствуют, то вектор полного напряжения \bar{p}_v направлен вдоль нормали \bar{v} и является главным напряжением на этой площадке (рисунок 7.5). Обозначим его величину через σ .

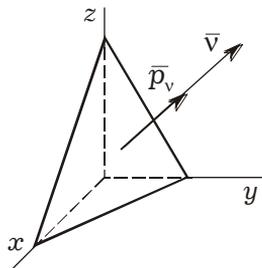


Рисунок 7.5

Тогда проекции этого вектора на координатные оси будут следующими:

$$p_{vx} = \sigma l; \quad p_{vy} = \sigma m; \quad p_{vz} = \sigma n.$$

Подставив их в соотношения (7.5), выражающие проекции полного напряжения на косой площадке через координатные напряжения, получим

$$\sigma l = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;$$

$$\sigma m = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n;$$

$$\sigma n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0; \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Система (7.7) представляет собой три однородных линейных уравнения относительно неизвестных косинусов нормали l , m , n , определяющих ориентацию главной площадки в исходной системе координат x , y , z .

Нулевое решение $l = m = n = 0$ не имеет физического смысла, так как не выполняется условие (7.2) $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (7.7) был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.\tag{7.8}$$

Достигается это надлежащим выбором величины σ . Если требование (7.8) выполнено, то одно из трех уравнений системы (7.7) зависимо и линейно выражается через два других. Добавив к этим двум независимым уравнениям условие $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, получим новую систему трех независимых уравнений. Она достаточна для нахождения косинусов нормали l , m и n к главной площадке, на которой действует напряжение σ .

Определение величин главных напряжений. Раскрывая определитель (7.8), получаем следующее кубическое уравнение относительно нормального напряжения σ на главной площадке:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0.\tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) называется *векковым*. Здесь коэффициенты

$$\begin{aligned}J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;\end{aligned}\tag{7.10}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

В силу симметрии элементов определителя (7.8) относительно главной диагонали все три корня σ_1 , σ_2 , σ_3 уравнения (7.9) вещественные. Они являются *главными значениями тензора напряжений*. Их величины определяются характером внешней нагрузки и не

зависят от ориентации первоначальной системы координат x, y, z . Следовательно, и коэффициенты уравнения (7.9), от которых зависят значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, инвариантны к выбранной системе декартовых осей, т. е. при повороте осей не изменяются:

$$J_1 = \text{const}; J_2 = \text{const}; J_3 = \text{const}.$$

В связи с этим их называют *первым, вторым и третьим инвариантами тензора напряжений*.

Следствие. Поскольку корни кубического уравнения (7.9) равны $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то его можно записать также в виде

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 -$$

значения инвариантов тензора напряжений, выраженные через главные напряжения.

7.5 Напряжения на октаэдрических площадках

Формулы для напряжений на произвольной площадке значительно упрощаются, если в качестве исходного выбрать элементарный параллелепипед, ограниченный главными площадками.

Рассмотрим наклонную площадку в осях 1, 2, 3. Вектор напряжения на ней обозначим \bar{p}_v .

Проекции вектора \bar{p}_v на главные оси. Разложим вектор \bar{p}_v на составляющие вдоль главных осей 1, 2, 3 (рисунок 7.6, а).

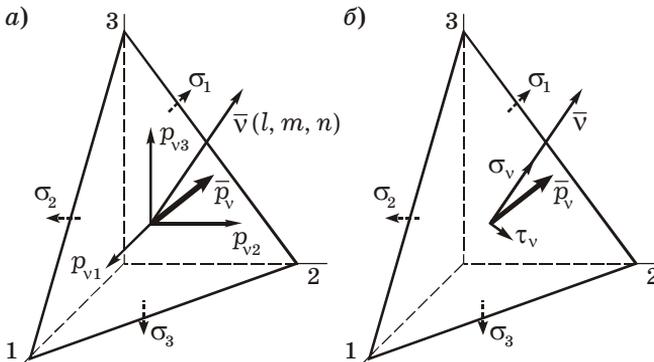


Рисунок 7.6

В соответствии с формулами (7.5) получаем

$$p_{v1} = \sigma_1 l; p_{v2} = \sigma_2 m; p_{v3} = \sigma_3 n. \tag{7.11}$$

Оставим в соотношениях (7.11) справа косинусы нормали к косой площадке l , m , n и возведем все в квадрат. После этого просуммируем левые и правые части по отдельности. Учитывая выражение (7.2) для суммы квадратов косинусов, получим

$$\left(\frac{p_{v1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{p_{v2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{p_{v3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1.$$

Следствие. Полученному уравнению можно дать наглядное толкование. Если величины p_{v1} , p_{v2} , p_{v3} рассматривать как координаты конца вектора полного напряжения \bar{p}_v , возникающего на произвольно ориентированной площадке, то геометрическое место концов этого вектора образует *эллипсоид напряжений*. Полуосями его являются главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 (рисунок 7.7).

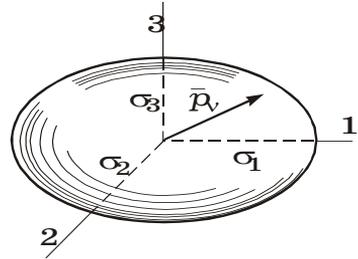


Рисунок 7.7

Модуль, нормальная и касательная составляющие вектора. Разложим вектор \bar{p}_v на нормальную σ_v и касательную τ_v составляющие:

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2. \quad (7.12)$$

Тогда *модуль вектора напряжения* на произвольной площадке

$$p_v = \sqrt{p_{v1}^2 + p_{v2}^2 + p_{v3}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2}.$$

Нормальное напряжение получим как сумму проекций составляющих полного напряжения \bar{p}_v на нормаль:

$$\sigma_v = p_{v1}l + p_{v2}m + p_{v3}n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (7.13)$$

Подставляя последние два выражения для p_v и σ_v в (7.12) и учитывая, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, получим величину *касательных напряжений на произвольной площадке*

$$\tau_v = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 n^2 l^2}. \quad (7.14)$$

Следствие. Как и главные напряжения, величина σ_v может принимать любые алгебраические значения. Величина τ_v всегда положительна, на главных площадках она обращается в ноль. Действительно, если нормаль \bar{v} совпадает с одной из главных осей, то один из направляющих косинусов равен единице, а два других равны нулю, и тогда $\tau_v = 0$.

При изучении сложного деформирования брусев с учетом пластических деформаций оказывается важным знать напряжения на площадках, равнонаклоненных к главным осям тензора напряжений. Такие площадки называются *октаэдрическими*, так как они параллельны грани октаэдра, образованного из куба.

Нормаль к октаэдрической площадке образует равные углы с главными осями, следовательно, ее направляющие косинусы одинаковы: $l^2 = m^2 = n^2 = 1/3$. Подставив эти значения в формулы (7.13), (7.14), получим нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \quad (7.15)$$

Напряжение σ_{oct} представляет собой среднее нормальное напряжение для данного объемного напряженного состояния.

Октаэдрические напряжения являются инвариантными величинами и выражаются через инварианты тензора напряжений:

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}J_1; \quad \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{2J_1^2 - 2J_2}.$$

Максимальные касательные напряжения. Особый интерес представляют площадки, на которых возникают максимальные касательные напряжения. Положение этих площадок можно определить, исследуя выражение (7.14). Заметим, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и максимальной разностью в (7.14) будет $\sigma_1 - \sigma_3$, которую запишем в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3).$$

Так как квадрат числа не меньше суммы квадратов чисел, его составляющих, то

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \geq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

Чтобы величина τ_v достигла максимума, необходимо в (7.14) увеличить большее из слагаемых. Это достигается ростом произведения $l^2 n^2$ за счет m^2 . Максимум будет при $m^2 = 0$, $l^2 = n^2 = 1/2$. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \quad (7.16)$$

Следовательно, площадка с максимальным касательным напряжением равнонаклонена к площадкам, на которых действуют максимальное σ_1 и минимальное σ_3 из главных напряжений, и параллельна оси 2 (рисунок 7.8).

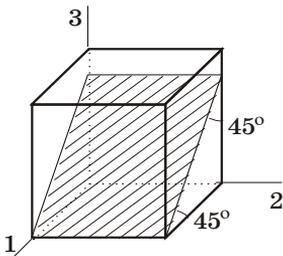


Рисунок 7.8

Заметим, максимальные касательные напряжения начинают играть важную роль при определении прочности тела в сложном напряженном состоянии (см. разд. 8).

7.6 Плоское напряженное состояние

При исследовании напряженного состояния элементов конструкций часто приходится иметь дело с плоским напряженным состоянием. Оно встречается при кручении, поперечном изгибе, сложном сопротивлении.

В случае плоского напряженного состояния в точке все напряжения на одной из координатных плоскостей равны нулю. Например, если $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, то по оси z напряженное состояние элементарного параллелепипеда не изменяется (рисунок 7.9, а). Поэтому в дальнейшем вместо объемного элемента будем рассматривать плоскую прямоугольную координатную площадку с размерами dx , dy , на которой действуют напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} (рисунок 7.9, б).

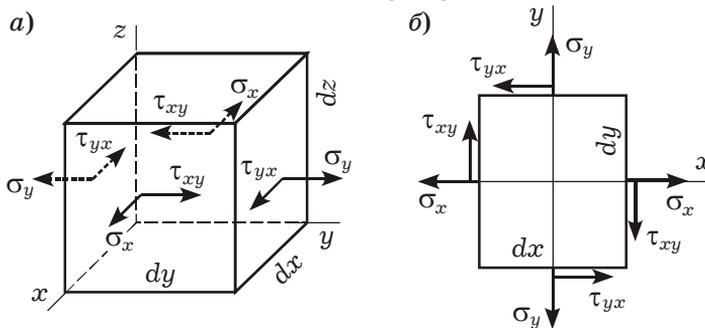


Рисунок 7.9

Главные напряжения. Здесь ось z является главной, так как на соответствующей площадке все касательные напряжения равны нулю. Поэтому можно принять $\sigma_2 = \sigma_z = 0$, предполагая, что напряжения σ_1 , σ_3 имеют разные знаки. Для их вычисления воспользуемся вековым уравнением (7.9). Инварианты тензора напряжений (7.10) принимают значения

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y; \quad J_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2; \quad J_3 = 0,$$

и кубическое уравнение (7.9) сводится к квадратному:

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (7.17)$$

Они являются *главными значениями тензора напряжений* при плоском напряженном состоянии.

Главные площадки. Определим касательные напряжения τ_α на косой площадке, наклоненной к оси y под углом α (рисунок 7.10). Рассмотрим равновесие треугольного элемента, отсеченного этой косой площадкой. Потребуем равенства нулю суммы проекций всех действующих сил на направление τ_α :

$$\tau_\alpha A - (\sigma_x \sin\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha)A_x + (\sigma_y \cos\alpha + \tau_{yx} \sin\alpha)A_y = 0,$$

где A , A_x , A_y – площади соответствующих площадок (см. рисунок 7.10), причем $A_x = A \cos\alpha$, $A_y = A \sin\alpha$. Отсюда, сокращая на A , получим

$$\tau_\alpha = (\sigma_x \sin\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha) \cos\alpha - (\sigma_y \cos\alpha + \tau_{yx} \sin\alpha) \sin\alpha$$

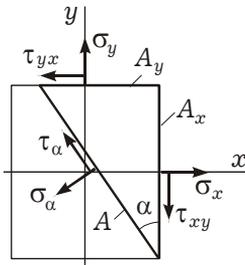


Рисунок 7.10

или
$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.$$

На главной площадке касательные напряжения обращаются в нуль. Предположив, что рассматриваемая косая площадка является главной, и положив в последней формуле $\tau_\alpha = 0$, получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (7.18)$$

Следовательно, если площадку с напряжением σ_x повернуть на угол α , определенный из соотношения (7.18), то получим главную площадку. При $\alpha > 0$ поворот осуществляется против часовой стрелки, при $\alpha < 0$ – по часовой стрелке. Вторая главная площадка будет перпендикулярна найденной.

☑ **ПРИМЕР 7.1.** Рассмотрим напряженное состояние стержня, соответствующее чистому изгибу с кручением. В этом случае действуют только нормальное напряжение от изгиба σ и касательное от кручения τ . Одно из главных напряжений $\sigma_2 = 0$, и мы имеем типичное плоское напряженное состояние. Для определения оставшихся главных напряжений в формуле (7.17) следует положить $\sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = \tau$. Тогда

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Очевидно, одно из главных напряжений будет положительным, другое – отрицательным.

☑ **ПРИМЕР 7.2.** Для напряженного состояния, изображенного на рисунке 7.11, $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = 50$ МПа, $\tau_{xy} = 10$ МПа. Требуется: вычислить главные (σ_1 , σ_3) и максимальные касательные (τ_{\max}) напряжения; определить положение площадок, на которых они действуют.

В соответствии с формулой (7.17) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{1,3} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{40 - 50}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(40 + 50)^2 + 4 \cdot 10^2} = \\ &= -5 \pm 92,2 \text{ МПа}; \\ \sigma_1 &= 87,2 \text{ МПа}; \sigma_3 = -97,2 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Угол наклона главной площадки определим, используя формулу (7.18):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \cdot 10}{-50 - 40} = -\frac{2}{9}; \alpha = -6^\circ.$$

Максимальные касательные напряжения вычисляем по формуле (7.16):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{87,2 + 97,2}{2} = 92,2 \text{ МПа}.$$

Таким образом, чтобы получить главную площадку, нужно площадку с напряжением σ_x повернуть на угол 6° по часовой стрелке. Вторая главная площадка будет ей перпендикулярна (см. рисунок 7.11). Площадки с максимальными касательными напряжениями составят с главными угол 45° .

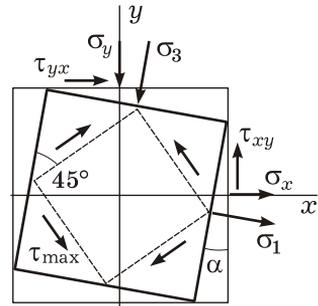


Рисунок 7.11

7.7 Деформированное состояние в точке

Понятие о линейных и угловых относительных деформациях введено в подразд. 1.4. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Тензор деформаций. Проведем через рассматриваемую точку тела сечение и возьмем в его плоскости прямоугольник (рисунок 7.12) с взаимно перпендикулярными элементами dx , dy . Через $\Delta(dx)$, $\Delta(dy)$ обозначим изменения длин волокон, а через α , β – углы их поворота после приложения нагрузки. Тогда угловой γ_{xy} и линейными ε_x , ε_y деформациями будут следующие величины:

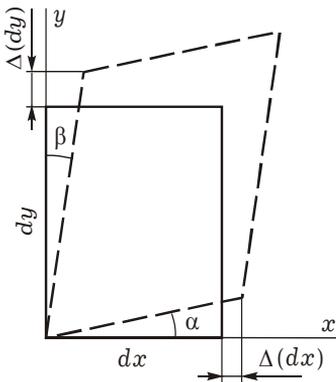


Рисунок 7.12

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta(dx)}{dx}; \varepsilon_y = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\Delta(dy)}{dy}; \\ \gamma_{xy} &= \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} (\alpha + \beta).\end{aligned}$$

В общем случае пространственного элемента (параллелепипеда) линейная ε_z и сдвиговые γ_{zx} , γ_{zy} деформации вводятся по аналогии. Совокупность всех деформаций ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} полностью опи-

сывает *деформированное состояние в точке тела*, т. е. по этим шести компонентам можно найти удлинение любой оси и углы сдвига в любых плоскостях, проходящих через рассматриваемую точку. Эти величины образуют *тензор деформаций* T_ε , матрица которого записывается в виде

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Тензор деформаций обладает свойствами, совершенно аналогичными свойствам тензора напряжений. У него также в каждой исследуемой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, в которых угловые деформации отсутствуют. Эти оси называются *главными осями тензора деформаций*.

Главные значения тензора деформаций. Матрица тензора деформаций в главных осях принимает диагональный вид:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — *главные значения тензора деформаций (главные деформации)*.

Их величины вычисляются как корни кубического уравнения, аналогичного вековому уравнению тензора напряжений (7.9):

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0,$$

где I_1, I_2, I_3 — *инварианты* тензора деформаций:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

В главных осях они принимают вид

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \quad I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

В упругой области главные оси и главные площадки тензоров напряжений и деформаций совпадают. При малых упругопластических деформациях соосность тензоров наблюдается в области простых нагружений [6], когда все компоненты тензора напряжений изменяются пропорционально одному общему параметру, например, времени.

Следует отметить, что для конструкционных материалов величина линейной деформации в упругой области весьма мала и составляет доли процента.

7.8 Обобщенный закон Гука

До сих пор напряженное и деформированное состояния рассматривались независимо друг от друга и не связывались со свойствами материала. Однако между ними существует определенная зависимость. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название *обобщенного закона Гука*. Для вывода соответствующих соотношений воспользуемся принципом суперпозиции и рассмотрим отдельно воздействие сил, возникающих на гранях элементарного параллелепипеда (рисунок 7.13), вырезанного в изотропном теле вокруг рассматриваемой точки.

За счет нормальных напряжений происходят растяжение и сжатие вдоль координатных осей, но не искажаются первоначально прямые углы между этими осями. Касательные напряжения обуславливают искажение соответствующих углов, но не влияют на изменение линейных размеров. При этом касательное напряжение, действующее в одной координатной плоскости, не связано со сдвигом в другой координатной плоскости.

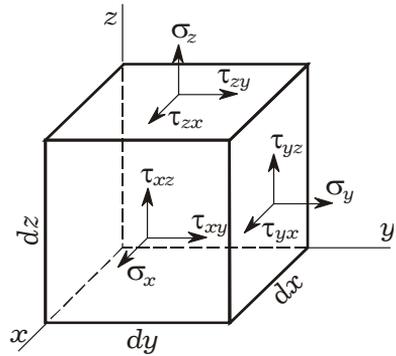


Рисунок 7.13

Просуммируем линейные деформации вдоль оси x , вызванные всеми нормальными напряжениями. За счет напряжения σ_x параллелепипед растягивается на относительную величину σ_x/E . Напряжения σ_y, σ_z растягивают его вдоль осей y и z соответственно, следовательно, вдоль оси x за счет этого происходит сжатие. Соответствующие деформации отрицательны и равны $-\nu\sigma_y/E, -\nu\sigma_z/E$. Поэтому суммарная деформация вдоль оси x

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Аналогичные выражения следуют и для $\varepsilon_y, \varepsilon_z$. В итоге

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Касательные напряжения и сдвиги можно связать соотношениями (G – модуль сдвига):

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \quad (7.20)$$

Полученные соотношения (7.19), (7.20) являются аналитическим выражением *обобщенного закона Гука* для изотропного тела.

7.9 Объемная деформация

Наряду с линейной и угловой деформациями в сопротивлении материалов приходится иногда рассматривать *объемную деформацию*, т. е. относительное изменение объема в точке. Линейные размеры элементарного параллелепипеда dx , dy , dz , взятого вокруг точки (см. рисунок 7.13), в результате деформирования изменяются и становятся:

$$dx + \Delta(dx) = dx + \varepsilon_x dx = dx(1 + \varepsilon_x), \quad dy(1 + \varepsilon_y), \quad dz(1 + \varepsilon_z).$$

Абсолютное приращение объема вычисляется как разность между новым и старым объемами:

$$\Delta V = dx(1 + \varepsilon_x) \cdot dy(1 + \varepsilon_y) \cdot dz(1 + \varepsilon_z) - dx dy dz.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая произведениями линейных деформаций как величинами, малыми по сравнению с их первыми степенями, получим

$$\Delta V = dx dy dz (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Отношение приращения ΔV к первоначальному объему параллелепипеда V называется *объемной деформацией* θ . Она равна сумме трех линейных осевых деформаций:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{dx dy dz (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{dx dy dz} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (7.21)$$

При повороте осей координат величина объемной деформации в точке не изменяется, так как совпадает по величине с первым инвариантом тензора деформаций (7.18).

Выражение объемной деформации через нормальные напряжения получим, подставив в формулу (7.21) соотношения обобщенного закона Гука (7.20):

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (7.22)$$

Отсюда можно установить предельное значение коэффициента Пуассона для любого изотропного материала. Соотношение (7.22) применимо для произвольного напряженного состояния, следовательно, оно применимо и для случая всестороннего равномерного растяжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$. Тогда

$$\theta = 3 \frac{1-2\nu}{E} p.$$

Так как величина $\nu > 0$, то и объемная деформация также должна быть положительной. Это возможно, если $1 - 2\nu > 0$. Следовательно, значение коэффициента Пуассона не может превышать 0,5.

Полученный вывод вытекает из частного случая напряженного состояния, однако он является общим для изотропных материалов, поскольку ν является характеристикой материала и в пределах упругих деформаций от напряженного состояния не зависит.

7.10 Полная потенциальная энергия деформации

В общем случае объемного напряженного состояния потенциальная энергия деформации, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ всех сил, действующих по граням параллелепипеда (см. рисунок 7.13).

Определим работу, относящуюся к напряжению σ_x . Соответствующая ему элементарная средняя сила $0,5 \sigma_x dy dz$ совершает работу на перемещении $\Delta(dx) = \varepsilon_x dx$. Эта работа имеет величину

$$0,5 \sigma_x dy dz \cdot \varepsilon_x dx.$$

Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие. Средняя касательная сила $0,5 \tau_{yz} dz dx$ на перемещении $\gamma_{yz} dy$ совершает работу

$$0,5 \tau_{yz} dz dx \cdot \gamma_{yz} dy.$$

Выражения остальных работ получаем простой перестановкой индексов. В результате имеем

$$dU = 0,5 dx dy dz (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}).$$

Если энергию отнести к объему параллелепипеда $dx dy dz$ и с помощью закона Гука (7.19), (7.20) выразить деформации через напряжения, получим *удельную потенциальную энергию* единицы объема

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (7.23)$$

Через главные напряжения удельная потенциальная энергия (7.23) выражается в виде

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)). \quad (7.24)$$

Полную потенциальную энергию получим, проинтегрировав удельную потенциальную энергию (7.23), (7.24) по объему деформированного тела.

7.11 Потенциальные энергии изменения объема и формы

Деление потенциальной энергии U_0 на энергию изменения объема U_v и энергию формоизменения U_d , т. е.

$$U = U_v + U_d,$$

является условным и потребуется в дальнейшем при изучении предельных напряженных состояний.

Потенциальную энергию изменения объема получим как работу среднего напряжения

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

на объемной деформации θ . Используя формулу (7.22), имеем

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (7.25)$$

В главных осях вид формулы не изменится, только координатные напряжения заменятся на главные.

Энергию формоизменения $U_d = U_0 - U_v$ найдем, используя формулы (7.23) и (7.25). После некоторых преобразований получим следующие выражения в произвольной и главной системах координат:

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E}((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2),$$

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2). \quad (7.26)$$

В частном случае всестороннего равномерного растяжения или сжатия $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ получим

$$U_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-2\nu}{E} p^2, \quad U_d = 0.$$

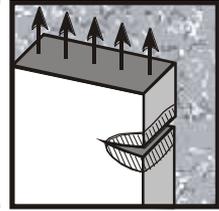
При чистом сдвиге присутствуют только касательные напряжения: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$, или, согласно формуле (7.17), $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$. Поэтому составляющие потенциальной энергии имеют вид

$$U_v = 0, \quad U_d = \frac{1+\nu}{E} \tau^2.$$

Сравнивая формулы (7.15) с (7.25), (7.26), легко заметить, что энергия изменения объема и энергия формоизменения пропорциональны соответственно квадратам нормального и касательного напряжений на октаэдрических площадках.

8

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ



Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности элемента конструкции по известному напряженному состоянию в опасной точке. При линейном напряженном состоянии для этого используется условие прочности, при сложном (плоском и пространственном) необходимо искать другие критерии.

8.1 Прочность при сложном напряженном состоянии

В зависимости от условий нагружения материал конструкции может находиться в различных механических состояниях. При небольших нагрузках – в *упругом состоянии*, тогда возникают только упругие деформации. Увеличение нагрузок приводит к *предельному (опасному) состоянию*, при котором в материале происходят качественные изменения механических свойств, т. е. в пластичном материале возникает *текучесть*, а в хрупком – *разрушение*.

Оценка прочности при различных напряженных состояниях. В случае простых видов деформирования (растяжения, сжатия, чистого изгиба, кручения) в опасной точке определяются или нормальные, или касательные напряжения и сравниваются с предельными для данного материала напряжениями, устанавливаемыми экспериментально. Прочность считается обеспеченной, если максимальные напряжения не превышают предельных значений

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\lim} \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\lim},$$

где σ_{\lim} (τ_{\lim}) – предельное напряжение, которое для пластичных материалов равно пределу текучести σ_y (τ_y), для хрупких – пределу прочности σ_u (τ_u).

Если необходимо ограничить напряжения в конструкции в большей степени и создать запас прочности, то вводится коэффициент запаса $n > 1$ и проверяется выполнение *условий прочности*

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \tau_{\max} \leq [\tau],$$

где $[\sigma] = \sigma_{\lim}/n$, $[\tau] = \tau_{\lim}/n$ – допускаемые напряжения.

При сложном напряженном состоянии подобный метод оценки прочности непригоден. В опасной точке возникает не одно нор-

мальное или касательное напряжение, а их совокупность, выраженная двумя или тремя главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 . Как показывают опыты, для одного и того же материала опасное состояние может наступить при различных предельных значениях главных напряжений в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и вследствие большого объема испытаний.

В связи с указанным прочность для любых случаев двухосного и трехосного напряженных состояний оценивают *теоретически* (с помощью так называемых *теорий прочности*). При этом используют результаты испытаний материалов на одноосное растяжение и сжатие (иногда на кручение).

Запас прочности. Обобщим понятие запаса прочности на случай сложного напряженного состояния.

Под *коэффициентом запаса n* данного напряженного состояния будем понимать число, показывающее, во сколько раз нужно увеличить все компоненты тензора напряжения, чтобы материал перешел из упругого в предельное состояние, т. е. в состояние пластичности либо разрушения. Из этого определения как частный случай следует введенное ранее понятие коэффициента запаса при простом растяжении.

Равноопасными называются такие напряженные состояния, у которых *одинаковые коэффициенты запаса прочности*.

Использование введенных понятий позволяет перейти от сложного напряженного состояния к *равноопасному одноосному растяжению (сжатию)*. Это осуществляется заменой главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 эквивалентным (приведенным) напряжением σ_{red} (рисунок 8.1).

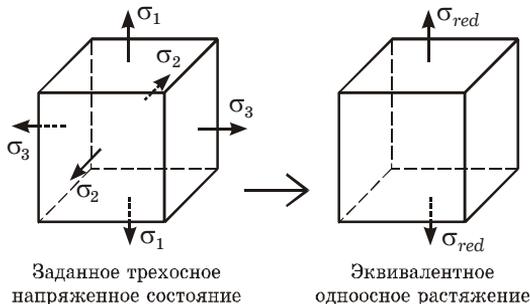


Рисунок 8.1

Эквивалентное напряжение σ_{red} — это такое напряжение, которое следует создать в растянутом (сжатом) образце, чтобы его состояние было равноопасно с заданным напряженным состоянием.

Таким образом, теория прочности должна задать условие эквивалентности (равноопасности) заданного сложного и одноосного напряженных состояний.

Построение теорий прочности. В общем случае теория прочности записывается в виде

$$\sigma_{red} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]$$

либо для расчетов строительных конструкций

$$\sigma_{red} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq R,$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение для одноосного растяжения или сжатия;

R – расчетное сопротивление.

Главная проблема заключается в том, чтобы подобрать функцию f , в достаточной степени соответствующую экспериментальным данным. Существует *два подхода* к построению теорий прочности:

- выдвигается гипотеза о преимущественном влиянии того или иного фактора на процесс перехода материала в предельное состояние, которая в дальнейшем проверяется экспериментами;
- теория строится на основе экспериментальных данных так, чтобы она не только могла охватить все случаи, но и находилась в лучшем соответствии с этими данными.

При всем многообразии предельных напряженных состояний, наблюдаемых в экспериментах, все их можно свести к трем видам:

- *текучесть* – значительные пластические деформации за счет скольжения по плоскостям действия максимальных касательных напряжений (для образцов из пластичных материалов);
- *хрупкий отрыв* – разрушение путем отрыва по поперечному сечению (для образцов из хрупких материалов при растяжении);
- *хрупкий сдвиг* – разрушение по плоскостям действия максимальных касательных напряжений (для образцов из хрупких материалов при сжатии).

Таким образом, напряженное состояние в точке определяет изменение механического состояния материала, но это не единственная причина. Свойства материалов существенно зависят от скорости нагружения: при значительных скоростях в первую очередь проявляются упругие свойства, при малых – пластические. Большое влияние оказывает также температурное воздействие: низкие температуры превращают многие пластичные материалы в хрупкие, и наоборот, высокие температуры вызывают повышение пластических свойств. Всё это еще раз демонстрирует условность деления материалов на хрупкие и пластичные.

Рассмотрим некоторые уже сложившиеся и зарекомендовавшие себя теории прочности. Следует отметить, что расчеты по различ-

ным теориям часто дают противоречивые результаты, не соответствующие также и опытным данным. Поэтому в каждом конкретном случае расчет следует выполнять по той теории, которая является наиболее достоверной для данного материала и того типа напряженного состояния, которое имеется в опасной точке.

8.2 Теория максимальных нормальных напряжений (первая теория прочности)

Эта теория использует следующий *критерий эквивалентности*: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны наибольшие нормальные напряжения.

Эквивалентное напряжение принимается равным максимальному по абсолютной величине главному напряжению:

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} = \max(\sigma_1, |\sigma_3|).$$

Условие прочности по первой теории записывается в виде

$$\sigma_{red}^I = \max(\sigma_1, |\sigma_3|) \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{red}^I = \max(\sigma_1, |\sigma_3|) \leq R. \quad (8.1)$$

Недостаток этой теории в том, что она учитывает только наибольшее из главных напряжений, а влияние двух остальных игнорирует.

Для пластичных материалов рассматриваемая теория опытами не подтверждается. Она дает удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например, кирпич, камень) при условии, что максимальное главное напряжение по абсолютной величине гораздо больше других. Из-за этого первой теории придается обычно историческое значение. Она отражает те инженерные

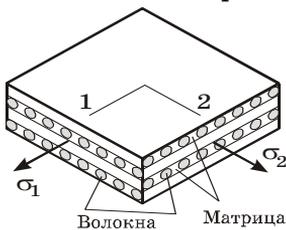


Рисунок 8.2

подходы к расчету на прочность, которые были предложены еще Г. Галилеем и использовались до конца XIX века преимущественно английскими инженерами, пока не были исследованы проблемы прочности при сложных напряженных состояниях. Однако в последние годы эта теория получила применение для расчета композитных материалов, подобных ориентированным стеклопластикам (рисунок 8.2).

По существу, такие материалы представляют собой конструкцию, образованную двумя семействами высокопрочных волокон, которые ортогональны друг другу. Положение этих волокон относительно друг друга зафиксировано матрицей из значительно менее

прочного и жесткого материала. Прочность пакета при растяжении напряжениями σ_1 определяется, в основном, прочностью волокон, расположенных вдоль оси 1, и не зависит от волокон по оси 2, и наоборот. Таким образом, сама конструкция материала позволяет при расчете прочности вдоль одного семейства волокон игнорировать напряжения в ортогональном направлении.

8.3 Теория максимальных линейных деформаций (вторая теория прочности)

Эта теория связывает переход в предельное состояние с моментом, когда наибольшая деформация достигает определенного предельного значения, которое устанавливается из опытов на растяжение (сжатие). Поэтому в ней формулируется следующий *критерий эквивалентности*: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны наибольшие относительные деформации.

Для сложного напряженного состояния с главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, когда $\sigma_1 > |\sigma_3|$ (преимущественное растяжение), наибольшая деформация определяется формулой (7.19)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Для эквивалентного состояния одноосного растяжения

$$\varepsilon_{red} = \sigma_{red} / E.$$

По критерию эквивалентности $\varepsilon_1 = \varepsilon_{red}$, поэтому

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

Условие прочности по второй теории записывается в виде

$$\sigma_{red}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{red}^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R. \quad (8.2)$$

При преимущественном сжатии, т. е. когда $|\sigma_3| > \sigma_1$:

$$\sigma_{red}^{\text{II}} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma], \text{ либо } \sigma_{red}^{\text{II}} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq R.$$

Вторая теория прочности развивает предложение Э. Мариотта, высказанное им еще в XVII веке. Наибольшее распространение под влиянием трудов Ж. Понселе и Б. Сен-Венана она получила во второй половине XIX века в работах французских инженеров.

Вторая теория прочности так же, как и первая, слабо соответствует экспериментальным данным. Она удовлетворительно совпадает с экспериментом лишь при разрушении хрупких материалов в сложных напряженных состояниях, преимущественно растяжении. В настоящее время условие (8.2) практически не используется.

8.4 Теория максимальных касательных напряжений Треска – Сен-Венана (третья теория прочности)

Формулировка этой теории отражает тот факт, что пластическое течение является результатом скольжения материала по плоскостям действия максимальных касательных напряжений. В подразд. 2 мы указывали на это, отмечая появление линий Людерса – Чернова.

Поэтому третья теория использует следующий *критерий эквивалентности*: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны максимальные касательные напряжения.

Для сложного напряженного состояния

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Для эквивалентного одноосного растяжения напряжением σ_{red} максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max red} = \frac{1}{2} \sigma_{red}.$$

По критерию равноопасности $\tau_{\max} = \tau_{\max red}$, поэтому

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Условие прочности по третьей теории записывается в виде

$$\sigma_{red}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{red}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R. \quad (8.3)$$

Заметим, что $\sigma_{red}^{\text{III}}$ всегда положительно, но для большинства пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы, поэтому для них третья теория прочности достаточно надежно предсказывает наступление текучести.

Исключение составляют напряженные состояния, близкие к всестороннему растяжению-сжатию, когда пластичные материалы ведут себя как хрупкие. К сожалению, пока не удалось определить границы этого перехода, так как проведение экспериментов связано с большими техническими трудностями. Однако в конструкциях такие напряженные состояния возникают крайне редко.

Третья теория прочности дает также удовлетворительные результаты и для описания разрушения хрупких материалов в тех случаях, когда разрушение путем отрыва невозможно, и оно происходит за счет сдвига по плоскостям действия τ_{\max} . Так разрушаются хрупкие образцы при сжатии (см. подразд. 2.11).

Таким образом, третья теория прочности позволяет рассматривать предельные состояния текучести и хрупкого сдвига с единой точки зрения.

Следствие. Сформулируем третью теорию прочности для брусьев, в опасных точках которых одновременно возникают нормальные и касательные напряжения (при *изгибе с кручением, поперечном изгибе*). Тогда главные напряжения (см. подразд 7.6)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

следовательно, эквивалентное напряжение растяжения

$$\sigma_{red} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Поэтому выражение (8.3) принимает вид

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R.$$

Впервые роль касательных напряжений при разрушении отметил Ш. Кулон¹⁾ (1776). Связь пластического течения материалов с максимальными касательными напряжениями была экспериментально установлена французским инженером Треска²⁾. На основе его исследований Б. Сен-Венан сформулировал условие (8.3) как условие пластичности и построил основные уравнения теории пластичности, поэтому третью теорию прочности называют *теорией Треска – Сен-Венана*.

8.5 Энергетическая теория Хубера – Мизеса – Хенки (четвертая теория прочности)

Эксперименты показывают, что при пластическом течении материала коэффициент Пуассона ν становится равным 0,5. Следовательно, при деформации течения объем материала не меняется, а изменяется только форма. Это, в свою очередь, наводит на мысль, что при анализе пластического течения определяющим фактором должна быть та часть потенциальной энергии деформации, которая связана с изменением формы. Отсюда вытекает энергетический *критерий эквивалентности*: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны потенциальные энергии изменения формы.

¹⁾ *Кулон Шарль Огюстен* (С. А. Coulomb) (1736–1806) – французский физик и военный инженер. В одной из ранних работ по механике упругого тела он указывал, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по плоскости, наклоненной под углом 45° к направлению сжатия.

²⁾ *Треска Анри Эдуард* (Tresca Henri Edouard) (1814–1885) – французский ученый-механик. Заложил основы теории пластичности. Основной цикл работ по течению твердых тел опубликован в шестидесятых годах XIX века.

В сложном напряженном состоянии энергия формоизменения в главных напряжениях определяется вторым из соотношений (7.26)

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right).$$

По той же формуле для простого растяжения с эквивалентным напряжением $\sigma_1 = \sigma_{red}$ получаем

$$U_{d\ red} = \frac{1+\nu}{6E} 2\sigma_{red}^2.$$

По критерию равноопасности $U_d = U_{d\ red}$, откуда следует, что

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Условие прочности по четвертой теории

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$$

или

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R. \quad (8.4)$$

Достоинством четвертой теории является то, что учитываются все три главных напряжения и не требуется в процессе расчета следить за их нумерацией, так как в соотношении (8.4) они входят равноправно.

Так же, как и третья, энергетическая теория прочности хорошо предсказывает появление пластического течения для материалов с одинаковыми пределами текучести при растяжении и сжатии. Совпадение с экспериментальными данными лучше, чем при расчетах по третьей теории. Максимальное отличие от расчета по третьей теории достигает 13 % (при чистом сдвиге).

Следствие. При изгибе с кручением и поперечном изгибе эквивалентное напряжение

$$\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2\sigma^2 + 6\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Условие прочности по четвертой теории принимает вид

$$\sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{red}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R.$$

Полученная формула дает меньшее значение σ_{red} для изгиба с кручением, чем третья теория прочности.

Первую попытку подойти к анализу предельного состояния с энергетической точки зрения предпринял Е. Бельтрами (1885), который предложил в качестве критерия равноопасности использовать всю энергию деформации. Но такой подход противоречил опытам.

Затем польский ученый М. Т. Хубер¹⁾ в 1904 г. предложил использовать в качестве критерия текучести только ту часть энергии деформации, которая связана с изменением формы. К сожалению, эта работа была обнаружена через несколько десятков лет. Немецкий ученый Р. Мизес²⁾ в 1913 г. предложил соотношение (8.4) как упрощение теории максимальных касательных напряжений, которое близко к ней, но равноправно по отношению ко всем главным напряжениям. Г. Хенки³⁾ в 1924 году опубликовал работу, в которой связал независимо от Хубера переход в пластическое состояние с энергией формоизменения. Поэтому энергетическую теорию прочности часто называют *теорией Хубера – Мизеса – Хенки*.

8.6 Теория предельных состояний Мора (пятая теория прочности)

Рассмотренные выше четыре теории прочности демонстрируют единый подход к решению проблемы: выдвигается гипотеза о причине возникновения предельного состояния, которая в дальнейшем проверяется экспериментами. Иногда более эффективным является другой метод, при котором теория строится на основе экспериментальных данных так, чтобы она лучше им соответствовала и могла охватить все возможные случаи.

Впервые такой подход был использован О. Мором⁴⁾ (1900). Он исходил из допущения, что предельное состояние (текучесть или разрушение) наступает в тот момент, когда на некоторой площадке возникает наиболее неблагоприятная комбинация нормальных и касательных напряжений.

Условие прочности выглядит следующим образом:

$$\sigma_{red}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{red}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq R, \quad (8.5)$$

где $k = \sigma_{lim\ t} / \sigma_{lim\ c}$ – коэффициент, численно равный отношению предельных напряжений при линейном растяжении и сжатии.

¹⁾ Хубер М. Т. (Huber M. T.) (1872–1950) – в 1904 году опубликовал в Польше статью, в которой связал переход в пластическое состояние с энергией формоизменения.

²⁾ Мизес Рихард (Mises R.) (1883–1953) – немецкий математик и механик, с 1939 г. жил и работал в США. В 1913 году опубликовал статью, в которой предложено соотношение (8.4), полученное другим методом.

³⁾ Хенки Г. (Hencky H.) (1885–1951) – немецко-американский ученый.

⁴⁾ Мор Отто Христиан (Mohr O.) (1835–1918) – немецкий инженер и ученый. Разработал графоаналитический метод построения упругой линии, метод расчета с использованием уравнения трех моментов.

Для пластичных материалов эти напряжения одинаковы, следовательно, $k = 1$, и условие (8.5) формально совпадает с теорией Треска – Сен-Венана (8.3). Наилучшие результаты теория Мора дает для смешанных напряженных состояний при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$.

В настоящее время в практических расчетах для пластичных материалов используют третью или четвертую теории, а для хрупких – теорию прочности Мора.

В заключение отметим, что рассмотренные пять теорий прочности устанавливали возможность появления предельных состояний в опасной точке твердого тела, не затрагивая вопросов его разрушения.

8.7 Теории разрушений

Предмет механики разрушения. Одной из составных частей механики деформируемого твердого тела является *механика разрушения*. Ее основы базируются на методах теории упругости и теории пластичности.

Механика разрушения занимается изучением поведения конструкционных материалов с трещинами при различных условиях нагружения. Этот подход оправдан тем фактом, что трещины или трещиноподобные дефекты имеются *практически в любом материале*. Такие дефекты неизбежно возникают при изготовлении материалов и изделий либо образуются в них в процессе эксплуатации под действием нагрузок или внешней среды. Под воздействием нагрузок происходит постепенное развитие дефектов, объединение их в трещины, которые со временем могут привести к исчерпанию несущей способности конструкций. В целом разрушение, как правило, является длительным процессом, постепенно развивающимся во времени.

Исследование закономерностей зарождения, распространения и развития трещин составляет предмет механики разрушения.

Разрушение может быть частичным или полным, пластическим или хрупким. *Пластическое разрушение* происходит после существенной пластической деформации. *Хрупкое разрушение* наблюдается без пластической деформации, скорость распространения трещин в десятки раз больше.

Особое место занимает *усталостное разрушение* (см. разд. 12), которое происходит из-за постепенного развития трещин при повторно-переменном нагружении. При этом трещины в материале начинают развиваться задолго до полного разрушения независимо от того, пластическое оно будет или хрупкое.

От быстрого распространения трещин конструкции иногда разрушаются при напряжениях, которые не превышают предела текучести и в связи с этим кажутся безопасными.

Поэтому рассмотренных до этого классических методов недостаточно. Необходимо изучить новые подходы, учитывающие законы зарождения и развития трещин, а также ввести характеристики, по которым могла бы оцениваться трещиностойкость материала.

Теория трещин Гриффитса. После открытия атомного строения вещества многие ученые, основываясь на характере межатомных взаимодействий, пытались определить теоретическую прочность материала, т. е. величину напряжений, необходимую для разделения двух соседних атомных (молекулярных) слоев в твердом теле. При этом предполагалось, что материал не имеет никаких дефектов структуры, т. е. все его атомы (молекулы) расположены в теле строго регулярно. Расчеты показали, что теоретическая прочность материала чуть ли не в 100 раз больше реальной, измеряемой при испытаниях.

Объяснить сложившееся противоречие взялся А. Гриффитс¹⁾. Он сделал решительный поворот от устоявшихся представлений о прочности материала как однородного континуума к анализу процесса разрушения его на атомно-молекулярном уровне.

В своей работе Гриффитс экспериментировал со стеклянными нитями и волокнами. Он установил, что их прочность существенно зависит от диаметра: чем тоньше нити, тем больше напряжения при их разрыве. Для тончайших нитей была получена величина прочности, близкая к теоретической. Гриффитс пришел к выводу, что в обычном стекле существует множество тончайших трещин, не поддающихся обнаружению, причем в тонких волокнах стекла эти трещины образуются реже.

Физическую картину того, что происходит у вершины трещины, иллюстрирует схема, показанная на рисунке 8.3. Если трещина перерезала несколько межатомных связей, то в результате концентрации напряжений существенно возросла нагрузка, передаваемая на атомную связь у самой вершины трещины. В таких условиях перегруженная связь (показана несколькими параллельными линиями), как правило, не выдерживает нагрузки и разрывается, что приводит к перегрузке следующей связи и т. д.

Таким образом, трещина служит орудием, при помощи которого сравнительно небольшая нагрузка разрушает сильнейшие межатомные связи, приводя к разделению образца на части.

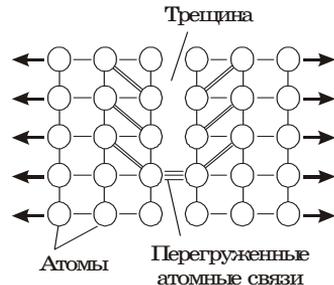


Рисунок 8.3

¹⁾ *Гриффитс* Алан (A. Griffiths) (1893–1963) – английский ученый. В 1920 г. опубликовал работу, заложившую основу механики разрушения материалов.

Рост трещины обязательно должен быть энергетически выгодным процессом (при котором количество запасенной в теле энергии уменьшается). Главная идея теории Гриффитса состоит в том, что *потенциальная энергия* тела, накопленная им в процессе упругого деформирования, при разрушении полностью превращается в энергию образующихся новых поверхностей (*поверхностную энергию*¹⁾).

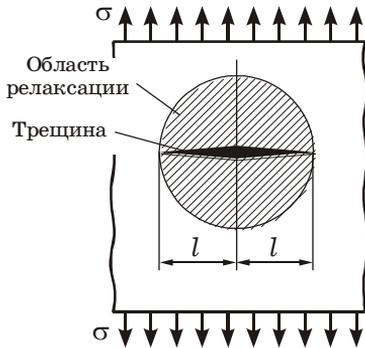


Рисунок 8.4

Задача Гриффитса. Рассмотрим пластину бесконечных размеров и единичной толщины, находящуюся в условиях одноосного растяжения (рисунок 8.4). В пластине образовалась трещина длиной $2l$. Требуется установить, при каких условиях трещина будет расти и приведет к разрушению материала.

В процессе распространения трещины материал, непосредственно примыкающий к ее «берегам», разгружается (релаксирует). Это означает, что напряжения и деформации в нем уменьшаются, а упругая энергия, запасенная в этой зоне тела, высвобождается – переходит в поверхностную. Для упрощения можно принять, что область разгруженного материала (область релаксации) имеет форму окружности.

В теории упругости показано, что высвобожденная энергия деформации U равна половине произведения трех величин: напряжения σ , относительной деформации $\varepsilon = \sigma/E$ и площади релаксации πl^2 . Это выражается следующей формулой:

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon (\pi l^2) = \frac{\pi \sigma^2 l^2}{2E}.$$

Энергия, которая потребляется телом для образования двух новых поверхностей (трещины),

$$G = 2l\gamma,$$

где γ – плотность поверхностной энергии (работа, необходимая для образования единицы новой поверхности); γ можно считать константой материала, определяемой экспериментально.

¹⁾ Повседневные проявления поверхностной энергии жидкостей широко известны: жидкость стремится по возможности уменьшить свою поверхность. Например, тонкая струя воды из только что закрытого крана, достигнув некоторой толщины, обязательно разобьется на отдельные капли с меньшей поверхностью. Мы не замечаем поверхностного натяжения в твердом теле только потому, что оно слишком жестко, чтобы изменить свою форму благодаря стремлению поверхностной энергии к минимуму.

Итак, величина G пропорциональна длине трещины, а величина U – квадрату длины. Следовательно, чем длиннее трещина, тем больше роль высвобождаемой энергии.

Покажем, что если длина трещины становится больше некоторого критического значения, то трещина высвобождает больше энергии, чем потребляет. А так как тело всегда стремится уменьшить запасенную в нем энергию, то такая трещина развивается стремительно и безостановочно, разрушая образец материала.

Предположим, что длина трещины $2l$ является критической. Она соответствует максимуму общей энергии тела $W \rightarrow \max$.

Общая энергия тела W равна потребленной поверхностной энергии минус энергия, высвобожденная при достижении трещиной длины $2l$, т. е.

$$W = G - U = 2l\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l^2}{2E}.$$

Максимум общей энергии находим из условия равенства нулю производной общей энергии по длине трещины:

$$\partial W / \partial l = 0,$$

т. е.

$$2\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l}{E} = 0.$$

Отсюда получаем *критическую полудлину трещины* для заданного напряжения σ

$$l_{cr} = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}$$

и *критическое напряжение* для заданной полудлины l

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}}.$$

Если $l < l_{cr}$ или $\sigma < \sigma_{cr}$, то трещина не развивается. Если $l \geq l_{cr}$ или $\sigma \geq \sigma_{cr}$, то трещина стремительно и безостановочно растет, разрушая образец материала. Таким образом, теория Гриффитса устанавливает *условие роста трещины*

$$l \geq \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} \quad \text{или} \quad \sigma \geq \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}}. \quad (8.6)$$

Из теории Гриффитса следует, что наличие в той или иной детали трещины – еще не свидетельство ее немедленного выхода из строя. Существуют безопасные, неразвивающиеся трещины. Однако они могут перейти в опасные за счет охрупчивания материала в результате понижения температуры, динамического действия нагрузки, старения материала и т. п.

Вводя соответствующий запас на наличие трещины, можно установить допускаемый размер трещины, с которой деталь может работать заданное время.

Теория Гриффитса справедлива для хрупких материалов. Для *пластичных металлов и сплавов* следует учитывать энергию, которая расходуется на пластическое деформирование. На основе концепции энергетического баланса Гриффитса Е. Орован и Д. Ирвин предложили ввести в формулы (8.6) вместо истинной удельной поверхностной энергии γ эффективную поверхностную энергию

$$\gamma_{ef} = \gamma + \gamma_p,$$

где γ_p – работа пластического деформирования, необходимая для образования единицы новой поверхности.

Опыты показывают, что для сталей $\gamma_p \approx 10^3 \gamma$. Следовательно, можно пренебречь величиной γ и принять условие роста трещины

$$l \geq \frac{2\gamma_p E}{\pi \sigma^2} \quad \text{или} \quad \sigma \geq \sqrt{\frac{2\gamma_p E}{\pi l}}.$$

Следует отметить, что кроме энергетических подходов в механике разрушения используют также силовые подходы, когда рассматриваются условия равновесия действующих на трещину внешних и внутренних сил (нагрузки и сил межатомного или межмолекулярного сцепления). Оба они дают одинаковый результат, но в конкретных случаях тот или иной подход более удобен.

8.8 Расчет пространственного бруса

Пространственный брус (рисунок 8.5, а) состоит из трех стержней: средний имеет круглое сечение диаметром d , а два других – прямоугольные с размерами b и h . Торцы круглого элемента примыкают к большей стороне прямоугольного, причем $d = h$. Требуется: проверить прочность всех элементов бруса, если $F_1 = 1,5qa$; $F_2 = qa$; $q = 7$ кН/м; $a = 0,7$ м; $b = 0,06$ м; $h = 0,1$ м; расчетное сопротивление $R = 210$ МПа.

Порядок расчета. Вначале строим эпюры внутренних силовых факторов (продольных и поперечных сил, крутящих и изгибающих моментов). Затем по эпюрам установим опасное сечение каждого стержня и вычертим его в рабочем положении. После этого построим эпюры нормальных и касательных напряжений и проверим выполнение соответствующих условий прочности. При изгибе с кручением будем использовать третью теорию прочности.

Выбор осей координат. Вычерчиваем пространственный брус в изометрии (рисунок 8.5, б). Нумеруем стержни (I, II, III) и их концы (1, ..., 6), начав с крайнего свободного сечения. Для каждого стержня выбираем пространственную прямоугольную систему координат xuz . Ось z направляем вдоль оси стержня, оси x и y располагаются в плоскости

поперечного сечения и проходят через его центр тяжести. Положительные направления осей выбираются произвольно, но так, чтобы полученная система координат была правой, т. е. при взгляде со стороны оси z вращение от оси x к оси y мы должны видеть против часовой стрелки.

Построение эпюр внутренних силовых факторов. Построение эпюр проводим методом сечений в том же порядке, что и для обычных балок.

Продольные силы N считаем положительными при растяжении и отрицательными при сжатии.

Поперечные силы Q положительны, если они вращают оставленную часть рамы по часовой стрелке. Если мы оставляем левую часть стержня, то эпюру Q откладываем по направлению внешних сил, на нее действующих. Если оставлена правая часть, то эпюра откладывается в ту сторону, в которую Q_x , Q_y нужно направить для уравновешивания внешней нагрузки, действующей на оставшуюся часть бруса. Следует заметить, что понятие левой и правой частей достаточно условное.

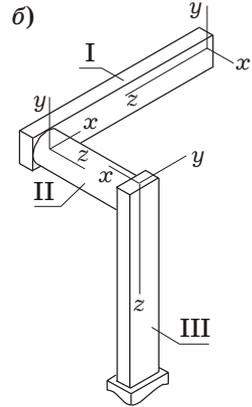
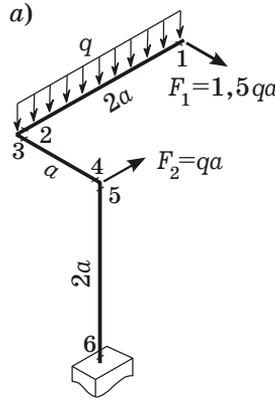


Рисунок 8.5

Крутящий момент M_z положителен, когда создает вращение против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения. Эпюры изгибающих моментов M_x , M_y строим со стороны растянутых волокон бруса (на растянутом волокне).

Построение эпюр внутренних усилий начинаем с концевой стержня. Каждый раз, переходя к следующему стержню, будем отбрасывать предыдущие, заменяя их действие статически эквивалентной нагрузкой, приведенной к центру тяжести граничного сечения. На рисунке 8.6 показаны внутренние усилия, введенные в сечениях 2, 4, 6 каждого из стержней.

Стержень I (рисунок 8.6, а). Используя метод сечений, получаем значения внутренних силовых факторов в граничных сечениях 1 и 2, при этом вводим силу Q_y так, чтобы она вращала оставшуюся часть стержня по часовой стрелке, если идти от сечения 1 к сечению 2 слева направо (снаружи):

$$N^{(1)} = N^{(2)} = 0; \quad Q_x^{(1)} = Q_x^{(2)} = 1,5qa; \quad Q_y^{(1)} = 0; \quad Q_y^{(2)} = -q \cdot 2a = -2qa;$$

$$M_z^{(1)} = M_z^{(2)} = 0; \quad M_x^{(1)} = 0; \quad M_x^{(2)} = q \cdot 2a \cdot a = 2qa^2;$$

$$M_y^{(1)} = 0; \quad M_y^{(2)} = 1,5qa \cdot 2a = 3qa^2.$$

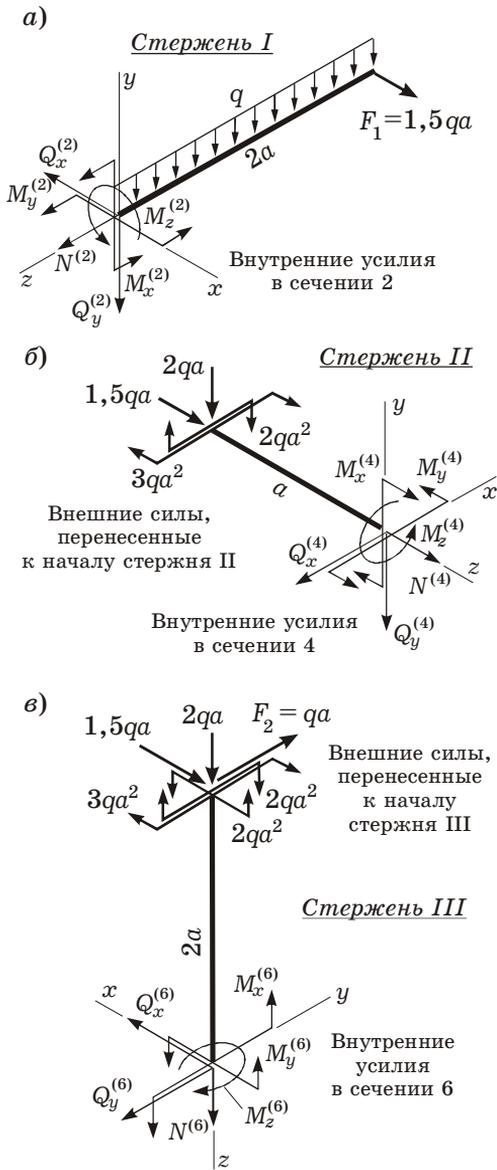


Рисунок 8.6

Стержень II (рисунок 8.6, б). Распределенную нагрузку, действующую на стержень 1, заменяем ее статическим эквивалентом, приложенным к граничному сечению 3. Это будет поперечная сила $2qa$, направленная вертикально вниз, и крутящий момент $2qa^2$, закручивающий стержень по часовой стрелке. Перенос силы F_1 к этому сечению добавит горизонтальный изгибающий момент $2F_1a$, растягивающий левые волокна стержня. Значения внутренних усилий в граничных сечениях 3 и 4 будут:

$$N^{(3)} = N^{(4)} = -1,5qa ;$$

$$Q_x^{(3)} = Q_x^{(4)} = 0 ;$$

$$Q_y^{(3)} = Q_y^{(4)} = -2qa ;$$

$$M_z^{(3)} = M_z^{(4)} = 2qa^2 ;$$

$$M_x^{(3)} = 0 ; M_x^{(4)} = 2qa \cdot a = 2qa^2 ;$$

$$M_y^{(3)} = M_y^{(4)} = 3qa^2 .$$

Стержень III (рисунок 8.6, в). Все моменты из сечения 3 переносим в сечение 5 параллельно самим себе. Линия действия горизонтальной силы F_1 из этого сечения проходит через сечение 5, поэтому при переносе она не создаст дополнительный момент (этот момент равен нулю). Вертикальную силу $2qa$ переносим параллельно и добавляем в плоскости zx создаваемый ею относительно сечения 5 изгибающий момент, который растягивает правые волокна стержня 3 и равен $2qa^2$. Итак, в сечении 5 действуют шесть внутренних силовых факторов: три силы и три момента. Их значения в сечениях 5 и 6 следующие:

$$N^{(5)} = N^{(6)} = -2qa; \quad Q_x^{(5)} = Q_x^{(6)} = 1,5qa; \quad Q_y^{(5)} = Q_y^{(6)} = qa;$$

$$M_z^{(5)} = M_z^{(6)} = -3qa^2; \quad M_x^{(5)} = 2qa^2; \quad M_x^{(6)} = 2qa^2 + qa \cdot 2a = 4qa^2;$$

$$M_y^{(5)} = 2qa^2; \quad M_y^{(6)} = 1,5qa \cdot 2a - 2qa^2 = qa^2.$$

В соответствии с полученными значениями и принятыми правилами строим эпюры внутренних силовых факторов (рисунок 8.7).

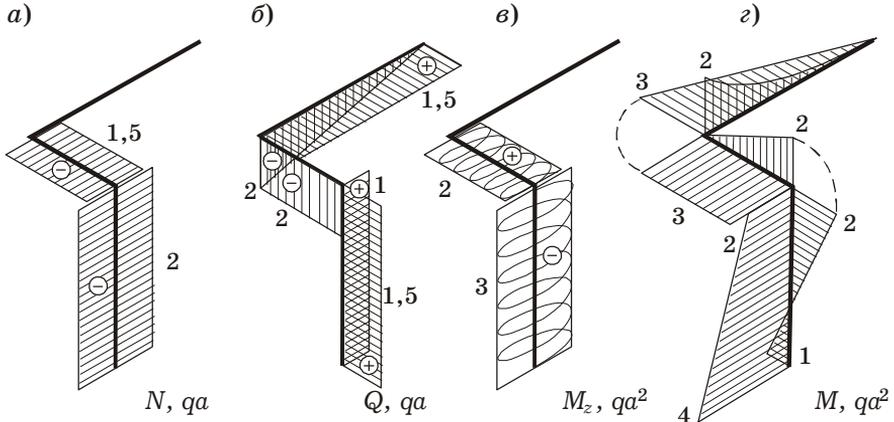


Рисунок 8.7

Проверка эпюр. Правильность построения эпюр проверим по равновесию узлов (рисунок 8.8). Для этого вырежем узлы и приложим в поперечных сечениях действующие внутренние силовые факторы. Каждый изгибающий момент изображаем в виде пары сил, плечо которой лежит в плоскости сечения, а направление соответствует эпюре M . Крутящие моменты располагаем в плоскости сечений. Их направление сил N , Q , выбираем с учетом знаков на эпюрах.

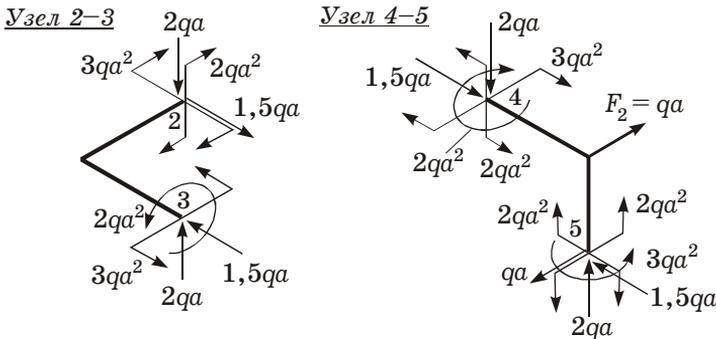


Рисунок 8.8

Расчет на прочность стержня I. Он испытывает поперечный изгиб в двух плоскостях, т. е. работает на поперечный косоу изгиб. Опасным является сечение 2, так как в нем действуют максимальные изгибающие моменты.

Вычерчиваем это сечение в рабочем положении с действующими в нем внутренними силовыми факторами (рисунок 8.9). Направления для поперечных сил берем из соответствующей эпюры. Согласно эпюре изгибающий момент M_x , действующий в вертикальной плоскости, растягивает верхнюю половину сечения и сжимает нижнюю. Поэтому ставим два плюса сверху сечения по оси y и два минуса внизу сечения. Момент M_y , действующий в горизонтальной плоскости, растягивает левую половину сечения и сжимает правую. Следовательно, ставим два плюса слева в сечении по оси x и два минуса справа в сечении.

Вычисляем величины внутренних сил и моментов:

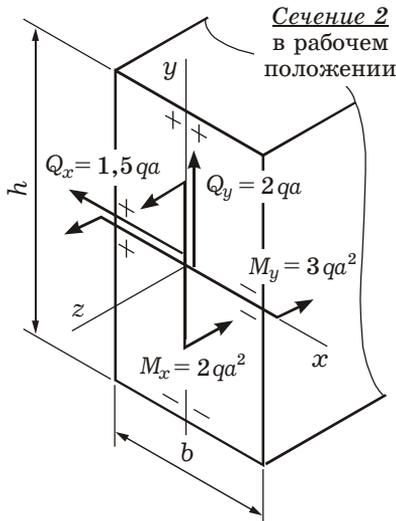


Рисунок 8.9

$$Q_x = 1,5qa = 1,5 \cdot 7 \cdot 0,7 = 7,35 \text{ кН};$$

$$Q_y = 2qa = 2 \cdot 7 \cdot 0,7 = 9,8 \text{ кН};$$

$$M_x = 2qa^2 = 2 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 6,86 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = 3qa^2 = 3 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 10,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Геометрические характеристики рассматриваемого сечения (моменты инерции, статические моменты полусечения) следующие:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,06 \cdot 0,1^3}{12} = 500 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,1 \cdot 0,06^3}{12} = 180 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_x^* = \frac{bh^2}{8} = \frac{0,06 \cdot 0,1^2}{8} = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$S_y^* = \frac{hb^2}{8} = \frac{0,1 \cdot 0,06^2}{8} = 45 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Полные нормальные напряжения в опасном сечении определяются суммой напряжений от изгибающих моментов:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x.$$

Знаки слагаемых в формуле выбираются по знакам отдельных напряжений в первом квадранте (см. рисунок 6.4). Так как в первом квадранте сечения координаты x , y точек положительны, то знаки перед слагаемыми напряжений в общей формуле должны совпадать со знаками напряжений от изгибающих моментов в этом квадранте (вдоль оси y – плюс, вдоль оси x – минус). Поэтому

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (a)$$

Уравнение нулевой линии получим, положив $\sigma = 0$:

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0; \quad y = \frac{M_y J_x}{J_y M_x} x.$$

Нулевая линия проходит через центр тяжести поперечного сечения в первом и третьем квадрантах (рисунок 8.10) с углом наклона к оси x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{M_y J_x}{M_x J_y} = \frac{10,3 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-8}}{6,86 \cdot 10^3 \cdot 180 \cdot 10^{-8}} = 4,17; \quad \varphi = 76,5^\circ.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают в точке $B(-b/2, h/2)$, поэтому в формулу (a) подставляем ее координаты:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_B &= \frac{M_x}{J_x} x_B - \frac{M_y}{J_y} y_B = \\ &= \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} - \frac{M_y}{J_y} \left(-\frac{b}{2}\right) = \\ &= \frac{6,86 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,1}{2} + \\ &+ \frac{10,3 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,06}{2} = \\ &= 240 \cdot 10^6 \text{ Па} = 240 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Минимальные напряжения достигаются в точке $D(b/2, -h/2)$. В данном случае (из-за отсутствия растяжения-сжатия)

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{\max} = -240 \text{ МПа}.$$

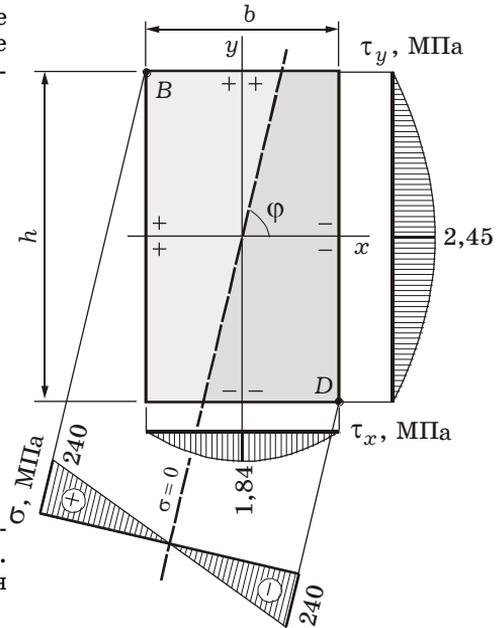


Рисунок 8.10

Эпюра нормальных напряжений прямолинейна. Ее строим между двух прямых, проведенных параллельно нулевой линии через наиболее удаленные от нее точки (см. рисунок 8.10).

Максимальные касательные напряжения от поперечных сил Q_x , Q_y определяем с помощью формулы Журавского (5.17):

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b} = \frac{9,8 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-8} \cdot 0,06} = 2,45 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,45 \text{ МПа};$$

$$\tau_x = \frac{Q_x S_y^*}{J_y h} = \frac{7,35 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = 1,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,84 \text{ МПа.}$$

Эпюры τ_x , τ_y показывают изменение касательных напряжений от изгиба вдоль одноименной оси. Они ограничены параболой и строятся справа (слева) и внизу (вверху) от рассматриваемого сечения (см. рисунок 8.10), или прямо на его сторонах.

Опасное сечение находится в состоянии косоугольного изгиба, поэтому условие прочности для него

$$\sigma_{\max} \leq R = 210 \text{ МПа.}$$

В нашем случае $\sigma_{\max} = 240 \text{ МПа} > 210 \text{ МПа}$, следовательно, условие прочности для первого стержня не выполняется.

Расчет на прочность стержня II. Этот стержень работает на сжатие, кручение, поперечный изгиб в вертикальной и чистый изгиб в горизонтальной плоскостях. Опасным является сечение 4, так как в нем действуют максимальные изгибающие и крутящий моменты. Вычерчиваем это сечение в рабочем положении с действующими в нем внутренними силовыми факторами (рисунок 8.11).

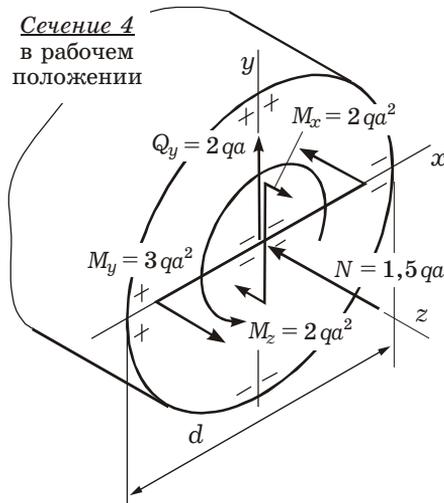


Рисунок 8.11

Согласно эпюрам изгибающие моменты прикладываем так, чтобы вертикальный M_x растягивал верхние волокна, а горизонтальный M_y — левые. Момент M_x , действующий в вертикальной плоскости, растягивает верхнюю половину сечения и сжимает нижнюю. Поэтому ставим два плюса сверху сечения по оси y и два минуса внизу сечения. Момент M_y , действующий в горизонтальной плоскости, растягивает левую половину сечения и сжимает правую. Следовательно, ставим два плюса слева в сечении по оси x и два минуса справа. Продольная сила сжимает стержень, поэтому ставим минусы вокруг центра тяжести. Поперечная сила по эпюре отрицательна, поэтому направляем ее так, чтобы она вращала оставшуюся часть стержня против часовой стрелки.

Вычисляем величины внутренних сил и моментов:

$$N = 1,5qa = 1,5 \cdot 7 \cdot 0,7 = 7,35 \text{ кН}; \quad Q_y = 2qa = 2 \cdot 7 \cdot 0,7 = 9,8 \text{ кН};$$

$$M_x = M_z = 2qa^2 = 2 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 6,86 \text{ кН·м};$$

$$M_y = 3qa^2 = 3 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 10,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Геометрические характеристики рассматриваемого сечения следующие:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} = 78,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 0,1^4}{64} = 491 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,1^3}{16} = 196 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; S_x^* = \frac{d^3}{12} = \frac{0,1^3}{12} = 83,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Нормальные напряжения в опасном сечении определяются суммой напряжений от изгибающих моментов и продольной силы:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x.$$

Знаки слагаемых в формуле выбираются по знакам напряжений от изгиба в первом квадранте (см. рисунок 8.11) и по знаку силы N :

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x. \quad (б)$$

Уравнение нулевой линии получим, положив $\sigma = 0$:

$$-\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0.$$

Нулевая линия не проходит через начало координат. Найдем отрезки, которые она отсекает на осях координат (рисунок 8.12):

$$\text{если } x = 0, \text{ то } a_y = \frac{NJ_x}{AM_x} = \frac{7,35 \cdot 10^3 \cdot 491 \cdot 10^{-8}}{78,5 \cdot 10^{-4} \cdot 6,86 \cdot 10^3} = 0,67 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{если } y = 0, \text{ то } a_x = -\frac{NJ_y}{AM_y} = -\frac{7,35 \cdot 10^3 \cdot 491 \cdot 10^{-8}}{78,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10,3 \cdot 10^3} = -0,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Нулевая линия пересекает первый и третий квадранты поперечного сечения (см. рисунок 8.10) с углом наклона к оси x :

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_y}{a_x} \right| = \frac{0,67 \cdot 10^{-3}}{0,45 \cdot 10^{-3}} = 1,5; \quad \varphi = 56,3^\circ.$$

Определим координаты точек, наиболее удаленных от нулевой линии:

$$\text{точка } B: x_B = -d \sin \varphi / 2 = -0,1 \cdot 0,832 / 2 = -4,16 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$y_B = d \cos \varphi / 2 = -0,1 \cdot 0,555 / 2 = 2,77 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\text{точка } D: x_D = -x_B = 4,16 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad y_D = -y_B = -2,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

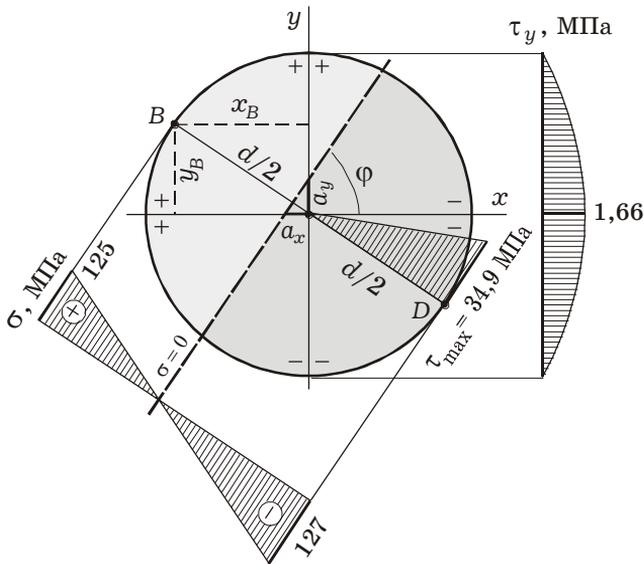


Рисунок 8.12

Нормальные напряжения максимальны в точке B . Их величину получим, подставив в формулу (б) координаты x_B, y_B :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_B = & -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_B - \frac{M_y}{J_y} x_B = -\frac{7,35 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^{-4}} + \\ & + \frac{6,86 \cdot 10^3 \cdot 2,77 \cdot 10^{-2}}{491 \cdot 10^{-8}} - \frac{10,3 \cdot 10^3 \cdot (-4,16 \cdot 10^{-2})}{491 \cdot 10^{-8}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Минимальные напряжения достигаются в точке D . В данном случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} = \sigma_D = & -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_D - \frac{M_y}{J_y} x_D = -\frac{7,35 \cdot 10^3}{78,5 \cdot 10^{-4}} - \\ & - \frac{6,86 \cdot 10^3 \cdot 2,77 \cdot 10^{-2}}{491 \cdot 10^{-8}} - \frac{10,3 \cdot 10^3 \cdot 4,16 \cdot 10^{-2}}{491 \cdot 10^{-8}} = -127 \cdot 10^6 \text{ Па} = -127 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений прямолинейна. Ее строим между двух прямых, проведенных параллельно нулевой линии через наиболее удаленные точки B и D .

Максимальные касательные напряжения от поперечной силы Q_y вычисляем по формуле Журавского (5.17):

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^*}{J_x d} = \frac{9,8 \cdot 10^3 \cdot 83,3 \cdot 10^{-6}}{491 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = 1,66 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,66 \text{ МПа} .$$

Эпюра τ_y построена справа от сечения (см. рисунок 8.12).

Эпюра касательных напряжений τ от кручения показана внутри сечения, причем

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{6,86 \cdot 10^3}{196 \cdot 10^{-6}} = 34,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 34,9 \text{ МПа.}$$

Опасное сечение круглого бруса находится в сложном напряженном состоянии. Поэтому прочность его будем проверять по третьей теории в точке D , так как в ней и нормальные напряжения от изгиба (по модулю), и касательные напряжения от кручения максимальны:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{д}}^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{127^2 + 4 \cdot 34,9^2} = 145 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.}$$

Следовательно, условие прочности для второго бруса выполняется.

Расчет на прочность стержня III. Этот стержень работает на поперечный изгиб в двух плоскостях, сжатие и кручение. Опасным является сечение 6, так как в нем действуют суммарно большие изгибающие моменты и крутящий момент.

Вычерчиваем это сечение в рабочем положении с действующими в нем внутренними силовыми факторами (рисунок 8.13). Внутренние силы и моменты направляем с учетом знаков согласно эпюрам.

Момент M_x растягивает нижнюю половину сечения и сжимает верхнюю. Поэтому ставим два плюса внизу сечения по оси y и два минуса вверху сечения. Момент M_y растягивает правую половину сечения и сжимает левую. Следовательно, ставим два плюса справа в сечении по оси x и два минуса слева в сечении.

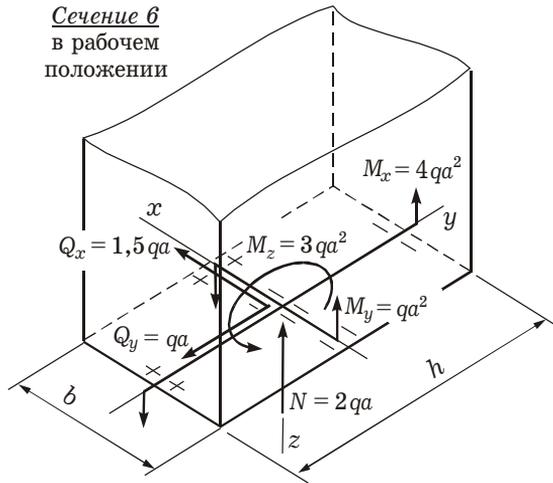


Рисунок 8.13

Значения внутренних усилий

$$N = 2qa = 2 \cdot 7 \cdot 0,7 = 9,8 \text{ кН}; \quad Q_x = 1,5qa = 1,5 \cdot 7 \cdot 0,7 = 7,35 \text{ кН};$$

$$Q_y = qa = 7 \cdot 0,7 = 4,9 \text{ кН}; \quad M_x = 4qa^2 = 4 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 13,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = qa^2 = 7 \cdot 0,7^2 = 3,43 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z = 3qa^2 = 3 \cdot 7 \cdot 0,7^2 = 10,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Геометрические характеристики рассматриваемого сечения такие же, как для стержня I:

$$A = bh = 0,06 \cdot 0,1 = 60 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad J_x = 500 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \quad J_y = 180 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$S_x^* = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad S_y^* = 45 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления при кручении прямоугольного стержня вычисляется по формуле (3.26) $W_t = ahb^2$, где коэффициент a берется из таблицы 3.1 в зависимости от отношения h/b . В нашем случае

$$h/b = 0,1 / 0,06 = 1,67$$

и a определяем интерполяцией. Если $h/b = 1,5$, то $a = 0,231$; если $h/b = 1,75$, то $a = 0,239$. Поэтому для $h/b = 1,67$

$$\alpha = 0,231 + \frac{(0,239 - 0,231)(1,67 - 1,5)}{1,75 - 1,5} = 0,236,$$

$$W_t = \alpha hb^2 = 0,236 \cdot 0,1 \cdot 0,06^2 = 85,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Аналогично интерполяцией определяется и коэффициент η , который понадобится нам в дальнейшем:

$$\eta = 0,859 - \frac{(0,859 - 0,820)(1,67 - 1,5)}{1,75 - 1,5} = 0,840.$$

Нормальные напряжения в опасном сечении определяются суммой напряжений от изгибающих моментов и продольной силы:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x.$$

Знаки слагаемых в этой формуле выбираются по знакам напряжений от изгиба в первом квадранте и по знаку силы N :

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (\epsilon)$$

Уравнение нулевой линии получим, положив $\sigma = 0$:

$$-\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0.$$

Нулевая линия не проходит через начало координат. Получим отрезки, которые она отсекает на координатных осях (рисунок 8.14):

$$\text{если } x = 0, \text{ то } a_y = -\frac{NJ_x}{AM_x} = -\frac{9,8 \cdot 10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-8}}{60 \cdot 10^{-4} \cdot 13,7 \cdot 10^3} = -0,595 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\text{если } y = 0, \text{ то } a_x = \frac{NJ_y}{AM_y} = \frac{9,8 \cdot 10^3 \cdot 180 \cdot 10^{-8}}{60 \cdot 10^{-4} \cdot 3,43 \cdot 10^3} = 0,857 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Максимальные нормальные растягивающие напряжения возникают в точке $D (b/2, -h/2)$. Поэтому в формулу (ϵ) подставляем ее координаты

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} = \sigma_D &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_D + \frac{M_y}{J_y} x_D = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{M_y}{J_y} \frac{b}{2} = \\ &= -\frac{9,8 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} + \frac{13,7 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,1}{2} + \frac{3,43 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,06}{2} = 193 \cdot 10^6 \text{ Па} = 193 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Минимальные напряжения достигаются в точке В $(-b/2, h/2)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} = \sigma_B &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_B + \frac{M_y}{J_y} x_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} + \frac{M_y}{J_y} \left(-\frac{b}{2}\right) = \\ &= -\frac{9,8 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} - \frac{13,7 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,1}{2} - \frac{3,43 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,06}{2} = -196 \cdot 10^6 \text{ Па} = -196 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

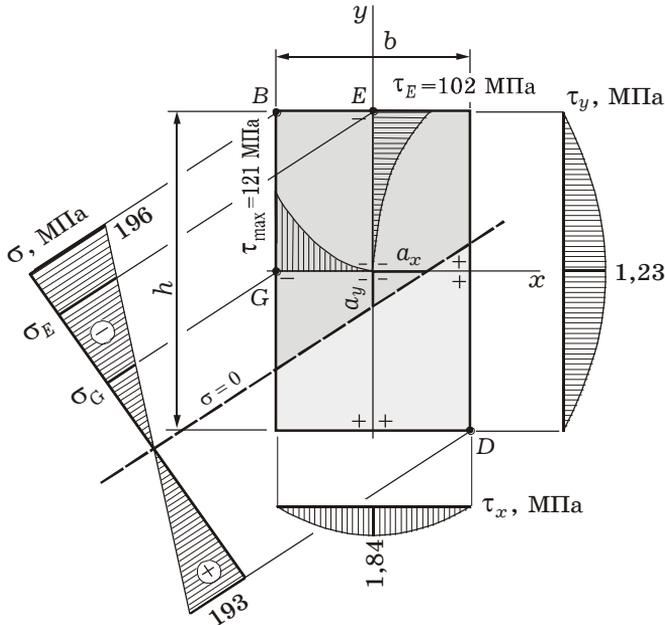


Рисунок 8.14

Касательные напряжения от изгиба определяем с помощью формулы Журавского:

$$\begin{aligned}\tau_y &= \frac{Q_y S_x^*}{J_x b} = \frac{4,9 \cdot 10^3 \cdot 7,5 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-8} \cdot 0,06} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,23 \text{ МПа}; \\ \tau_x &= \frac{Q_x S_y^*}{J_y h} = \frac{7,35 \cdot 10^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1} = 1,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,84 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Наибольшие касательные напряжения от кручения достигаются в точках G и E :

$$\tau_G = \frac{M_z}{W_t} = \frac{10,3 \cdot 10^3}{85 \cdot 10^{-6}} = 121 \cdot 10^6 \text{ Па} = 121 \text{ МПа};$$

$$\tau_E = \eta \tau_G = 0,84 \cdot 121 = 102 \text{ МПа}.$$

Эпюры касательных напряжений строим справа, внизу и внутри сечения, эпюры нормальных напряжений – на нулевой линии.

Проверку прочности бруса проведем, сравнивая максимальное из напряжений в трех точках с расчетным сопротивлением:

$$\max(|\sigma_B|, \sigma_{E \text{ red}}, \sigma_{G \text{ red}}) \leq R.$$

Эквивалентные напряжения вычисляем по третьей теории прочности. В точке B действуют максимальные по модулю нормальные напряжения $|\sigma_{\min}| > \sigma_{\max}$, но касательные напряжения от кручения равны нулю. В точке G максимальны касательные напряжения от кручения $\tau = \tau_{\max}$, а нормальные меньше, чем в других двух точках. В точке E значения и нормальных, и касательных напряжений достаточно велики. Вычислим нормальные напряжения в точках $G(-b/2, 0)$ и $E(0, h/2)$:

$$\begin{aligned} \sigma_G &= \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot 0 + \frac{M_y}{J_y} \left(-\frac{b}{2} \right) = -\frac{9,8 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,43 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,06}{2} = \\ &= -58,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -58,8 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} + \frac{M_y}{J_y} \cdot 0 = -\frac{9,8 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^{-4}} - \frac{13,7 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{0,1}{2} = \\ &= -139 \cdot 10^6 \text{ Па} = -139 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эквивалентные напряжения в этих точках будут следующие:

$$\sigma_{G \text{ red}} = \sqrt{\sigma_G^2 + 4\tau_{\max}^2} = \sqrt{(-58,8)^2 + 4 \cdot 121^2} = 249 \cdot 10^6 \text{ Па} = 249 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{E \text{ red}} = \sqrt{\sigma_E^2 + 4\tau_E^2} = \sqrt{(-139)^2 + 4 \cdot 102^2} = 247 \cdot 10^6 \text{ Па} = 247 \text{ МПа}.$$

Таким образом, хотя наибольшие нормальные напряжения не превышают расчетного сопротивления $|\sigma_{\min}| = 196 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$, эквивалентные напряжения в обеих точках его превосходят. Следовательно, условие прочности по третьей теории для стержня не выполняется.

8.9 Изгиб с кручением стержней круглого сечения

Прочностной расчет валов, которые работают одновременно на изгиб и кручение, является одной из задач сложного сопротивления, наиболее часто встречающихся в инженерной практике. При совместном действии изгиба с кручением валы подвергаются ли-

нейной деформации, вызываемой изгибающими моментами, и угловой деформации, создаваемой крутящими моментами. В дальнейшем будет показано (см. разд. 12), что при расчете валов необходимо также учитывать цикличность нормальных напряжений, так как при вращении вала, работающего на изгиб, продольные волокна последовательно попадают то в растянутую, то в сжатую зону. В таких условиях характеристики прочности используемого материала значительно снижаются. Излагаемый приближенный расчет валов на изгиб и кручение ведется условно, как при статической нагрузке, цикличность же напряжений учитывается применением повышенного запаса прочности.

При выполнении *расчета вала на прочность* нужно установить его опасное сечение. Для этого необходимо построить:

- эпюры изгибающих моментов M_x и M_y в двух взаимно перпендикулярных плоскостях;
- эпюру суммарных изгибающих моментов M , величины которых определяются по формуле

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; \quad (8.7)$$

- эпюру крутящих моментов M_z ;
- эпюру эквивалентных (расчетных) моментов M_{red} , величины которых определяются по соответствующим формулам в зависимости от выбранной теории прочности.

Построение эпюр Q_x и Q_y для вала можно не производить, так как касательные напряжения от поперечных сил невелики и их обычно в расчете длинных валов не учитывают. В коротких валах учет касательных напряжений от поперечных сил необходим.

Опасным сечением вала является то, для которого эквивалентный момент M_{red} будет наибольшим. Так как любая ось круглого поперечного сечения вала является главной, то положение опасной точки сечения можно определить графически следующим образом. Построив в некотором масштабе величины M_x и M_y как векторы, найдем суммарный изгибающий момент M как векторную сумму (рисунок 8.15).

Плоскость действия момента M будет нормальна к направлению вектора (след плоскости $A-B$), а нейтральной линией будет прямая $I-I$. Точки A и B сечения будут наиболее опасными, так как они являются наиболее удаленными от нейтральной линии.

В опасных точках возникают

- наибольшие суммарные напряжения от изгибающего момента M

$$\sigma = \frac{M}{W_x}; \quad (8.8)$$

- наибольшие касательные напряжения от крутящего момента M_z

$$\tau = \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{2W_x}, \quad (8.9)$$

где W_p , W_x – полярный и осевой моменты сопротивления ($W_p = 2W_x$).

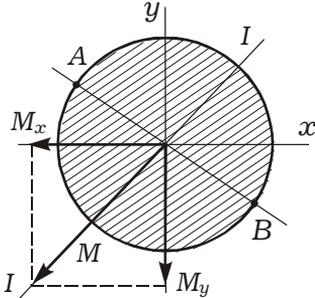


Рисунок 8.15

Выделяя около опасной точки А элементарный объем, на гранях которого будут действовать напряжения, получим плоское напряженное состояние (рисунок 8.16).

По третьей теории прочности *условие прочности* при изгибе с кручением (см. подразд. 8.4) в опасной точке А принимает вид

$$\sigma_{red}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставляя сюда значения напряжений (8.8), (8.9), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{red}^{III} &= \sqrt{\left(\frac{M}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{2W_x}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{M^2 + M_z^2}{W_x^2}} = \frac{\sqrt{M^2 + M_z^2}}{W_x}. \end{aligned}$$

Величину

$$M_{red}^{III} = \sqrt{M^2 + M_z^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (8.10)$$

называют *эквивалентным моментом* по третьей теории прочности.

В окончательном виде условие прочности по третьей теории

$$\sigma_{red}^{III} = \frac{M_{red}^{III}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (8.11)$$

Расчетные формулы по другим теориям прочности также приводятся к подобному виду. Например, проведя аналогичные выкладки для эквивалентных напряжений по четвертой теории (см. подразд. 8.5), получим эквивалентный момент

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75M_z^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}. \quad (8.12)$$

Условие прочности аналогично (8.11) с учетом (8.12).

Таким образом, расчет бруса круглого поперечного сечения на изгиб с кручением по форме совпадает с расчетом на прямой изгиб, если вместо изгибающего использовать эквивалентный момент, величина которого зависит от принятой теории прочности.

☑ **ПРИМЕР 8.1.** Подбор диаметра вала привода вспомогательного оборудования тепловоза. Шкив отбора мощности на привод компрессора и вентилятора охлаждения диаметром $D_1 = 0,6$ м, имеющий угол наклона ветвей ремня к горизонту $\varphi_1 = 30^\circ$, вращается со скоростью $n = 100$ об/мин и передает мощность $N_0 = 22080$ Вт. Два других шкива раздачи мощности имеют одинаковый диаметр $D_2 = D_3 = 0,35$ м, углы наклона ветвей ремня к горизонту $\varphi_2 = 25^\circ$, каждый из них передает мощность $N_0/2 = 11040$ Вт (рисунок 8.17). Модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па. Длина вала $l = 0,5$ м.

Требуется:

1) по заданным величинам N_0 и n определить крутящие моменты M_z , приложенные к шкивам;

2) построить для вала эпюру внутренних крутящих моментов;

3) определить окружные усилия t_1 и t_2 , действующие на шкивы, и нагрузку от шкивов на вал;

4) найти силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях;

5) построить эпюры внутренних изгибающих моментов M_x и M_y от горизонтальных и вертикальных сил;

6) построить эпюру суммарных изгибающих моментов M ;

7) по эпюрам M_z и M определить положение опасного сечения;

8) определить требуемый стандартный диаметр стального вала из условий прочности и жесткости, если $[\sigma] = 160$ МПа, $[\theta] = 1$ °/м.

Так как мощность при вращении вала $N_0 = M_z \omega$, то величины крутящих моментов определяем по формуле

$$M_z = \frac{N_0}{\omega} = \frac{N_0}{2\pi n/60} = \frac{30N_0}{\pi n}.$$

Для шкива 1 (рисунок 8.18, а)

$$M_{z1} = \frac{30 \cdot 22080}{3,14 \cdot 100} = 2110 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

для шкивов 2 и 3

$$M_{z2} = M_{z3} = \frac{M_{z1}}{2} = \frac{30 \cdot 22080}{2 \cdot 3,14 \cdot 100} = 1055 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов представлена на рисунке 8.18, д.

Крутящий момент можно представить в виде

$$M_z = (T - t)D/2,$$

где T и t – окружные усилия, действующие на шкив; D – его диаметр.

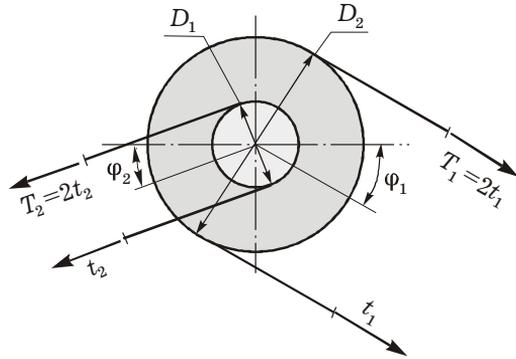


Рисунок 8.17

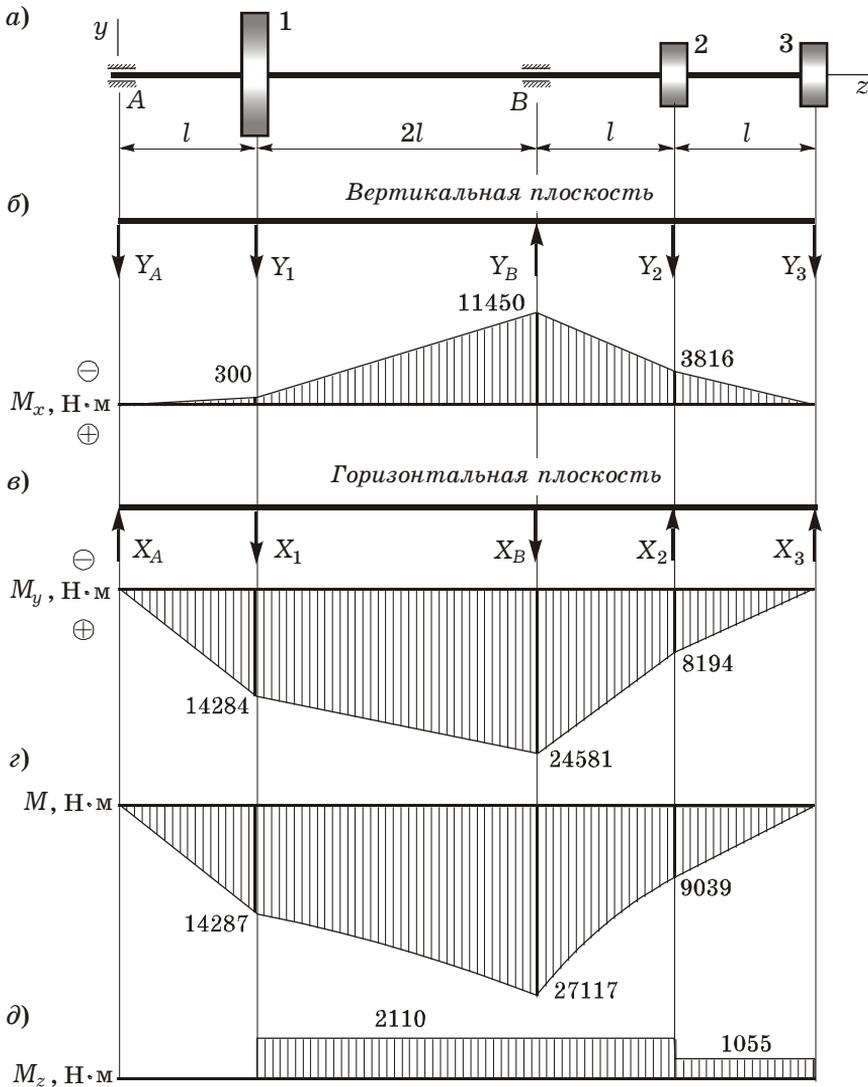


Рисунок 8.18

Для шкива 1 получаем

$$M_{z1} = (2t_1 - t_1)D_1/2, \text{ откуда } t_1 = 2M_{z1}/D_1 = \frac{2 \cdot 2110}{0,6} = 7033 \text{ Н,}$$

для шкивов 2 и 3

$$M_{z2} = M_{z3} = (2t_2 - t_2)D_2/2, \text{ откуда } t_2 = 2M_{z2}/D_2 = \frac{2 \cdot 1055}{0,35} = 6029 \text{ Н.}$$

Силы, действующие на шкивы,

$$R_1 = T_1 + t_1 = 2t_1 + t_1 = 3t_1 = 3 \cdot 7033 = 21099 \text{ Н,}$$

$$R_2 = R_3 = T_2 + t_2 = 2t_2 + t_2 = 3t_2 = 3 \cdot 6029 = 18087 \text{ Н.}$$

Их проекции на оси координат:

$$X_1 = R_1 \cos \varphi_1 = 21099 \cdot 0,866 = 18272 \text{ Н,}$$

$$Y_1 = R_1 \sin \varphi_1 = 21099 \cdot 0,5 = 10550 \text{ Н,}$$

$$X_2 = X_3 = R_2 \cos \varphi_2 = 18087 \cdot 0,906 = 16387 \text{ Н,}$$

$$Y_2 = Y_3 = R_2 \sin \varphi_2 = 18087 \cdot 0,422 = 7633 \text{ Н.}$$

Построим эпюру изгибающих моментов от сил, действующих в вертикальной (Oyz) и горизонтальной (Oxz) плоскостях.

В вертикальной плоскости определяем реакции, составляя уравнения равновесия моментов сил относительно точек А и В:

$$\sum M_A = 0; \quad Y_1 l - Y_B \cdot 3l + Y_2 \cdot 4l + Y_3 \cdot 5l = 0,$$

$$Y_B = \frac{Y_1 + 4Y_2 + 5Y_3}{3} = \frac{10550 + 4 \cdot 7633 + 5 \cdot 7633}{3} = 26416 \text{ Н;}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -Y_A \cdot 3l - Y_1 \cdot 2l + Y_2 l + Y_3 \cdot 2l = 0,$$

$$Y_A = \frac{-2Y_1 + Y_2 + 2Y_3}{3} = \frac{-2 \cdot 10550 + 7633 + 2 \cdot 7633}{3} = 600 \text{ Н.}$$

Эпюра M_x показана на рисунке 8.18, б.

В горизонтальной плоскости:

$$\sum M_A = 0; \quad X_1 l + X_B \cdot 3l - X_2 \cdot 4l - X_3 \cdot 5l = 0,$$

$$X_B = \frac{-X_1 + 4X_2 + 5X_3}{3} = \frac{-18272 + 4 \cdot 16387 + 5 \cdot 16387}{3} = 43070 \text{ Н.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad X_A \cdot 3l - X_1 \cdot 2l - X_2 l - X_3 \cdot 2l = 0,$$

$$X_A = \frac{2X_1 + X_2 + 2X_3}{3} = \frac{2 \cdot 18272 + 16387 + 2 \cdot 16387}{3} = 28568 \text{ Н.}$$

Эпюра показана на рисунке 8.18, в.

По построенным эпюрам определяем суммарный (полный) изгибающий момент по формуле (8.10):

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Вычисляем на опорах вала и в точках приложения сил значения полного момента:

$$M_1 = \sqrt{M_{x1}^2 + M_{y1}^2} = \sqrt{(-300)^2 + 14284^2} = 14287 \text{ Н}\cdot\text{м,}$$

$$M_B = \sqrt{M_{xB}^2 + M_{yB}^2} = \sqrt{(-11450)^2 + 24581^2} = 27117 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_2 = \sqrt{M_{x2}^2 + M_{y2}^2} = \sqrt{(-3816)^2 + 8194^2} = 9039 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Эпюра M показана на рисунке 8.18, z .

Эпюра суммарных моментов M характеризует лишь их величину в каждом сечении вала, т. к. плоскости действия этих моментов в разных сечениях различны. Поэтому для удобства зрительного восприятия ординаты эпюры условно для всех сечений совмещены с плоскостью чертежа.

Следует отметить, что на тех участках вала, на которых прямые, ограничивающие эпюры M_x и M_y , пересекают оси эпюр в точках, расположенных на одной вертикали, эпюра M ограничена прямыми (участки А-1 и 2-3), а на остальных она ограничена кривыми (участки 1-В и В-2).

Опасное сечение вала устанавливаем с помощью эпюр полных изгибающих M и крутящих моментов M_z . Если в сечении бруса постоянного диаметра с наибольшим изгибающим моментом M действует и наибольший крутящий момент M_z , то это сечение является опасным. В частности, у рассматриваемого вала таким является сечение на опоре В.

В случаях, когда опасное сечение нельзя установить непосредственно по эпюрам M и M_z , необходимо проверять прочность бруса в нескольких его сечениях и таким путем устанавливать опасные напряжения.

Из условий прочности и жесткости найдем необходимый диаметр сечения вала.

Согласно четвертой теории прочности (8.12)

$$M_{red}^{IV} = \sqrt{M_B^2 + 0,75M_{zB}^2} = \sqrt{27117^2 + 0,75 \cdot 2110^2} = 27178 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Так как $W_x = \pi d^3/32$ и

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{M_{red}^{IV}}{W_x} \leq [\sigma], \quad \text{то} \quad \frac{32M_{red}^{IV}}{\pi d^3} \leq [\sigma].$$

Отсюда получим искомый диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 27178}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,12 \text{ м}.$$

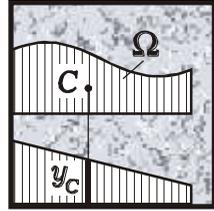
Из условия жесткости при кручении с учетом момента инерции (3.22) искомый диаметр должен быть не меньше, чем

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M_z}{\pi G [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2110}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0174}} = 0,0627 \text{ м}.$$

Таким образом, за искомый диаметр, отвечающий одновременно условиям прочности и жесткости, принимаем $d = 120$ мм.

9

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ¹⁾



Ранее определялись перемещения прямолинейного стержня при простых видах деформирования (растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб). Рассмотрим общий случай нагружения, когда в поперечных сечениях возникают продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты одновременно. Будем считать, что стержень может быть не только прямым, но и иметь малую кривизну, а также состоять из нескольких прямолинейных участков, образуя плоскую или пространственную систему.

Как известно, перемещения могут быть линейными и угловыми. Их нахождение необходимо, во-первых, для оценки жесткости конструкции, во-вторых, при расчетах статически неопределимых систем и в задачах динамики, например, при определении динамических коэффициентов (см. подразд. 11.1).

9.1 Потенциальная энергия стержневой системы

Наиболее общий метод определения перемещений в упругих конструкциях основан на применении энергетических принципов.

Рассмотрим некоторую стержневую систему (рисунок 9.1, а). Будем считать, что нагрузка к ее элементам прикладывается *статически*, т. е. возрастает весьма медленно, и возникающими ускорениями можно пренебречь. Деформации и напряжения в системе успевают следовать за ростом нагрузки. В каждый момент времени конструкция будет находиться в равновесии под действием внешних сил и реакций связей.

Выделим из системы элементарный участок длиной dz (рисунок 9.1, б). В каждом из его поперечных сечений в общем случае нагружения возникают шесть внутренних силовых факторов: три силы и три момента. По отношению к выделенному элементарному участку эти силовые факторы являются внешними. Работа, которая совершается ими при деформировании элемента, затрачивается на накопление потенциальной энергии. Левое сечение элемента условно будем считать неподвижным. Следовательно, работа всех силовых факторов, приложенных к левому торцу, равна нулю.

¹⁾ Этот раздел написан А. В. Яровой.

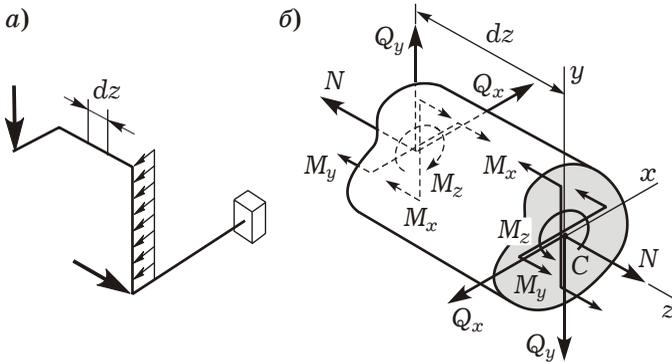


Рисунок 9.1

Точка C приведения сил в правом сечении получает некоторые малые перемещения за счет деформаций удлинения, сдвига, кручения и изгиба.

Выбор осей координат. Очень важно, что каждому из шести силовых факторов соответствуют такие перемещения, на которых ни один из остальных пяти не совершает работы. Например, продольное перемещение (удлинение) возникает в результате действия продольной силы N , и только эта сила совершает работу на этом перемещении.

Следовательно, потенциальная энергия элемента может рассматриваться как сумма независимых энергий растяжения, сдвига, кручения и изгиба:

$$dU = dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y) + dU(M_z) + dU(M_x) + dU(M_y). \quad (9.1)$$

Такое разделение возможно только при определенном выборе осей координат. Точка C приведения сил должна совпадать с центром тяжести сечения. Оси x, y должны быть главными.

Замечание. Для стержней большой кривизны при действии продольных сил возникает и взаимный поворот сечений, а при действии изгибающих моментов – и удлинение элемента. Поэтому полную энергию в этом случае нельзя определять простым суммированием.

Потенциальная энергия растяжения, кручения и изгиба. Мы знаем, что при статическом растяжении (см. подразд. 2.6), кручении (см. подразд. 3.5) и чистом изгибе (см. подразд. 5.4) соответственно величина потенциальной энергии стержня длиной l

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}, \quad U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}, \quad U = \frac{M_x^2 l}{2EJ_x}.$$

Тогда для элемента длиной dz

$$dU(N) = \frac{N^2 dz}{2EA}, \quad dU(M_z) = \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p},$$

$$dU(M_x) = \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x}, \quad dU(M_y) = \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y},$$

т. е. выражения для четырех слагаемых в (9.1) известны.

Вычисление потенциальной энергии сдвига. Определим теперь энергию сдвига $dU(Q_x)$ и $dU(Q_y)$.

Рассмотрим элемент длиной dz , к торцам которого приложены только поперечные силы Q_y (рисунок 9.2). Эти силы вызовут взаимный сдвиг сечений на величину $\gamma_y dz$. Поперечная сила в сечении является статическим эквивалентом касательных напряжений τ_y . Если бы они были распределены равномерно по площади сечения A , то вычислялись бы так, как при чистом сдвиге:

$$\tau_y = Q_y/A.$$

Но при изгибе значение τ_y по высоте сечения меняется, поэтому будем считать, что

$$\tau_y = \eta_y Q_y/A,$$

где η_y – некоторый безразмерный коэффициент.

По закону Гука при сдвиге

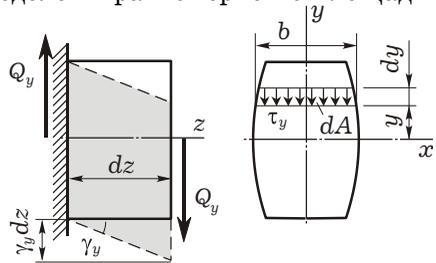


Рисунок 9.2

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G} = \frac{\eta_y Q_y}{GA}.$$

Тогда потенциальная энергия

$$dU(Q_y) = \frac{1}{2} Q_y \gamma_y dz = \frac{\eta_y Q_y^2 dz}{2GA}.$$

Выясним смысл коэффициента η_y . Выразим энергию сдвига $dU(Q_y)$ через работу касательных напряжений $dW(\tau_y)$. В поперечном сечении на расстоянии y от главной центральной оси x выделим площадку $dA = b dy$ (см. рисунок 9.2). Элементарная сила $\tau_y dA$ на перемещении $\gamma_y dz$ совершает работу $0,5(\tau_y dA)(\gamma_y dz)$. Интегрируя это выражение в пределах всего поперечного сечения и учитывая, что $\gamma_y = \tau_y/G$, получим элементарную работу касательных напряжений:

$$dW(\tau_y) = \frac{1}{2} \int_A \tau_y \gamma_y dz dA = \frac{dz}{2G} \int_A \tau_y^2 dA.$$

По формуле Журавского при изгибе

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b}.$$

С учетом этого

$$dW(\tau_y) = \frac{dz}{2G} \int_A \left(\frac{Q_y S_x^*}{J_x b} \right)^2 dA = \frac{Q_y^2 dz}{2GA} \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} dA = \eta_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA},$$

где безразмерный коэффициент

$$\eta_y = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} dA$$

учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе в вертикальной плоскости. Он зависит только от формы сечения. Например, для круга $\eta_y = 32/27$; для прямоугольника $\eta_y = 1,2$; для прокатных двутавров $\eta_y \approx A/A_w$, где A – полная площадь сечения двутавра; A_w – площадь вертикальной стенки.

Потенциальная энергия сдвига $dU(Q_y)$ и по аналогии $dU(Q_x)$

$$dU(Q_y) = dW(\tau_y) = \eta_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA}, \quad dU(Q_x) = \eta_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA}.$$

Безразмерный коэффициент η_x учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе в горизонтальной плоскости. Он может быть найден аналогично η_y .

Потенциальная энергия всего стержня. Соотношение (9.1) принимает вид

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EA} + \eta_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \eta_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} + \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y}.$$

Чтобы получить потенциальную энергию всего стержня, необходимо проинтегрировать это выражение по всей длине l :

$$U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA} + \int_l \eta_x \frac{Q_x^2 dz}{2GA} + \int_l \eta_y \frac{Q_y^2 dz}{2GA} + \int_l \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} + \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y}. \quad (9.2)$$

В выражении (9.2) не всегда все слагаемые являются равноценными. Для большинства встречающихся в практике стержневых систем, элементы которых работают на изгиб или кручение, три последних слагаемых значительно превосходят первые три. Другими словами, энергия изгиба и кручения значительно больше, чем энергия растяжения-сжатия и сдвига. Однако возможны такие случаи нагружения, в которых все шесть слагаемых соизмеримы по величине и должны обязательно учитываться.

9.2 Теорема Кастилиано

Потенциальную энергию деформации можно использовать для вычисления перемещений в стержнях. В основу может быть положена теорема Кастилиано: *частная производная от потенциальной энергии по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.*

Под перемещением в заданном направлении условимся понимать проекцию полного перемещения на это направление. Потому перемещение точки приложения силы по направлению силы – это проекция полного перемещения точки на направление силы.

Рассмотрим упругое тело, нагруженное силами F_1, F_2, \dots, F_n (рисунок 9.3) и закрепленное так, что исключены его смещения как жесткого целого. Пусть потенциальная энергия деформации, накопленная в объеме тела в результате работы внешних сил, равна U .

Дадим одной из сил, например, F_i , приращение dF_i . Тогда потенциальная энергия изменится и станет равной

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i. \quad (9.3)$$

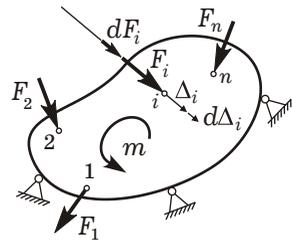


Рисунок 9.3

Давая силе F_i приращение, мы по существу сначала нагружаем тело силами F_1, F_2, \dots, F_n , а потом силой dF_i . Теперь изменим порядок нагружения. Приложим сначала силу dF_i . При этом в точке ее приложения в направлении этой силы появится малое перемещение $d\Delta_i$. На нем сила dF_i совершит работу $0,5dF_i d\Delta_i$. Приложим затем к телу все силы F_1, F_2, \dots, F_n . При отсутствии силы dF_i потенциальная энергия системы приняла бы значение U . Но теперь эта энергия изменится на величину дополнительной работы $dF_i \Delta_i$, которую совершит сила dF_i на перемещении Δ_i , вызванном всей системой внешних сил. Величина Δ_i представляет собой проекцию полного перемещения на направление силы F_i . Перед произведением $dF_i \Delta_i$ множитель 0,5 не ставится, т. к. на пути Δ_i сила dF_i остается неизменной.

В результате при обратной последовательности приложения сил выражение потенциальной энергии получим в виде

$$U + dF_i \Delta_i + 0,5dF_i d\Delta_i. \quad (9.4)$$

Приравнявая выражения (9.3) и (9.4) и отбрасывая произведение $0,5 dF_i d\Delta_i$ как величину высшего порядка малости, получаем

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}. \quad (9.5)$$

Следовательно, дифференцируя потенциальную энергию по одной из внешних сил, получим перемещение точки приложения этой силы по направлению этой силы.

В выражении (9.5) силу F_i можно трактовать как обобщенную силу, т. е. как некоторый силовой фактор. Тогда величина Δ_i должна рассматриваться как *обобщенное перемещение*, т. е. как некоторый геометрический параметр, на котором сила F_i совершает работу. Например, если под «силой» понимать внешний момент m (см. рисунок 9.3), то Δ_i представляет собой угловое перемещение в точке приложения момента по направлению момента.

Анализируя вывод теоремы Кастилиано, замечаем, что для ее выполнения достаточно соблюдения двух условий.

1 Деформированное состояние тела должно однозначно определяться действующими на него нагрузками, тогда потенциальная энергия деформации тела, представленная как функция этих нагрузок, будет однозначной функцией этих нагрузок.

2 Работа внешних сил при переходе из недеформированного состояния в деформированное не должна зависеть от порядка приложения этих сил.

Оба этих условия выполняются, если тело линейно-упругое, деформаций малые и внешние силы *консервативны*, т. е. их работа не зависит от пути перехода системы из одного положения в другое, а вполне определяется ее начальным и конечным состояниями. Таковыми являются силы упругости, гравитации, центробежные, силы электростатического взаимодействия. Внутренние силы при упругопластическом деформировании тела, силы трения не являются консервативными. Их работа существенно зависит от условий и пути перехода системы из одного состояния в другое.

9.3 Интеграл Мора

Вычисление перемещений с помощью теоремы Кастилиано обладает тем очевидным недостатком, что дает возможность определить перемещения только точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил. На практике возникает необходимость искать перемещения любых точек системы в любых направлениях.

Выход из указанного затруднения оказывается довольно простым. Если требуется найти перемещение в точке, где не приложены внешние силы, необходимо *приложить* в этой точке внешнюю силу P в интересующем нас направлении. Далее составляем выражение потенциальной энергии системы с учетом этой силы. Дифференцируя его по P , находим перемещение по направлению приложенной силы P . Теперь необходимо «вспомнить», что на самом деле силы P нет, и положить ее равной нулю.

Определим, например, вертикальное перемещение точки A некоторой стержневой системы (рисунок 9.4). Обозначим внутренние усилия, возникающие в сечениях системы под действием заданных нагрузок, через $N_F, Q_{xF}, Q_{yF}, M_{zF}, M_{xF}, M_{yF}$.

Приложим в точке A вертикальную силу P . В каждом сечении системы внутренние силовые факторы изменятся на величины, зависящие от силы P . Так, крутящий момент в некотором сечении будет иметь вид

$$M_z = M_{zF} + M_{zP},$$

где второе слагаемое представляет собой дополнительный момент, который появляется в результате приложения силы P . Понятно, что M_{zF} и M_{zP} изменяются по длине стержня, т. е. являются функциями z . Аналогично появятся дополнительные слагаемые и у остальных пяти внутренних силовых факторов.

Дополнительные силовые факторы $N_P, Q_{xP}, Q_{yP}, M_{zP}, M_{xP}, M_{yP}$ пропорциональны силе P . Если силу P , например, увеличить в два раза, то удвоятся и дополнительные слагаемые. Поэтому

$$N = N_F + \bar{N}P, \quad Q_x = Q_{xF} + \bar{Q}_xP, \quad Q_y = Q_{yF} + \bar{Q}_yP,$$

$$M_z = M_{zF} + \bar{M}_zP, \quad M_x = M_{xF} + \bar{M}_xP, \quad M_y = M_{yF} + \bar{M}_yP, \quad (9.6)$$

где $\bar{N}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ — некоторые коэффициенты пропорциональности, переменные по длине стержня.

Если снять систему внешних нагрузок и заменить силу P единичной силой, то

$$N = \bar{N}, \quad Q_x = \bar{Q}_x, \quad Q_y = \bar{Q}_y, \quad M_z = \bar{M}_z, \quad M_x = \bar{M}_x, \quad M_y = \bar{M}_y.$$

Следовательно, $\bar{N}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ представляют собой внутренние силовые факторы, возникающие в некотором поперечном сечении стержня под действием единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке в заданном направлении.

Вернемся к выражению энергии (9.2) и заменим в нем внутренние силовые факторы их значениями (9.6). Получим

$$U = \int_l \frac{(N_F + \bar{N}P)^2}{2EA} dz + \int_l \frac{\eta_x (Q_{xF} + \bar{Q}_xP)^2}{2GA} dz + \int_l \frac{\eta_y (Q_{yF} + \bar{Q}_yP)^2}{2GA} dz +$$

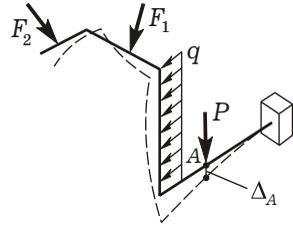


Рисунок 9.4

$$+ \int_l \frac{(M_{zF} + \overline{M}_z P)^2}{2GJ_p} dz + \int_l \frac{(M_{xF} + \overline{M}_x P)^2}{2EJ_x} dz + \int_l \frac{(M_{yF} + \overline{M}_y P)^2}{2EJ_y} dz.$$

Дифференцируя это выражение по P и полагая после этого $P = 0$, находим перемещение точки A :

$$\Delta_A = \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_{P=0} = \int_l \frac{N_F \overline{N}}{EA} dz + \int_l \frac{\eta_x Q_{xF} \overline{Q}_x}{GA} dz + \int_l \frac{\eta_y Q_{yF} \overline{Q}_y}{GA} dz + \\ + \int_l \frac{M_{zF} \overline{M}_z}{GJ_p} dz + \int_l \frac{M_{xF} \overline{M}_x}{EJ_x} dz + \int_l \frac{M_{yF} \overline{M}_y}{EJ_y} dz. \quad (9.7)$$

Полученные интегралы носят название *интегралов Мора*¹⁾. Здесь EA , GA , GJ_p , EJ_x , EJ_y – жесткости при растяжении-сжатии, сдвиге, кручении и изгибе соответственно.

Формула Мора (9.7) в случае *плоской задачи* (для плоской стержневой системы) будет содержать три внутренних силовых фактора (продольную и поперечную силы, а также изгибающий момент):

$$\Delta_A = \int_l \frac{N_F \overline{N}}{EA} dz + \int_l \frac{\eta_y Q_{yF} \overline{Q}_y}{GA} dz + \int_l \frac{M_{xF} \overline{M}_x}{EJ_x} dz. \quad (9.8)$$

Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора (9.7):

- необходимо найти аналитические выражения внутренних усилий на отдельных участках системы от заданной нагрузки;
- по направлению искомого перемещения следует приложить единичный силовой фактор (при определении линейных перемещений – сосредоточенную силу, угловых – сосредоточенный момент);
- нужно найти аналитические выражения внутренних усилий в сечениях отдельных участков системы от единичного усилия;
- подставив найденные выражения усилий в формулу Мора, следует определить искомое перемещение интегрированием по отдельным участкам системы и суммированием результатов.

Если найденное перемещение положительно, то оно совпадает с направлением приложенной единичной силы, если отрицательно – противоположно ему.

¹⁾ Подобная формула для ферм, учитывающая только продольные силы, впервые была выведена Дж. Максвеллом в 1864 г. из геометрических соображений. В наиболее общей форме она была получена О. Мором спустя 10 лет (1874) на основании принципа возможных перемещений.

Определение перемещений при плоском изгибе. При изгибе балок и плоских рам основное влияние на перемещения имеют изгибающие моменты. Обозначим: l – длина элемента, h – высота поперечного сечения. Возможны следующие случаи:

- если $l/h > 8$, то в формуле Мора (9.8) допускается учитывать только изгибающие моменты:

$$\Delta = \int_l \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EJ_x} dz; \quad (9.9)$$

- если $5 \leq l/h \leq 8$, то необходимо учесть и поперечные силы;
- если $l/h < 5$, то применение интеграла Мора дает большие погрешности в расчетах, поэтому перемещения следует определять методами теории упругости.

☑ **ПРИМЕР 9.1.** Для балки постоянной жесткости EJ_x , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рисунок 9.5), требуется определить вертикальное перемещение Δ_A точки A .

Найдем выражение изгибающего момента в произвольном сечении с координатой z от заданной внешней нагрузки:

$$M_{xF} = -qz^2/2.$$

Приложим по направлению искомого перемещения единичную силу и найдем выражение момента:

$$\bar{M}_x = -1 \cdot z = -z.$$

По формуле Мора (9.9) при плоском изгибе получаем

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \int_0^l \frac{M_{xF} \bar{M}_x}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} \right) (-z) dz = \\ &= \frac{q}{2EJ_x} \int_0^l z^3 dz = \frac{q}{2EJ_x} \frac{z^4}{4} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{8EJ_x}. \end{aligned}$$

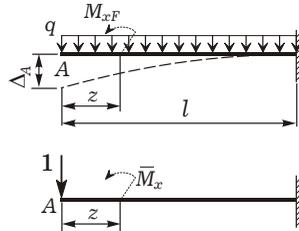


Рисунок 9.5

9.4 Техника вычисления интеграла Мора

Основным неудобством определения перемещений по формуле Мора является необходимость составления аналитического выражения подынтегральных функций. Это особенно сложно в стержневых системах, имеющих большое количество участков. Однако операции интегрирования можно избежать.

Формула Симпсона. В общем случае сложных эпюр для вычисления интеграла Мора удобно использовать одну из самых распространенных квадратурных формул – формулу Симпсона.

Напомним, что определенный интеграл от функции $f(z)$ можно приближенно вычислить по Симпсону следующим образом:

$$\int_a^b f(z) dz \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)].$$

Эта формула основана на *аппроксимировании* – замене подынтегральной функции квадратной параболой, проходящей через крайние и среднюю ординаты $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$.

Допустим, на участке длиной l необходимо вычислить интеграл от произведения двух функций ($f_1(z) \cdot f_2(z)$)

$$I = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz.$$

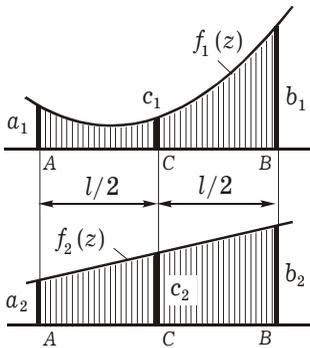


Рисунок 9.6

Обозначим через a_1 , b_1 , c_1 ординаты функции (эпюры) $f_1(z)$ в крайних (A, B) и средней (C) точках участка; через a_2 , b_2 , c_2 – аналогичные ординаты функции (эпюры) $f_2(z)$ (рисунок 9.6). Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz = \\ &= \frac{l}{6} (a_1 a_2 + 4c_1 c_2 + b_1 b_2). \end{aligned} \quad (9.10)$$

В частном случае, когда обе перемножаемые эпюры $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейные (рисунок 9.7), их средние ординаты

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}; \quad c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Подставим эти выражения в (9.10):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz = \\ &= \frac{l}{6} (2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_1 a_2). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Формула Симпсона для вычисления интегралов Мора на участках постоянной жесткости является *точной*, если обе функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ линейные или одна из них линейная, а вторая квадратичная.

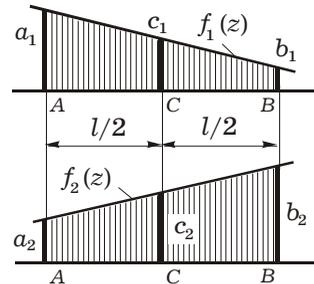


Рисунок 9.7

Способ (правило) Верещагина¹⁾. Допустим, на участке стержня длиной l необходимо вычислить интеграл от произведения двух функций ($f_1(z) \cdot f_2(z)$)

$$I = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz$$

при условии, что хотя бы одна из этих функций линейная.

Пусть $f_2(z) = b + kz$. Тогда искомым интеграл

$$I = b \int_0^l f_1(z) dz + \int_0^l f_1(z) z dz.$$

Первый из интегралов в правой части представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$ (рисунок 9.8), или иначе – площадь эпюры $f_1(z)$:

$$\int_0^l f_1(z) dz = \Omega.$$

Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси ординат, т. е.

$$\int_0^l f_1(z) z dz = \Omega z_C,$$

где z_C – координата центра тяжести первой эпюры.

Теперь получаем, что $I = \Omega(b + kz_C)$. Но $b + kz_C = f_2(z_C) = y_C$. Следовательно,

$$I = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz = \Omega y_C. \quad (9.12)$$

Таким образом, операция интегрирования заменяется перемножением площади первой эпюры на ординату второй (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести первой. Результат будет положительным, если центр тяжести одной из эпюр и ордината y_C расположены по одну сторону от оси стержня.

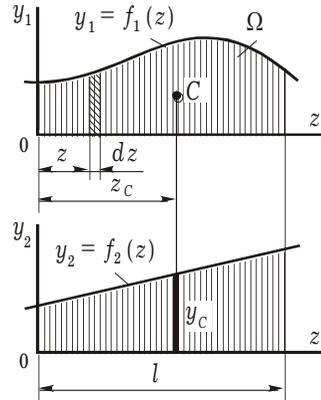


Рисунок 9.8

¹⁾ Верещагин Андрей Константинович (1896–1959) – отечественный ученый и изобретатель. Его имя широко известно, главным образом, в связи с наглядным способом вычисления интегралов – «перемножением эпюр». Верещагин внес большой вклад в развитие военной техники и считается основоположником отечественной школы минной электротехники.

Следует помнить, что ордината y_C должна быть обязательно взята из прямолинейной эпюры. Если обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейные, то операция перемножения обладает свойством *коммутативности*. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

Большинство встречающихся в практике эпюр могут быть разбиты на простейшие по форме фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник. Для них величина площади и положение центра тяжести известны (рисунок 9.9).



Рисунок 9.9

Применимость способов Симпсона и Верещагина.

В каждый из интегралов формулы Мора (9.7) или (9.8) входит произведение NN_F , QQ_F , $M_x M_{xF}$ и т. д. Рассмотренные способы применимы к любому из шести интегралов. Перемножение эпюр с использованием формул (9.10)–(9.12) производится одинаково, независимо от того, построены эти эпюры для изгибающих и крутящих моментов или продольных и поперечных сил. Разница заключается лишь в том, что при вычислении перемещений произведение эпюр делится на «свою» жесткость — EJ , GJ_p , EA и т. д.

Необходимым условием получения точного результата является *прямолинейность участков* и *постоянство их жесткости*. Для вычисления перемещений необходимо результаты перемножения эпюр по участкам системы разделить на жесткости участков, а результаты просуммировать.

✓ ПРИМЕР 9.2. Найти то же перемещение, что и в примере 9.1, используя правило Верещагина.

Построим эпюру изгибающих моментов M_{xF} от заданной внешней нагрузки. По направлению искомого перемещения приложим единичную силу и построим единичную эпюру \bar{M}_x (рисунок 9.10). Так как одна из эпюр прямолинейна, а балка имеет постоянную жесткость, то можно использовать правило Верещагина.

Найдем площадь эпюры M_{xF} , которая непрямолинейна и очерчена параболой:

$$\Omega = \frac{1}{3}l (ql^2/2) = ql^3/6.$$

Далее определим положение центра тяжести S эпюры M_{xF} и вычислим под ним ординату y_C прямолинейной эпюры \bar{M}_x : $y_C = 3l/4$.

По правилу Верещагина (9.11)

$$\Delta_A = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l \bar{M}_x M_{xF} dz =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \Omega y_C = \frac{1}{EJ_x} \frac{ql^3}{6} \frac{3l}{4} = \frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

Результат совпадает с полученным ранее (см. пример 9.1).

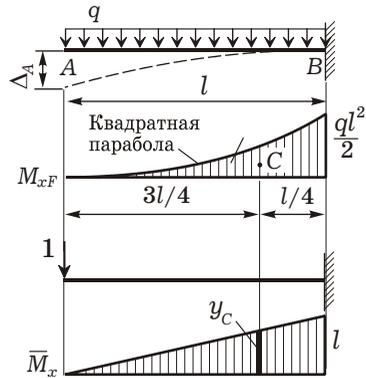


Рисунок 9.10

9.5 Теоремы о взаимности работ и перемещений

Теорема о взаимности работ. Эта теорема вытекает из принципа независимости действия сил и применима ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

Рассмотрим линейно-упругую деформацию тела, закрепленно-го так, что исключены его смещения как жесткого тела, под действием сил F_1, F_2 , приложенных в точках 1 и 2 (рисунок 9.11).

Перемещения точек тела будем обозначать символом Δ с двумя индексами. Первый индекс указывает место и направление перемещения, второй индекс – причину, вызвавшую это перемещение. Например, Δ_{12} – перемещение точки 1 по направлению силы F_1 от действия силы F_2 ; Δ_{11} – перемещение по направлению силы F_1 от действия этой же силы.

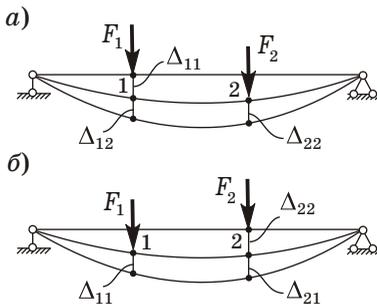


Рисунок 9.11

Пусть сначала тело нагружается силой F_1 (см. рисунок 9.11, а). Эта сила совершит при своем возрастании от нуля до конечного значения работу $\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}$. Далее приложим к телу силу F_2 . Она совершит работу $\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}$. Но по мере роста этой силы точка 1 также получит перемещение Δ_{12} , на котором сила F_1 произведет работу $F_1\Delta_{12}$. Всего в результате суммарного нагружения силы F_1 и F_2 совершат работу

$$\frac{1}{2}F_1\Delta_{11} + \frac{1}{2}F_2\Delta_{22} + F_1\Delta_{12}, \quad (9.13)$$

которая накопится в виде потенциальной энергии деформации.

Изменим порядок нагружения, т. е. приложим сначала силу F_2 , а потом F_1 (см. рисунок 9.11, б). Тогда они произведут работу

$$\frac{1}{2}F_2\Delta_{22} + \frac{1}{2}F_1\Delta_{11} + F_2\Delta_{21}, \quad (9.14)$$

которая также перейдет в потенциальную энергию деформации.

Так как при упругой деформации конечное напряженно-деформированное состояние не зависит от порядка приложения нагрузок, то выражения (9.13) и (9.14) для потенциальной энергии деформации тела в конечном состоянии должны быть равны. Сравнивая их, видим, что

$$F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21}. \quad (9.15)$$

Это равенство означает, что *работа первой силы на перемещении точки ее приложения, вызванном действием второй силы, равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы.*

Это утверждение и составляет содержание теоремы взаимности работ. Ее часто называют *теоремой Бетти*¹⁾.

Теорема приобретает большую общность, если учесть, что здесь, как и при выводе теоремы Кастилиано, под F_1 и F_2 можно понимать не просто силы, а обобщенные силы, а под Δ_{12} и Δ_{21} — обобщенные перемещения.

Теорема о взаимности перемещений. Если силы F_1 и F_2 равны по величине, то из (9.15) следует, что

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (9.16)$$

Это соотношение называют теоремой взаимности перемещений: перемещение точки 1, вызванное силой, приложенной в точке 2, равно перемещению точки 2 под действием такой же по величине силы, приложенной в точке 1. Напомним, что речь идет о перемещениях точек приложения сил по направлению этих сил.

9.6 Статическая неопределимость

Понятие о статически неопределимой системе было дано ранее (см. подразд. 1.7). Расчеты один раз статически неопределимых стержней при растяжении-сжатии были произведены в подразд. 2.5, 2.16 (см. примеры 2.4, 2.5). Недостающие уравнения

¹⁾ Эта теорема была доказана Д. Максвеллом в 1864 г. Но работа Максвелла осталась незамеченной, и Е. Бетти в 1872 г. сформулировал теорему взаимности работ независимо.

для определения неизвестных усилий составлялись исходя из рассмотрения системы в деформированном состоянии.

Для балок и рам, работающих на изгиб, подобный подход также возможен. Однако составление условий совместного деформирования элементов затруднительно. Поэтому были разработаны специальные методы для расчета таких систем, например, *метод сил* и *метод перемещений*. С их помощью можно сравнительно легко найти внутренние силовые факторы и деформации для наиболее распространенных конструкций.

Метод сил широко применяется для расчета разнообразных систем (статически неопределимых балок, рам, арок, ферм), является основой для создания многих приближенных методов. В последние годы для сложных конструкций создан ориентированный на использование компьютера метод конечных элементов. Этот метод изучается в курсе строительной механики. Он реализован в виде универсальных компьютерных программ, которые позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние сложных конструкций. Один из вариантов метода конечных элементов базируется на идеях метода сил.

Степень статической неопределимости. Все связи статически неопределимой системы можно разделить на *абсолютно необходимые* (связи, удаление которых из конструкции ведет к ее геометрической изменяемости) и *условно необходимые, лишние* (связи, после отбрасывания которых система остается геометрически неизменяемой и становится статически определимой).

Лишними могут быть как внешние, так и внутренние связи. В соответствии с этим различают *внешнюю и внутреннюю статическую неопределимость*. Количество лишних связей называется *степенью статической неопределимости* и обозначается n_c .

Например, неразрезная балка (рисунок 9.12, а) внешне статически неопределима. Она содержит пять опорных стержней, в то время как для ее закрепления достаточно трех. Следовательно, балка имеет два лишних опорных стержня, для нее $n_c = 2$. Если оставить только три стержня (не параллельных и не пересекающихся в одной точке) и удалить остальные, получится статически определимая система (рисунок 9.12, б). Действие отброшенных связей следует возместить реакциями V_1, V_2 .

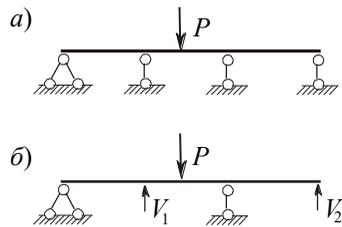


Рисунок 9.12

Рама, представляющая собой замкнутый жесткий контур с тремя опорными стержнями (рисунок 9.13, а), является внешне статически определимой, но внутренне статически неопредели-

мой. Она имеет лишние связи, введенные для взаимного соединения ее частей. После разрезания системы получится статически определяемая рама с консолями (рисунок 9.13, б). Связь элементов необходимо возместить тремя усилиями: M , Q , N . Для нее $n_c = 3$.

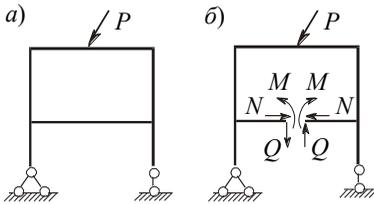


Рисунок 9.13

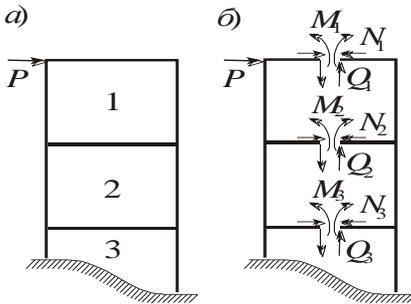


Рисунок 9.14

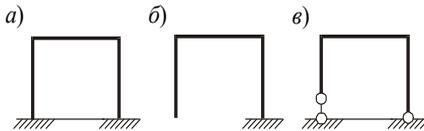


Рисунок 9.15

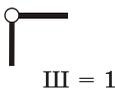
Если в системе присутствует K бесшарнирных замкнутых контуров, то лишних связей будет $3K$. Так, переходя от рамы, имеющей три бесшарнирных замкнутых контура (рисунок 9.14, а), к статически определяемой системе (рисунок 9.14, б), устанавливаем, что рама девять раз статически неопределима.

Для рамы, показанной на рисунке 9.15, а, $K = 1$, $n_c = 3$. Отбросив одну жесткую заделку (рисунок 9.15, б), получим статически определяемую систему с $K = 0$, $n_c = 0$.

Заменим в раме жесткие заделки на шарнирно подвижную и шарнирно неподвижную опоры, т. е. фактически введем три шарнира. Получим статически определяемую систему, у которой $n_c = 0$ (рисунок 9.15, в). Таким образом, введение одного простого шарнира в замкнутый бесшарнирный контур уменьшает степень статической неопределимости на единицу.

Простым называется шарнир, соединяющий два элемента стержневой системы (рисунок 9.16). Если шарнир соединяет три и более элемента, он называется *сложным (кратным)*. Кратный шарнир, соединяющий k стержней, эквивалентен $k - 1$ простым шарнирам. Кратные шарниры рассматриваются как соответствующее число простых шарниров.

Простой шарнир



Кратные шарниры

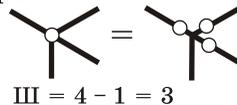
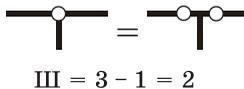


Рисунок 9.16

С учетом всего сказанного получим следующую формулу для вычисления степени статической неопределимости:

$$n_c = 3K - \text{III}, \quad (9.17)$$

где K – количество бесшарнирных замкнутых контуров;
 III – количество простых шарниров.

Задача расчета статически неопределимых систем состоит в следующем: заданы расчетная схема и нагрузки (воздействия); требуется найти внутренние усилия, а затем такие размеры по перечных сечений элементов, чтобы были обеспечены условия прочности и жесткости, а также некоторые другие требования (например, экономичность конструкции). В общей постановке указанная задача решения не имеет.

В расчетной практике часто ставится *более узкая задача*: заданы расчетная схема, нагрузки (воздействия) и предварительные размеры сечений элементов; требуется найти внутренние усилия и перемещения, сравнить с допускаемыми величинами (поверочный расчет). Если условия прочности или жесткости не выполняются или, наоборот, запас прочности слишком велик, расчет повторяют, уточнив размеры сечений элементов.

9.7 Расчет статически неопределимых систем методом сил

Суть этого метода заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины в дальнейшем подбираются так, чтобы перемещения системы соответствовали тем ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой. Она называется *основной системой*. Для каждой статически неопределимой заданной системы можно подобрать, как правило, различные основные системы, однако их должно объединять следующее условие: основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой (т. е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов). При этом неизменяемость должна быть обеспечена как для системы в целом, так и для отдельных ее частей.

Например, рама (рисунок 9.17, *a*) содержит два замкнутых контура ($K = 2$), три шарнира ($\text{III} = 3$), следовательно, по формуле (9.17) $n_c = 3 \cdot 2 - 3 = 3$, т. е. рама трижды статически неопределима. Отбросим три связи и заменим их действие неизвестными усилиями X_1 , X_2 , X_3 (реакциями отброшенных связей). Получим статически определимую основную систему метода сил.

Можно предложить несколько вариантов основной системы (рисунок 9.17, б-г). Все они статически определимы и геометрически неизменяемы.

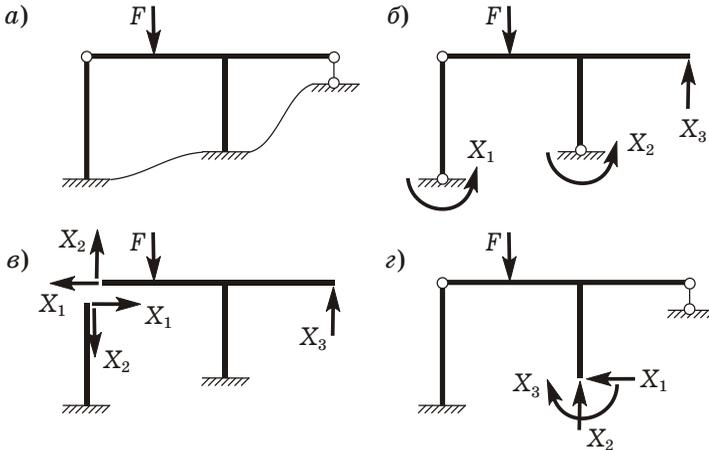


Рисунок 9.17

Принятая основная система будет работать так же, как и заданная (будет эквивалентна заданной), если на нее наложить условие отсутствия перемещений в тех сечениях, где в заданной системе находятся связи.

Рассмотрим раму, которая дважды статически неопределима (рисунок 9.18, а). Отбросим лишние связи и заменим их действие неизвестными усилиями X_1 и X_2 ; получим основную систему метода сил (рисунок 9.18, б).

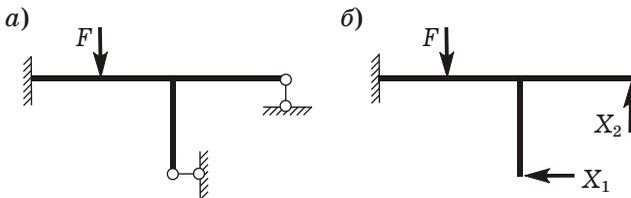


Рисунок 9.18

Перемещения в точках 1 и 2 (т. е. в тех местах, где в заданной системе стоят опоры) в направлении сил X_1 , X_2 отсутствуют, т. е.

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0. \quad (9.18)$$

Уравнения (9.18) есть не что иное, как уравнения совместности деформаций. При их выполнении фактически устанавливается условие эквивалентности между заданной и основной системами при действии внешних нагрузок и неизвестных усилий X_1 и X_2 .

На основании принципа независимости действия сил перемещения (9.18) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1F} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2F} = 0,\end{aligned}\quad (9.19)$$

где Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} , Δ_{1F} , Δ_{2F} — перемещения точек 1 и 2 в основной системе соответственно от действия сил X_1 , X_2 , F .

Введем обозначения

$$\delta_{11} = \frac{\Delta_{11}}{X_1}, \quad \delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{X_2}, \quad \delta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{X_1}, \quad \delta_{22} = \frac{\Delta_{22}}{X_2},$$

где δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} — перемещения точек 1 и 2 в основной системе соответственно от действия единичных сил, приложенных по направлениям X_1 , X_2 (или от сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$).

Что касается перемещений Δ_{1F} , Δ_{2F} , то под индексом F будем понимать не только внешнюю силу F , а вообще систему внешних сил, которая может быть произвольной. Поэтому величины Δ_{1F} , Δ_{2F} в (9.19) оставим неизменными.

Систему уравнений (9.19) можно записать в форме

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} &= 0.\end{aligned}\quad (9.20)$$

Уравнения (9.20) носят названия *канонических уравнений метода сил*, т. к. составлены по определенному закону (канону).

Для n раз статически неопределимой системы

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF} &= 0.\end{aligned}\quad (9.21)$$

Весьма существенно отметить, что в проделанном выводе совершенно не обуславливается то, каким образом возникают перемещения δ_{km} , Δ_{kF} ($k, m = 1, \dots, n$). Хотя мы и рассматриваем раму, работающую на изгиб, всё сказанное может быть отнесено к любой стержневой системе, работающей на кручение, растяжение и изгиб или на то, другое и третье совместно.

Для вычисления коэффициентов δ_{km} (единичных перемещений) и свободных членов Δ_{kF} (грузовых перемещений) канонических уравнений (9.20), (9.21) используют формулу Мора (9.7) в следующих модификациях:

$$\delta_{km} = \int_l \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} dz + \int_l \frac{\eta_x \bar{Q}_{xk} \bar{Q}_{xm}}{GA} dz + \int_l \frac{\eta_y \bar{Q}_{yk} \bar{Q}_{ym}}{GA} dz + \\ + \int_l \frac{\bar{M}_{zk} \bar{M}_{zm}}{GJ_p} dz + \int_l \frac{\bar{M}_{xk} \bar{M}_{xm}}{EJ_x} dz + \int_l \frac{\bar{M}_{yk} \bar{M}_{ym}}{EJ_y} dz, \quad (9.22)$$

$$\Delta_{kF} = \int_l \frac{\bar{N}_k N_F}{EA} dz + \int_l \frac{\eta_x \bar{Q}_{xk} Q_{xF}}{GA} dz + \int_l \frac{\eta_y \bar{Q}_{yk} Q_{yF}}{GA} dz + \int_l \frac{\bar{M}_{zk} M_{zF}}{GJ_p} dz + \\ + \int_l \frac{\bar{M}_{xk} M_{xF}}{EJ_x} dz + \int_l \frac{\bar{M}_{yk} M_{yF}}{EJ_y} dz \quad (k, m = 1, \dots, n), \quad (9.23)$$

где $\bar{N}_k, \bar{Q}_{xk}, \bar{Q}_{yk}, \bar{M}_{zk}, \bar{M}_{xk}, \bar{M}_{yk}$ – внутренние усилия в основной системе от единичного усилия, приложенного в направлении X_k (или усилия $X_k = 1$);

$N_F, Q_{xF}, Q_{yF}, M_{zF}, M_{xF}, M_{yF}$ – внутренние усилия в основной системе от заданной внешней нагрузки.

В рамках, как отмечалось ранее, при определении перемещений достаточно учитывать только изгиб. Поэтому вместо (9.22), (9.23) используют более простые формулы

$$\delta_{km} = \int_l \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EJ} dz, \quad \Delta_{kF} = \int_l \frac{\bar{M}_k M_F}{EJ} dz \quad (k, m = 1, \dots, n). \quad (9.24)$$

Из симметрии формул (9.24) следует, что $\delta_{km} = \delta_{mk}$. Это свойство парности коэффициентов при неизвестных метода сил также следует из теоремы о взаимности перемещений (9.16).

После решения системы канонических уравнений (9.21) определяются величины неизвестных усилий X_1 и X_2 . Если их значения получились отрицательными, это означает, что реально они действуют в направлении, противоположном принятому. Окончательные значения внутренних усилий определяются по зависимостям

$$N = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k X_k + N_F; \quad Q_x = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{xk} X_k + Q_{xF}; \\ Q_y = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{yk} X_k + Q_{yF}; \quad M_z = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{zk} X_k + M_{zF}; \\ M_x = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{xk} X_k + M_{xF}; \quad M_y = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{yk} X_k + M_{yF}.$$

Заметим, что для рам и балок, работающих на изгиб, поперечные силы могут быть найдены по значениям изгибающих моментов с использованием дифференциальных зависимостей

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad Q_x = \frac{dM_y}{dz}.$$

Продольные силы могут быть найдены по значениям поперечных сил. Для этого необходимо отсечь отдельные стержни или вырезать узлы рамы, составить уравнения проекций на оси координат, из которых выразить искомые усилия.

После определения внутренних усилий в элементах системы выполняется проверка их правильности.

☑ **ПРИМЕР 9.3.** Расчет плоской рамы методом сил. Для заданной расчетной схемы рамы (рисунок 9.19) требуется: построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнить необходимые проверки.

Исходные данные: нагрузки $F = 16$ кН, $q = 22$ кН/м; длины стержней $l = 5$ м, $h = 4$ м, коэффициент $k = 0,7$; $EJ = 10^7$ Н·м².

Степень статической неопределимости. Правую шарнирно-неподвижную опору рамы изобразим в виде шарнира (рисунок 9.20). Вычислим степень статической неопределимости:

$$n_c = 3K - \text{III} = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Здесь $K = 1$ – число замкнутых контуров, $\text{III} = 1$ – количество простых шарниров. Так как $n_c = 2$, то система два раза статически неопределима.

Выбор основной системы. Основная система метода сил – это статически определяемая система, полученная из заданной путем отбрасывания лишних связей.

Для того, чтобы основная и заданная системы были эквивалентными, к основной системе, кроме внешней нагрузки, прикладывают дополнительные усилия, представляющие собой реакции отброшенных связей.

Приведем три варианта основной системы (рисунок 9.21). Поясним каждый из них. *Вариант 1* предполагает отбрасывание шарнирно-неподвижной опоры. Получаем ломаный брус, заделанный левым концом, к которому дополнительно приложены две неизвестные сосредоточенные силы (X_1, X_2). *В варианте 2* жесткую заделку заменяем шарниром, а шарнирно-неподвижную опору – шарнирно-подвижной. При этом к системе прикладываем неизвестные силу X_1 и момент X_2 . *Вариант 3* получаем, заменяя заделку шарнирно-неподвижной опорой и вводя простой шарнир в узел рамы. В качестве неизвестных прикладываем сосредото-

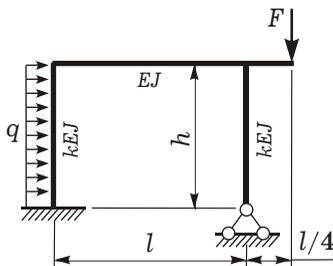


Рисунок 9.19

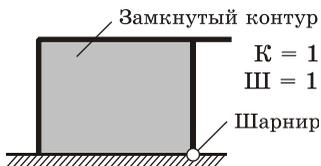


Рисунок 9.20

ченный момент X_1 , а также два равных и противоположно направленных момента X_2 . (Усилие X_2 имеет смысл внутреннего изгибающего момента, т. е. при составлении уравнений равновесия всей системы его суммарный момент будет равен нулю).

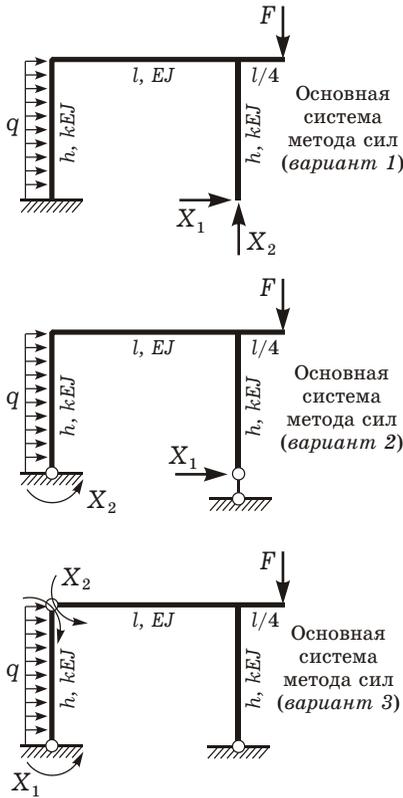


Рисунок 9.21

Мысленно разрежем раму по шарниру C . Составим уравнение равновесия моментов левой части относительно точки C , из которого найдем H_A :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = \bar{X}_1 - H_A h = 0; \quad H_A = \bar{X}_1 / h = 1/h.$$

Из уравнения проекций всех сил на горизонтальную ось определим H_B :

$$\sum Z = H_B - H_A = 0; \quad H_B = H_A = 1/h.$$

Для расчета выбираем третий вариант основной системы, так как эпюры изгибающих моментов для него получатся наиболее простыми. Следовательно, при их перемножении количество подсчетов будет наименьшим.

Система канонических уравнений. Рама два раза статически неопределима, следовательно, канонические уравнения представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

Здесь X_1, X_2 – неизвестные изгибающие моменты; δ_{kmt} – перемещение по направлению усилия X_k от действия единичного усилия, приложенного по направлению X_m ; Δ_{kF} – перемещение по направлению усилия X_k от действия внешней нагрузки ($k, m = 1, 2$).

Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Эпюра M_1 . К основной системе прикладываем только $X_1 = 1$ (единичное усилие по направлению X_1) (рисунок 9.22, а). В опорных шарнирах A и B возникают четыре составляющие опорных реакций: H_A, V_A, H_B, V_B . Нет необходимости вычислять их все. Определим только те, которые нужны для расчета ординат эпюры M_1 .

Вычислим ординаты эпюры \bar{M}_1 в характерных точках. При этом подсчитаем только абсолютные значения моментов и укажем, какие волокна они растягивают.

$$\bar{M}_1^{(C)} = \bar{M}_1^{(B)} = \bar{M}_1^{(K)} = 0; \quad \bar{M}_1^{(A)} = \bar{X}_1 = 1 \quad (\text{растянуты внешние волокна});$$

$$\bar{M}_1^{(E)} = \bar{M}_1^{(D)} = H_B h = (1/h)h = 1 \quad (\text{растянуты внутренние волокна}).$$

По полученным ординатам строим эпюру \bar{M}_1 (см. рисунок 9.22, а). Следует заметить, что эпюра безразмерная, так как она построена от воздействия единичного изгибающего момента $\bar{X}_1 = 1$.

Эпюра \bar{M}_2 . К основной системе прикладываем только момент $\bar{X}_2 = 1$ (рисунок 9.22, б). Определим необходимые составляющие опорных реакций. Мысленно рассечем раму по шарниру С. Из уравнения равновесия моментов левой части относительно точки С найдем H_A :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = H_A h - \bar{X}_2 = 0; \quad H_A = \bar{X}_2 / h = 1 / h.$$

Из уравнения проекций сил на горизонтальную ось определим H_B :

$$\sum Z = H_B - H_A = 0; \quad H_B = H_A = 1 / h.$$

Вычислим ординаты эпюры \bar{M}_2 в характерных точках.

$$\bar{M}_2^{(A)} = \bar{M}_2^{(B)} = \bar{M}_2^{(K)} = 0; \quad \bar{M}_2^{(C)} = \bar{X}_2 = 1 \quad (\text{растянуты внешние волокна});$$

$$\bar{M}_2^{(E)} = \bar{M}_2^{(D)} = H_B h = (1/h)h = 1 \quad (\text{растянуты внешние волокна}).$$

По полученным ординатам строим эпюру \bar{M}_2 (см. рисунок 9.22, б). Она также безразмерная.

Эпюра M_p . К основной системе прикладываем только заданную внешнюю нагрузку (рисунок 9.22, в). Определим необходимые составляющие опорных реакций. Составим уравнение равновесия моментов левой части относительно точки С, из которого найдем H_A :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = qh^2 / 2 - H_A h = 0; \quad H_A = qh / 2.$$

Из уравнения проекций сил на горизонтальную ось определим H_B :

$$\sum Z = qh - H_B - H_A = 0; \quad H_B = qh - H_A = qh - qh / 2 = qh / 2.$$

Вычислим ординаты эпюры M_p в характерных точках.

$$\bar{M}_p^{(A)} = \bar{M}_p^{(C)} = \bar{M}_p^{(B)} = 0; \quad \bar{M}_p^{(K)} = Fl / 4 = 16 \cdot 5 / 4 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_p^{(E)} = H_B h = qh^2 / 2 = 22 \cdot 4^2 / 2 = 176 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\bar{M}_p^{(D)} = H_B h + Fl / 4 = qh^2 / 2 + Fl / 4 = 22 \cdot 4^2 / 2 + 16 \cdot 5 / 4 = 196 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определим значение момента в точке L (посередине участка AC):

$$\bar{M}_p^{(L)} = H_A h / 2 - qh^2 / 8 = qh^2 / 8 = 22 \cdot 4^2 / 8 = 44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Полученные ординаты отложим на эпюре M_p со стороны растянутых волокон (см. рисунок 9.22, в).

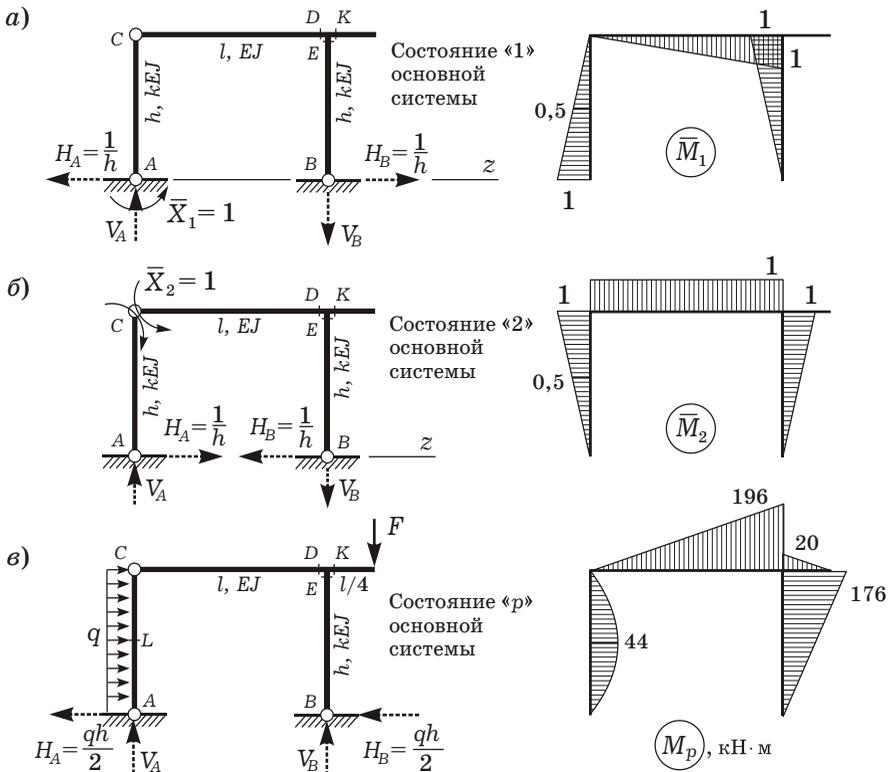


Рисунок 9.22

Вычисление единичных и грузовых перемещений. Для определения перемещений, являющихся коэффициентами канонических уравнений, применим метод Мора. При этом влиянием продольных и поперечных сил пренебрегаем и считаем, что перемещения обусловлены только действием изгибающих моментов. Используем следующие формулы:

$$\delta_{icm} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EJ} dz; \quad \Delta_{kF} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_k M_F}{EJ} dz \quad (k, m = 1, 2).$$

Все стержни рамы прямолинейны, их жесткость постоянна. Для перемножения соответствующих эпюр воспользуемся способом Симпсона:

$$\delta_{11} = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{h}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{h}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5 \cdot 2}{6EJ} + \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 0,7EJ} \cdot 2 = \frac{5,4762}{EJ};$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{h}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{h}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{5 \cdot 6}{6EJ} + \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 0,7EJ} \cdot 2 = \frac{8,8095}{EJ};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{-l}{6EJ} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{h}{6kJ} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{h}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{-5 \cdot 3}{6EJ} + \frac{4}{6 \cdot 0,7EJ} - \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 0,7EJ} = \frac{-3,4524}{EJ};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1F} &= \frac{-l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 196 - \frac{h}{6kJ} \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 44 - \frac{h}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 176 = \\ &= \frac{-5 \cdot 392}{6EJ} - \frac{4 \cdot 88}{6 \cdot 0,7EJ} - \frac{4 \cdot 352}{6 \cdot 0,7EJ} = \frac{-745,714}{EJ};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2F} &= \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 1 \cdot 196 + 1 \cdot 196) - \frac{h}{6kJ} \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot 44 + \frac{h}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 176 = \\ &= \frac{5 \cdot 588}{6EJ} - \frac{4 \cdot 88}{6 \cdot 0,7EJ} + \frac{4 \cdot 352}{6 \cdot 0,7EJ} = \frac{741,429}{EJ}.\end{aligned}$$

Заметим, что если ординаты эпюр расположены по разные стороны от оси, то их произведение отрицательно.

Проверка правильности вычисления перемещений. Строим суммарную единичную эпюру \bar{M}_S , складывая ординаты эпюр M_1 и M_2 (рисунки 9.23): $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$. Находим условное суммарное единичное перемещение δ_{ss} , умножая \bar{M}_S саму на себя:

$$\begin{aligned}\delta_{ss} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_S^2}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{h}{6kJ} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \\ &= \frac{5 \cdot 2}{6EJ} + \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 0,7EJ} = \frac{7,3810}{EJ}.\end{aligned}$$

С другой стороны, δ_{ss} должно равняться сумме всех единичных перемещений:

$$\begin{aligned}\delta_{ss} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \\ &= \frac{5,4762}{EJ} - 2 \cdot \frac{3,4524}{EJ} + \frac{8,8095}{EJ} = \frac{7,3809}{EJ}.\end{aligned}$$

Результаты совпали, значит, единичные перемещения вычислены верно.

Найдем условное суммарное грузовое перемещение Δ_{sF} , умножив эпюру \bar{M}_S на M_F (см. рисунок 9.22, в), а также просуммировав грузовые перемещения Δ_{1F} и Δ_{2F} :

$$\begin{aligned}\Delta_{sF} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_S M_F}{EJ} dz = \frac{l}{6EJ} \cdot 1 \cdot 196 - \frac{h}{6kJ} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 44 = \frac{5 \cdot 196}{6EJ} - \frac{4 \cdot 176}{6 \cdot 0,7EJ} = \\ &= \frac{-4,285}{EJ};\end{aligned}$$

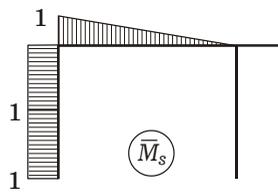


Рисунок 9.23

$$\Delta_{sF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{-745,714}{EJ} + \frac{741,429}{EJ} = \frac{-4,285}{EJ}.$$

Совпадение результатов говорит о правильности вычисления перемещений.

Решение системы канонических уравнений. Найденные значения единичных и грузовых перемещений подставляем в систему канонических уравнений (а):

$$\begin{cases} \frac{5,4762}{EJ} X_1 - \frac{3,4524}{EJ} X_2 - \frac{745,714}{EJ} = 0; \\ -\frac{3,4524}{EJ} X_1 + \frac{8,8095}{EJ} X_2 + \frac{741,429}{EJ} = 0. \end{cases} \quad (б)$$

Умножим оба уравнения (б) на EJ и перенесем их свободные члены в правую часть. Получим

$$\begin{cases} 5,4762 X_1 - 3,4524 X_2 = 745,714; \\ -3,4524 X_1 + 8,8095 X_2 = -741,429. \end{cases} \quad (в)$$

Решая систему (в), определяем неизвестные моменты X_1, X_2 :

$$X_1 = 110,388 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_2 = -40,902 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выполним проверку правильности вычисления X_1, X_2 , подставив их значения в систему (в):

$$\begin{cases} 5,4762 \cdot 110,388 - 3,4524 \cdot (-40,902) = 745,715; \\ -3,4524 \cdot 110,388 + 8,8095 \cdot (-40,902) = -741,430. \end{cases}$$

Проверка выполняется, точность подсчетов приемлема.

Построение эпюры изгибающих моментов в заданной системе. Вычислим ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_F.$$

Умножим ординаты \bar{M}_1, \bar{M}_2 на соответствующие значения X_1, X_2 . Сложим полученные эпюры с грузовой эпюрой (рисунок 9.24)

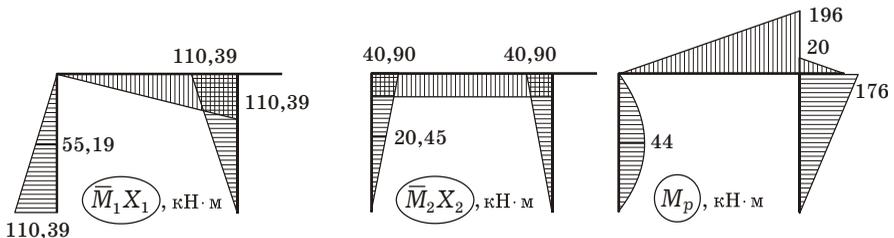


Рисунок 9.24

Подсчитаем значения изгибающих моментов в характерных точках заданной системы (рисунок 9.25, а).

По полученным ординатам строим эпюру (рисунок 9.25, б). Экстремальное значение момента на участке AC определим позже, после построения эпюры поперечных сил.

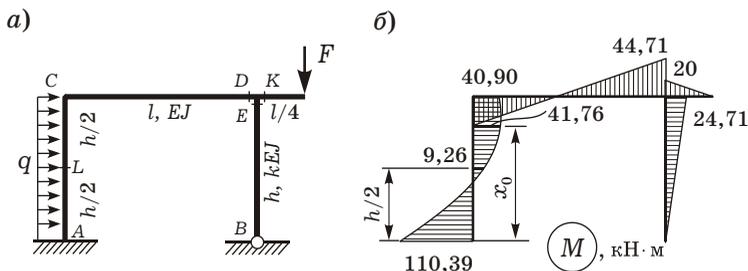


Рисунок 9.25

Статическая проверка эпюры M . Вырежем жесткий узел $D-E-K$ (рисунок 9.26) и выясним, находится ли он в равновесии. Составим уравнение моментов

$$\sum M = 44,71 - 24,71 - 20 = 0.$$

Узел находится в равновесии.

Деформационная проверка эпюры M . Для проверки выберем другую основную систему – вариант 1 (см. рисунок 9.21). Условное суммарное перемещение по направлениям неизвестных сил от совместного действия этих сил и внешней нагрузки должно равняться нулю:

$$\Delta_{sF}^* = \sum \int_l \frac{\bar{M}_s^* M}{EJ} dz = 0.$$

Здесь \bar{M}_s^* – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов для варианта 1 основной системы. Для ее построения нагрузим раму одновременно двумя единичными усилиями $\bar{X}_1^* = 1$, $\bar{X}_2^* = 1$ (рисунок 9.27) и рассчитаем значения момента \bar{M}_s^* в характерных точках.

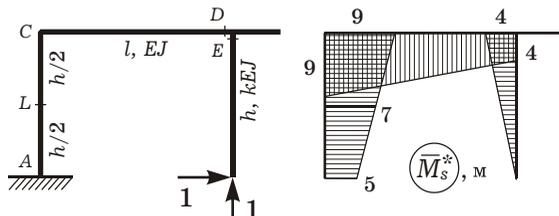


Рисунок 9.27

$$\begin{aligned} \bar{M}_s^{*(E)} = \bar{M}_s^{*(D)} &= 1 \cdot h = 4 \text{ м}; \quad \bar{M}_s^{*(C)} = 1 \cdot h + 1 \cdot l = 4 + 5 = 9 \text{ м}; \quad \bar{M}_s^{*(A)} = 1 \cdot l = 5 \text{ м}; \\ \bar{M}_s^{*(L)} &= 1 \cdot h/2 + 1 \cdot l = 4/2 + 5 = 7 \text{ м (растянуты внутренние волокна)}. \end{aligned}$$

Подсчитаем условное суммарное перемещение

$$\Delta_{sF}^* = \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 9 \cdot 40,90 - 2 \cdot 4 \cdot 44,71 - 9 \cdot 44,71 + 4 \cdot 40,90) + \\ + \frac{h}{6kEJ} (9 \cdot 40,90 - 5 \cdot 110,39 + 4 \cdot 7 \cdot 9,26) - \frac{h}{6kEJ} 2 \cdot 4 \cdot 24,71 = \frac{0,013}{EJ} = \frac{0,013}{10^7} \approx 0.$$

Равенство нулю величины Δ_{sF}^* свидетельствует о том, что вертикальное и горизонтальное перемещения правого опорного сечения рамы по направлениям приложенных единичных сил отсутствуют. Это соответствует заданной схеме конструкции. Значит, эпюра моментов построена верно.

Построение эпюры поперечных сил. Эпюра поперечных сил Q строится по готовой эпюре изгибающих моментов M .

На участке AC , где эпюра M ограничена параболой, т. е. действует равномерно распределенная нагрузка, поперечную силу определяем с помощью балочной аналогии. Вырежем этот участок (рисунок 9.28, а). Приложим к сечениям A , C известные моменты и пока неизвестные поперечные силы. Моменты направляем так, как следует из эпюры изгибающих моментов M (см. рисунок 9.25, б): эпюра построена на растянутых волокнах, значит, в точке A растянуты левые волокна, а в точке C — правые. Поперечные силы считаем положительными, т. е. они вращают рассматриваемый участок по часовой стрелке (см. рисунок 9.28, а).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_C = qh^2/2 - Q_A h + 40,90 + 110,39 = 0;$$

$$\sum M_A = -qh^2/2 - Q_C h + 40,90 + 110,39 = 0;$$

из них

$$Q_A = qh/2 + (40,90 + 110,39)/h = 22 \cdot 4/2 + 151,29/4 = 81,82 \text{ кН};$$

$$Q_C = -qh/2 + (40,90 + 110,39)/h = -22 \cdot 4/2 + 151,29/4 = -6,18 \text{ кН}.$$

Для проверки составим уравнение проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum Z = Q_C - Q_A + qh = -6,18 - 81,82 + 22 \cdot 4 = 0.$$

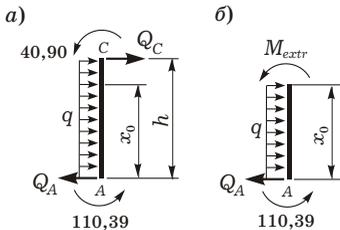


Рисунок 9.28

Полученные значения Q_A , Q_C откладываем на эпюре Q и соединяем прямой линией (рисунок 9.29).

Проведем сечение на расстоянии x_0 от начала участка (рисунок 9.28, б). Поперечная сила в нем равна нулю, а изгибающий момент экстремален (M_{extr}). Составим уравнение проекций на горизонтальную ось:

$$Q_A - qx_0 = 0,$$

отсюда $x_0 = Q_A / q = 81,82 / 22 = 3,72 \text{ м}$.

Экстремальный изгибающий момент

$$M_{extr} = -110,39 + Q_A x_0 - q x_0^2 / 2 = \\ = -110,39 + 81,82 \cdot 3,72 - 22 \cdot 3,72^2 / 2 = 41,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Отмечаем полученное значение на эпюре моментов (см. рисунок 9.25, б).

Для вычисления значений поперечных сил на участках рамы, где эпюра M прямолинейна, используем дифференциальную зависимость $Q = dM/dz$. Поперечная сила как первая производная от изгибающего момента равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. *Правило знаков* следующее: сила Q считается положительной, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось вращают по часовой стрелке.

На участке CD получим

$$Q_{CD} = -(40,90 + 44,71)/l = \\ = -85,61/5 = -17,12 \text{ кН};$$

на участке EB

$$Q_{EB} = 24,71/h = 24,71/4 = 6,18 \text{ кН}.$$

Сила Q_{CD} отрицательна, так как для совмещения оси участка CD с эпюрой M необходимо произвести вращение против часовой стрелки. Сила Q_{EB} положительна, так как ось необходимо вращать по часовой стрелке.

В точке K и на всей консоли $Q_K = F = 16 \text{ кН}$. По рассчитанным ординатам строим эпюру поперечных сил (см. рисунок 9.29).

Построение эпюры продольных сил. Эпюру продольных сил N строим по готовой эпюре Q . Отсечем консоль и рассмотрим ее равновесие (рисунок 9.30, а). Очевидно, что в точке K и на всей консоли $N_K = 0$.

Вырежем жесткие узлы рамы. В сечениях приложим поперечные и продольные силы (рисунок 9.30, б). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке, отрицательные – против часовой стрелки. Все продольные силы N считаем положительными – растягивающими.

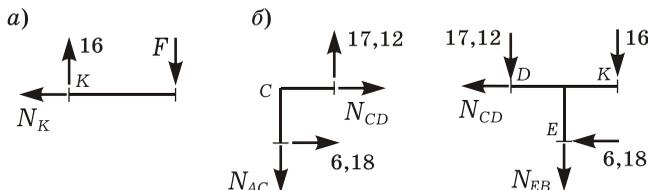


Рисунок 9.29

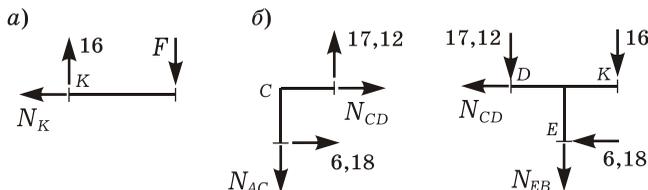


Рисунок 9.30

Составим уравнения равновесия узлов в виде сумм проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси. Для узла C

$$\sum Y = 17,12 - N_{AC} = 0; \quad N_{AC} = 17,12 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 6,18 + N_{CD} = 0; \quad N_{CD} = -6,18 \text{ кН}.$$

Для узла DEK

$$\sum Y = -17,12 - 16 - N_{EB} = 0;$$

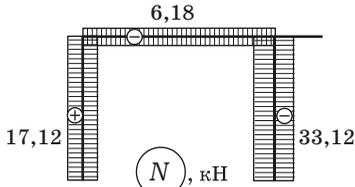


Рисунок 9.31

$$N_{EB} = -33,12 \text{ кН};$$

$$\sum Z = -6,18 - N_{CD} = 0;$$

$$N_{CD} = -6,18 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержни CD и EB сжаты. По полученным данным строим эпюру N (рисунок 9.31).

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор в точках A и B (рисунок 9.32) и приложим в них внутренние усилия, взятые из эпюр M , Q , N . При этом силы Q и N прикладываем с их реальными направлениями, т. е. с учетом знака. Составим уравнения равновесия рамы.

Сумма проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси

$$\sum Z = -81,82 - 6,18 + qh = -88 + 22 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum Y = -F - 17,12 + 33,12 = -16 - 17,12 + 33,12 = 0.$$

Подсчитаем сумму моментов всех сил относительно точки C . При выборе этой точки стараемся, чтобы в уравнение вошло как можно больше сил и моментов:

$$\begin{aligned} \sum M_C &= 110,39 + 33,12 \cdot l + qh^2 / 2 - \\ &- 81,82 \cdot h - 6,18 \cdot h - F(l + l/4) = \\ &= 110,39 + 33,12 \cdot 5 + 22 \cdot 4^2 / 2 - \\ &- 81,82 \cdot 4 - 6,18 \cdot 4 - 16 \cdot (5 + 5/4) = 0. \end{aligned}$$

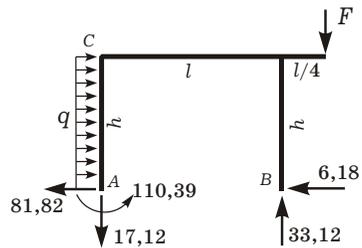
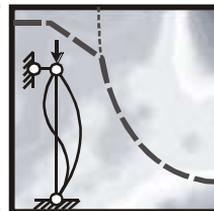


Рисунок 9.32

Рама находится в равновесии, значит, эпюры построены правильно.

10

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ



Рассмотрим особенности поведения стержней под действием продольных сжимающих сил. Даже если предприняты все меры, чтобы сила действовала строго вдоль оси стержня, сжатие сопровождается изгибом, который сначала незначителен. При увеличении силы изгиб резко возрастает, и именно он приводит к разрушению или недопустимо большим деформациям.

Изгиб, который вызван продольной нагрузкой, называется *продольным*.

10.1 Понятие об устойчивости

Как оказывается, при некоторых определенных значениях внешних сил упругая система может иметь несколько положений равновесия. Причем одни из них устойчивы, другие неустойчивы.

Устойчивость положения системы определяется ее реакцией на малые возмущения (приращения нагрузки). Положение равновесия системы *устойчиво*, если любые малые возмущения вызывают малые отклонения системы от этого ее положения.

В противном случае указанная форма равновесия является *неустойчивой*.

Переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое называют *потерей устойчивости*, границу этого перехода – *критическим состоянием* системы. Все параметры при этом называются *критическими*.

Рассмотрим длинный тонкий стержень, на который действует осевая сжимающая сила F (рисунок 10.1, а). При сравнительно небольшом значении силы стержень имеет устойчивую прямолинейную форму равновесия, так как после отклонения в результате «возмущающего» толчка он быстро возвращается в первоначальное состояние.

По мере увеличения нагрузки стержень всё медленнее возвращается в исходное положение после возмущения. При некотором критическом значении силы F_{cr} наступает состояние «безразличного равновесия»: после отклонения от вертикального положения стержень приобретает равновесие и в отклоненном положении (штриховая линия на рисунке 10.1, б). Происходит *бифуркация* (разветвление, раздвоение) равновесия, характеризующаяся «обме-

ном» устойчивости между двумя его формами: прямолинейная форма теряет устойчивость, а криволинейная еще не успевает ее приобрести.

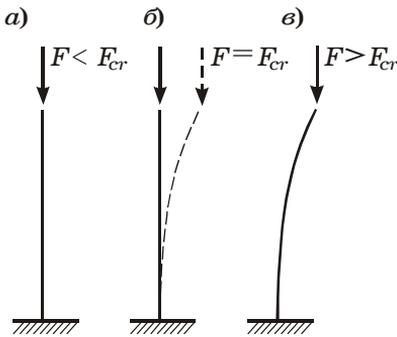


Рисунок 10.1

Новая (криволинейная) форма равновесия теоретически устойчива при нагрузке, превышающей критическую (рисунок 10.1, в). Однако такое состояние неприемлемо практически, так как стержень работает уже не на сжатие, а на сжатие с изгибом. Даже при незначительном превышении нагрузкой критического значения возникают недопустимо большие прогибы и напряжения. Следовательно, критическое состояние необходимо рассматривать как предельное состояние.

Критической силой F_{cr} называется *наибольшее* значение продольной сжимающей силы F , до которого сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия (или *наименьшее* значение продольной сжимающей силы, при которой происходит потеря устойчивости).

Для упругих стержней критическая сила от характера возмущения не зависит. Если стержень пластический, то может иметь место зависимость критической силы от характера возмущения.

Первые систематические исследования по устойчивости равновесия гибких стержней при сжатии проводил П. Мусшенбрук из Лейдена (Голландия). Он опубликовал (1729) количественные закономерности, обнаруженные им в результате серии опытов. Первые теоретические работы принадлежат Л. Эйлеру. В течение 36 лет, с 1744 по 1780 г., он опубликовал пять работ, посвященных исследованию устойчивости упругих систем.

При рассмотрении потери устойчивости по Эйлеру интересуются *фактом* потери устойчивости, а не поведением системы в за-критическом состоянии. Поэтому считают, что приращения продольных сил в момент потери устойчивости весьма малы.

Потеря устойчивости возможна не только в случае сжатия тонких стержней, но также при изгибе, кручении и сложных видах деформации. Например, тонкостенная труба, нагруженная высоким внешним давлением, сплющивается, хотя напряжения к этому моменту далеко не достигают предела текучести. Наиболее ярко явление потери устойчивости наблюдается в легких тонкостенных конструкциях, поэтому при их проектировании наряду с расчетами на прочность ведется и расчет на устойчивость.

10.2 Задача Эйлера

Определим значение критической силы стержня с шарнирно закрепленными концами (рисунок 10.2).

Предположим, что по некоторой причине сжатый стержень несколько изогнулся. Считаем перемещения малыми, напряжения — не превышающими предел пропорциональности.

Координаты точек упругой линии стержня обозначим через z и y . При малых прогибах для нее справедливо дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M. \quad (10.1)$$

Продольный изгиб стержня происходит в плоскости минимальной жесткости, и поэтому под величиной J в дальнейшем понимается *минимальный* момент инерции сечения.

Изгибающий момент M по абсолютной величине равен Fy . Его знак условимся выбирать по следующему правилу. Положительным считается тот момент, который увеличивает кривизну изогнутого стержня. Рассматривая упругую линию, изображенную на рисунке 10.2, замечаем, что сжимающая сила F в алгебраическом смысле кривизну уменьшает. Действительно, при положительном y упругая линия имеет выпуклость в сторону возрастания оси y . Кривизна упругой линии отрицательная. Момент силы F направлен так, чтобы еще сильнее искривить упругую линию, делая кривизну еще более «отрицательной», т. е. уменьшает ее. Поэтому момент в нашем случае отрицательный. В результате из (10.1) получаем *дифференциальное уравнение равновесия стержня при продольном изгибе*

$$EJy'' = -Fy. \quad (10.2)$$

Обозначим

$$\frac{F}{EJ} = k^2. \quad (10.3)$$

Уравнение (10.2) приводим к каноническому виду

$$y'' + k^2y = 0. \quad (10.4)$$

Его решение известно:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (10.5)$$

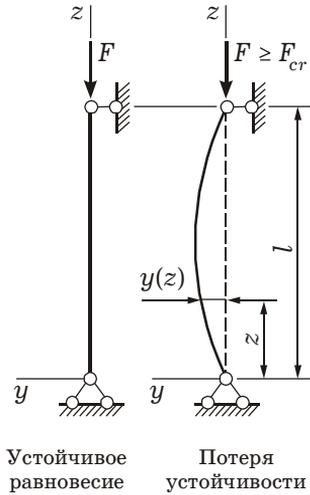


Рисунок 10.2

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из граничных условий (условий закрепления концов стержня). В рассматриваемом случае прогибы на опорах отсутствуют, поэтому

$$y = 0 \text{ при } z = 0; \quad y = 0 \text{ при } z = l.$$

Подставив первое из этих условий в решение (10.5), получим

$$0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0; \quad C_2 = 0.$$

Из второго условия следует

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (10.6)$$

Это уравнение имеет два решения:

$$C_1 = 0; \quad \sin kl = 0.$$

В первом случае $C_1 = C_2 = 0$, и из уравнения (10.5) следует, что прогиб y тождественно обращается в нуль. Следовательно, стержень имеет прямолинейную форму, т. е. отсутствует явление потери устойчивости, которое мы хотели бы исследовать.

Во втором случае синус обращается в ноль, если

$$kl = \pi n,$$

где n – произвольное целое число.

Подставив сюда выражение для k (10.3), получаем значения силы F , при которых возможна потеря устойчивости:

$$\sqrt{\frac{F}{EJ}} l = \pi n; \quad F = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2}.$$

Наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой стержень теряет способность сохранять первоначальную прямолинейную форму равновесия, называется *критической силой*. Ее значение достигается при $n = 1$:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (10.7)$$

Формула подобного вида впервые выведена Л. Эйлером и носит его имя. В этом случае $kl = \pi$ и уравнение упругой линии (10.5) принимает вид

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Следовательно, стержень изгибается по *полуволне синусоиды* с максимальным прогибом C_1 .

При другом целочисленном значении n получаем прогиб

$$y = C_1 \sin \frac{\pi n z}{l},$$

и упругая линия стержня изображается кривой в виде n полувольт (рисунок 10.3). Таким образом, у сжатого стержня существуют более высокие формы равновесия ($n = 2, 3, \dots, m$), которым соответствуют большие значения сил. Эти формы в чистом виде не реализуются, так как неустойчивы. Но если перейти к другой системе, подкрепив стержень шарнирными опорами в точках перегиба синусоиды, то сила F будет в 4, 9, ..., m^2 раз превышать критическое значение.

Замечание 1. Константа C_1 в выражении для упругой линии осталась неопределенной, т. е. прогиб получен с точностью до постоянного множителя.

Замечание 2. Формально увеличение силы сверх критического значения приводит к тривиальному решению. Действительно, в этом случае $kl \neq \pi$, и из уравнения (10.6) вытекает, что $C_1 = C_2 = 0$, поскольку $\sin kl \neq 0$. Это означает, что прогиб согласно выражению (10.5) равен нулю и стержень остается прямым. Получается, что при $F = F_{cr}$ стержень теряет устойчивость и принимает криволинейную форму, а при значении F , несколько большем F_{cr} , снова становится прямым. Подобное не вяжется с представлениями о механике изгиба стержня. Возникающий парадокс является следствием ранее использованного приближенного линеаризованного уравнения упругой линии балки (10.4). Для получения более достоверных результатов нужно применять точное дифференциальное уравнение упругих гибких стержней:

$$\frac{EJy'''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -Fy.$$

При силе, больше критической, перемещения столь велики, что пренебрегать величиной y'^2 в знаменателе нельзя.

10.3 Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Рассмотренный выше случай продольного изгиба принято классифицировать как основной. В пределах малых перемещений стержня с шарнирно закрепленными концами (рисунок 10.4, а) изгиб при потере устойчивости происходит по полуволне синусоиды, и критическая сила

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

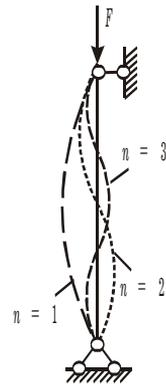


Рисунок 10.3

При других способах закрепления значение критической силы может быть получено аналогично – путем решения соответствующего дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. Однако в простейших случаях достаточно ограничиться сравнением формы изогнутой оси с той, которая представляет собой одну полу-волну синусоиды.

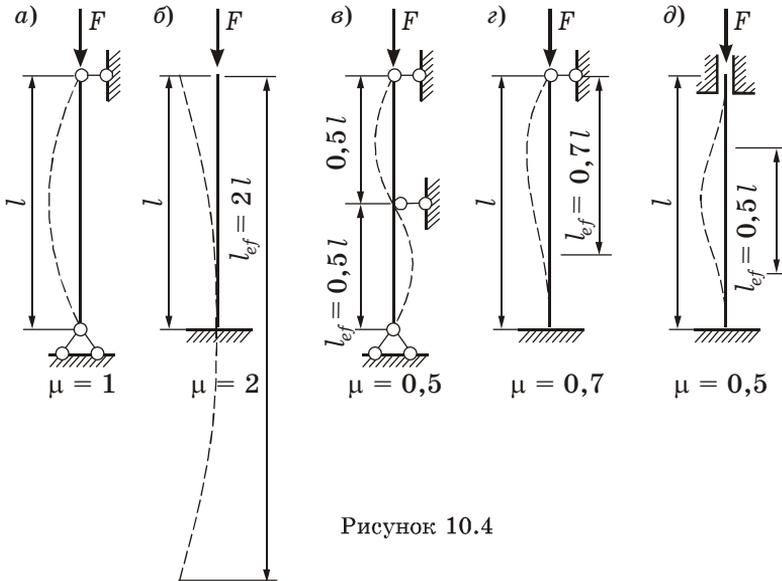


Рисунок 10.4

Так, если стержень на одном конце жестко зашцеилен, а на другом – свободен (рисунок 10.4, б), то упругую линию путем зеркального отображения относительно заделки легко можно привести к упругой линии шарнирно закрепленного стержня. Очевидно, критическая сила для зашцеиленного одним концом стержня длины l будет равна критической силе шарнирно закрепленного стержня длины $2l$:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}.$$

Шарнирно закрепленный стержень, имеющий посредине опору (рисунок 10.4, в), при потере устойчивости изогнется по двум полу-волнам. Следовательно, каждая его половина теряет устойчивость как шарнирно опертый стержень, имеющий длину $l/2$. Поэтому

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(l/2)^2}.$$

Наиболее распространены вышеприведенные расчетные схемы сжатых стержней (см. рисунок 10.4 а–д). Принято считать, что при отклонении стержня сила F сохраняет направление вертикали. Соответствующие значения критической силы объединяет формула

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{ef}^2} \quad \text{или} \quad F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (10.8)$$

где l_{ef} – приведенная (эффективная) длина стержня, $l_{ef} = \mu l$;
 l – фактическая длина стержня;
 μ – коэффициент приведения длины.

Приведенная длина – это та условная длина стержня, которая позволяет свести любой случай закрепления его концов к расчетной схеме с шарнирными опорами (см. рисунок 10.4, а).

Коэффициент приведения длины μ показывает, во сколько раз нужно увеличить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления.

Понятие приведенной длины введено Ф. С. Ясинским¹⁾.

10.4 Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

Применимость формулы Эйлера. *Критическими напряжениями* назовем напряжения, возникающие в стержне при потере устойчивости:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A}, \quad (10.9)$$

где A – площадь поперечного сечения брутто (без учета местных ослаблений).

Подставляя в выражение (10.9) значение критической силы Эйлера, получим

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (10.10)$$

Здесь введена величина λ – *гибкость стержня* – безразмерная геометрическая характеристика, определяемая способом закрепления его концов, длиной, а также формой и размерами поперечного сечения:

¹⁾ *Ясинский* Феликс Станиславович (1856–1899) – русский ученый и инженер, родился в Варшаве, профессор Петербургского института инженеров путей сообщения. Заложил основы современных инженерных методов расчета на устойчивость.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \quad (10.11)$$

где i – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

Функциональная зависимость (10.10) представляет собой *видоизмененную формулу Эйлера* и графически изображается *гиперболой* (рисунок 10.5). При гибкостях, близких к нулю, критическое значение напряжений, казалось бы, должно стремиться к бесконечности. Однако вывод формулы Эйлера основан на дифференциальном уравнении упругой линии, которым можно пользоваться лишь в пределах применимости закона Гука. Поэтому формула Эйлера справедлива только при постоянном модуле Юнга E и напряжениях, *не превышающих предел пропорциональности*:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}.$$

Подставляя в это условие выражение (10.10), получим

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr}.$$

Отсюда следует *ограничение на гибкость стержня*:

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}} = \lambda_E. \quad (10.12)$$

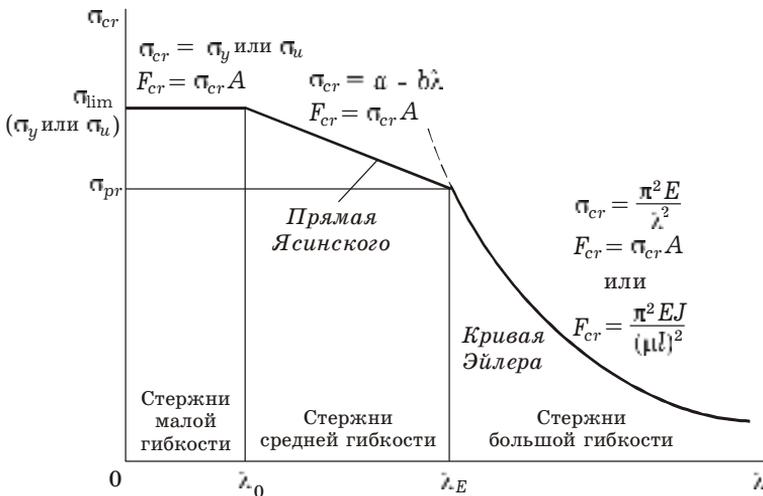


Рисунок 10.5

Правая часть неравенства (10.12) представляет собой *предельную гибкость* λ_E – наименьшее значение гибкости стержня, при которой применима формула Эйлера. Она зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля

Юнга и предела пропорциональности. Например, для стали Ст3: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{pr} = 200$ МПа и, следовательно,

$$\lambda_E = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{pr}} = 100.$$

Для дерева $\lambda_E = 110$, для чугуна $\lambda_E = 80$.

Таким образом, *формула Эйлера применима к упругим стержням большой гибкости, у которых $\lambda \geq \lambda_E$.*

Формула Ясинского. Практика показывает, что критические силы и критические напряжения для стержней, гибкость которых ниже предельной ($\lambda < \lambda_E$), значительно меньше величин, вычисляемых по формуле Эйлера. Для таких стержней критические напряжения следует определять по эмпирической формуле, предложенной Ясинским¹⁾:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (10.13)$$

где a, b – получаемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала; например, для сталей Ст2, Ст3 $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Зависимость (10.13) носит линейный характер. Получаемые с ее помощью результаты представляют практический интерес также до некоторого предела. Этот предел характеризуется гибкостью λ_0 , при которой критическое напряжение становится равным значению опасных напряжений сжатия: пределу текучести σ_y для пластичных материалов или пределу прочности σ_u для хрупких (см. рисунок 10.5). Для малоуглеродистой стали $\lambda_0 = 40$.

Следовательно, *формула Ясинского справедлива для стержней средней гибкости, у которых $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_E$.*

Для стержней малой гибкости $\lambda < \lambda_0$ критические напряжения σ_{cr} принимаются равными σ_y (пластичные материалы) или σ_u (хрупкие материалы) (см. рисунок 10.5).

Критическую силу получим, умножая значение критического напряжения на площадь поперечного сечения брутто:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A,$$

где A – площадь поперечного сечения брутто.

Ослабление сечений стержня болтами в металлических конструкциях, врубками – в деревянных происходит не по всей его длине, а лишь на отдельных участках. Сопrotивление же стержня выпучиванию зависит от жесткости стержня на всем его протяжении, поэтому ослабления практически не влияют на критическую силу.

¹⁾ Эту формулу Ясинский получил в результате математической обработки экспериментальных результатов Людвига *Тетмайера* (L. von Tetmajer) (1850–1905) и др. Поэтому ее иногда называют формулой Тетмайера – Ясинского.

10.5 Практический метод расчета стержней на устойчивость

Несущая способность сжатого стержня может быть исчерпана по двум причинам:

- из-за *потери прочности*, если в стержне из пластичного материала не выполняется условие $\sigma \leq \sigma_y$, а в стержне из хрупкого материала – условие $\sigma \leq \sigma_u$;
- из-за *потери устойчивости*, если в стержне из любого материала не выполняется условие $\sigma \leq \sigma_{cr}$.

Введем обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{lim}}; \quad \sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_y & (\text{для пластичных материалов}); \\ \sigma_u & (\text{для хрупких материалов}) \end{cases} \quad (10.14)$$

и будем принимать за допускаемое напряжение по-прежнему

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{lim}}{n},$$

где n – коэффициент запаса.

Условие устойчивости можно записать в виде

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma], \quad (10.15)$$

где N – продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки;

A – площадь сечения брутто, если иное не оговорено;

φ – *коэффициент продольного изгиба* – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения при расчетах на устойчивость (он уменьшает допускаемое напряжение $[\sigma]$ до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия).

Условие устойчивости для строительных конструкций

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R \gamma_c, \quad (10.16)$$

где N – продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки;

φ – *коэффициент продольного изгиба* – коэффициент уменьшения расчетного сопротивления;

R – расчетное сопротивление;

γ_c – коэффициент условий работы.

Коэффициент φ меньше единицы. Его можно вычислять по формуле (10.14), подставляя в нее значение критического напряжения. Однако для облегчения практических расчетов составлены специальные таблицы. Значения коэффициентов продольного изгиба φ в зависимости от гибкости λ некоторых материалов приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Коэффициенты продольного изгиба центрально-сжатых элементов

Гибкость λ	Коэффициенты φ для различных материалов			
	сталь Ст2, 3, 4, ОС	сталь СПК	чугун	дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,35	–	0,25
120	0,45	0,30	–	0,22
130	0,40	0,26	–	0,18
140	0,36	0,23	–	0,16
150	0,32	0,21	–	0,14
160	0,29	0,19	–	0,12
170	0,26	0,17	–	0,11
180	0,23	0,15	–	0,10
190	0,21	0,14	–	0,09
200	0,19	0,13	–	0,08

Для определения промежуточных значений допускается линейная интерполяция. При значениях $\lambda > 200$ можно вести расчет по формуле Эйлера.

Кроме условия устойчивости, сжатые стержни должны удовлетворять *условию прочности*, которое необходимо проверять после расчета на устойчивость лишь для ослабленных сечений:

$$\sigma = \frac{N}{A_{net}} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A_{net}} \leq R\gamma_c, \quad (10.17)$$

где A_{net} – площадь сечения нетто, т. е. с учетом его ослаблений.

Из сопоставления неравенств (10.14), (10.15) и (10.17) видно, что расчет сжатых стержней на устойчивость внешне напоминает расчет на прочность. Принципиальное отличие состоит во введении понижающего коэффициента $\varphi < 1$ и замене площади поперечного сечения нетто площадью брутто.

Условие устойчивости позволяет производить три вида расчета на устойчивость, идентичных аналогичным расчетам на прочность.

1 *Проверочный расчет* проводится в следующем порядке:

- в зависимости от условий закрепления стержня определяется коэффициент приведения длины μ (см. рисунок 10.4);
- исходя из размеров и формы поперечного сечения определяют наименьший момент инерции $J = \min(J_x, J_y)$, площадь A и вычисляется минимальный радиус инерции и гибкость

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}; \quad \lambda = \frac{\mu l}{i};$$

- по таблице 10.1 находится коэффициент φ ;
- вычисляется действительное напряжение $\sigma = N/A$ и проверяется выполнение условия (10.14) или (10.15).

2 *Проектировочный расчет*. При определении размеров поперечного сечения сжатого стержня приходится использовать *метод последовательных приближений*, так как условие устойчивости содержит две неизвестные величины: площадь A и коэффициент φ , который зависит от гибкости (10.11), а следовательно, и от геометрических характеристик поперечного сечения.

Общая методика здесь следующая:

- на первом шаге коэффициент φ задается произвольно (обычно $\varphi = 0,5 \dots 0,6$), по нему из условия устойчивости вычисляется площадь A ;
- по таблицам сортамента подбирается номер прокатного профиля заданного вида (или вычисляются размеры сечения заданного вида), определяются момент инерции J и радиус i инерции всего сечения, гибкость стержня λ ;
- по гибкости из таблицы 10.1 получаем соответствующий коэффициент φ^* ;
- на каждом последующем шаге приближения в качестве коэффициента продольного изгиба принимается среднее значение между исходным φ и полученным φ^* на предыдущем шаге;
- процесс останавливается, если разница между φ и φ^* составляет менее 5 % или два раза подряд выпадает один и тот же номер профиля (обычно требуется не более трех-четырёх попыток).

3 *Определение эксплуатационной способности*. По известным размерам поперечного сечения, длине стержня, способу его закрепления определяется продольная сила, при которой будет обеспечена устойчивость:

$$N \leq \varphi[\sigma]A \quad \text{или} \quad N \leq \varphi R_{\sigma} A.$$

При выборе формы сечения следует иметь в виду, что в соответствии с приведенными выше формулами сечение тем выгоднее, чем больше его минимальный момент инерции J при одной и той же площади сечения A .

☑ **ПРИМЕР 10.1.** Стойка (рисунок 10.6, а) длиной $l = 7,5$ м сжата центрально приложенной силой $F = 580$ кН. Материал стойки – сталь Ст3, расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, предел текучести $\sigma_y = 260$ МПа. Требуется:

- 1) подобрать необходимый номер уголка для поперечного сечения (рисунок 10.6, б);
- 2) определить размер c из условия равноустойчивости сечения;
- 3) определить величину критической силы и коэффициент запаса на устойчивость по отношению к заданной нагрузке.

Подбор сечения. Воспользуемся методом последовательных приближений. На первом шаге принимаем $\varphi_1 = 0,5$. Затем из условия устойчивости (10.16) через нагрузку и расчетное сопротивление получаем площадь всего сечения

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{580 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 55,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 55,2 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка

$$A_1 = A/4 = 55,2/4 = 13,8 \text{ см}^2.$$

Согласно таблице В.2 сортамента выбираем уголок 110×70×8 с площадью $A_T = 13,9 \text{ см}^2$. Так как размер c неизвестен, то мы не можем определить расстояние до оси x . Поэтому расчеты будем вести относительно оси y . Момент инерции всего сечения относительно этой оси

$$J_y = 4 \left(J_{yT} + (a/2 + x_0)^2 A_T \right),$$

где $J_{yT} = 54,6 \text{ см}^4$ – табличное значение момента инерции уголка;

$x_0 = 1,64 \text{ см}$ – характерный размер уголка (см. рисунок 10.6, б);

$a = 20 \text{ см}$ – заданное расстояние.

Тогда

$$J_y = 4 \left(54,6 + (20/2 + 1,64)^2 \cdot 13,9 \right) = 7752 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции всего сечения

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{4A_T}} = \sqrt{\frac{7752}{4 \cdot 13,9}} = 11,8 \text{ см} = 0,118 \text{ м}.$$

Коэффициенты приведения длины стержня μ_y, μ_x принимаем в соответствии со схемой закрепления концов стержня (см. рисунок 10.6). Нижний конец закреплен шаровым шарниром «ш», поэтому в обеих плоскостях возможной потери устойчивости yz и zx внизу принимаем шарнир. Вверху у стержня – плоский шарнир «пл», который в своей плоскости zx работает как шарнир, а в плоскости yz – как заделка. Тогда в первой плоскости с обоих концов «шарнир – шарнир» (см. рисунок 10.4, а),

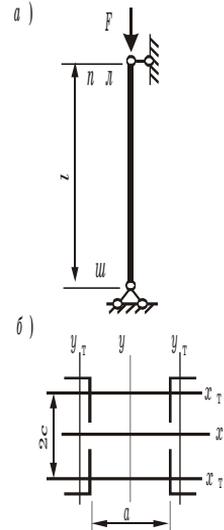


Рисунок 10.6

во второй – «шарнир – заделка» (см. рисунок 10.4, з). Коэффициенты принимаем следующие: $\mu_y = 1$; $\mu_x = 0,7$. Гибкость относительно оси y

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{1 \cdot 7,5}{0,118} = 63,5.$$

Соответствующий этой гибкости коэффициент φ^* получим, интерполируя соседние значения в таблице 10.1. Так как

$$\varphi|_{\lambda=60} = 0,86, \quad \varphi|_{\lambda=70} = 0,81,$$

то

$$\varphi_1^*|_{\lambda=63,5} = 0,81 + \frac{70 - 63,5}{70 - 60} (0,86 - 0,81) = 0,843.$$

Разница между коэффициентами φ_1 и φ_1^k гораздо больше 5 %, поэтому для *второго шага* принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,843}{2} = 0,672.$$

Площадь сечения

$$A \geq \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{580 \cdot 10^3}{0,672 \cdot 210 \cdot 10^6} = 41,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 41,1 \text{ см}^2.$$

Для одного уголка $A_2 = A/4 = 41,1/4 = 10,3 \text{ см}^2$.

Согласно таблице сортамента принимаем уголок $100 \times 63 \times 7$ с площадью $A_T = 11,1 \text{ см}^2$, табличным моментом инерции $J_{yT} = 35 \text{ см}^4$, размером $x_0 = 1,46 \text{ см}$. Момент и радиус инерции всего сечения и гибкость стержня

$$J_y = 4(35 + (20/2 + 1,46)^2 \cdot 11,1) = 5971 \text{ см}^4,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{5971}{4 \cdot 11,1}} = 11,6 \text{ см} = 0,116 \text{ м}; \quad \lambda_y = \frac{1 \cdot 7,5}{0,116} = 64,7.$$

Так как в таблице 10.1 соседние значения коэффициентов уменьшения допускаемого напряжения те же, то

$$\varphi_2^*|_{\lambda=64,7} = 0,81 + \frac{70 - 64,7}{70 - 60} (0,86 - 0,81) = 0,837.$$

Разница между коэффициентами φ_2 и φ_2^*

$$\delta_2 = 100 \% \cdot |\varphi_2 - \varphi_2^*| / \varphi_2 = 100 \% \cdot |0,672 - 0,837| / 0,672 = 25 \%,$$

поэтому для *третьего шага* принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,672 + 0,837}{2} = 0,756.$$

Соответствующая площадь сечения

$$A \geq \frac{F}{\varphi_3 R} = \frac{580 \cdot 10^3}{0,756 \cdot 210 \cdot 10^6} = 36,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 36,5 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка

$$A_3 = A/4 = 35,5/4 = 9,13 \text{ см}^2.$$

Согласно таблице сортамента принимаем уголок $75 \times 50 \times 8$ с площадью $A_T = 9,47 \text{ см}^2$, табличным моментом инерции $J_{yT} = 18,5 \text{ см}^4$, $x_0 = 1,29 \text{ см}$. Момент и радиус инерции всего сечения и гибкость стержня

$$J_y = 4(18,5 + (20/2 + 1,29)^2 \cdot 9,47) = 4902 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{4902}{4 \cdot 9,47}} = 11,4 \text{ см} = 0,114 \text{ м}; \quad \lambda_y = \frac{1 \cdot 7,5}{0,114} = 65,10.$$

Так как соседние значения коэффициентов уменьшения допускаемого напряжения те же, то

$$\varphi_3^* |_{\lambda=65,9} = 0,81 + \frac{70 - 65,9}{70 - 60} (0,86 - 0,81) = 0,831.$$

Разница между коэффициентами φ_3 и φ_3^*

$$\delta_3 = 100 \% \cdot |\varphi_3 - \varphi_3^*| / \varphi_3 = 100 \% \cdot |0,756 - 0,831| / 0,756 = 10 \%,$$

поэтому для *четвертого шага* принимаем

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^*}{2} = \frac{0,756 + 0,831}{2} = 0,794.$$

Соответствующая площадь всего сечения и площадь одного уголка

$$A \geq \frac{F}{\varphi_4 R} = \frac{580 \cdot 10^3}{0,794 \cdot 210 \cdot 10^6} = 34,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 34,8 \text{ см}^2;$$

$$A_4 = A/4 = 34,8/4 = 8,70 \text{ см}^2.$$

Согласно таблице сортамента это уголок $75 \times 60 \times 8$ с площадью $A_T = 9,47 \text{ см}^2$, т. е. мы второй раз попали в один и тот же номер профиля. Следовательно, дальнейшие уточнения не приведут к новому результату. Окончательно принимаем уголок из последнего приближения. Табличные моменты инерции этого уголка

$$J_{yT} = 18,5 \text{ см}^4; \quad J_{xT} = 52,4 \text{ см}^4.$$

Определение размера s . Неизвестный размер сечения s определим из условия равноустойчивости сечения: $\lambda_x = \lambda_y$. Тогда

$$\frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{\mu_y l}{i_y}; \quad i_x = \frac{\mu_x}{\mu_y} i_y.$$

Радиусы инерции связаны с моментами инерции сечения соотношениями

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}.$$

Подставляя их в предыдущее соотношение между радиусами инерции, связываем моменты инерции:

$$J_x = \frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} J_y.$$

Используя выражение для момента инерции сечения относительно оси x

$$J_x = 4(J_{xT} + c^2 A_T),$$

получим

$$J_{xT} + c^2 A_T = \frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} \frac{J_y}{4}.$$

Отсюда, с учетом того, что $J_y = 4902 \text{ см}^4$, следует размер c :

$$c = \sqrt{\frac{1}{A_T} \left(\frac{\mu_x^2}{\mu_y^2} \frac{J_y}{4} - J_{xT} \right)} = \sqrt{\frac{1}{9,47} \left(\frac{0,7^2}{1} \frac{4902}{4} - 52,4 \right)} = 7,61 \text{ см}.$$

Критическая сила и коэффициент запаса. Величина критических напряжений σ_{cr} в рассматриваемом случае вычисляется по формуле Ясинского, так как значение гибкости стержня $\lambda = 65,9$ находится в интервале $40 < \lambda < 100$:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 65,9 = 235 \text{ МПа}.$$

Критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 235 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 9,47 \cdot 10^{-4} = 890 \cdot 10^3 \text{ Н} = 890 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса на устойчивость

$$n = F_{cr}/F = 890/580 = 1,53.$$

☑ **ПРИМЕР 10.2.** Для фермы (рисунок 10.7, а) $F = 600 \text{ кН}$, $l = 2,5 \text{ м}$, $R = 210 \text{ МПа}$, материал – сталь Ст2. Форма поперечных сечений показана на рисунке 10.7, б. Считается, что стержни соединены шаровыми шарнирами, а составные сечения равноустойчивы. Требуется проверить, достаточно ли сечение у стержней 1, 2, 3.

Продольные силы в стержнях. Опорные реакции определяем из условия равенства нулю суммы моментов действующих сил относительно опор:

$$\begin{aligned} Fl - R_A \cdot 3l &= 0, & R_A &= F/3; \\ -F \cdot 2l + R_B \cdot 3l &= 0, & R_B &= 2F/3. \end{aligned}$$

Для вычисления усилий в стержнях 1 и 2 проведем сечение I–I, отбросим правую часть фермы и рассмотрим равновесие оставшейся части (рисунок 10.7, в). Так как длины стержней 1 и 2 одинаковы, то $\alpha = 60^\circ$.

Из условия равновесия $\sum M_C = 0$ получим

$$N_1 l \sin \alpha - R_A (l + l/2) = 0, \quad N_1 = \frac{R_A 3l/2}{l \sin \alpha} = \frac{F}{3} \frac{3}{2 \sin \alpha} = \frac{600 \cdot 3}{6 \cdot 0,866} = 346 \text{ кН}.$$

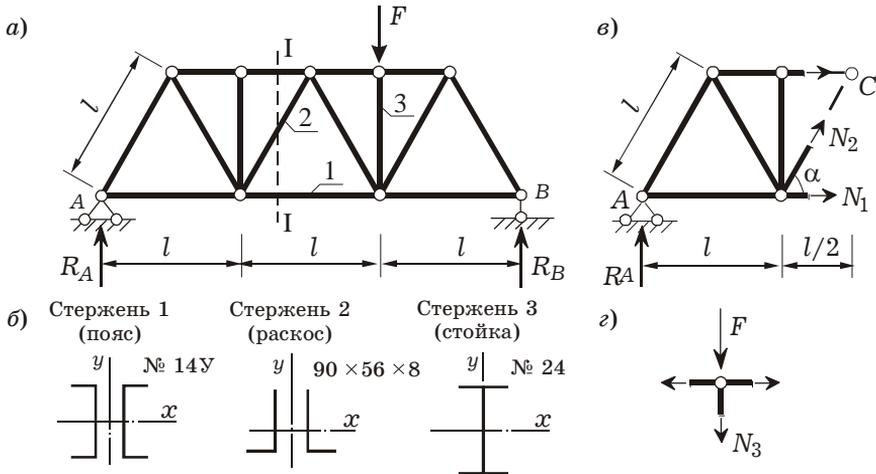


Рисунок 10.7

Проектируя силы на вертикальную ось, имеем

$$R_A + N_2 \sin \alpha = 0, \quad N_2 = -\frac{R_A}{\sin \alpha} = -\frac{F}{3 \sin \alpha} = -\frac{600}{3 \cdot 0,866} = -231 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в стержне 3 вырежем соответствующий узел (см. рисунок 10.7, з). Из условия равновесия сил следует

$$-N_3 - F = 0, \quad N_3 = -F = -600 \text{ кН}.$$

Проверка достаточности сечения стержней.

Стержень 1. Стержень *растянут*, поэтому проверим выполнение условия прочности. Для этого вычислим максимальные рабочие напряжения и сравним их с расчетным сопротивлением.

Так как сечение стержня состоит из двух швеллеров № 14У, то его площадь

$$A_1 = 2 \cdot 15,6 = 31,2 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{346 \cdot 10^3}{31,2 \cdot 10^{-4}} = 111 \cdot 10^6 \text{ Па} = 111 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется, следовательно, сечение достаточно.

Стержень 2. Стержень *сжат*, поэтому проверим выполнение условия устойчивости

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq \varphi_2 R.$$

Сечение стержня состоит из двух уголков с размерами $90 \times 56 \times 8$. Его площадь

$$A_2 = 2 \cdot 11,18 = 22,36 \text{ см}^2.$$

Стержни скреплены шаровыми шарнирами, следовательно, коэффициенты приведения длины $\mu_x = \mu_y = 1$. По условию задачи сечение равноустойчиво, поэтому гибкость стержня в обоих направлениях одинакова: $\lambda_x = \lambda_y$. Следовательно, и радиусы инерции $i_x = i_y$. Для расчета удобно взять i_x , так как соответствующая ось совпадает с табличной осью для одного уголка:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{2J_{xT}}{2A_T}} = i_{xT} = 2,85 \text{ см}.$$

Здесь, как и ранее, нижний индекс «Т» означает, что данная величина взята из таблиц сортамента.

Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{1 \cdot 2,5}{2,85 \cdot 10^{-2}} = 87,7.$$

Коэффициент продольного изгиба φ_2 определяем по таблице 10.1 в зависимости от полученной гибкости, используя линейную интерполяцию. Так как $\varphi|_{\lambda=80} = 0,75$, $\varphi|_{\lambda=90} = 0,69$, то

$$\varphi_2|_{\lambda=87,7} = 0,69 + \frac{90 - 87,7}{90 - 80} (0,75 - 0,69) = 0,704.$$

Рабочее напряжение

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{231 \cdot 10^3}{22,4 \cdot 10^{-4}} = 103 \cdot 10^6 \text{ Па} = 103 \text{ МПа}.$$

Так как $\sigma_2 = 103 \text{ МПа} < \varphi_2 R = 0,704 \cdot 210 = 148 \text{ МПа}$, то условие устойчивости выполняется и сечение стержня 2 достаточно.

Стержень 3. Стержень *сжат*. Проверим выполнение условия устойчивости

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq \varphi_3 R.$$

Для двутавра № 24 площадь поперечного сечения $A_3 = 34,8 \text{ см}^2$, радиус инерции $i_{\min} = i_{yT} = 2,37 \text{ см}$, длина стержня

$$l_3 = l \sin \alpha = l \sin 60^\circ = 2,5 \cdot 0,866 = 2,165 \text{ м}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{1 \cdot 2,165}{2,37 \cdot 10^{-2}} = 91,4.$$

Коэффициент продольного изгиба φ_3 определяем по таблице 10.1 в зависимости от гибкости. Так как $\varphi|_{\lambda=100} = 0,60$, $\varphi|_{\lambda=90} = 0,69$, то

$$\varphi_3 |_{\lambda=91,4} = 0,60 + \frac{100 - 91,4}{100 - 90} (0,69 - 0,60) = 0,677.$$

Рабочие напряжения

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{600 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 10^{-4}} = 172 \cdot 10^6 \text{ Па} = 172 \text{ МПа}.$$

Так как $\sigma_3 = 172 \text{ МПа} > \varphi_3 R = 0,677 \cdot 210 = 142 \text{ МПа}$, то условие устойчивости не выполняется, сечение стержня 3 недостаточно.

10.6 Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим нагружение прямого стержня продольной силой и системой поперечных сил (рисунок 10.8). Такой вид деформирования принято называть *продольно-поперечным изгибом*.

Составим дифференциальное уравнение упругой линии подобной балки. Изгибающий момент может рассматриваться как сумма момента поперечных сил M_{\perp} и момента продольной силы Fy . При этом, поскольку прогибы считаются малыми, момент M_{\perp}

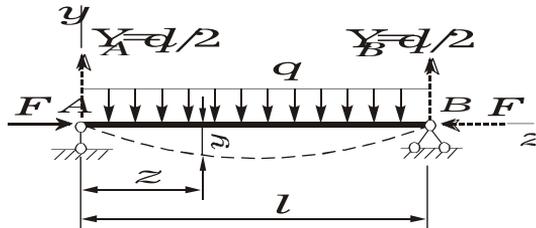


Рисунок 10.8

зависит в явном виде только от координаты z и не зависит ни от величины прогиба y , ни от продольной силы F :

$$EJy'' = -Fy + M_{\perp}. \quad (10.18)$$

После простых преобразований и введения коэффициента

$$k^2 = F/EJ$$

получим дифференциальное уравнение упругой линии балки при продольно-поперечном изгибе в каноническом виде

$$y'' + k^2y = \frac{M_{\perp}}{EJ}. \quad (10.19)$$

Его решение

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz) + y^*, \quad (10.20)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, определяемые из условий закрепления балки;

y^* – частное решение уравнения (10.19), зависящее от функции M_{\perp} , т. е. от вида поперечной нагрузки.

Например, для равномерно нагруженной балки (см. рисунок 10.8)

$$M_{\pi} = \frac{ql}{2}z - \frac{q}{2}z^2.$$

Дифференциальное уравнение (10.19) принимает вид

$$y'' + k^2y = \frac{q}{2EJ}(lz - z^2). \quad (10.21)$$

Частное решение этого уравнения предполагается в виде полинома такой же степени, как и правая часть:

$$y^* = Az^2 + Bz + C.$$

Подставив его в уравнение (10.21), имеем

$$2A + k^2(Az^2 + Bz + C) = \frac{q}{2EJ}(lz - z^2).$$

Искомые константы A , B , C получим, приравняв в этом выражении коэффициенты при одинаковых степенях z , слева и справа:

$$A = -\frac{q}{2k^2EJ}; \quad B = \frac{ql}{2k^2EJ}; \quad C = \frac{q}{k^4EJ},$$

и частное решение будет следующим:

$$y^* = \frac{q}{2k^2EJ} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Решение (10.19) принимает вид

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz) + \frac{q}{2EJk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Константы интегрирования следуют из условия равенства нулю прогиба на опорах балки при $z = 0$ и $z = l$:

- на левой опоре $z = 0$ и прогиб $y = 0$, отсюда

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{q}{2EJk^2} \frac{2}{k^2}; \quad C_2 = -\frac{q}{k^4EJ};$$

- на правой опоре $z = l$, а прогиб $y = 0$, отсюда

$$0 = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + \frac{q}{k^4EJ}; \quad C_1 = \frac{q}{k^4EJ \sin(kl)} (\cos(kl) - 1).$$

В результате

$$y = \frac{q}{k^4EJ} \left[\frac{\cos(kl) - 1}{\sin(kl)} \sin(kz) - \cos(kz) + \frac{k^2}{2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right) \right]. \quad (10.22)$$

Таким образом, формула (10.22) описывает прогиб двухопорной балки при продольно-поперечном изгибе.

10.7 Изгибающий момент при продольно-поперечном изгибе

Выражение для полного изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе следует из решения (10.22) после двукратного его дифференцирования:

$$M = EJy'' = \frac{q}{k^2} \left[-\frac{\cos(kl) - 1}{\sin(kl)} \sin(kz) + \cos(kz) - 1 \right].$$

Наибольший изгибающий момент имеет место при $z = l / 2$:

$$M_{\max} = \frac{q}{k^2} \left[\frac{1 - \cos(kl)}{\sin(kl)} \sin \frac{kl}{2} + \cos \frac{kl}{2} - 1 \right].$$

Отсюда, после несложных тригонометрических преобразований, получаем

$$M_{\max} = \frac{q}{k^2} \frac{1 - \cos(kl/2)}{\cos(kl/2)}. \quad (10.23)$$

При малых значениях силы F (что соответствует малому k) это выражение после раскрытия неопределенности с помощью двойного применения правила Лопиталья¹⁾ обращается в $M_{\max} = ql^2/8$. Следовательно, максимальный момент совпадает с тем, который дает поперечная нагрузка q при простом изгибе. По мере роста силы F максимальный изгибающий момент резко возрастает.

10.8 Приближенный метод решения задач при продольно-поперечном изгибе

При более сложных видах поперечной нагрузки, например при нескольких поперечных силах, определение изгибающих моментов описанным ранее способом становится затруднительным, т. к. изгибающий момент на различных участках описывается различными функциями. В таких случаях обычно применяют приближенные, менее точные, но более простые приемы расчета.

Вернемся к выражению (10.18)

$$EJy'' = M_{\pi} - Fy.$$

При отсутствии продольной силы оно принимает вид

$$EJy'' = M_{\pi}.$$

¹⁾ *Лопиталь* Гийом Франсуа (L'Hopitalz) (1661–1704) – французский математик, маркиз, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению, в основу которого были положены лекции *И. Бернулли* (1667–1748) Последний в действительности и является автором «правила Лопиталья».

Здесь индекс «п» соответствует нагружению стержня только поперечными силами. Исключая $M_{\text{п}}$ в основном уравнении, получим

$$EJy'' = EJy_{\text{п}}'' - Fy. \quad (10.24)$$

В дальнейшем будем считать, что форма упругой линии как при наличии продольных сил, так и без них близка к синусоиде:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y_{\text{п}} = f_{\text{п}} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Подставим эти выражения для y и $y_{\text{п}}$ в уравнение (10.24). Тогда после приравнивания коэффициентов при $\sin(\pi z/l)$ и использовании формулы Эйлера $F_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$ получим

$$EJf \frac{\pi^2}{l^2} = EJf_{\text{п}} \frac{\pi^2}{l^2} + Ff,$$

отсюда следует

$$f = \frac{f_{\text{п}}}{1 - F/F_{cr}}. \quad (10.25)$$

В случае других способов закрепления стержня используют ту же формулу (10.25), но соответственно подставляют другое значение критической силы, так как изменяется коэффициент приведения длины стержня.

Предполагая изгибающие моменты пропорциональными прогибам, можно определить полный изгибающий момент

$$M = \frac{M_{\text{п}}}{1 - F/F_{cr}}. \quad (10.26)$$

Проверим точность полученной формулы (10.26) на примере рассмотренной ранее балки с равномерно распределенной нагрузкой q . Пусть $F = F_{cr}/2$. Тогда по приближенной формуле $M = 2M_{\text{п}}$. Но поперечная нагрузка дает момент $M_{\text{п}} = ql^2/8$, поэтому $M_{\text{max}} = 0,25ql^2$.

Обратимся к точной формуле (10.23). Выражение для величины k принимает при заданном значении F следующий вид:

$$k^2 = \frac{F}{EJ} = \frac{F_{cr}}{2EJ} = \frac{\pi^2}{2l^2}.$$

Тогда согласно выражению (10.23)

$$M_{\text{max}} = \frac{q2l^2}{\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \approx 0,252ql^2.$$

Сопоставляя полученные значения M_{\max} , видим, что они практически совпадают. Однако при явно несимметричных видах распределения поперечных сил метод неприменим. В подобных случаях основное внимание следует уделять не уточнению расчетных формул, а поиску средств, с помощью которых можно было бы вообще избавиться от несимметричных видов нагружения.

10.9 Допускаемая нагрузка при продольно-поперечном изгибе

Наибольшие напряжения при продольно-поперечном изгибе получим, суммируя напряжения от сжатия F/A и изгиба M/W . С учетом формулы (10.26) имеем

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M_{\text{п}}}{W(1 - F/F_{cr})}.$$

Прочностной расчет на продольно-поперечный изгиб обладает той особенностью, что напряжения при увеличении нагрузки возрастают нелинейно и значительно быстрее. Характерный график такой зависимости показан на рисунке 10.9.

Из графика следует, что если для пластичных материалов напряжения в стержне равны допускаемым $[\sigma]$, то обеспечен следующий запас прочности по напряжениям:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{[\sigma]} = n.$$

Однако запас по нагрузкам в этом случае гораздо меньше:

$$n_F = \frac{F_y}{F_{[\sigma]}} < n.$$

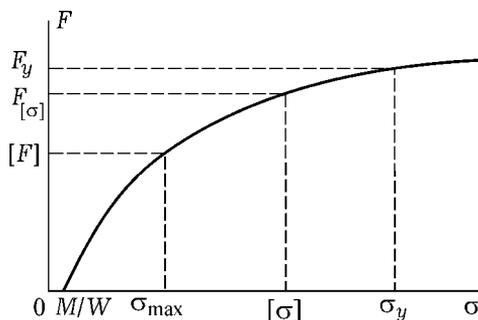


Рисунок 10.9

Это означает, что достаточно незначительного увеличения нагрузки (на величину $F_y - F_{[\sigma]}$), чтобы напряжения достигли предела текучести, а это практически соответствует разрушению. Следовательно, прочностной расчет балок при продольно-поперечном изгибе нужно вести не по допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке

$$[F] = \frac{F_y}{n}. \quad (10.27)$$

Напряжения σ_{\max} , соответствующие нагрузке $[F]$ в (10.27), будут гораздо меньше допускаемых напряжений $[\sigma]$.

10.10 Энергетический метод определения критических нагрузок

Энергетический метод представляет собой способ приближенного определения критических нагрузок. Предположим, что стержень сжат силой F , меньшей критического значения. В этом случае он находится в устойчивом положении равновесия. Его можно изогнуть, прикладывая поперечную нагрузку F_1 (рисунок 10.10).



Рисунок 10.10

При переходе стержня от прямолинейной формы равновесия к криволинейной силы F и F_1 совершат работу, в результате чего увеличится потенциальная энергия изгиба стержня. Энергетический баланс системы можно выразить в виде уравнения

$$U = F\lambda + W_{F_1}, \quad (10.28)$$

где W_{F_1} – работа поперечной силы F_1 ;

λ – перемещение точки приложения продольной силы F .

Произведение $F\lambda$ множителя $1/2$ не имеет, поскольку на всём пути λ сила F остается неизменной. Одна и та же энергия изгиба U может быть получена при различных соотношениях сил F и F_1 . Из уравнения (10.28) видно, что при неизменной величине U большей силе F соответствует меньшее значение поперечной силы F_1 . Возможен случай, когда переход от прямолинейной формы равновесия к криволинейной произойдет без приложения добавочных поперечных сил. Это имеет место при критическом значении продольной силы. Уравнение (10.28) в этом случае принимает вид

$$U = F_{cr}\lambda. \quad (10.29)$$

В обычных системах, например при изгибе балки, поперечные нагрузки производят работу на прогибах, являющихся перемещениями первого порядка малости. Полученное выражение (10.29) имеет своей особенностью то, что в нем учитывается работа внешних сил на перемещениях второго порядка малости λ . Именно это обстоятельство и характерно для задач, связанных с явлением потери устойчивости.

Выразим величины U и λ через поперечные перемещения стержня y (рисунок 10.11). Энергия изгиба выражается через изгибающий момент следующим образом:

$$U_{\text{изг}} = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EJ}.$$

Учитывая, что $M = EJ y''$, получим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2 dz. \quad (10.30)$$

Перемещение λ может быть определено как разность между длиной l и проекцией изогнутой упругой линии на прямую, соединяющую опоры. Очевидно (см. рисунок 10.11),

$$d\lambda = dz - dz \cos \theta \approx \frac{\theta^2}{2} dz.$$

Но при малых прогибах $\theta = y'$. Поэтому

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dz. \quad (10.31)$$

Из (10.29) находим

$$F_{cr} = \frac{\int_0^l EJ y'^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz}. \quad (10.32)$$

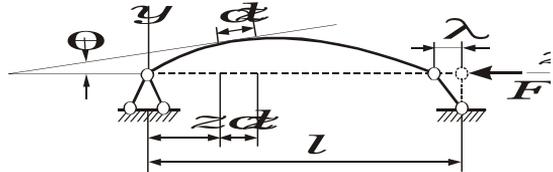


Рисунок 10.11

Если функция y известна, то критическая сила F_{cr} определяется без труда. Например, для шарнирно закрепленного стержня (см. рисунок 10.11), как было показано в подразд. 10.1,

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}.$$

После подстановки y в выражение (10.32) находим уже известное значение

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (10.33)$$

В действительности функция y остается неизвестной до тех пор, пока не решено дифференциальное уравнение упругой линии. Получается, что для определения критической силы надо вернуться к прежнему методу решения.

Однако функция y может быть задана приближенно. При этом погрешности в форме упругой линии мало сказываются на величине критической силы. Поэтому можно получить достаточно точное решение, задаваясь функцией $y(z)$ из простых физических соображений, т. е. примерно «угадывая» форму упругой линии. Примем, например, что рассматриваемый стержень изгибается по параболе

$$y = Cz(l - z). \quad (10.34)$$

Выбирая функцию, мы, естественно, должны следить за тем, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. В данном случае при $z = 0$ и $z = l$ перемещение y обращается в нуль, и граничные условия выполняются. Вместе с тем можно сказать, что выбранная функция не очень удачна, поскольку $y'' = \text{const}$. Это означает, что кривизна стержня при потере устойчивости постоянна, в то время как на самом деле она максимальна посередине и равна нулю по концам стержня.

Однако даже в этом случае, подставив (10.34) в (10.32), получим приближенное значение критической силы $F_{cr} = 12EJ/l^2$, мало отличающееся от точного значения (10.33).

Точность решения может быть резко увеличена, если учесть характер изменения изгибающего момента по длине стержня. Можно, например, принять, что по закону квадратной параболы изменяется не прогиб, а кривизна. Тогда

$$y'' = Cz(l - z).$$

После интегрирования получим

$$y' = C \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} + a \right).$$

Постоянную a подбираем так, чтобы y' обратилась в нуль посередине стержня. Тогда

$$y' = \frac{1}{12} C(6lz^2 - 4z^3 - l^3).$$

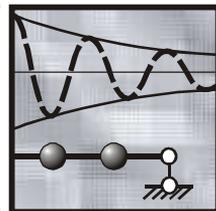
Подставляем y' и y'' в выражение (10.31) и после интегрирования находим величину

$$F_{cr} = \frac{168}{17} \frac{EJ}{l^2},$$

которая только в третьем знаке отличается от точного значения критической силы (10.33).

Таким образом, приближенным методом можно без особого труда получить достаточно точное значение критических сил.

Характерной особенностью энергетического метода является то, что ошибка в определении критических нагрузок всегда имеет один знак. Приближенное значение критической силы оказывается завышенным по сравнению с точным. Объясняется это тем, что, задаваясь приближенно формой упругой линии, мы «накладываем» на систему лишние связи и тем самым увеличиваем ее жесткость.



В предыдущих разделах рассмотрены расчеты элементов конструкций на статическую нагрузку. В реальных условиях часто приходится сталкиваться с *динамическими нагрузками*, которые меняют свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени, вызывая большие ускорения и силы инерции.

11.1 Удар

Гипотезы технической теории удара. Определение напряжений и перемещений при ударе представляет собой весьма сложную задачу механики деформируемого твердого тела. В сопротивлении материалов изучается *техническая (приближенная) теория удара*.

Рассмотрим какую-либо неподвижно закрепленную упругую систему, например балку (рисунок 11.1, а), на которую с высоты h падает груз весом $P = mg$ (m – его масса; g – ускорение свободного падения). Когда груз соприкасается с системой, происходит *удар*. От точки удара по балке распространяются возмущения с весьма большими скоростями. Однако за время достижения максимального прогиба балки эти возмущения практически затухают. Поэтому можно пренебречь влиянием соответствующих сил инерции.

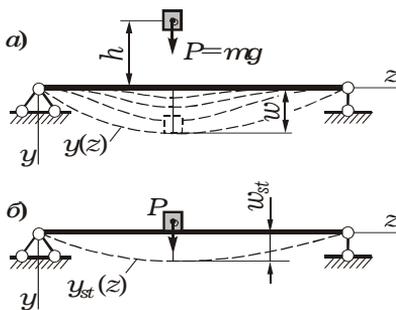


Рисунок 11.1

Для упрощения расчетов используются несколько гипотез:

- *удар считается абсолютно неупругим*: после соприкосновения с системой груз не отскакивает, а «прилипает» и далее движется вместе с ней;
- напряжения, возникающие в системе, не превышают предела пропорциональности, т. е. *выполняется закон Гука*;
- *эюра перемещений точек системы при ударе подобна эюре статических перемещений*

$$y(z) = k_d y_{st}(z), \quad (11.1)$$

где $y(z)$ – эпюра перемещений при ударе;
 k_d – динамический коэффициент при ударе, подлежащий определению;
 $y_{st}(z)$ – эпюра статических перемещений, т. е. перемещений от той же силы P , но приложенной статически.

В силу линейности для напряжений будут выполняться соотношения типа (11.1)

$$\sigma = k_d \sigma_{st}, \quad (11.2)$$

где σ , σ_{st} – напряжения от одной и той же нагрузки, приложенной динамически или статически.

Поперечный удар без учета массы системы. *Поперечным* считают удар, направление которого перпендикулярно оси системы. При этом конструкция работает на *динамический изгиб*.

Рассмотрим балку (см. рисунок 11.1, а), массой которой по сравнению с массой падающего груза можно пренебречь. Тогда гипотеза (11.1) о подобии эпюр перемещений становится точной. Это позволяет получить решение задачи об ударе, пользуясь решением задачи статики.

Пусть с высоты h на балку падает груз весом P . После соприкосновения с балкой груз движется вместе с ней и достигает нижнего положения при прогибе w . Он совершает работу, равную $P(h + w)$. В момент времени, соответствующий наибольшему прогибу балки, скорость груза равна нулю, и, следовательно, вся работа переходит в потенциальную энергию деформации системы U . Поэтому

$$U = P(h + w). \quad (11.3)$$

Если груз P прикладывается статически, то балка прогибается на величину w_{st} (см. рисунок 11.1, б). В соответствии с допущением о подобии эпюр перемещений (11.1) имеем $w = k_d w_{st}$. Следовательно, такой же по величине прогиб w можно получить под воздействием статической силы $S = k_d P$. При этом потенциальная энергия системы равна работе силы S на перемещении w :

$$U = \frac{1}{2} S w = \frac{1}{2} k_d P w. \quad (11.4)$$

Приравнявая соотношения (11.3) и (11.4), получим

$$P(h + w) = \frac{1}{2} k_d P w$$

или

$$2(h + w) = k_d w. \quad (11.5)$$

Подставив выражение $w = k_d w_{st}$ в (11.5) и разделив на ненулевую величину w_{st} , имеем квадратное уравнение для определения неизвестной величины k_d :

$$k_d^2 - 2k_d - \frac{2h}{w_{st}} = 0.$$

Отсюда

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}}. \quad (11.6)$$

В формуле (11.6) перед корнем взят знак плюс, так как динамический коэффициент не может быть отрицательным. Это соответствовало бы прогибу балки в сторону, противоположную направлению удара.

Падение груза с нулевой высоты. При $h = 0$ из формулы (11.6) получаем $k_d = 2$. Этому случаю соответствует не статическое, а внезапное (мгновенное) нагружение системы полным весом груза. Поэтому, по возможности, нужно избегать внезапных приложений нагрузки, так как при этом деформации и напряжения в системе вдвое больше, чем при статическом приложении той же нагрузки.

Падение груза с большой высоты. Если $h \gg w_{st}$, то единицами в формуле (11.5) можно пренебречь и принять

$$k_d = \sqrt{2h/w_{st}}.$$

Динамический коэффициент, а следовательно перемещения и напряжения в конструкции, можно уменьшить. Если снизить жесткость системы (например, используя упруго-податливые опоры), то статический прогиб w_{st} увеличится, за счет этого динамический коэффициент (11.5) уменьшится.

11.2 Удар по массивной упругой системе. Продольный удар

Поперечный удар с учетом массы системы. В общем случае задача достаточно сложна, поэтому в дальнейшем считаем, что масса балки m_1 сосредоточенно расположена в месте падения груза (рисунок 11.2).

Опуская соответствующий вывод, запишем формулу для динамического коэффициента при ударе с учетом массы системы

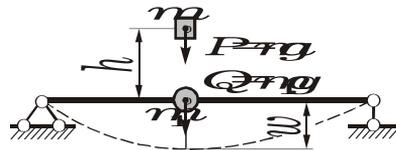


Рисунок 11.2

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}(1 + Q/P)}}, \quad (11.7)$$

где h – высота, с которой на балку падает груз весом P ;

w_{st} – статический прогиб балки под грузом;

Q – вес балки ($Q = m_1g$).

Заметим, что чем больше масса упругой системы, тем меньше динамический коэффициент.

Для определения наибольших динамических напряжений σ и перемещений y соответствующие статические величины σ_{st} , y_{st} необходимо умножить на динамический коэффициент (11.7) и добавить напряжения σ_Q и перемещения y_Q от веса системы:

$$\sigma = k_d \sigma_{st} + \sigma_Q; \quad y = k_d y_{st} + y_Q.$$

Продольный удар. *Продольным* называется удар, направление которого совпадает с осью системы. При этом конструкция работает на *динамическое сжатие*.

Рассмотрим стержень постоянного сечения (рисунок 11.3, а), на торец которого с высоты h падает груз весом P . Жесткость стержня EA должна быть достаточно большой, чтобы не допустить потери устойчивости. Статическое перемещение (рисунок 11.3, б) определяется формулой (2.8)

$$w_{st} = \Delta l = Pl/(EA).$$

Выражение для динамического коэффициента (11.6) принимает вид

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl}}.$$

Если требуется учесть собственный вес стержня, необходимо воспользоваться формулой (11.7), подставив в нее $w_{st} = Pl/(EA)$:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl(1 + Q/P)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{(P + Q)l}}.$$

Динамические напряжения и перемещения определяются так же, как при поперечном ударе.

☑ **ПРИМЕР 11.1.** Груз весом $P = 4$ кН падает на балку с высоты $h = 0,1$ м. Рассмотреть два случая закрепления балки (рисунок 11.4):

1) балка установлена на жесткие опоры;

2) одна из опор поддресорена пружиной с податливостью $c = 5$ м/МН.

Параметры балки: $l = 2$ м; $a = 0,6l = 0,6 \cdot 2 = 1,2$ м; $b = 0,4l = 0,4 \cdot 2 = 0,8$ м; материал – сталь ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па); поперечное сечение – двутавр № 18 ($J_x = 1290$ см⁴; $W_x = 143$ см³).

Требуется: вычислить динамический коэффициент и максимальные динамические напряжения σ для обеих балок, проверить выполнение условия прочности ($R = 210$ МПа), сравнить результаты.

Расчет балки на жестких опорах. Определяем реакции опор от статического воздействия силы P (рисунок 11.5, а). Для этого составляем уравнения моментов относительно точек А и В:

$$-y_A l + P b = 0; \quad y_B l - P a = 0,$$

откуда $y_A = P b / l$; $y_B = P a / l$.

Эпюра изгибающих моментов M на каждом участке прямолинейна. Ее наибольшее значение

$$M_{\max} = \frac{P a b}{l} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 0,8}{2} = 1920 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Оно определяет максимальные статические напряжения

$$\sigma_{st} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1920}{143 \cdot 10^{-6}} = 13,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,4 \text{ МПа}.$$

Определение статического прогиба. Воспользуемся методом начальных параметров¹⁾ (см. подразд. 5.11). Составим дифференциальное уравнение упругой линии на последнем участке балки для произвольного сечения с координатой z :

$$E J_x y'' = Y_A z - P(z - a).$$

После двукратного интегрирования получаем

$$E J_x y = E J_x y_0 + E J_x \theta_0 z + \frac{P b}{l} \frac{z^3}{6} - P \frac{(z - a)^3}{6}. \quad (a)$$

Здесь θ_0, y_0 – начальные параметры, т. е. угол поворота и прогиб левого сечения балки. Они определяются из условий равенства нулю прогиба на опорах: на левой (при $z = 0$) и правой (при $z = l$) опорах $y = 0$. Следовательно,

¹⁾ Вместо метода начальных параметров можно использовать метод Мора (см. подразд. 9.3) или взять готовую формулу из таблицы Б.17.

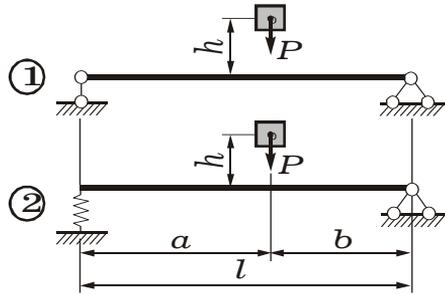


Рисунок 11.4

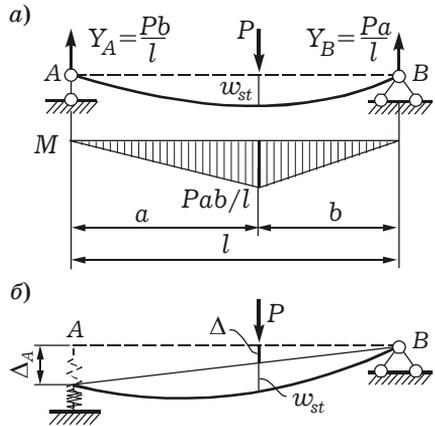


Рисунок 11.5

$$y_0 = 0; \quad 0 = EJ_x \theta_0 l + \frac{Pb}{l} \frac{l^3}{6} - P \frac{b^3}{6}.$$

$$\text{Отсюда } EJ_x \theta_0 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}.$$

Статический прогиб w_{st} находим как абсолютную величину прогиба y , подставив в формулу (а) координату $z = a$:

$$w_{st} = \frac{Pa^2 b^2}{3EJ_x}.$$

Используя исходные данные задачи, находим

$$w_{st} = \frac{Pa^2 b^2}{3EJ_x} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2 \cdot 0,8^2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 2,38 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент определяем по формуле (11.6):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{2,38 \cdot 10^{-4}}} = 30,0.$$

Наибольшее динамическое напряжение вычислим, воспользовавшись соотношением (11.2):

$$\sigma = k_d \sigma_{st} = 30 \cdot 13,4 = 402 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma > R = 210$ МПа, то условие прочности не выполняется.

Расчет балки с упруго-податливой опорой. Полный статический прогиб балки под грузом, изображенной на рисунке 11.5, б

$$w_{st}^* = w_{st} + \Delta,$$

где w_{st} – статический прогиб балки под грузом, вычисленный ранее для балки на жестких опорах;

Δ – дополнительный прогиб под грузом, образовавшийся за счет сжатия пружины.

Величину Δ найдем из подобия треугольников:

$$\Delta = \frac{\Delta_A b}{l},$$

где Δ_A – прогиб балки на левой опоре за счет сжатия пружины, который пропорционален опорной реакции (см. рисунок 1.12):

$$\Delta_A = cY_A = c \frac{Pb}{l} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_A b}{l} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8}{2} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Теперь

$$w_{st}^* = w_{st} + \Delta = 0,24 \cdot 10^{-3} + 3,2 \cdot 10^{-3} = 3,44 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$k_d^* = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}^*}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{3,44 \cdot 10^{-3}}} = 8,69,$$

$$\sigma^* = k_d^* \sigma_{st} = 8,69 \cdot 13,4 = 116 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma^* < R = 210$ МПа, то условие прочности выполняется.

Сравнение результатов. В балке с подрессоренной левой опорой наибольшие динамические напряжения уменьшились в

$$n = \sigma / \sigma^* = 402 / 116 = 3,46 \text{ раза.}$$

Замечание. Если груз падает на правый консольный конец балки (рисунок 11.6), то реакции опор

$$Y_A = \frac{Pb}{a}; \quad Y_B = \frac{Pl}{a}.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJ_x y'' = -Y_A z + Y_B (z - a).$$

После двукратного интегрирования получаем

$$EJ_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z - \frac{Pb}{a} \frac{z^3}{6} + \frac{Pl}{a} \frac{(z-a)^3}{6}. \quad (б)$$

Начальные параметры θ_0 , y_0 определяются из условий равенства нулю прогиба на опорах: $y = 0$ при $z = 0$ и $z = a$. Следовательно,

$$y_0 = 0; \quad 0 = EJ_x \theta_0 a - \frac{Pb}{a} \frac{a^3}{6}.$$

Отсюда

$$EJ_x \theta_0 = \frac{Pba}{6}.$$

Статический прогиб w_{st} находим как абсолютную величину перемещения y , подставив в формулу (б) координату правого конца балки $z = l$:

$$w_{st} = \frac{Pb^2(a+b)}{3EJ_x}. \quad (в)$$

Если груз падает на левый консольный конец балки, то для вычисления статического прогиба w_{st} можно применять формулу (в), поменяв параметры a и b местами.

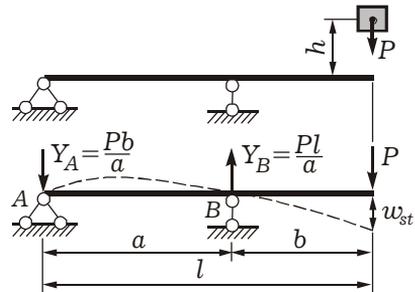


Рисунок 11.6

11.3 Свободные колебания систем с одной степенью свободы

Число степеней свободы упругой системы называется количество независимых параметров, определяющих положение этой системы при колебаниях.

На рисунке 11.7 показаны упругие системы, у которых вес грузов во много раз превышает вес балок. Если массой балки пренебречь, то для описания движения системы, показанной на рисунке 11.7, а, понадобится одна координата y , например прогиб, для системы на рисунке 11.7, б – две координаты y_1 и y_2 . В дальнейшем исследуем упругие системы с одной степенью свободы, т. е. движение которых описывается одной координатой.

Рассмотрим невесомую (безынерционную) упругую балку (рисунок 11.8, а), к которой прикреплен груз массой m ($P = mg$ – вес груза). Предположим, что она по какой-то причине выведена из состояния статического равновесия и совершает колебания. Колебательные движения упругой системы, происходящие без воздействия внешних переменных (возмущающих) сил, называются свободными колебаниями.

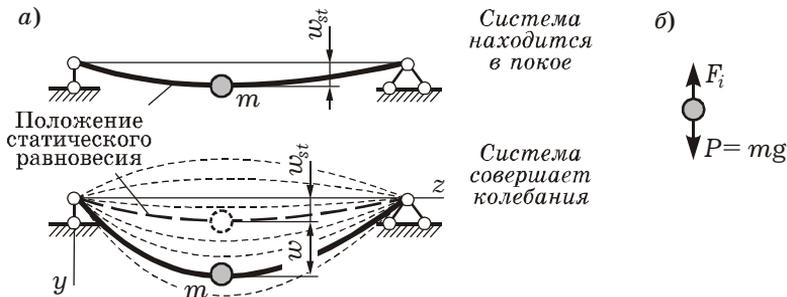


Рисунок 11.8

Применим известный из теоретической механики принцип Д'Аламбера: всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силы инерции. На основании этого принципа можно считать, что в каждый момент времени на балку со стороны груза действует сила веса P и сила инерции F_i (рисунок 11.8, б). Они вызывают прогиб балки в точке закрепления груза:

$$w_{st} + w = (P + F_i)\delta,$$

где w_{st} – статический прогиб балки под действием веса груза;
 w – отклонение от положения статического равновесия;
 δ – прогиб балки от единичной силы.

Ось координат y направляем вниз. Прогиб w обусловлен действием силы инерции, поэтому

$$w = F_i \delta.$$

Сила инерции тела равна его массе, умноженной на ускорение, и направлена противоположно ускорению:

$$F_i = -m \frac{d^2 w}{dt^2} = -m \ddot{w} = -\frac{P}{g} \ddot{w}.$$

Здесь и в дальнейшем каждая точка сверху обозначает операцию дифференцирования по времени.

Подставив силу инерции в предшествующее соотношение, получим уравнение движения

$$\frac{P\delta}{g} \ddot{w} + w = 0. \quad (11.8)$$

Введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{g}{P\delta}. \quad (11.9)$$

Используя его в (11.8), получим *дифференциальное уравнение свободных колебаний упругой системы с одной степенью свободы* в каноническом виде:

$$\ddot{w} + \omega^2 w = 0. \quad (11.10)$$

Общее решение уравнения (11.10) имеет вид

$$w = A \cos(\omega t + B). \quad (11.11)$$

Это выражение называется *уравнением свободных колебаний* системы с одной степенью свободы. Здесь постоянные интегрирования A и B определяются из начальных условий движения – прогиба и скорости балки в начальный момент времени ($t = 0$). Наибольший прогиб A (перемещение от положения статического равновесия) называется *амплитудой свободных колебаний*; величина $\omega t + B$ – *фазой колебаний*, а B – *сдвигом фазы*.

Из уравнения (11.11) следует, что значения прогибов w периодически повторяются через промежуток времени $2\pi/\omega$. Следовательно, за время $2\pi/\omega$ система совершает одно полное колебание, а за 2π секунд – ω колебаний.

Величина ω называется *частотой свободных колебаний* (*круговой частотой*) и представляет собой число свободных колебаний, совершаемых системой за время 2π секунд.

Промежуток времени T , за который система совершает одно свободное колебание, называется *периодом свободных колебаний*. Очевидно, что

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{P\delta / g}.$$

Период колебаний измеряется в секундах s , а частота – в секундах в минус первой степени (s^{-1}).

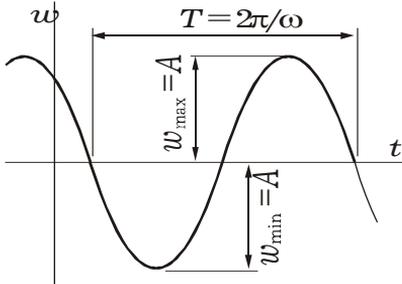


Рисунок 11.9

График свободных колебаний будет иметь вид, изображенный на рисунке 11.9. На нем показаны амплитуда A и период колебаний T .

Выражения для скорости v и ускорения a груза P получим после соответствующего дифференцирования прогиба (11.11):

$$v = \dot{w} = -A\omega \sin(\omega t + B);$$

$$a = \ddot{w} = -A\omega^2 \cos(\omega t + B).$$

☐ **ПРИМЕР 11.2.** Получить уравнение движения и параметры колебаний упругой системы (рисунок 11.10), если в начальный момент времени груз P смещен вниз на величину c и отпущен без начальной скорости.

При $t = 0$ имеем

$$w = c, \quad \dot{w} = v = 0.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (11.11), получим систему для определения констант A и B :

$$c = A \cos(\omega \cdot 0 + B); \quad \dot{w} = -A\omega \sin(\omega \cdot 0 + B) = 0.$$

Отсюда

$$\sin B = 0; \quad B = 0; \quad c = A \cos B; \quad A = c.$$

Уравнение свободных колебаний принимает вид

$$w = c \cos \omega t.$$

Используя таблицу Б.17, при $P = 1$ получаем прогиб

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EJ_x} \Big|_{P=1} = \frac{l^3}{48EJ_x}.$$

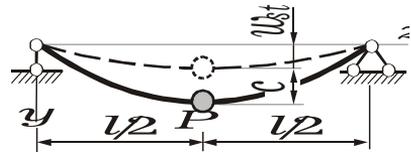


Рисунок 11.10

Частота свободных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}} = \sqrt{\frac{48EJ_x g}{Pl^3}}.$$

Для нахождения наибольших нормальных напряжений σ_{\max} определим изгибающий момент

$$M_{\max} = (F_i + P)l/4.$$

Здесь максимальная сила инерции F_i следует из соотношения (11.7)

$$F_i = w/\delta = 48cEJ_x / l^3.$$

В результате

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \left(\frac{48cEJ_x}{l^3} + F \right) \frac{l}{4W_x},$$

где W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

11.4 Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

Рассмотрим колебания невесомой системы с прикрепленным к ней грузом P , вызванные действием внешней возмущающей силы $S(t)$ (рисунок 11.11), т. е. *вынужденные колебания системы с одной степенью свободы*. Предположим, что внешняя сила приложена в том же сечении, в котором прикреплен груз P , и что величина ее изменяется по периодическому закону

$$S(t) = S \sin(\varphi t). \quad (11.12)$$

Здесь S – наибольшее значение возмущающей силы; φ – ее частота (круговая частота).

Прогиб w системы от положения статического равновесия является результатом воздействия силы инерции и возмущающей силы:

$$w = (F_i + S \sin(\varphi t))\delta.$$

Подставляя сюда выражение для силы инерции, вводя частоту свободных колебаний $\omega^2 = g/P\delta$ и коэффициент $q = gS/P$, приведем к каноническому виду *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний упругой системы с одной степенью свободы*:

$$\ddot{w} + \omega^2 w = q \sin(\varphi t). \quad (11.13)$$

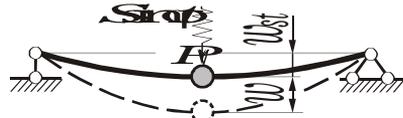


Рисунок 11.11

Его общее решение называют *уравнением вынужденных колебаний*. При $\varphi \neq \omega$ оно имеет вид

$$w = A \cos(\omega t + B) + \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2} \sin(\varphi t). \quad (11.14)$$

Здесь первое слагаемое определяет *свободные колебания* системы, которые обычно быстро затухают, второе – *вынужденные установившиеся колебания*, которые имеют ту же частоту φ , что и возмущающая сила. Амплитуда свободных колебаний равна A , а амплитуда A_0 вынужденных колебаний – коэффициенту перед второй гармоникой, т. е.

$$A_0 = \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2}.$$

Умножив числитель и знаменатель этого выражения на δ и учитывая выражение для q , получим

$$A_0 = S\delta \frac{g}{P\delta(\omega^2 - \varphi^2)} = S\delta \frac{\omega^2}{\omega^2 - \varphi^2}.$$

Обозначим $w_{st}^S = S\delta$ – статический прогиб системы по направлению силы S от действия этой силы. Тогда

$$A_0 = w_{st}^S \frac{1}{1 - \varphi^2 / \omega^2} = w_{st}^S k_d. \quad (11.15)$$

Здесь k_d – *динамический коэффициент вынужденных колебаний* (коэффициент нарастания амплитуды)

$$k_d = \frac{1}{1 - \varphi^2 / \omega^2}. \quad (11.16)$$

Рассмотрим выражение (11.16). Если частота возмущающей силы больше частоты свободных колебаний ($\varphi > \omega$) и возрастает, то динамический коэффициент, а следовательно и амплитуда вынужденных колебаний, уменьшаются (рисунок 11.12). В этом случае сдвиг фаз составляет величину π , и колебания происходят в противофазе с возмущающей силой. Это значит, что если возмущающая сила максимальна и направлена вниз, то колеблющийся груз достигает своего максимального отклонения вверх. При $\varphi \gg \omega$ амплитуда становится малой по сравнению со статическим прогибом балки от веса груза, и систему можно рассматривать как неподвижную.

В случае $\varphi < \omega$ вынужденные колебания и возмущающая сила находятся в одной фазе, т. е. их максимумы и направления совпадают.

Если $\varphi = \omega$, тогда частное решение уравнения (11.13) необходимо принимать в виде

$$w = At \cos(\varphi t).$$

Амплитуда колебаний в этом случае с течением времени неограниченно возрастает, динамический коэффициент обращается в бесконечность. Этот случай, называемый *резонансом*, представляет особую опасность для сооружения.

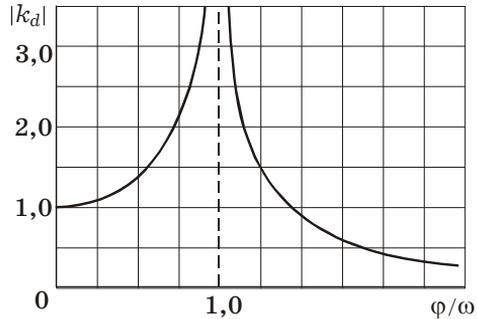


Рисунок 11.12

Для определения динамических напряжений следует найти напряжения от статически приложенной силы S и умножить их на динамический коэффициент. Прибавив к ним напряжения от статической силы P , получим значения полных напряжений в упругой системе.

✓ ПРИМЕР 11.3. Стенд для исследования колебательных процессов имеет вибрационное устройство весом $P = 12$ кН, его вал вращается со скоростью $n = 1200$ об/мин. Вследствие неуравновешенности вращающихся частей на двутавровую (№ 18, $J_x = 1290$ см⁴; $W_x = 143$ см³) балку длиной $l = 2$ м действует также центробежная сила $F_i = 2$ кН. Модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Для заданной расчетной схемы (рисунок 11.13) определить:

- статический прогиб балки от веса P ;
- частоту свободных колебаний балки;
- частоту вынужденных колебаний и динамический коэффициент;
- постоянную составляющую напряжения от действия веса P ;

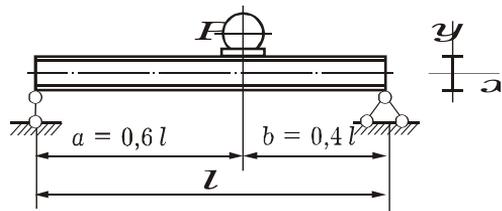


Рисунок 11.13

- динамическую составляющую напряжений (амплитудное напряжение) от действия возмущающей силы F_i ;
- установить вид цикла изменения напряжений и его основные характеристики (максимальное, минимальное, стационарное и амплитудное значения) σ_{\max} , σ_{\min} , σ_m , σ_a , а также изобразить цикл графически;
- определить число оборотов вала виброустройства, при котором система войдет в резонанс.

Статический прогиб балки от веса P определяем по формуле (см. пример 11.1 или таблицу Б.17)

$$w_{st} = \frac{Pa^2b^2}{3lEJ_x} = \frac{12 \cdot 10^3 (0,6 \cdot 2)^2 (0,4 \cdot 2)^2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 7,14 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Частота свободных колебаний балки

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}} = \sqrt{\frac{g}{w_{st}}} = \sqrt{\frac{9,8}{7,14 \cdot 10^{-4}}} = 117 \text{ с}^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний φ определяется по круговой скорости вращения вала:

$$\varphi = \pi n / 30 = 3,14 \cdot 1200 / 30 = 126 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент вычисляем в соответствии с формулой (11.16):

$$k_d = \frac{1}{1 - \varphi^2 / \omega^2} = \frac{1}{1 - 126^2 / 117^2} = -6,26.$$

Постоянная составляющая часть напряжений от действия веса P

$$\sigma_{st}^P = \frac{M_{\max}^P}{W_x} = \frac{Pab}{W_x l} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 0,4 \cdot 2}{143 \cdot 10^{-6} \cdot 2} = 40,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40,3 \text{ МПа.}$$

Максимальная динамическая составляющая часть напряжений от действия возмущающей силы F_i определяется как произведение статической составляющей напряжений от этой силы на динамический коэффициент:

$$\begin{aligned} \sigma_d^{F_i} &= \sigma_{st}^{F_i} k_d = \frac{M_{\max}^{F_i}}{W_x} k_d = \frac{F_i ab}{W_x l} k_d = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,6 \cdot 2 \cdot 0,4 \cdot 2}{143 \cdot 10^{-6} \cdot 2} (-6,26) = \\ &= -42 \cdot 10^6 \text{ Па} = -42 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Так как центробежная сила в начальный момент равна нулю и действует периодически, то полное напряжение будет изменяться циклически по следующему закону:

$$\sigma = \sigma_{st}^P + \sigma_d^{F_i} \sin(\varphi t) = \sigma_{st}^P + k_d \sigma_{st}^{F_i} \sin(\varphi t).$$

Подставляя сюда вычисленные ранее значения напряжений, получаем

$$\sigma = 40,3 - 42 \sin(126 t).$$

Цикл изменения напряжений несимметричный, его основные характеристики (*максимальное, минимальное, стационарное и амплитудное значения*) следующие:

$$\sigma_{\max} = 82,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = -1,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2 = 40,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = 42 \text{ МПа.}$$

Изображаем цикл графически (рисунок 11.14).

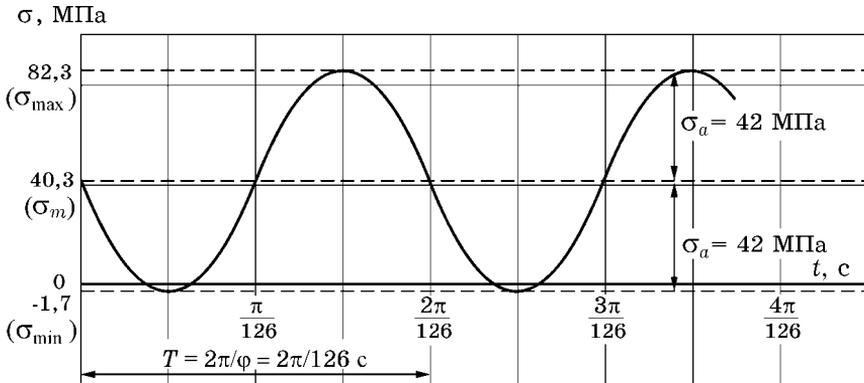


Рисунок 11.14

Система войдет в резонанс, если совпадут частоты вынужденных и свободных колебаний: $\varphi_1 = \omega$. Тогда резонансная скорость вращения вала

$$n_p = 30\varphi_1/\pi = 30\omega/\pi = 30 \cdot 117/3,14 = 1117 \text{ об/мин.}$$

11.5 Рассеяние энергии при колебаниях

Рассмотрим свободные колебания упругой системы с одной степенью свободы в вязкой среде, вызывающей *затухание колебаний* (*рассеяние энергии*). Обычно возникающие силы сопротивления принимаются прямо пропорциональными скорости перемещения системы в рассматриваемый момент времени:

$$R = -\alpha v = -\alpha \dot{w}, \quad (11.17)$$

где α – коэффициент пропорциональности. Знак минус указывает на то, что сила сопротивления направлена обратно скорости перемещения.

Прогиб w системы от положения статического равновесия является результатом воздействия сил инерции и сопротивления:

$$w = (F_i + R)\delta.$$

Подставляя сюда силу инерции $F_i = -P\ddot{w}/g$ и выражение (11.17), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний упругой системы с учетом рассеяния энергии:

$$\ddot{w} + 2n\dot{w} + \omega^2 w = 0, \quad (11.18)$$

где $\omega^2 = g/P\delta$; $2n = \alpha g/P^2$.

Введем обозначение

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2. \quad (11.19)$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (11.18), т. е. *уравнение свободных колебаний упругой системы с одной степенью свободы в вязкой среде*, можно представить в виде

$$w = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + B), \quad (11.20)$$

где e – трансцендентное число; приблизительно $e = 2,718$.

Из этого уравнения следует, что рассматриваемая система будет совершать колебания с частотой ω_1 (11.19) и периодом

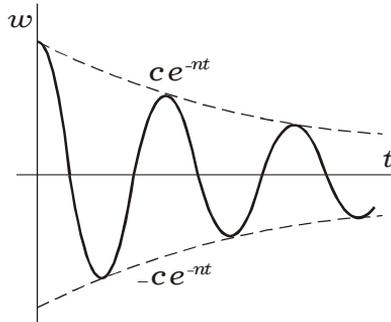
$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}. \quad (11.21)$$

Анализируя решение (11.20), видим, что из-за множителя e^{-nt} (*параметра затухания* n) амплитуда свободных колебаний со временем убывает. Постоянные интегрирования A и B определяются из начальных условий движения.

В частном случае, если в начальный момент времени $t = 0$ задан прогиб $w_0 = c$, а начальная скорость $\dot{w}_0 = 0$ (см. пример 11.2), то из решения (11.20) получаем

$$w = ce^{-nt} \cos \omega_1 t.$$

График соответствующего прогиба показан на рисунке 11.15. Уравнения верхней и нижней огибающих графика (виброграммы) соответственно



$$w = ce^{-nt}; \quad w = -ce^{-nt}.$$

Степень затухания системы зависит от величины постоянной n . Амплитуда колебаний с течением времени уменьшается, и ее значение для k -го цикла ($t = kT_1$) составляет величину

$$A_k = Ae^{-knT_1},$$

где T_1 – период колебаний в вязкой среде (11.21).

Отношение последующей амплитуды к предыдущему значению через один период ($t = (k + 1)T_1$)

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{Ae^{-(k+1)nT_1}}{Ae^{-knT_1}} = e^{-nT_1}.$$

Следовательно, полуразмахи колебаний убывают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой e^{-nT_1} называется *декрементом колебаний*.

Соответственно величину

$$D = |\ln e^{-nT_1}| = nT_1$$

называют *логарифмическим декрементом*.

В технике, например для турбинных лопаток, декремент составляет величину порядка 0,03, т. е. 3 %.

Кроме сил сопротивления, пропорциональных скорости движения, затухание колебаний (демпфирование) в реальных конструкциях может обуславливаться и другими причинами, в частности, потерями на рассеяние энергии в самой упругой системе. Величина этих потерь пропорциональна не скорости, а амплитуде колебаний. Другим распространенным источником потерь энергии при колебаниях является рассеяние энергии за счет сил трения в сочленениях элементов конструкций, утечки энергии в фундамент и т. д.

11.6 Вынужденные колебания с учетом сопротивления среды

Рассмотрим вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы при наличии сил сопротивления, пропорциональных скорости (11.17). В этом случае в дополнение к силе сопротивления $R = -\alpha\dot{w}$ на груз в вертикальном направлении будет действовать некоторая периодическая возмущающая сила (11.12) $S(t) = S \sin(\omega t)$. Прогиб w системы от положения статического равновесия является результатом воздействия этих сил и силы инерции:

$$w = (F_i + R + S \sin(\omega t)) \delta. \quad (11.22)$$

Подставляя в (11.22) выражение для силы инерции $F_i = -P\ddot{w}/g$, вводя частоту свободных колебаний $\omega^2 = g/P\delta$, коэффициенты $2n = \alpha g/P$ и $q = gS/P$, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением

$$\ddot{w} + 2n\dot{w} + \omega^2 w = q \sin(\omega t). \quad (11.23)$$

Общее решение этого уравнения найдем, если к решению соответствующего однородного уравнения (11.18) добавим частное решение уравнения (11.23)

$$w = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) + w^*. \quad (11.24)$$

Частное решение примем в виде

$$w^* = K \sin(\varphi t) + L \cos(\varphi t),$$

где константы K и L подлежат определению. Так как

$$\dot{w}^* = K\varphi \cos(\varphi t) - L\varphi \sin(\varphi t),$$

$$\ddot{w}^* = -K\varphi^2 \sin(\varphi t) - L\varphi^2 \cos(\varphi t),$$

то, подставив выражения для w^* , \dot{w}^* , \ddot{w}^* в дифференциальное уравнение (11.23) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках правой и левой частей, получим для определения искомого констант систему двух алгебраических уравнений:

$$-L\varphi^2 + 2K\varphi n + L\omega^2 = 0,$$

$$-K\varphi^2 - 2L\varphi n + K\omega^2 = q.$$

Ее решение

$$K = \frac{q(\omega^2 - \varphi^2)}{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2 n^2}, \quad L = -\frac{2q\varphi n}{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2 n^2}. \quad (11.25)$$

Уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением будет следующим:

$$w = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) + K \sin(\varphi t) + L \cos(\varphi t), \quad (11.26)$$

где ω_1 — частота свободных колебаний в среде с сопротивлением (11.19);

K , L — определены соотношениями (11.25).

Первое слагаемое в решении (11.26) характеризует *свободные колебания* и за счет множителя e^{-nt} со временем уменьшается (затухает). Два других слагаемых, пропорциональных q , характеризуют *вынужденные колебания* и являются незатухающими. Частота этих колебаний совпадает с частотой φ возмущающей силы. Амплитуда пропорциональна величине вынуждающей силы и зависит от параметра затухания n , а также от соотношения частот собственных и вынужденных колебаний. В этом нетрудно убедиться, если ввести замену

$$K = A_0 \cos \alpha; \quad -L = A_0 \sin \alpha. \quad (11.27)$$

Тогда для вынужденных колебаний из (11.26) получаем

$$w = Ae^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) + A_0 \sin(\varphi t - \alpha).$$

Угол сдвига фаз α можно определить делением второго уравнения на первое в соотношениях (11.27):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\varphi n}{\omega^2 - \varphi^2}.$$

Выражение для амплитуды вынужденных колебаний A_0 получим, если соотношения (11.27) возвести в квадрат, сложить между собой левые и правые части:

$$A_0 = \sqrt{K^2 + L^2} = \frac{\sqrt{4q^2\varphi^2n^2 + q^2(\omega^2 - \varphi^2)^2}}{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2n^2} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2n^2}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на δ (прогиб от единичной силы) и учитывая, что $q = gS/P$, $\omega^2 = g/P\delta$, получим

$$A_0 = \frac{gS\delta}{P\delta\sqrt{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2n^2}} = \frac{S\delta\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \varphi^2)^2 + 4\varphi^2n^2}}.$$

Обозначим статический прогиб от силы S , как и ранее, через $w_{st}^S = S\delta$ и разделим числитель и знаменатель на ω^2 ; тогда

$$A_0 = \frac{w_{st}^S}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\varphi^2n^2}{\omega^4}}} = k_d w_{st}^S,$$

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\varphi^2n^2}{\omega^4}}}, \quad (11.28)$$

где k_d — динамический коэффициент (коэффициент нарастания амплитуды) для вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды.

11.7 Резонансные кривые

На рисунке 11.16 показаны так называемые резонансные кривые, построенные в соответствии с формулой (11.28). Они наглядно иллюстрируют зависимость динамического коэффициента, а следовательно, и амплитуды резонансных колебаний от соотношения частот φ/ω и демпфирующих характеристик системы (коэффициента $\gamma = 2n/\omega$).

Рассмотрим кривую $\gamma = 0$, соответствующую отсутствию сопротивления среды. При $\varphi/\omega = 1$ динамический коэффициент стремится к бесконечности. Следовательно, при приближении частоты возмущающей силы к частоте свободных колебаний амплитуда колебаний и напряжения в упругой системе при отсутствии сопротивления начинают неограниченно возрастать. Этот случай называется *резонансом* и представляет собой особую опасность для механической системы.

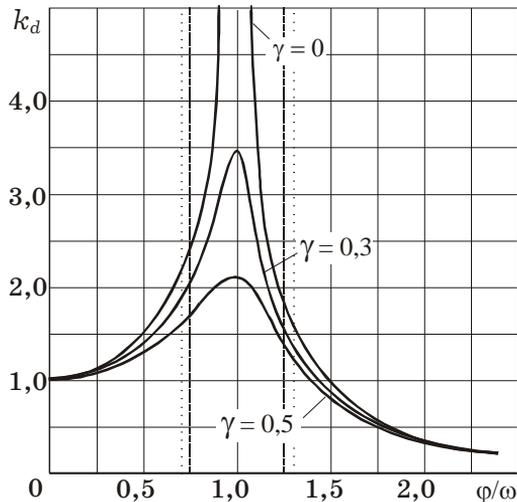


Рисунок 11.16

Конечно, напряжения в упругом теле не могут возрастать до бесконечности. При достижении предела текучести σ_u появляются пластические деформации, которые останавливают рост напряжений, но могут привести в итоге к разрушению. Поведение упруго-пластических систем в окрестности резонанса представляет собой отдельную интересную, но и сложную в математическом плане проблему.

У остальных кривых на рисунке 11.16 в силу наличия сопротивления среды ординаты при резонансе конечны и равны $\omega / 2n$. С увеличением демпфирующих характеристик (коэффициента n) пик резонанса уменьшается. Если частота φ возмущающей силы значительно отличается от частоты ω , то величина динамического коэффициента практически не зависит от наличия сопротивления.

При расчете конструкций, находящихся под действием периодически изменяющихся сил, часто основной задачей является отстройка от резонанса. Это достигается обеспечением достаточного

различия между частотой свободных колебаний ω и частотой φ возмущающей нагрузки. Обычно исходят из требований, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\varphi \leq 0,7\omega \text{ или } \varphi \geq 1,3\omega.$$

Таким образом, в процессе эксплуатации машины либо не достигают резонанса, либо проходят его в процессе разгона. Для этого конструкции делают либо *более жесткими*, и тогда за счет увеличения частоты свободных колебаний резонансная кривая (1) сдвигается *вправо* (2), либо *более мягкими*, и кривая сдвигается *влево* (3) (рисунок 11.17).

Последний «мягкий» эффект наблюдается и при колебаниях *упругоэластических систем*, т. к. с появлением пластических деформаций система становится менее жесткой.

При *учете веса* любая конструкция является системой с *бесконечно большим числом степеней свободы*. Однако приближенный расчет можно выполнить как расчет системы с одной степенью свободы.

Для этого вес конструкции сосредоточивается в некоторой точке (представляется в виде груза). При вынужденных колебаниях эта точка принимается совпадающей с местом приложения внешней нагрузки.

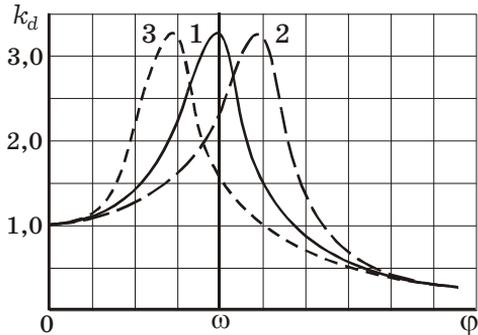


Рисунок 11.17

11.8 Крутильные колебания вала с одной степенью свободы

Рассмотрим простейший случай крутильных колебаний цилиндрического вала постоянного поперечного сечения диаметра d с одним заземленным концом. На свободном конце вала имеется диск диаметром D , толщиной h и плотностью материала ρ (рисунок 11.18). Приложив к диску какой-нибудь скручивающий момент и внезапно сняв этот момент, приведем систему в колебательное движение.

По аналогии с изгибным движением применим для крутильных колебаний уравнение (11.8):

$$\ddot{w} + \frac{g}{P\delta} w = 0.$$

Для вращательного движения величину w следует заменить углом поворота φ , а вместо массы груза P/g ввести полярный момент инерции массы диска J_m относительно оси вала; δ будет единичным угловым перемещением диска, т. е. углом закручивания вала при приложении единичного момента.

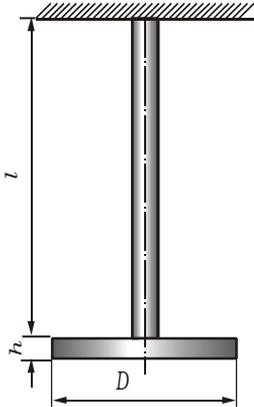


Рисунок 11.18

В соответствии с формулами полного угла закручивания (3.19), полярного момента инерции стержня и полярного момента инерции массы диска имеем

$$\delta = \frac{1l}{GJ_p}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$J_m = \int_A \rho h r^2 dA = \rho h \frac{\pi D^4}{32}.$$

Тогда дифференциальное уравнение крутильных колебаний

$$\ddot{\varphi} + p^2 \varphi = 0, \quad (11.29)$$

где p — угловая частота крутильных колебаний,

$$p^2 = \frac{1}{J_m \delta} = \frac{GJ_p}{J_m l} = \frac{Gd^4}{\rho h l D^4}.$$

Решая (11.29), получаем уравнение крутильных колебаний

$$\varphi = A \cos(pt + B). \quad (11.30)$$

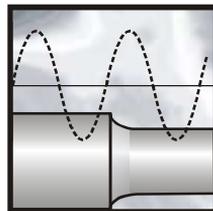
Период свободных крутильных колебаний, в соответствии с (11.30),

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{J_m \delta} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho h l D^4}{Gd^4}}.$$

Как и в случае изгибных колебаний, опасное для прочности вала явление *резонанса* наступит, если угловая скорость вращения вала будет совпадать с угловой частотой p собственных крутильных колебаний.

12

ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ



Если внешние нагрузки многократно (до нескольких миллионов раз) изменяют со временем значение или значение и знак, то они называются *повторно-переменными*.

При повторно-переменных нагрузках работает большинство деталей машин и механизмов, например, детали кривошипно-шатунного механизма, оси железнодорожных вагонов, коленчатые валы и т. д. Практика показывает, что под действием таких нагрузок элементы конструкций разрушаются при значительно меньших напряжениях, чем под действием статических нагрузок.

12.1 Усталость материалов.

Характеристики циклов напряжений

Напряжения, возникающие в элементах конструкций при повторно-переменных нагрузках, периодически меняются во времени t . Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период их изменения T называется *циклом*.

Понятие об усталости и выносливости материалов. Практикой установлено, что если элемент конструкции многократно подвергать переменному нагружению определенного уровня, то после некоторого числа циклов в нем появится *трещина*, которая постепенно будет развиваться. В результате деталь разрушится, не дав при этом заметных остаточных деформаций даже в том случае, когда ее материал высокопластичен.

Число циклов до появления первой трещины и до полного разрушения стержня будет тем больше, чем меньше напряжение. Характерно, что разрушение материала под действием повторно-переменных нагрузок может произойти при напряжениях ниже предела текучести. Разрушение материала под действием повторно-переменных напряжений называется *разрушением от усталости*¹⁾.

¹⁾ Термин «усталость» сохранился с первой половины XIX века, когда бытовало ошибочное мнение, что металл под влиянием переменных напряжений перерождается, превращается из пластичного «волокнистого» в хрупкий «зернистый». В действительности процесс усталостного разрушения не сопровождается структурными изменениями, но терминология укоренилась.

Усталостью материалов (в частности, металлов) называют явление разрушения в результате постепенного накопления в них повреждений, приводящих к возникновению усталостной трещины при многократном повторении нагружений.

Способность металлов сопротивляться разрушению при действии повторно-переменных напряжений называется *выносливостью*.

Из большого числа факторов, влияющих на сопротивление усталости, наиболее существенна концентрация напряжений (см. подразд. 12.4). В местах, где возникают наибольшие напряжения (обычно в зонах изменения сечения или нарушения поверхностного слоя), образуется трещина. Ее зарождение, однако, еще не свидетельствует о потере несущей способности конструкции, которая после этого может выдержать до нескольких миллионов циклов. При однородном напряженном состоянии появлению видимой трещины предшествует 85–90 % общего числа циклов и лишь 10 % приходится на завершающую стадию разрушения.

Трещина то раскрывается, то закрывается (рисунок 12.1). При закрытии ее неровные поверхности надавливают друг на друга, обминаются и сглаживаются. По мере возрастания числа циклов трещина постепенно проникает внутрь, еще более увеличивая концентрацию напряжений (на концах трещины возникает объемное напряженное состояние).

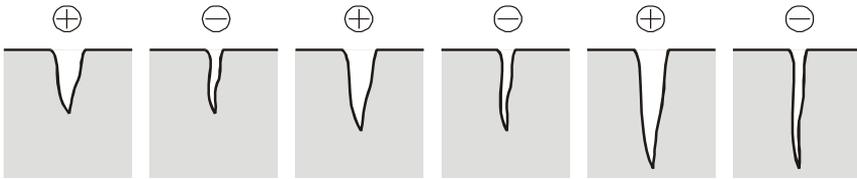


Рисунок 12.1

Когда напряжения в неразрушенной части сечения, воспринимающей всю нагрузку, окажутся настолько большими, что материал не сможет их выдержать, произойдет внезапное неуправляемое разрушение.

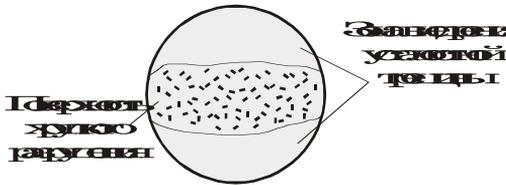


Рисунок 12.2

Картина излома имеет своеобразный вид (рисунок 12.2). На образце отчетливо видна гладкая, иногда отполированная зона внедрения усталостной трещины и резко отличающаяся от нее шероховатая поверхность типично хрупкого разрушения.

Изучение вопросов усталости в сопротивлении материалов имеет чрезвычайно большое значение. Многие ответственные детали, такие как оси вагонов, коленчатые валы, шатуны моторов, выходят из строя главным образом из-за разрушения усталостного характера. В настоящее время исследования по теории сопротивления усталости идут по пути *накопления экспериментальных фактов*, из совокупности которых выбираются подходящие правила для соответствующих расчетов.

Характеристики циклов напряжений. Рассмотрим случай одноосного напряженного состояния. Закон изменения главного напряжения σ во времени представлен кривой, показанной на рисунке 12.3.

Основными характеристиками циклов напряжений являются:

- *наибольшее напряжение* σ_{\max} ;
- *наименьшее напряжение* σ_{\min} ;
- *среднее напряжение*

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

- *амплитуда*

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

- *коэффициент асимметрии цикла*

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

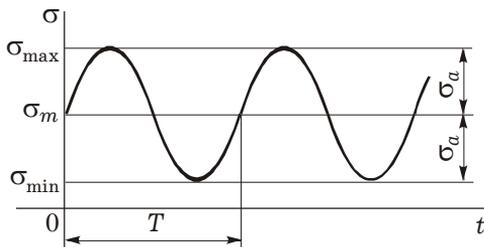
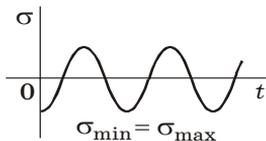


Рисунок 12.3

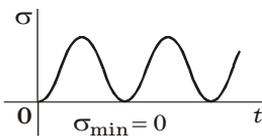
Виды циклов. Если $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, то $R_\sigma = -1$ и цикл называется *симметричным* (рисунок 12.4, а). В остальных случаях циклы являются асимметричными.

При $\sigma_{\max} = 0$ или $\sigma_{\min} = 0$ цикл называется *пульсационным*. Для пульсационного цикла $R_\sigma = 0$ (*отнулевой цикл*) или $R_\sigma = \infty$ (рисунок 12.4, б, в).

а)



б)



в)

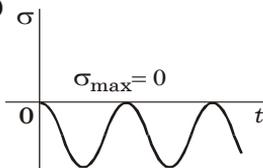


Рисунок 12.4

Циклы, имеющие одинаковые коэффициенты асимметрии R_σ , называются *подобными*.

Если алгебраические знаки напряжений σ_{\max} и σ_{\min} одинаковы, цикл называется *знакопостоянным* (*однозначным*); если знаки разные – *знакопеременным*.

Любой цикл может быть представлен как результат наложения постоянного напряжения σ_m на напряжение, меняющееся по симметричному циклу с амплитудой σ_a (см. рисунок 12.3).

Процесс образования трещины при переменных напряжениях связан с накоплением пластических деформаций. Поэтому усталостное разрушение определяется только наибольшими и наименьшими напряжениями цикла и не зависит от закона изменения напряжений внутри интервала $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$. Следовательно, циклы, показанные на рисунке 12.5, являются равноценными.

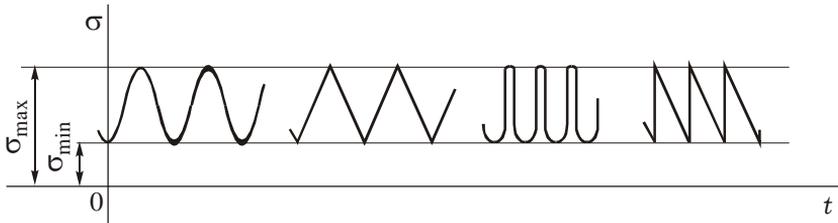


Рисунок 12.5

Точно так же, как показывают опыты, несущественной является частота изменения напряжений (до 5000 циклов в минуту). Исключения представляют испытания при высоких температурах, а также при воздействии коррозионной среды. В этих случаях уменьшение частоты приводит к снижению сопротивления усталости.

В итоге для оценки усталостного разрушения в условиях заданного цикла достаточно знать только величины напряжений σ_{\max} и σ_{\min} или σ_m и σ_a .

Практика показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа циклов может наступить усталостное разрушение детали, в то время как при том же неизменном во времени напряжении разрушения не происходит. Число циклов до разрушения в основном зависит от величины σ_a и меняется в весьма широких пределах. При больших напряжениях для разрушения бывает достаточно 5–10 циклов. При меньших напряжениях деталь выдерживает миллионы циклов, а при еще меньших – способна работать неограниченно долго.

☑ **ПРИМЕР 12.1.** Для оси вагона, показанной на рисунке 12.6, установить цикл изменения напряжений.

Строим эпюру изгибающих моментов. В точке А поперечного сечения (рисунок 12.7, а) имеем

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y.$$

Расстояние y от точки A до нейтральной оси меняется во времени по закону

$$y = \frac{D}{2} \sin(\omega t),$$

где ω — угловая скорость вращения колеса.

Следовательно,

$$\sigma(t) = \frac{FaD}{2J_x} \sin(\omega t).$$

Таким образом, нормальные напряжения в сечениях оси меняются по синусоиде (рисунок 12.7, б) с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{FaD}{2J_x}.$$

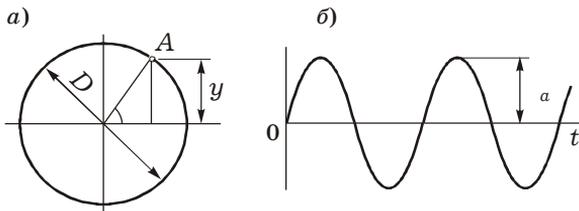


Рисунок 12.6

Рисунок 12.7

12.2 Кривые усталости. Предел выносливости материалов

Испытания на выносливость. Наиболее распространенными являются испытания в условиях симметричного цикла. При этом обычно во вращающемся образце создается чистый изгиб. Для проведения стандартных испытаний на усталость необходимо иметь не менее десятка одинаковых образцов. Это позволяет определить число циклов, которое они выдержат до разрушения, в зависимости от заданного напряжения.

Техника определения этой зависимости не содержит принципиальных трудностей, но сам процесс оказывается достаточно длительным. Поэтому испытания ведутся, как правило, на нескольких машинах.

Половину образцов испытывают при относительно высоких напряжениях, составляющих $0,5-7\sigma_u$ (предела прочности). При большем напряжении образец, естественно, выдерживает меньшее число циклов. С уменьшением напряжения число цик-

лов N растет очень быстро, поэтому полученные точки зависимости $N = f(\sigma)$ (*кривая усталости*) удобно откладывать в полулогарифмической шкале (рисунок 12.8).

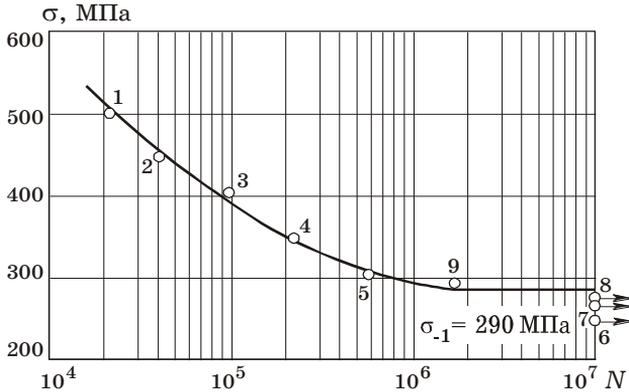


Рисунок 12.8

Опыт испытаний стальных образцов при нормальной температуре показывает, что если образец не разрушился до 10^7 циклов (это примерно 54 часа работы при скорости 3000 оборотов в минуту), то образец не разрушится и при более длительном эксперименте.

Число циклов N , до которого ведется испытание, называется *базой испытаний*. Для стальных образцов $N = 10^7$ циклов, для цветных металлов и закаленных сталей $N = 10^8$.

Предел выносливости. Наибольшее значение максимального напряжения цикла, при котором образец не разрушается до базы испытаний, называется *пределом выносливости*. Он обозначается через σ_R , где индекс R соответствует коэффициенту асимметрии цикла. Например, для симметричного цикла изменения напряжений предел выносливости будет σ_{-1} , для пульсационного — σ_0 .

Для расчета деталей малого срока службы вводится понятие *ограниченного предела выносливости* σ_{RN} , где под N понимается заданное число циклов, меньшее базового числа. Ограниченный предел выносливости легко определяется по кривой усталостного испытания (см. рисунок 12.8). Для данного материала, например, при $N = 10^5$ получаем $\sigma_{-1N} = 400$ МПа.

В пределах срока службы (ресурса), установленного для машины или конструкции, отдельные ее элементы могут испытывать число циклов нагружения, значительно меньше базового. Поэтому в них можно допустить возникновение напряжений, больших по величине предела выносливости.

При испытаниях на усталость характерен большой разброс экспериментально полученных точек. Поэтому для достоверного определения предела выносливости требуется испытание большого числа образцов с последующей статистической обработкой результатов, что весьма затруднительно. В связи с этим был сделан ряд попыток связать эмпирическими формулами предел выносливости с пределом прочности. Для *сталей* обычно принимают

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \dots 0,5)\sigma_u.$$

Углеродистые стали ближе к нижней границе, легированные – к верхней.

Для *высокопрочных сталей* можно принять, МПа,

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \sigma_u/6.$$

Для *цветных металлов* предел выносливости изменяется в более широких пределах:

$$\sigma_{-1} \approx (0,25 \dots 0,5)\sigma_u.$$

Если испытания проводятся по циклически изменяющимся касательным напряжениям, которые реализуются при кручении образцов, то для *обычных сталей* в этом случае принимают

$$\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}.$$

Для *хрупких материалов* (высоколегированная сталь, чугун)

$$\tau_{-1} \approx 0,8\sigma_{-1}.$$

Приведенные выше соотношения и все им подобные следует применять с осмотрительностью, поскольку они получены для определенных материалов и в определенных условиях испытания (изгиб, кручение). Предел выносливости, например, полученный в условиях циклического растяжения и сжатия, оказывается на 10–20 % ниже, чем при изгибе. Предел выносливости при кручении сплошных образцов отличается от предела выносливости, полученного для полых образцов.

12.3 Диаграмма предельных амплитуд

Мы рассмотрели испытания при симметричном цикле. В условиях несимметричных циклов образцы испытываются обычно не на изгиб, а на растяжение-сжатие или на кручение специальными машинами – гидропульсаторами.

Введение дополнительного параметра (показателя асимметрии цикла) делает задачу экспериментатора более громоздкой, а для испытаний необходимо обладать уже не одним десятком, а несколькими десятками одинаковых образцов. Этот запас образцов разбивается на группы, для каждой из которых при испытании

фиксируется значение среднего напряжения цикла σ_m , а предельная амплитуда σ_a определяется по базовому числу циклов, подобно тому, как это делалось для симметричного цикла. Кривая усталости ($\sigma_a \sim \lg N$) получается схожей с показанной на рисунке 12.8, но с другими числовыми значениями, зависящими от заданной величины стационарного напряжения σ_m .

В результате испытания группы образцов (при стандартной базе $N = 10^7$) мы получаем предельное значение σ_a , соответствующее выбранной величине σ_m . Это дает одну точку на плоскости $\sigma_m \sim \sigma_a$ (рисунок 12.9). Проводя испытания следующей группы образцов, имеем вторую точку. Действуя подобным образом и далее, получим кривую предельных напряжений при асимметричном цикле. Она называется *диаграммой предельных амплитуд* (см. рисунок 12.9) и применяется для расчета циклической прочности образцов.

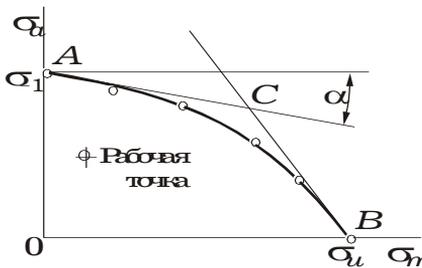


Рисунок 12.9

Если цикл характеризуется известными значениями σ_m и σ_a , то, рассматривая их как координаты рабочей точки, мы можем судить о прочности образца. Если рабочая точка располагается ниже кривой диаграммы предельных амплитуд, то образец способен как минимум сохранить прочность до базового числа. Если точка расположена выше кривой, то разрушение произойдет раньше.

Так как построение диаграммы предельных амплитуд является достаточно трудоемким, то ее стараются схематизировать. Точка A диаграммы соответствует испытанию образцов при симметричном цикле. Точка B диаграммы для хрупких материалов ограничивает условия работы образца по пределу прочности. Левая часть диаграммы может быть аппроксимирована прямой, проходящей через точку A и имеющей угловой коэффициент $\psi_\sigma = \operatorname{tg} \alpha$.

Для построения этой прямой достаточно знать предел выносливости при симметричных циклах σ_{-1} и располагать либо еще одной точкой, например пределом выносливости при пульсационном цикле ($\sigma_m = \sigma_a$), либо величиной самого углового коэффициента ψ_σ . Значения последнего, как показали многочисленные опыты, лежат в пределах $0,1-0,2$ для углеродистых сталей и $0,2-0,3$ – для легированных.

Правая часть диаграммы аппроксимируется прямой, проходящей через точку B и составляющей угол 45° с координатными осями σ_m и σ_a , т. е. для ее точек выполняется условие $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_u$. Смысл этой прямой очевиден. Максимальное напряжение цикла

$\sigma_m + \sigma_a$ не может превышать предела прочности. Следовательно, при схематизации диаграмма предельных амплитуд заменяется двумя прямыми AC и BC .

Заметим, что мы построили диаграмму предельных амплитуд для *образцов*. Расчет циклической прочности *деталей* содержит в себе ряд специфических особенностей. Опыт показывает, что наибольшее влияние на сопротивление выносливости оказывает различие в форме, размерах и обработке поверхности.

12.4 Концентрация напряжений

Одним из основных факторов, которые необходимо учитывать при практических расчетах на циклическую прочность, является *концентрация напряжений* – повышение напряжений в зоне резкого изменения формы упругого тела (внутренние углы, отверстия, выточки) или в области контакта деталей.

Зона распространения повышенных напряжений ограничена узкой областью, расположенной в окрестности очага концентрации. В связи с локальным характером эти напряжения называют *местными*.

Если конструкция работает не при циклических нагружениях, то местными напряжениями в прочностных расчетах пренебрегают. Появление пластических деформаций в этом случае в зоне концентрации напряжений не приводит к образованию трещины.

Многократное изменение напряжений в области концентратора приводит к образованию и дальнейшему развитию трещины с последующим усталостным разрушением детали. Поэтому форму деталей, работающих в условиях циклических напряжений, стремятся сделать как можно более плавной, радиусы закругления во внутренних углах увеличивают, необходимые отверстия располагают в зоне пониженных напряжений.

Местные напряжения в зависимости от геометрической формы детали определяются обычно при помощи методов теории упругости. Иногда используются испытания моделей, например поляризационно-оптическим методом.

Основным показателем местных напряжений является *теоретический коэффициент концентрации напряжений*

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n},$$

где σ_{\max} – наибольшее местное напряжение;

σ_n – номинальное напряжение (σ_{nom}), полученное по формулам механики материалов без учета концентрации напряжений.

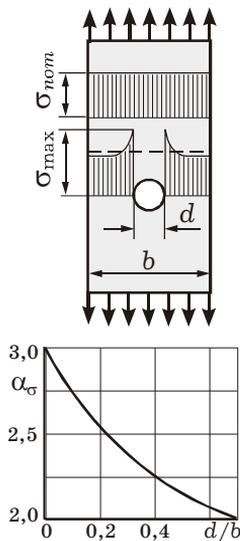


Рисунок 12.10

Величина теоретического коэффициента концентрации определена для основных встречающихся на практике типовых элементов конструкций. Так, на рисунке 12.10 показана его зависимость от соотношения геометрических размеров для полосы с отверстием. Отметим, что с ростом относительного диаметра отверстия величина теоретического коэффициента концентрации уменьшается.

Теоретический коэффициент концентрации не отражает механических свойств самого материала, его чувствительности к местным напряжениям. В связи с этим вводится понятие *эффективного коэффициента концентрации* K_σ . В условиях симметричного цикла напряжений

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}},$$

где σ_{-1} – предел выносливости гладкого образца;
 σ_{-1k} – предел выносливости такого же образца, но с концентратором.

Эффективный коэффициент концентрации зависит уже не только от геометрической формы концентратора и способа нагружения, но и от механических свойств материала. При несимметричных циклах нагружения учет концентрации напряжений можно провести, разделив все ординаты диаграммы предельных амплитуд гладких образцов на величину K_σ .

Для типовых и наиболее часто встречающихся видов концентрации напряжений и основных конструкционных материалов созданы таблицы и графики коэффициентов концентрации, которые приведены в справочной литературе. На рисунке 12.11 показаны в качестве примера типичные графики для определения эффективного коэффициента концентрации для стального ступенчатого стержня при растяжении и сжатии. Кривые 1, 2 и 3 для сталей с пределами выносливости соответственно $\sigma_u = 400, 800$ и 1200 МПа свидетельствуют о том, что с увеличением предела прочности величина K_σ растет.

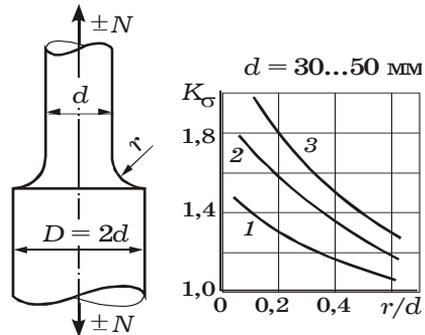


Рисунок 12.11

При отсутствии достаточного количества экспериментальных данных эффективный коэффициент концентрации иногда вычисляют по значению теоретического коэффициента концентрации

$$K_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1),$$

где q – коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям.

Для высокопрочных легированных сталей его величина близка к единице. Для конструкционных сталей $q = 0,6 \dots 0,8$. Для серого чугуна величина q близка к нулю, т. е. материал не чувствителен к местным напряжениям. Объясняется это тем, что крупные зерна графита, содержащиеся в структуре чугуна, уже сами по себе являются такими очагами концентрации, по сравнению с которыми геометрические особенности детали теряют свое значение.

Замечание. Если переменными являются касательные напряжения, то по аналогичной схеме вводятся теоретический и эффективный коэффициенты α_{τ} и K_{τ} .

12.5 Масштабный эффект.

Коэффициент качества обработки поверхности

Если из одного и того же материала изготовить несколько отличающихся по диаметру партий образцов, то после испытания на усталость обнаруживается, что предел выносливости уменьшается с увеличением диаметра. Эта зависимость носит асимптотический характер. Для очень больших образцов снижение предела выносливости прекращается.

Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали получило название *масштабного фактора*. Для его числовой оценки вводится *коэффициент масштабного фактора*

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}},$$

где σ_{-1d} – предел выносливости образца диаметром $d > 10$ мм;

σ_{-1} – предел выносливости стандартного образца $d = 10$ мм.

При несимметричных циклах поправка $K_{d\sigma}$, так же, как и K_{σ} , вводится только в амплитудную составляющую цикла. Ординаты диаграммы предельных амплитуд принимают значения $\sigma_a K_{d\sigma} / K_{\sigma}$.

В большинстве деталей усталостное разрушение начинается с поверхности, поэтому ее состояние существенным образом влияет на предел выносливости и долговечность детали.

Особенности, связанные с обработкой поверхности, учитываются при расчетах на усталостную прочность введением *коэффициента качества обработки поверхности*

$$K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}},$$

где σ'_{-1} – предел выносливости образца, имеющего шероховатость, которая измеряется в микрометрах;

σ_{-1} – предел выносливости тщательно полированного образца.

Шероховатость 12 мкм примерно соответствует тонкой обточке образца на токарном станке. На рисунке 12.12 приведены ориентировочные значения коэффициентов качества поверхности в зависимости от предела прочности. Коэффициент K_F для полированных образцов может считаться равным единице.

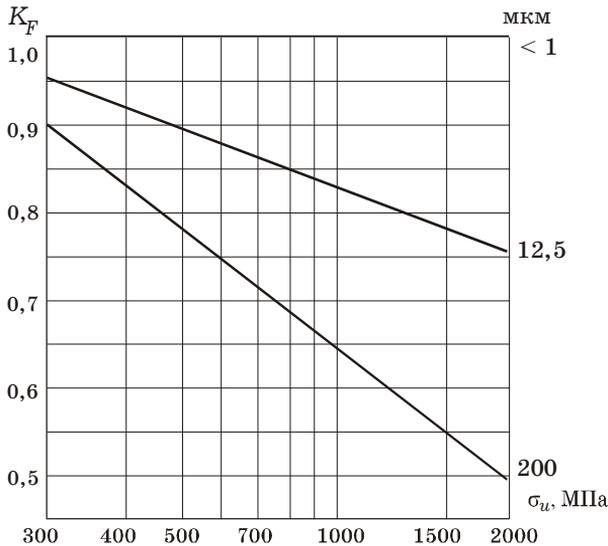


Рисунок 12.12

В промышленности широко применяются методы поверхностного упрочнения деталей, работающих в условиях циклических напряжений (рессоры и полуоси автомашин, зубья шестерен, винтовые клапанные пружины и пр.). К числу таких методов относятся азотирование, цементация, поверхностная закалка токами высокой частоты, наклеп поверхностного слоя обкаткой роликами или обдувом дробью.

Поверхностная обработка дает двоякий эффект. Во-первых, повышается прочность поверхностного слоя, но сохраняется вязкость нижележащих слоев. Во-вторых, в поверхностном слое создаются остаточные сжимающие напряжения, препятствующие образованию трещины. В результате обработки предел выносливости может увеличиться в несколько раз, а долговечность – в десятки раз.

12.6 Коэффициент запаса при циклических напряжениях

Возвратимся к диаграмме предельных амплитуд. Для упрощения она была представлена наклонной прямой $\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m$, а рабочая область справа ограничена условием, что максимальное напряжение цикла, равное $\sigma_m + \sigma_a$, не превышает σ_u . Но всё это — для образцов. Если перейти к детали, то учет местных напряжений, масштабного фактора и качества обработки поверхности приводит к тому, что предельные амплитуды циклов напряжений уменьшаются в K раз:

$$K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma} K_F}.$$

Уравнение предельной прямой принимает вид

$$\sigma_a = \frac{1}{K} (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m). \quad (12.1)$$

Ограничения по пределу текучести или по пределу прочности сохраняются для детали такими же, как и для образца. В результате получаем диаграмму предельных амплитуд для детали, показанную на рисунке 12.13.

Рассмотрим рабочую точку A цикла с координатами σ_m , σ_a . Проведем через нее и начало координат луч до пересечения с предельной прямой в точке B (см. рисунок 12.13). Этого же можно достичь пропорциональным увеличением составляющих цикла в точке A .

За коэффициент запаса циклической прочности n_σ принимается отношение

$$n_\sigma = \frac{OB}{OA}.$$

Оно характеризует степень близости рабочих условий к предельным.

Для точки B , так как она принадлежит предельной прямой, амплитудную составляющую цикла получаем из выражения (12.1)

$$\sigma_{aB} = \frac{1}{K} (\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{mB}).$$

С другой стороны, из подобия треугольников

$$\sigma_{aB} = \sigma_{mB} \frac{\sigma_a}{\sigma_m}.$$

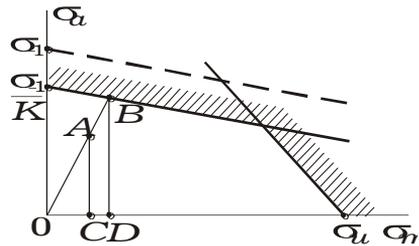


Рисунок 12.13

Приравнивая эти соотношения, получаем

$$\sigma_{mB} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \sigma_m.$$

Но так как коэффициент запаса для детали по определению

$$n_\sigma = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{\sigma_{mB}}{\sigma_m},$$

то его значение для произвольного цикла нормальных напряжений с координатами σ_m, σ_a следующее:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}. \quad (12.2)$$

Если деталь работает в условиях циклического изменения касательных напряжений, то структура выражения (12.2) для коэффициента запаса сохраняется, меняются лишь обозначения:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_\tau \tau_m}.$$

При вычислении коэффициента K здесь также следует использовать параметры, относящиеся к переменным касательным напряжениям.

При двухосном напряженном состоянии (σ, τ) наиболее часто применяется на практике эмпирическая формула Гафа – Полларда

$$\frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

где n_R – коэффициент запаса при плоском напряженном состоянии;
 n_σ – коэффициент запаса в предположении отсутствия касательных напряжений ($\tau = 0$);
 n_τ – запас по касательным напряжениям, установленный при отсутствии нормальных напряжений ($\sigma = 0$).

Приведенная формула применима не только в случае синфазного изменения σ и τ , но и при таких циклах, когда максимумы этих напряжений достигаются не одновременно.

12.7 Понятие о малоцикловой усталости материалов

Во многих инженерных конструкциях наблюдается разрушение после относительно небольшого числа циклов нагружения – малоцикловая усталость ($N < 10^5$). Разрушение обычно происходит при значительной (около 1 %) циклической пластической деформации.

Расчеты элементов конструкций на малоцикловую усталость базируются на экспериментальных данных. При этом используются два основных вида нагружения: *мягкое* и *жесткое*. При первом – в процессе циклического нагружения постоянно сохраняется амплитуда напряжений, при втором – амплитуда деформаций.

Диаграмма циклического деформирования при мягком нагружении образца показана на рисунке 12.14. После исходного деформирования OAB и разгрузки BC , деформирования нагружкой противоположного знака CDL и разгрузки LM образуется, вообще говоря, незамкнутая петля упругопластического деформирования первого полуцикла. Ее ширина обозначена через δ_1 . При дальнейшем повторении нагружения и разгрузки получим кривые циклического деформирования и соответствующие им петли шириной δ_k . Разность ширины петель в двух соседних полуциклах характеризует накопленную за цикл одностороннюю пластическую деформацию.

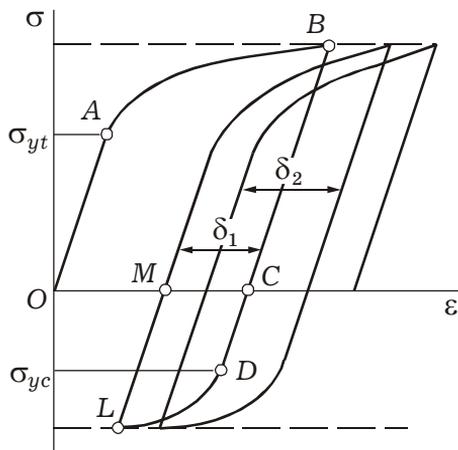


Рисунок 12.14

В зависимости от свойств материала в процессе циклического упругопластического деформирования пределы текучести и форма кривых деформирования могут изменяться. Так, для большинства металлов и сплавов после упругопластического растяжения предел текучести σ_{yt} повышается, а при последующем сжатии предел текучести σ_{yc} уменьшается – эффект Баушингера.

Для описания этого явления был предложен ряд моделей. Одна из первых принадлежит Мазингу (G. Masing). Он выдвинул гипотезу, что суммарный предел текучести $\sigma_{yt} + \sigma_{yc}$ остается постоянным, а кривая деформирования BCL является в два раза увеличенной кривой OAB .

Однако, как показали многочисленные эксперименты, это для многих материалов не выполняется. Профессор Московского университета В. В. Москвитин¹⁾ обобщил принцип Мазинга введением масштабных коэффициентов. Терминология разделения материалов на циклически упрочняющиеся, разупрочняющиеся и стабильные,

¹⁾ Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. – М. : Изд-во МГУ, 1965. – 264 с.

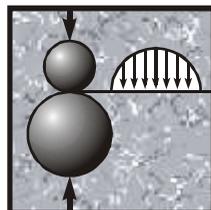
введенная им, стала общепринятой. Если суммарный предел текучести от цикла к циклу увеличивается, то материал *циклически упрочняющийся*, если уменьшается – *циклически разупрочняющийся*. Поведение *циклически стабильного* материала соответствует гипотезе Мазинга.

При мягком нагружении циклически разупрочняющихся или стабильных материалов накапливаются пластические деформации (ширина петли гистерезиса возрастает или остается стабильной), которые могут привести к двум типам разрушения: квазистатическому и усталостному. В первом случае пластические деформации возрастают до уровня, соответствующего разрушению при однократном статическом нагружении. Разрушение усталостного характера связано с накоплением повреждений, образованием прогрессирующих трещин при существенно меньшей пластической деформации. Возможны и промежуточные формы разрушения, когда образуются трещины усталости на фоне заметных пластических деформаций. У циклически упрочняющихся материалов ширина петли гистерезиса уменьшается от цикла к циклу. Они разрушаются только от усталости.

При жестком нагружении амплитуды деформаций от цикла к циклу остаются постоянными, а напряжения могут изменяться. При испытаниях циклически упрочняющихся материалов – напряжения возрастают, у циклически разупрочняющихся материалов – убывают. В этом случае нет накопления деформаций, разрушение происходит по усталостному типу с образованием трещин.

13

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ



Контактные напряжения в узком смысле возникают на поверхности соприкосновения двух тел, передающих усилие от одного тела к другому. В более широкой трактовке под этим названием подразумевают напряженное состояние, которое создается при силовом контакте двух тел не только на поверхностях соприкосновения, но и во всем массиве деталей вблизи контактирующих поверхностей.

13.1 Общие сведения

Контактные напряжения и деформации. Напряжения и деформации, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называются *к о н т а к т н ы м и*.

Вначале в местах контакта наблюдается точечное касание тел (по очень малым площадкам), затем из-за деформирования элементов соприкосновение происходит по некоторой площадке (*площадке контакта*). Вблизи нее материал, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает *объемное напряженное состояние* (рисунок 13.1). Иными словами, напряжения и деформации возникают не только на поверхностях соприкосновения, но и в массиве деталей вблизи контактирующих поверхностей.

Как показывают расчеты, контактные напряжения и деформации имеют явно *локальный характер* и весьма быстро уменьшаются по мере удаления от места соприкосновения. Несмотря на это, исследовать на-

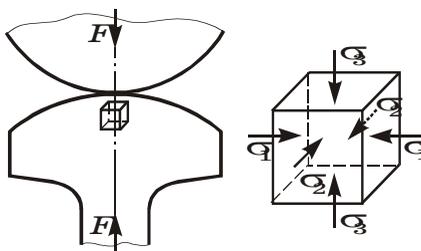


Рисунок 13.1

пряженно-деформированное состояние в области контакта необходимо для решения проблем прочности многих ответственных деталей: всех типов подшипников качения, шаровых и цилиндрических катков, зубчатых колес и шестерен, элементов кулачковых механизмов, колес и рельсов подвижного состава, шаровых и цилиндрических катков и т. д.

Впервые решение основных случаев сжатия упругих тел методами теории упругости дано Г. Герцем¹⁾ в работах 1881–1882 гг. В дальнейшем развитием контактных задач занимались многие ученые, в том числе и отечественные: Н. М. Беляев, Л. А. Галин, А. Н. Динник, Б. С. Ковальский, И. Я. Штаерман и др.

Основные гипотезы контактного взаимодействия:

- материалы соприкасающихся тел однородны и изотропны;
- нагрузки, приложенные к телам, создают в зоне контакта только упругие деформации (выполняется закон Гука);
- площадки контакта весьма малы по сравнению с поверхностями соприкасающихся тел;
- силы давления, распределенные по поверхностям контакта, нормальны к этим поверхностям; силами трения по площадке контакта можно пренебречь.

Отметим, что применительно к подшипникам качения и зубчатым колесам со стальными термически упрочненными зубцами в нормальных эксплуатационных условиях из четырех гипотез первая и вторая оправдываются с достаточной для практики точностью. Третье предположение в некоторых конструкциях шарикоподшипников, у которых радиус шарика мало отличается от поперечного радиуса беговой дорожки, нарушается, так как здесь контакт имеет более плотное касание. Четвертое допущение нарушается всегда, и силы трения в некоторых случаях могут заметно повлиять на окончательный результат (см. подразд. 13.3).

Основные задачи контактного взаимодействия. Для соприкасающихся тел должны быть заданы главные радиусы кривизны поверхностей и величина приложенной нагрузки. При исследовании их контакта ставятся следующие задачи:

- определение формы и размеров площадки контакта тел после их деформации;
- нахождение величины и закона распределения давления, оказываемого одним телом на другое и передаваемого через площадку контакта;
- определение величины сближения тел, обусловленной их деформацией.

Эти задачи решаются, как правило, методами теории упругости. Точные решения получить удастся не всегда, поэтому большое внимание уделяется приближенным и численным исследованиям. Ниже приводятся аналитические формулы, которые с достаточной для инженерной практики точностью описывают контактное взаимодействие шаров, цилиндров и тел с произвольными криволинейными поверхностями.

¹⁾ Герц Генрих Рудольф (Hertz Н. Р.) (1857–1894) – немецкий физик; труды по электромагнетизму, теории света; контактными задачам.

13.2 Сжатие шаров

Площадка контакта. В случае взаимного сжатия двух шаров с радиусами R_1 и R_2 силами F (рисунок 13.2) по условию симметрии можно утверждать, что площадка контакта образуется в форме круга, радиус которого a определяется по формуле

$$a = 0,88 \sqrt[3]{F \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (13.1)$$

где E_1, E_2 – модули упругости материалов шаров.

Контактные напряжения. Положим, что нормальные (сжимающие) напряжения распределены на площадке контакта по полусфере (см. рисунок 13.2).

Максимальное из напряжений достигается в центре площадки контакта:

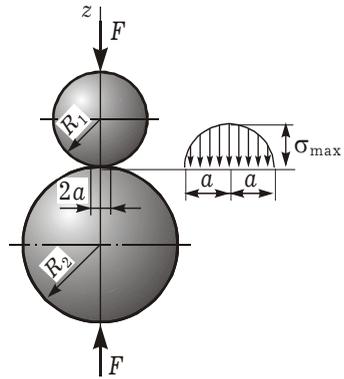


Рисунок 13.2

$$\sigma_3 = -|\sigma_{\max}| = -1,5 \frac{F}{\pi a^2} = -0,388 \sqrt[3]{4F \frac{E_1^2 E_2^2 (R_1 + R_2)^2}{(E_1 + E_2)^2 R_1^2 R_2^2}}. \quad (13.2)$$

Два других главных напряжения в центре площадки можно определить приближенно:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8|\sigma_{\max}|. \quad (13.3)$$

Таким образом, в наиболее напряженной точке площадки контакта материал испытывает напряженное состояние, близкое к равномерному сжатию. Благодаря этому в зоне контакта он может выдерживать большие давления без появления остаточных деформаций.

Для подтверждения этого вычислим напряжения σ_{\max} в центре площадки контакта, при котором впервые появляются остаточные деформации. Для этого воспользуемся четвертой теорией прочности (см. подразд. 8.5):

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_y. \quad (13.4)$$

Подставив в (13.4) значения главных напряжений (13.2), (13.3), получим $\sigma_{\max} = 5\sigma_y$.

Для закаленной хромистой стали, используемой при изготовлении шариковых подшипников, примем вместо предела текучести предел пропорциональности $\sigma_{pr} \approx 1000$ МПа. Тогда $\sigma_{\max} = 5000$ МПа.

Наиболее опасная точка в случае касания двух шаров расположена на оси z на глубине, примерно равной половине радиуса площадки контакта. Главные напряжения в этой точке:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{\max},$$

где σ_{\max} – наибольшее напряжение в центре площадки контакта, определяемое по формуле (13.2).

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{\max}.$$

Давление шара на вогнутую сферическую и плоскую поверхности. Изменяя в формуле (13.2) знак при R_2 на обратный, получим максимальное значение напряжений σ_{\max} в случае давления шара на *вогнутую сферическую поверхность* (рисунок 13.3):

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (13.5)$$

Приняв в (13.5) $R_2 = \infty$, определим максимальные напряжения при давлении шара на *плоскую поверхность тела* (рисунок 13.4):

$$\sigma_{\max} = 0,388 \sqrt[3]{4F \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{1}{R_1^2}}.$$

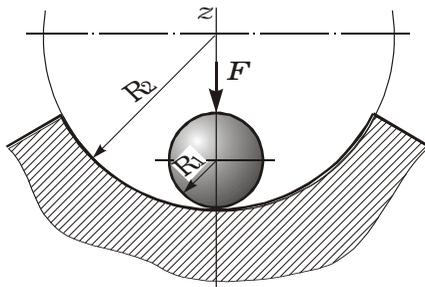


Рисунок 13.3

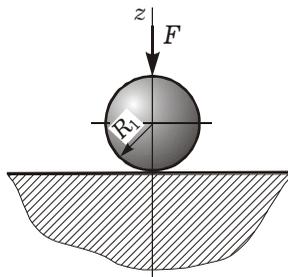


Рисунок 13.4

13.3 Сжатие цилиндров

Рассмотрим случай взаимного нажатия силами F двух цилиндров с параллельными образующими (рисунок 13.5). Вследствие деформации касание цилиндров происходит фактически не по линии, а по узкой полосе, т. е. площадка контакта имеет вид узкого прямоугольника.

Пусть длина контактирующих цилиндров равна единице, тогда погонное усилие $q = F/1$. Пусть усилие q равномерно распределено вдоль образующих цилиндров, а площадка контакта имеет постоянную ширину b , которую можно определить по формуле

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (13.6)$$

Контактные напряжения. В этом случае наибольшее напряжение сжатия, действующее в точках оси площадки контакта, с учетом (13.6)

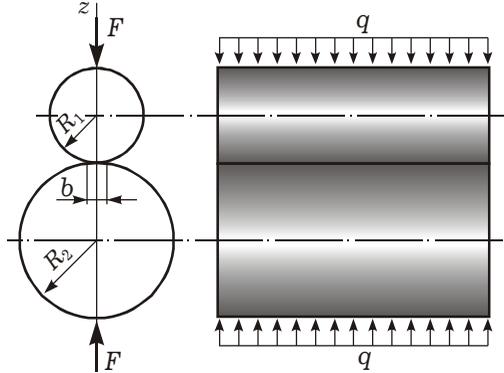


Рисунок 13.5

$$\sigma_{\max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (13.7)$$

Анализ напряженного состояния показывает, что опасная точка расположена на оси z на глубине, равной 0,4 ширины площадки контакта. Главные напряжения в этой точке имеют следующие значения:

$$\sigma_1 = -0,18\sigma_{\max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{\max}; \quad \sigma_3 = -0,78\sigma_{\max}.$$

Наибольшие касательные напряжения в опасной точке:

$$\tau_{\max} = 0,3\sigma_{\max}.$$

Давление цилиндра на вогнутую цилиндрическую и плоскую поверхности. Для случая давления цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью напряжения определим по формуле (13.7), подставив R_2 со знаком минус. Этот случай часто применяется на практике при расчете напряжений цилиндрического шарнира и балансира (рисунок 13.6).

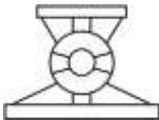


Рисунок 13.6

При давлении цилиндра на плоскую поверхность тела для определения напряжений подставим в формулу (13.7) радиус плоскости $R_2 = \infty$:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R_1} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}.$$

Приведенные формулы получены при $\nu = 0,3$. Однако для практических расчетов их можно использовать и при других значениях коэффициента Пуассона.

Влияние сил трения. Как правило, в инженерных исследованиях контакта двух тел силы трения не учитываются. Но иногда они могут заметно влиять на окончательный результат. Например, исследования Б. С. Ковальского случая касания цилиндров показали, что влияние сил трения на величину τ_{\max} может быть охарактеризовано таблицей 13.1.

Таблица 13.1 – Влияние сил трения на величину максимальных касательных напряжений

Коэффициент трения	0	0,2	0,3
τ_{\max}	$0,30\sigma_{\max}$	$0,34\sigma_{\max}$	$0,38\sigma_{\max}$

13.4 Общий случай контакта двух тел

Рассмотрим случай контакта двух тел из одинакового материала. Предположим, что оба тела в точке касания имеют общую касательную плоскость AB и общую нормаль z , вдоль которой направлены силы F (рисунок 13.7).

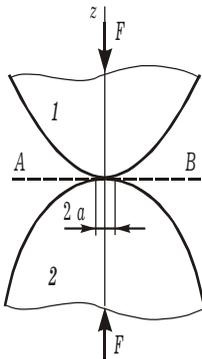


Рисунок 13.7

Обозначим радиусы кривизны в точке касания первого тела ρ_1 и ρ'_1 , второго тела – ρ_2 и ρ'_2 , причем $\rho_1 < \rho'_1$ и $\rho_2 < \rho'_2$.

Главными кривизнами называют наибольшую и наименьшую кривизны, вычисляемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр кривизны. Радиусы кривизны считаются положительными, если центры кривизны лежат внутри тела. Обозначим через ϕ угол между главными плоскостями кривизны тел, в которых лежат меньшие радиусы ρ_1 и ρ_2 (рисунок 13.8).

Площадка контакта. В общем случае площадка контакта представляет собой эллипс с полуосями a и b :

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3F(1-\nu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}\right)}}; \quad b = \beta \sqrt[3]{\frac{3F(1-\nu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}\right)}}, \quad (13.8)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Значения коэффициентов α и β приведены в таблице 13.2 как функции вспомогательного угла ψ .

Таблица 13.2 – Коэффициенты α , β

ψ	α	β
20	3,778	0,408
30	2,731	0,493
35	2,397	0,530
40	2,136	0,567
45	1,926	0,604
50	1,754	0,641
55	1,611	0,678
60	1,486	0,717
65	1,378	0,759
70	1,284	0,802
75	1,202	0,846
80	1,128	0,893
85	1,061	0,944
90	1,000	1,000

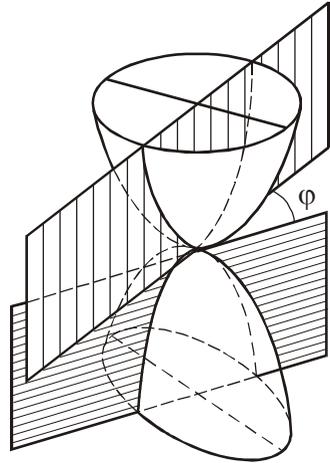


Рисунок 13.8

Вспомогательный угол вычисляется по формуле

$$\cos \psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2}\right)^2} + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2}\right) \cos(2\varphi)}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2}}, \quad (13.9)$$

где φ – угол между главными плоскостями кривизны тел.

Знак числителя в формуле (13.9) выбираем так, чтобы $\cos \psi$ был положительным.

Контактные напряжения. Наибольшее напряжение сжатия в центре площадки контакта можно определить по формуле

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi ab}. \quad (13.10)$$

Наиболее опасная точка расположена на оси z на некоторой глубине, зависящей от отношения (b/a) полуосей эллиптической площадки контакта. Однако наибольшее касательное напряжение в опасной точке почти не зависит от указанного отношения размеров площадки, и можно принять, что $\tau_{\max} \approx 0,32 \sigma_{\max}$.

Из приведенных формул видно, что контактные напряжения зависят от упругих свойств материалов и не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил нарастая все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличиваются и размеры площадки контакта.

13.5 Проверка прочности при контактном взаимодействии

Условие прочности. Учитывая «мягкость» напряженного состояния в опасных точках (все три главных напряжения сжимающие), проверку прочности при контактных напряжениях следует производить по третьей или четвертой теории прочности:

$$\sigma_{red}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{red}^{IV} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Внося в эти формулы значения главных напряжений в опасной точке, выраженные через наибольшее напряжение σ_{max} в центре площадки контакта, условия прочности можно записать в виде

$$\sigma_{red} = m \sigma_{max} \leq [\sigma].$$

Отсюда получаем *условие прочности* при контакте двух тел:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]_{cont}, \quad (13.11)$$

где $[\sigma]_{cont} = [\sigma]/m$ – допускаемое значение для наибольшего напряжения в месте контакта.

Значения коэффициента m в зависимости от отношений полуосей эллиптической площадки контакта и выбранной теории прочности приведены в таблице 13.3.

Таблица 13.3 – Значения коэффициента m

b/a	$m = \sigma_{red}^{III} / \sigma_{max}$	$m = \sigma_{red}^{IV} / \sigma_{max}$
1,00 (круг)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (полоса)	0,600	0,557

Расчет на прочность. Для расчета элементов конструкций в местах контакта рекомендуется следующий *алгоритм*:

- определить главные радиусы кривизны контактирующих тел $\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2$ и угол φ (13.9) между главными плоскостями кривизны одного и другого тела;
- вычислить по формулам (13.8) размеры полуосей эллиптической площадки контакта;
- найти по формуле (13.10) наибольшее напряжение σ_{max} в центре площадки контакта. В случае круглой и прямоугольной площадок контакта σ_{max} определить непосредственно по формуле (13.2) или (13.7), не определяя размеров площадки;
- расчет на прочность производить по формуле (13.11), значение коэффициента m брать из таблицы 13.3.

Допускаемые наибольшие напряжения $[\sigma]_{\text{cont}}$ в месте контакта для роликовых и шариковых подшипников из хромистой стали принимают до 3500–5000 МПа, для рельсовой стали – до 800–1000 МПа. В таблице 13.4 приведены значения допускаемых наибольших давлений на площадке контакта при первоначальном контакте по линии и статическом действии нагрузки ($m = 0,557$).

Таблица 13.4 – Значения допускаемых наибольших давлений

Марка металла	Предел прочности σ_u , МПа	Твердость по Бринеллю, НВ	Допускаемое наибольшее давление на площадке контакта $[\sigma]_{\text{cont}}$, МПа
Сталь 30	480–600	180	850–1050
	630–800	230	1050–1400
	650–850	240	1100–1450
	1600–1800	240	1350–1600
	—	—	3800
Чугун СЧ 21	960	180–207	800–900
	1100	170–241	1000–1100
	1400	197–255	1300–1400

✓ **ПРИМЕР 13.1.** Упорный шариковый подшипник с плоскими кольцами без желобов (рисунок 13.9) статически сжат силами $Q = 6,4$ кН.

Диаметр шарика $d = 15$ мм, число шариков $n = 20$, коэффициент неравномерности распределения нагрузки между отдельными шариками подшипника – 0,8. Материал шариков и колец – хромистая сталь, допускаемое значение наибольшего напряжения в месте контакта $[\sigma]_{\text{cont}} = 3500$ МПа, модуль упругости $E = 2,12 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется: определить размеры площадки контакта между шариком и кольцом; найти величину наибольшего напряжения на этой площадке; проверить прочность.

Учитывая неравномерность распределения нагрузки между отдельными шариками, определим наибольшее усилие, сжимающее шарик:

$$F = \frac{Q}{0,8n} = \frac{6,4}{0,8 \cdot 20} = 0,4 \text{ кН.}$$

В местах соприкосновения колец и шариков (точки К) образуется круглая площадка, радиус которой определим по формуле (13.1):

$$a = 0,88 \sqrt[3]{F \frac{\frac{1}{E} + \frac{1}{E}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\infty}}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{Fd}{E}} = 0,88 \sqrt[3]{\frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-2}}{2,12 \cdot 10^5}} = 2,68 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

При этом $R_1 = d/2$; $R_2 = \infty$; $E_1 = E_2 = E$. Величину наибольшего напряжения на этой площадке определим по формуле (13.2):

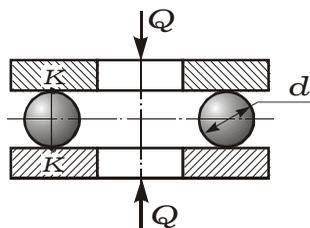


Рисунок 13.9

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi a^2} = \frac{1,5 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (2,68 \cdot 10^{-4})^2} = 2660,4 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{cont}} = 3500 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности выполняется.

☑ **ПРИМЕР 13.2.** Цилиндрическое ходовое колесо крана передает на рельс давление $P = 70 \text{ кН}$ (рисунок 13.10). Радиус наружного обода колеса $R = 350 \text{ мм}$. Радиус поперечного сечения головки рельса $r = 300 \text{ мм}$. Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

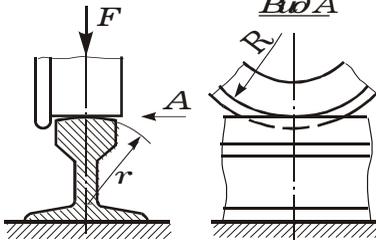


Рисунок 13.10

Требуется: определить размеры площадки контакта и наибольшее напряжение на этой площадке.

В соответствии с указанным выше порядком расчета выпишем главные радиусы кривизны:

- для колеса $\rho_1 = R = 350 \text{ мм}$, $\rho'_1 = \infty$;
- для рельса $\rho_2 = r = 300 \text{ мм}$, $\rho'_2 = \infty$.

Угол между главными плоскостями, содержащими радиусы ρ_1 и ρ_2 (см. рисунок 13.8), $\varphi = \pi/2$. Тогда из формулы (13.3) находим:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\infty}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\infty}\right)^2} + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\infty}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\infty}\right) \cos(2 \cdot \pi/2)}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\infty}} = \\ &= \frac{\pm \left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right]}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} = \frac{-\left[\frac{1}{350} - \frac{1}{300}\right]}{\frac{1}{350} + \frac{1}{300}} = 0,077. \end{aligned}$$

Отсюда вспомогательный угол $\psi = 85,5^\circ$. Из таблицы 13.2, произведя линейную интерполяцию, находим значения α и β : $\alpha = 1,055$; $\beta = 0,950$.

По формулам (13.8) определяем размеры полуосей эллиптической площадки контакта:

$$a = 1,055 \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 70 \cdot 10^3 (1 - 0,3^2)}{2 \cdot 10^{11} \left(\frac{1}{0,35} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{\infty}\right)}} = 5,66 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad b = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Наибольшее напряжение на площадке контакта получаем из (13.10):

$$\sigma_{\max} = 1,5 \frac{F}{\pi a b} = 1,5 \frac{70 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 5,66 \cdot 10^{-3} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 1158,4 \text{ МПа}.$$



Для закрепления теоретических знаний в процессе изучения курса механики материалов существенную помощь могут оказать тестовые задания. Далее приведены соответствующие вопросы, сформулированные по всем разделам учебника. Среди ответов один правильный. Практика показывает, что в проверочный тест по каждому разделу достаточно включать шесть вопросов и по 3 ответа на каждый. Тест засчитывается, если получено не менее пяти правильных ответов.

14.1 Введение в сопротивление материалов.

Растяжение, сжатие и кручение стержней

1 *Какая гипотеза позволяет изучать свойства материала на образцах:*

- 1) гипотеза об идеальной упругости материала;
- 2) гипотеза однородности и сплошности;
- 3) гипотеза об изотропности материала.

2 *Какая гипотеза позволяет не учитывать малые остаточные деформации:*

- 1) гипотеза об идеальной упругости материала;
- 2) гипотеза однородности и сплошности;
- 3) принцип Сен-Венана.

3 *Какая гипотеза позволяет составлять уравнения равновесия по недеформированной схеме:*

- 1) закон Гука;
- 2) гипотеза о малости деформаций;
- 3) принцип Сен-Венана.

4 *В какой гипотезе говорится о плоских сечениях:*

- 1) гипотеза однородности и сплошности;
- 2) гипотеза Бернулли;
- 3) принцип Сен-Венана.

5 *Какая гипотеза сводит сложную задачу к нескольким простым:*

- 1) принцип суперпозиции;
- 2) принцип Сен-Венана;
- 3) гипотеза Бернулли.

6 *Какая гипотеза смягчает граничные условия:*

- 1) допущение о малости деформаций;
- 2) принцип Сен-Венана;
- 3) гипотеза об идеальной упругости материала.

7 *Количество внутренних силовых факторов:*

- 1) три;
- 2) шесть;
- 3) девять.

8 *В чем измеряются касательные напряжения:*

- 1) они безразмерные;
- 2) в ньютонах;
- 3) в паскалях.

9 *В чем измеряются продольные деформации:*

- 1) они безразмерные;
- 2) в метрах;
- 3) в паскалях.

10 *В чем измеряются поперечные деформации:*

- 1) они безразмерные;
- 2) в метрах;
- 3) в паскалях.

11 *В чем измеряются нормальные напряжения:*

- 1) в ньютонах;
- 2) в паскалях;
- 3) они безразмерные.

12 *В чем измеряется коэффициент Пуассона ν :*

- 1) он безразмерный;
- 2) в метрах;
- 3) в паскалях.

13 *В чем измеряется модуль Юнга E :*

- 1) он безразмерный;
- 2) в паскалях;
- 3) в ньютонах.

14 *В чем измеряется модуль сдвига G :*

- 1) в паскалях;
- 2) в ньютонах;
- 3) он безразмерный.

15 *Модуль Юнга для стали:*

- 1) $E = 2 \cdot 10^5$ Па;
- 2) $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;
- 3) $E = 2$ МПа.

16 В каких пределах изменяется коэффициент Пуассона:

- 1) $-0,5 \leq \nu \leq 0$;
- 2) $0 \leq \nu \leq 1$;
- 3) $0 \leq \nu \leq 0,5$.

17 При растяжении стержня возникает:

- 1) продольная сила N ;
- 2) поперечная сила Q_y ;
- 3) изгибающий момент M_x .

18 Если $N > 0$, то участок стержня:

- 1) растянут;
- 2) сжат;
- 3) изогнут.

19 Если $N < 0$, то участок стержня:

- 1) растянут;
- 2) сжат;
- 3) изогнут.

20 Закон Гука при растяжении-сжатии:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\sigma = N/A$;
- 3) $\tau = G\gamma$.

21 Закон Гука при растяжении с учетом температуры:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\sigma = N/A$; 3) $\varepsilon = \sigma/E + \alpha T$.

22 Связь напряжений и внутренних усилий при растяжении:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\sigma = N/A$;
- 3) $\varepsilon = \sigma/E + \alpha T$.

23 Закон Гука при растяжении-сжатии связывает:

- 1) продольную силу и приращение длины стержня;
- 2) продольную и поперечную деформации;
- 3) нормальное напряжение и продольную деформацию.

24 Продольная и поперечная деформации имеют знаки:

- 1) одинаковые;
- 2) противоположные;
- 3) возможны и одинаковые, и противоположные.

25 Продольная деформация при растяжении:

- 1) $\varepsilon_x = -\nu\varepsilon$;
- 2) $\varepsilon = \Delta l / l$;
- 3) $\sigma = N/A$.

26 Поперечная деформация при растяжении:

- 1) $\varepsilon_x = -\nu\varepsilon$;
- 2) $\varepsilon = \Delta l / l$;
- 3) $\sigma = N/A$.

27 Параметр упругости, связывающий продольные и поперечные деформации:

- 1) модуль Юнга E ;
- 2) коэффициент Пуассона ν ;
- 3) модуль сдвига G .

28 Удлинение участка стержня при растяжении:

- 1) $\varepsilon = \Delta l / l$;
- 2) $\varepsilon_x = -\nu\varepsilon$;
- 3) $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$.

29 При растяжении стержня нормальные напряжения максимальны:

- 1) на контуре сечения;
- 2) в центре тяжести сечения;
- 3) во всех точках сечения одинаковы.

30 Нормальные напряжения на косых площадках:

- 1) $\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$;
- 2) $\sigma_\alpha = \sigma$;
- 3) $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$.

31 Касательные напряжения на косых площадках:

- 1) $\tau_\alpha = \sigma/2$;
- 2) $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$;
- 3) $\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$.

32 В поперечных сечениях стержня при растяжении:

- 1) $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$;
- 2) $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$;
- 3) $\sigma_\alpha = \sigma/2$, $\tau_\alpha = \sigma/2$.

33 В продольных сечениях стержня при растяжении:

- 1) $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$;
- 2) $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$;
- 3) $\sigma_\alpha = \sigma/2$, $\tau_\alpha = \sigma/2$.

34 На косых площадках ($\alpha = 45^\circ$) при растяжении:

- 1) $\sigma_\alpha = \sigma$, $\tau_\alpha = 0$;
- 2) $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = 0$;
- 3) $\sigma_\alpha = \sigma/2$, $\tau_\alpha = \sigma/2$.

35 При сжатии нормальные напряжения максимальны в сечении:

- 1) продольном ($\alpha = 90^\circ$);
- 2) поперечном ($\alpha = 0^\circ$);
- 3) косом ($\alpha = 45^\circ$).

36 При сжатии касательные напряжения максимальны в сечении:

- 1) продольном ($\alpha = 90^\circ$);
- 2) поперечном ($\alpha = 0^\circ$);
- 3) косом ($\alpha = 45^\circ$).

37 Потенциальная энергия деформации при растяжении:

- 1) $U = \frac{N^2 l}{2EA}$;
- 2) $U = \frac{Q^2 h}{2GA}$;
- 3) $U = M_z^2 l / (2GJ_p)$.

38 Жесткость поперечного сечения при растяжении-сжатии:

- 1) EA ;
- 2) GA ;
- 3) GJ_p .

39 Условие прочности при растяжении-сжатии:

- 1) $\sigma = N/A \leq [\sigma]$;
- 2) $\tau = Q/A \leq [\tau]$;
- 3) $\tau = M_z/W_p \leq [\tau]$.

40 При проверочном расчете:

- 1) проверяется выполнение условия прочности;
- 2) подбираются размеры поперечного сечения;
- 3) определяется грузоподъемность.

41 При проектном расчете:

- 1) проверяется выполнение условия прочности;
- 2) подбираются размеры поперечного сечения;
- 3) определяется грузоподъемность.

42 Коэффициент запаса прочности принимает значения:

- 1) $0 \leq n \leq 1$;
- 2) $n \geq 1$;
- 3) $n \geq 2$.

43 Коэффициент запаса определяется отношением:

- 1) $n = \sigma_y / [\sigma]$;
- 2) $n = \sigma_e / [\sigma]$;
- 3) $n = \sigma_{pr} / [\sigma]$.

44 При допускаемой нагрузке $[F]$ напряжение в опасной точке равно:

- 1) допускаемому напряжению $[\sigma]$;
- 2) пределу текучести σ_y ;
- 3) пределу прочности σ_u .

45 При опасной нагрузке F_y напряжение в опасной точке равно:

- 1) допускаемому напряжению $[\sigma]$;
- 2) пределу текучести σ_y ;
- 3) пределу прочности σ_u .

46 При предельной нагрузке F_{lim} напряжения в стержне равны:

- 1) допускаемому напряжению $[\sigma]$;
- 2) пределу текучести σ_y ;
- 3) пределу прочности σ_u .

47 После предела пропорциональности σ_{pr} начинается:

- 1) разрушение образца;
- 2) нелинейность диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$;
- 3) появление пластических деформаций.

48 После предела упругости σ_e начинается:

- 1) разрушение образца;
- 2) нелинейность диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$;
- 3) появление пластических деформаций.

49 После предела прочности σ_u начинается:

- 1) разрушение образца;
- 2) нелинейность диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$;
- 3) появление пластических деформаций.

50 Площадка текучести характерна:

- 1) для пластичных металлов;
- 2) легированных сталей;
- 3) чугунов.

51 При наклепе предел текучести σ_y :

- 1) не изменяется;
- 2) увеличивается;
- 3) уменьшается.

52 При растяжении образца шейка появляется после:

- 1) предела пропорциональности σ_{pr} ;
- 2) предела текучести σ_y ;
- 3) предела прочности σ_u .

53 Эффект Баушингера возникает при нагружении образца:

- 1) из естественного состояния;
- 2) в упругой области;
- 3) после предварительного пластического деформирования.

54 На прямолинейном участке диаграммы растяжения:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha = G$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha = E$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = \nu$.

55 Относительное остаточное удлинение образца при разрыве:

- 1) $\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$;
- 2) $\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%$;
- 3) $a = W/A$.

56 Относительное остаточное сужение образца при разрыве:

- 1) $\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$;
- 2) $\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%$;
- 3) $a = W/A$.

57 Ударная вязкость материала:

- 1) $\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%$;
- 2) $\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%$;
- 3) $a = W/A$.

58 Ударная вязкость материала препятствует:

- 1) динамическому разрушению образца;
- 2) появлению эффекта Баушингера;
- 3) возникновению площадки текучести.

59 Диаграмма Прандтля характерна:

- 1) для хрупких материалов;
- 2) идеально пластических материалов;
- 3) упрочняющихся материалов.

60 У статически неопределимой системы количество уравнений равновесия:

- 1) больше числа наложенных связей;
- 2) равно числу наложенных связей;
- 3) меньше числа наложенных связей.

61 У статически неопределимой системы число неизвестных реакций:

- 1) больше количества уравнений равновесия;
- 2) равно количеству уравнений равновесия;
- 3) меньше количества уравнений равновесия.

62 При сдвиге возникают напряжения:

- 1) касательные;
- 2) нормальные;
- 3) нормальные и касательные.

63 Закон Гука при сдвиге:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\tau = Q/A$;
- 3) $\tau = G\gamma$.

64 Напряжения и внутренние усилия при сдвиге связаны соотношением:

- 1) $\sigma = N/A$;
- 2) $\tau = G\gamma$;
- 3) $\tau = Q/A$.

65 Потенциальная энергия деформации при сдвиге:

- 1) $U = M_z^2 l / (2GJ_p)$;
- 2) $U = N^2 l / (2EA)$;
- 3) $U = Q^2 h / (2GA)$.

66 Жесткость поперечного сечения при сдвиге:

- 1) EA ;
- 2) GA ;
- 3) GJ_p .

67 Условие прочности при сдвиге:

- 1) $\sigma = N/A \leq [\sigma]$;
- 2) $\tau = M_z / W_p \leq [\tau]$;
- 3) $\tau = Q/A \leq [\tau]$.

68 Поперечные сечения круглого стержня при кручении:

- 1) искривляются;
- 2) поворачиваются как жесткие диски;
- 3) наклоняются к оси стержня под углом 45° .

69 Закон Гука при кручении:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\tau = G\gamma$;
- 3) $\tau = G\rho\theta$.

70 Связь напряжений и внутренних усилий при кручении:

- 1) $\sigma = N/A$;
- 2) $\tau = G\rho\theta$;
- 3) $\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho$.

71 Полярный момент инерции сечения:

- 1) $J_p = \int_A \rho^2 dA$;
- 2) $\tau = G\rho\theta$;
- 3) $W_p = J_p / \rho_{\max}$.

72 Полярный момент сопротивления сечения:

- 1) $J_p = \int_A \rho^2 dA$;
- 2) $W_p = J_p / \rho_{\max}$;
- 3) $J_p = \pi d^4 / 32$.

73 Полярный момент инерции круга:

- 1) $W_p = \pi d^3 / 16$;
- 2) $J_p = \pi d^4 / 32$;
- 3) $J_x = \pi d^4 / 64$.

74 Полярный момент сопротивления круга:

- 1) $W_p = \pi d^3 / 16$;
- 2) $J_p = \pi d^4 / 32$;
- 3) $J_x = \pi d^4 / 64$.

75 Потенциальная энергия деформации при кручении:

1) $U = \frac{N^2 l}{2EA}$;

2) $U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}$;

3) $U = \frac{Q^2 h}{2GA}$.

76 Жесткость поперечного сечения при кручении:

1) EA ;

2) GA ;

3) GJ_p .

77 Относительный угол закручивания:

1) $\theta = \frac{M_z}{GJ_p}$;

2) $\varepsilon = \Delta l/l$;

3) $\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}$.

78 Полный угол закручивания:

1) $\theta = \frac{M_z}{GJ_p}$;

2) $\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}$;

3) $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$.

79 Условие прочности при кручении:

1) $\sigma = N/A \leq [\sigma]$;

2) $\tau = M_z/W_p \leq [\tau]$;

3) $\tau = Q/A \leq [\tau]$.

80 Условие жесткости при кручении:

1) $\sigma = N/A \leq [\sigma]$;

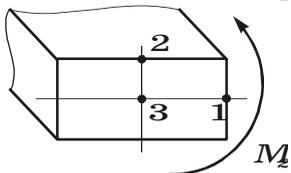
2) $\theta = \frac{M_z}{GJ_p} \leq [\theta]$;

3) $\tau = M_z/W_p \leq [\tau]$.

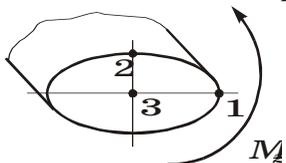
81 При кручении круглого стержня касательные напряжения максимальны:

- 1) на контуре сечения;
- 2) в центре тяжести сечения;
- 3) во всех точках сечения одинаковы.

82 Где касательные напряжения при кручении максимальны ?



83 Где касательные напряжения при кручении максимальны ?



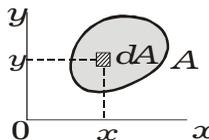
14.2 Геометрические характеристики плоских сечений. Изгиб

1 Статический момент относительно оси x :

$$1) S_x = \int_A y dA;$$

$$2) J_x = \int_A y^2 dA;$$

$$3) W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}.$$

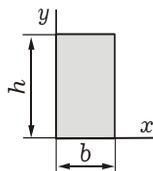


2 Статический момент S_y изображенного сечения:

$$1) S_y = \frac{hb^2}{2};$$

$$2) S_y = \frac{hb^2}{4};$$

$$3) S_y = 0.$$



3 Статические моменты S_x , S_y равны нулю относительно:

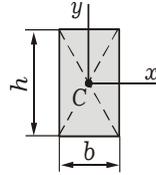
- 1) главных осей инерции;
- 2) центральных осей инерции;
- 3) декартовых осей координат.

4 Статический момент S_x изображенного сечения:

1) $S_x = \frac{bh^2}{2}$;

2) $S_x = \frac{bh^2}{4}$;

3) $S_x = 0$.



5 Координаты центра тяжести плоского сечения:

1) $W_x = J_x/y_{\max}$, $W_y = J_y/x_{\max}$;

2) $J_x = W_x y_{\max}$, $J_y = W_y x_{\max}$;

3) $x_C = S_y/A$, $y_C = S_x/A$.

6 Статические моменты плоского сечения:

1) $J_x = W_x y_{\max}$, $J_y = W_y x_{\max}$;

2) $S_x = y_C A$, $S_y = x_C A$;

3) $W_x = J_x/y_{\max}$, $W_y = J_y/x_{\max}$.

7 Размерность статических моментов S_x , S_y :

1) M^3 ;

2) M^4 ;

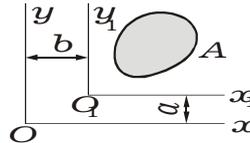
3) они безразмерны.

8 Статический момент при параллельном переносе оси x :

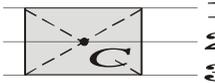
1) $J_{x_1} = J_x + a^2 A$;

2) $S_{x_1} = S_x - aA$;

3) $J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA$.



9 Статический момент равен нулю относительно оси:

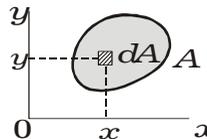


10 Момент инерции относительно оси x :

1) $J_x = \int_A y^2 dA$;

2) $S_x = \int_A y dA$;

3) $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$.

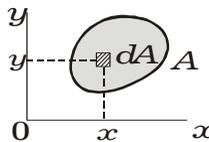


11 Центробежный момент инерции:

1) $J_x = \int_A x^2 dA;$

2) $J_y = \int_A y^2 dA;$

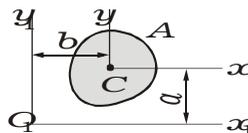
3) $J_{xy} = \int_A xy dA.$

**12 Укороченные формулы для осевого момента инерции при переносе оси x :**

1) $J_{x_1} = J_x + a^2 A;$

2) $S_{x_1} = S_x - aA;$

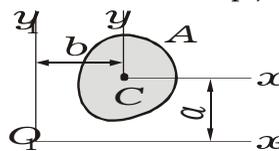
3) $J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA.$

**13 Укороченные формулы для центробежного момента инерции:**

1) $J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abA;$

2) $J_{y_1} = J_y + b^2 A;$

3) $J_{x_1} = J_x + a^2 A.$

**14 Укороченные формулы для моментов инерции применяются, если:**

- 1) новая система координат главная;
- 2) старая система координат главная;
- 3) старая система координат центральная.

15 Главные центральные оси инерции – это:

- 1) оси инерции, проходящие через центр тяжести сечения;
- 2) главные оси, проходящие через центр тяжести сечения;
- 3) ортогональные оси координат.

16 В главных осях моменты инерции J_x, J_y :

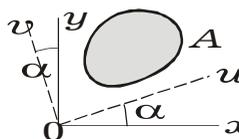
- 1) обращаются в нуль;
- 2) экстремальны;
- 3) равны между собой.

17 При повороте осей момент инерции J_u :

1) $J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha;$

2) $J_u = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha;$

3) $J_u = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha.$

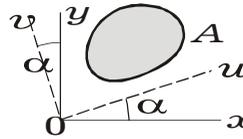


18 При повороте осей центробежный момент инерции:

1) $J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha$;

2) $J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha$;

3) $J_{uv} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha$.

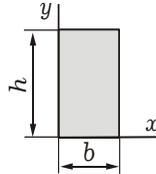


19 Осевой момент инерции J_x изображенного сечения:

1) $J_x = \frac{bh^3}{12}$;

2) $J_x = \frac{bh^3}{6}$;

3) $J_x = \frac{bh^3}{3}$.

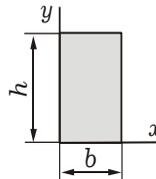


20 Осевой момент инерции J_y изображенного сечения:

1) $J_y = \frac{hb^3}{12}$;

2) $J_y = \frac{hb^3}{3}$;

3) $J_y = \frac{hb^3}{2}$.

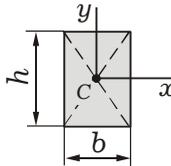


21 Осевой момент инерции J_x изображенного сечения:

1) $J_x = \frac{bh^3}{3}$;

2) $J_x = \frac{bh^3}{6}$;

3) $J_x = \frac{bh^3}{12}$.



22 Центробежный момент инерции J_{xy} в главных осях:

1) минимален;

2) максимален;

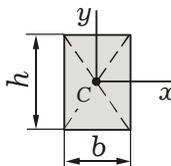
3) равен нулю.

23 Осевой момент инерции J_y изображенного сечения:

1) $J_y = \frac{hb^3}{12}$;

2) $J_y = \frac{hb^3}{3}$;

3) $J_y = 0$.

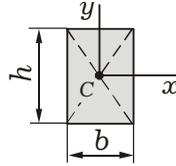


24 Центробежный момент инерции изображенного сечения:

$$1) J_{xy} = \frac{hb^3}{12};$$

$$2) J_{xy} = \frac{bh^3}{12};$$

$$3) J_{xy} = 0.$$

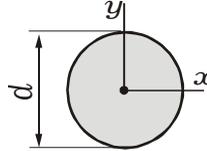


25 Осевой момент инерции J_x изображенного сечения:

$$1) J_{xy} = 0;$$

$$2) J_x = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$3) J_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

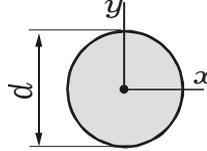


26 Центробежный момент инерции изображенного сечения:

$$1) J_{xy} = \frac{\pi d^4}{16};$$

$$2) J_{xy} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$3) J_{xy} = 0.$$



27 При повороте осей сумма осевых моментов инерции:

1) уменьшается;

2) увеличивается;

3) не изменяется.

28 Формула для угла поворота в главные оси инерции:

$$1) \sin 2\alpha_0 = 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0;$$

$$2) J_{uv} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha;$$

$$3) \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}.$$

29 Распределенная нагрузка и изгибающий момент связаны зависимостью:

$$1) q = \frac{d^2 M_x}{dz^2};$$

$$2) Q_y = \frac{dM_x}{dz};$$

$$3) q = \frac{dQ_y}{dz}.$$

30 Распределенная нагрузка и поперечная сила связаны формулой:

$$1) q = \frac{d^2 M_x}{dz^2};$$

$$2) Q_y = \frac{dM_x}{dz};$$

$$3) q = \frac{dQ_y}{dz}.$$

31 Поперечная сила и изгибающий момент связаны формулой:

$$1) q = \frac{d^2 M_x}{dz^2};$$

$$2) Q_y = \frac{dM_x}{dz};$$

$$3) q = \frac{dQ_y}{dz}.$$

32 Эпюра Q_y имеет скачок в сечении, в котором действует:

1) внешняя сосредоточенная сила;

2) внешний изгибающий момент;

3) распределенная нагрузка.

33 Эпюра M_x имеет скачок в сечении, в котором действует:

1) внешняя сосредоточенная сила;

2) внешний изгибающий момент;

3) распределенная нагрузка.

34 Эпюра M_x ограничена параболой на участках, где действует:

1) внешняя сосредоточенная сила;

2) внешний изгибающий момент;

3) распределенная нагрузка.

35 При чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают:

1) только изгибающие моменты M_x ;

2) только поперечные силы Q_y ;

3) изгибающие моменты и поперечные силы.

36 При поперечном изгибе в сечениях балки возникают:

1) только изгибающие моменты M_x ;

2) только поперечные силы Q_y ;

3) изгибающие моменты и поперечные силы.

37 При чистом изгибе в поперечных сечениях действуют:

1) только нормальные напряжения σ ;

2) только касательные напряжения τ ;

3) нормальные и касательные напряжения (σ и τ).

38 При поперечном изгибе в сечениях балки действуют:

- 1) только нормальные напряжения σ ;
- 2) только касательные напряжения τ ;
- 3) нормальные и касательные напряжения (σ и τ).

39 Закон Гука при изгибе:

- 1) $\sigma = \frac{E}{\rho} y$;
- 2) $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$;
- 3) $\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho$.

40 Связь нормальных напряжений с изгибающим моментом:

- 1) $\sigma = \frac{E}{\rho} y$;
- 2) $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$;
- 3) $\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho$.

41 Эпюра нормальных напряжений при изгибе:

- 1) постоянна;
- 2) линейна;
- 3) ограничена параболой.

42 Эпюра касательных напряжений при изгибе:

- 1) постоянна;
- 2) линейна;
- 3) ограничена параболой.

43 Максимальные нормальные напряжения при изгибе:

- 1) в центре поперечного сечения;
- 2) на внешних волокнах;
- 3) во внутренних волокнах.

44 Максимальные касательные напряжения при изгибе:

- 1) в центре поперечного сечения;
- 2) на внешних волокнах;
- 3) во внутренних волокнах.

45 Максимальные нормальные напряжения при изгибе:

$$1) \tau_{\max} = M_z / W_p ;$$

$$2) \sigma_{\max} = \frac{N}{A} ;$$

$$3) \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} .$$

46 Потенциальная энергия деформации при изгибе:

$$1) U = \int_l \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} ;$$

$$2) U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA} ;$$

$$3) U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} .$$

47 Касательные напряжения при поперечном изгибе:

$$1) \sigma = \frac{E}{\rho} y ;$$

$$2) \tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b} ;$$

$$3) \tau = Q_y / A .$$

48 Формула Журавского:

$$1) J_{x_1} = J_x + a^2 A ;$$

$$2) \tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b} ;$$

$$3) \tau = \frac{M_z}{J_p} \rho .$$

49 При поперечном изгибе нарушается гипотеза:

1) малости деформаций;

2) плоских сечений;

3) принцип Сен-Венана.

50 Условие прочности при изгибе:

$$1) \sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq R ;$$

$$2) \sigma = \frac{N}{A} \leq R ;$$

$$3) \tau = \frac{M_z}{W_p} \leq R_s .$$

51 Условие прочности по касательным напряжениям при изгибе:

$$1) \sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$2) \tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} \leq [\tau];$$

$$3) \tau = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau].$$

52 Дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$1) \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x};$$

$$2) \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

$$3) y'' = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

53 Формулы для нормальных напряжений являются точными:

1) всегда;

2) где $Q = \text{const}$;

3) где Q изменяется линейно;

54 Дифференциальное уравнение упругой линии гибких балок:

$$1) \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x};$$

$$2) \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{M_x}{EJ_x};$$

$$3) y'' = M_x/EJ_x.$$

55 Дифференциальное уравнение упругой линии при наличии распределенной нагрузки:

1) второго порядка;

2) третьего порядка;

3) четвертого порядка.

56 Дифференциальное уравнение упругой линии при наличии поперечной силы:

1) второго порядка;

2) третьего порядка;

3) четвертого порядка.

57 Дифференциальное уравнение упругой линии при чистом изгибе:

1) второго порядка;

2) третьего порядка;

3) четвертого порядка.

58 Метод начальных параметров удобен, если у балки:

- 1) один характерный участок;
- 2) несколько характерных участков;
- 3) ось большой кривизны.

59 Метод начальных параметров учитывает нагрузки:

- 1) все;
- 2) расположенные слева от сечения;
- 3) расположенные справа от сечения.

60 Предельное значение изгибающего момента:

- 1) $M_x = \sigma_y W_x$;
- 2) $M_{pl} = \sigma_y W_{pl}$;
- 3) $M_x = EJ_x / \rho$.

61 Пластический момент сопротивления:

- 1) $W_x = J_x / y_{\max}$;
- 2) $W_p = J_p / \rho_{\max}$;
- 3) $W_{pl} = S_1 + S_2$.

62 При предельном моменте напряжения равны σ_y :

- 1) на внешних волокнах;
- 2) в центре сечения;
- 3) во всём сечении.

63 В сечении с пластическим шарниром $\sigma = \sigma_y$:

- 1) на внешних волокнах;
- 2) в центре сечения;
- 3) во всём сечении.

64 Дифференциальное уравнение балки на упругом основании:

- 1) $y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$;
- 2) $EJ_x y''' = Q_y$;
- 3) $y^{IV} + 4k^4 y = \frac{q}{EJ_x}$.

65 Реакция основания модели Винклера:

- 1) $EJ_x y^{IV} = q + q_r$;
- 2) $q_r = -ky$;
- 3) $M_x = \sigma_y W_x$.

66 Для бруса малой кривизны:

$$1) \frac{h}{\rho_0} = 0;$$

$$2) \frac{h}{\rho_0} \leq 0,2;$$

$$3) 0,2 \leq \frac{h}{\rho_0} \leq 1.$$

67 Для бруса большой кривизны:

$$1) \frac{h}{\rho_0} = 0;$$

$$2) \frac{h}{\rho_0} \leq 0,2;$$

$$3) 0,2 \leq \frac{h}{\rho_0} \leq 1.$$

68 Закон Гука для бруса большой кривизны:

$$1) \sigma = \frac{Ey}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right);$$

$$2) \sigma = E\varepsilon;$$

$$3) \sigma = Ey \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

69 Закон Гука для бруса малой кривизны:

$$1) \sigma = \frac{Ey}{r_0 + y} r_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right);$$

$$2) \sigma = Ey \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right);$$

$$3) \sigma = E\varepsilon.$$

70 Нормальные напряжения в бруске большой кривизны:

$$1) \sigma = \frac{Ey}{\rho_0};$$

$$2) \sigma = Ey (1/r - 1/r_0);$$

$$3) \sigma = \frac{M_x}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}.$$

71 Радиус кривизны нейтрального слоя кривого бруса:

$$1) \frac{h}{\rho_0} \leq 0,2;$$

$$2) r_0 = A / \int_A \frac{dA}{u};$$

$$3) \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

14.3 Сложное сопротивление.

Напряженное и деформированное состояния.

Теории прочности и разрушения

1 При кром изгибе нулевая линия:

- 1) перпендикулярна плоскости изгибающего момента;
- 2) параллельна ей;
- 3) направлена под другим углом.

2 При кром изгибе нулевая линия ближе к оси, относительно которой момент инерции:

- 1) минимален;
- 2) максимален;
- 3) равен нулю.

3 При кром изгибе нулевая линия проходит:

- 1) вне сечения;
- 2) через центр тяжести сечения;
- 3) пересекая сечение, но вне центра тяжести.

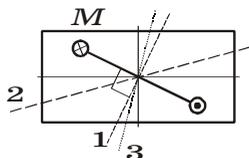
4 Нормальные напряжения при кром изгибе:

- 1) $\sigma = E\varepsilon$;
- 2) $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$;
- 3) $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$.

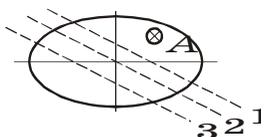
5 Уравнение нулевой линии при кром изгибе:

- 1) $\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$;
- 2) $\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y = 0$;
- 3) $\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$.

6 Примерное положение нулевой линии при косом изгибе:



7 Нулевая линия при внецентренном сжатии в точке А:



8 Нулевая линия касается ядра сечения, если сила приложена:

- 1) в самой удаленной точке сечения;
- 2) в ядре сечения;
- 3) на границе ядра сечения.

9 Если сила на границе ядра сечения, то нулевая линия:

- 1) проходит вне сечения;
- 2) касается сечения;
- 3) пересекает сечение.

10 Если сила приложена в ядре сечения, то нулевая линия:

- 1) проходит вне сечения;
- 2) касается сечения;
- 3) пересекает сечение.

11 Если сила приложена вне ядра сечения, то нулевая линия:

- 1) проходит вне сечения;
- 2) касается сечения;
- 3) пересекает сечение.

12 Нулевая линия пересекает ядро сечения:

- 1) это невозможно, если сила приложена в сечении;
- 2) возможно, если сила приложена в центре тяжести;
- 3) возможно, если сила приложена на контуре сечения.

13 При приближении силы к центру тяжести нулевая линия:

- 1) касается ядра сечения;
- 2) касается контура сечения;
- 3) уходит в бесконечность.

14 Уравнение нулевой линии при внецентренном растяжении:

1) $\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$;

2) $\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y = 0$;

3) $\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$.

15 Нормальные напряжения при внецентренном растяжении:

1) $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$;

2) $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$;

3) $\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$.

16 Знаки y продольной силы и напряжения в ядре сечения:

1) противоположные; 2) одинаковые; 3) возможны оба варианта.

17 При внецентренном растяжении нормальные напряжения максимальны:

1) в центре сечения;

2) на границе ядра сечения;

3) в самой удаленной от нулевой линии точке.

18 Количество независимых компонент тензора напряжений:

1) три;

2) шесть;

3) девять.

19 Количество независимых компонент тензора деформаций:

1) три;

2) шесть;

3) девять.

20 На главных площадках тензора напряжений:

1) нормальные напряжения равны нулю;

2) касательные напряжения равны нулю;

3) и те, и другие экстремальны.

21 В главных осях тензора напряжений:

1) нормальные напряжения экстремальны;

2) касательные напряжения экстремальны;

3) октаэдрические напряжения экстремальны.

22 *Нормальные напряжения на октаэдрических площадках:*

$$1) \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$2) \sigma = E\varepsilon;$$

$$3) \sigma = \frac{M_x}{J_x} y.$$

23 *Касательные напряжения на октаэдрических площадках:*

$$1) \tau = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$2) \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3);$$

$$3) \tau = \frac{1}{3} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)^{1/2}.$$

24 *Максимальные касательные напряжения:*

$$1) \tau = \frac{1}{3} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)^{1/2};$$

$$2) \tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x b};$$

$$3) \tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

25 *Касательные напряжения максимальны на площадках:*

1) главных тензора напряжений;

2) октаэдрических;

3) равнонаклоненных к первой и третьей главным осям.

26 *Площадки с τ_{\max} равнонаклонены:*

1) к главным осям инерции;

2) трем главным осям тензора напряжений;

3) первой и третьей главным осям тензора напряжений

27 *Площадка с τ_{\max} при плоском напряженном состоянии:*

1) параллельна главной;

2) перпендикулярна главной;

3) наклонена к главной под углом 45° .

28 *Уравнение эллипсоида напряжений:*

$$1) EJ_x y'' = M_x;$$

$$2) \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0;$$

$$3) \left(\frac{p_{v1}}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{p_{v2}}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{p_{v3}}{\sigma_3} \right)^2 = 1.$$

29 *Вековое уравнение для главных напряжений:*

$$1) EJ_x y'' = M_x;$$

$$2) \sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0;$$

$$3) \left(\frac{p_{v1}}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{p_{v2}}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{p_{v3}}{\sigma_3} \right)^2 = 1.$$

30 *Первый инвариант тензора напряжений:*

- 1) $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$;
- 2) $J_1 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$;
- 3) $J_1 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$.

31 *Второй инвариант тензора напряжений:*

- 1) $J_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$;
- 2) $J_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$;
- 3) $J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$.

32 *Третий инвариант тензора напряжений:*

- 1) $J_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$;
- 2) $J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$;
- 3) $J_3 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$.

33 *Первый инвариант тензора деформаций:*

- 1) $I_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$;
- 2) $I_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$;
- 3) $I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

34 *Второй инвариант тензора деформаций:*

- 1) $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$;
- 2) $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$;
- 3) $I_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

35 *Третий инвариант тензора деформаций:*

- 1) $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$;
- 2) $I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$;
- 3) $I_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

36 *Величина объемной деформации:*

- 1) $\theta = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$;
- 2) $\theta = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$;
- 3) $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

37 *Для плоского напряженного состояния:*

- 1) одно главное напряжение равно нулю;
- 2) два главных напряжения равны нулю;
- 3) три главных напряжения не равны нулю.

38 *В главных осях тензора деформаций:*

- 1) линейные деформации равны нулю;
- 2) линейные деформации экстремальны;
- 3) сдвиговые деформации экстремальны.

39 *Главные оси тензора напряжений и упругих деформаций:*

- 1) совпадают;
- 2) взаимно перпендикулярны;
- 3) составляют угол 45° .

40 Обобщенный закон Гука для ε_x :

$$1) \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$2) \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$3) \sigma = E\varepsilon.$$

41 Полная потенциальная энергия деформации:

$$1) U_0 = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2);$$

$$2) U_0 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2;$$

$$3) U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)).$$

42 Потенциальная энергия изменения формы:

$$1) U_d = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2);$$

$$2) U_d = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2;$$

$$3) U_d = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)).$$

43 Потенциальная энергия изменения объема:

$$1) U_v = \frac{1+\nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2);$$

$$2) U_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2;$$

$$3) U_v = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)).$$

44 У равноопасных состояний одинаковы:

1) максимальные напряжения;

2) максимальные деформации;

3) коэффициенты запаса.

45 В качестве эквивалентного принимается напряжение:

1) при растяжении;

2) кручении;

3) изгибе.

46 Какая из приведенных первая теория прочности:

$$1) \sigma_{red} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma];$$

$$2) \sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma];$$

$$3) \sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

47 *Какая из приведенных вторая теория прочности:*

- 1) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$;
- 2) $\sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma]$;
- 3) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.

48 *Какая из приведенных третья теория прочности:*

- 1) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$;
- 2) $\sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma]$;
- 3) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.

49 *Какая из приведенных четвертая теория прочности:*

- 1) $\sigma_{red} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$;
- 2) $\sigma_{red} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]$;
- 3) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.

50 *Какая из приведенных пятая теория прочности:*

- 1) $\sigma_{red} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]$;
- 2) $\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$;
- 3) $\sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma]$.

51 *Третья теория прочности появление пластических деформаций связывает:*

- 1) с потенциальной энергией;
- 2) максимальными касательными напряжениями;
- 3) максимальными нормальными напряжениями.

52 *Четвертая теория прочности появление пластических деформаций связывает:*

- 1) с потенциальной энергией;
- 2) максимальными касательными напряжениями;
- 3) ростом трещин.

53 *В теории прочности Мора учитывается:*

- 1) влияние σ_2 ;
- 2) условие роста трещины;
- 3) различное сопротивление растяжению и сжатию.

54 *Критерий Гриффитса устанавливает условие:*

- 1) появления пластических деформаций;
- 2) роста трещины;
- 3) разрушения образца.

55 *Теория прочности Треска – Сен-Венана для изгиба с кручением:*

- 1) $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$;
- 2) $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$;
- 3) $\sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma]$.

56 Энергетическая теория прочности для изгиба с кручением:

$$1) \sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$2) \sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$3) \sigma_{red} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

57 Условие роста трещины определяется:

1) теорией Мора;

2) теорией Хубера – Мизеса – Хенки;

3) критерием Гриффитса.

58 Критерий Гриффитса:

$$1) \sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$2) \sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$3) l \geq \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}.$$

59 В критерии Гриффитса параметр $2l$ обозначает:

1) длину трещины;

2) площадь трещины;

3) энергию создания единицы свободной поверхности.

14.4 Перемещения в стержневых системах. Устойчивость сжатых стержней

1 Формула Мора в общем случае плоской задачи:

$$1) \Delta = \sum_l \int \frac{\overline{M}M_F}{EJ} dz;$$

$$2) \Delta = \sum_l \int \frac{\overline{M}M_F}{EJ} dz + \sum_l \int \frac{\eta \overline{Q}Q_F}{GA} dz + \sum_l \int \frac{\overline{N}N_F}{EA} dz;$$

$$3) \Delta = \sum_l \int \frac{\eta \overline{Q}Q_F}{GA} dz + \sum_l \int \frac{\overline{N}N_F}{EA} dz.$$

2 Формула Мора для определения перемещений в балках при изгибе:

$$1) \Delta = \sum_l \int \frac{\overline{M}M_F}{EJ} dz;$$

$$2) \Delta = \sum_l \int \frac{\overline{N}N_F}{EA} dz;$$

$$3) \Delta = \sum_l \int \frac{\eta \overline{Q}Q_F}{GA} dz.$$

3 Правило Верещагина справедливо:

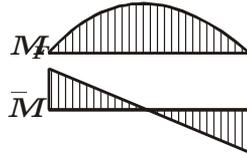
- 1) для любых эпюр;
- 2) только если обе перемножаемые эпюры прямолинейны;
- 3) если хотя бы одна из эпюр прямолинейна.

4 Правило Верещагина справедливо:

- 1) для прямолинейных участков произвольной жесткости;
- 2) для прямолинейных участков постоянной жесткости;
- 3) для криволинейных участков постоянной жесткости.

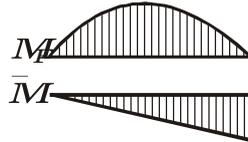
5 Перемещение, получаемое перемножением указанных эпюр:

- 1) положительное;
- 2) отрицательное;
- 3) нулевое.



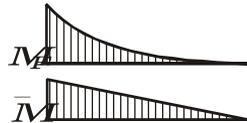
6 Перемещение, получаемое перемножением указанных эпюр:

- 1) положительное;
- 2) отрицательное;
- 3) нулевое.



7 Перемещение, получаемое перемножением указанных эпюр:

- 1) положительное;
- 2) отрицательное;
- 3) нулевое.



8 Значение предельной гибкости λ_E получено из условия:

- 1) $\sigma \leq \sigma_y$;
- 2) $\sigma \leq \sigma_u$;
- 3) $\sigma \leq \sigma_{pr}$.

9 Величина предельной гибкости:

- 1) $\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}}$;
- 2) $\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}}$;
- 3) $\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}$.

10 *Формула Эйлера:*

- 1) $F_{cr} = \sigma_y A$;
- 2) $\sigma_{cr} = a - b\lambda$;
- 3) $F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$.

11 *Формула Ясинского:*

- 1) $F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$;
- 2) $\sigma_{cr} = a - b\lambda$;
- 3) $F_{cr} = \sigma_y A$.

12 *Условие устойчивости:*

- 1) $F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$;
- 2) $\sigma = N/A \leq \varphi[\sigma]$;
- 3) $\sigma = N/A \leq [\sigma]$.

13 *Формула Ясинского для стального стержня справедлива:*

- 1) при $0 < \lambda \leq 40$;
- 2) $40 < \lambda \leq 100$;
- 3) $\lambda \geq 100$.

14 *Формула Эйлера для стального стержня справедлива:*

- 1) при $0 < \lambda \leq 40$;
- 2) $40 < \lambda \leq 100$;
- 3) $\lambda \geq 100$.

15 *Формула $F_{cr} = \sigma_y A$ для стального стержня справедлива:*

- 1) при $0 < \lambda \leq 40$;
- 2) $40 < \lambda \leq 100$;
- 3) $\lambda \geq 100$.

16 *При гибкости стального стержня $\lambda \geq 100$ σ_{cr} определяется:*

- 1) формулой Эйлера;
- 2) формулой Ясинского;
- 3) формулой $\sigma_{cr} = \sigma_y$.

17 *При гибкости стального стержня $40 < \lambda \leq 100$ σ_{cr} определяется:*

- 1) формулой Эйлера;
- 2) формулой Ясинского;
- 3) формулой $\sigma_{cr} = \sigma_y$.

18 Коэффициент приведения длины стержня μ определяется:

- 1) гибкостью λ ;
- 2) условиями закрепления стержня;
- 3) величиной критической силы.

19 В формуле Эйлера параметр μ – это:

- 1) гибкость стержня;
- 2) коэффициент приведения длины стержня;
- 3) коэффициент продольного изгиба.

20 В условии устойчивости параметр φ – это:

- 1) гибкость стержня;
- 2) коэффициент продольного изгиба;
- 3) коэффициент приведения длины стержня.

21 Параметр λ – это:

- 1) гибкость стержня;
- 2) коэффициент продольного изгиба;
- 3) коэффициент приведения длины стержня.

22 Коэффициент φ с уменьшением гибкости стержня λ :

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

23 Коэффициент φ с увеличением гибкости стержня λ :

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

24 При уменьшении гибкости стержня σ_{cr} Ясинского:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

25 При увеличении гибкости стержня σ_{cr} Ясинского:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

26 Гибкость стержня:

- 1) $\lambda = \frac{\mu l}{i}$;
- 2) $F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}$;
- 3) $\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi[\sigma]$.

27 Момент инерции в формуле Эйлера:

- 1) $J = J_{\min}$;
- 2) $J = J_{\max}$;
- 3) $J = (J_{\min} + J_{\max})/2$.

28 При увеличении длины стержня F_{cr} Эйлера:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

29 При уменьшении длины стержня F_{cr} Эйлера:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

30 При увеличении поперечных размеров стержня F_{cr} Эйлера:

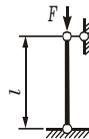
- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

31 При уменьшении поперечных размеров стержня F_{cr} Эйлера:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

32 Параметр μ для указанного стержня:

- 1) $\mu = 0,5$;
- 2) $\mu = 1$;
- 3) $\mu = 2$.



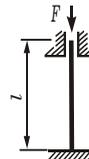
33 Параметр μ для указанного стержня:

- 1) $\mu = 0,7$;
- 2) $\mu = 1$;
- 3) $\mu = 2$.



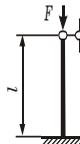
34 Параметр μ для указанного стержня:

- 1) $\mu = 0,5$;
- 2) $\mu = 0,7$;
- 3) $\mu = 2$.



35 Параметр μ для указанного стержня:

- 1) $\mu = 0,5$;
- 2) $\mu = 0,7$;
- 3) $\mu = 1$.



36 Если выполнено условие прочности, то условие устойчивости:

- 1) выполняется;
- 2) не выполняется;
- 3) может не выполняться.

37 Если выполнено условие устойчивости, то условие прочности:

- 1) выполняется;
- 2) не выполняется;
- 3) может не выполняться.

38 Параметр M_{Π} при продольно-поперечном изгибе:

- 1) полный изгибающий момент;
- 2) поперечный изгибающий момент;
- 3) продольный изгибающий момент.

39 Приближенная формула изгибающего момента при продольно-поперечном изгибе:

1) $M = \frac{q}{k^2} \frac{1 - \cos kl / 2}{\cos kl / 2}$;

2) $M = \frac{M_{\Pi}}{1 - F / F_{cr}}$;

3) $M = ql^2 / 8$.

40 Приближенная формула для напряжений при продольно-поперечном изгибе:

1) $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_{\Pi}}{W(1 - F / F_{cr})}$;

2) $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$;

3) $\sigma = E\varepsilon$.

41 Дифференциальное уравнение упругой линии балки при продольно-поперечном изгибе:

1) $EIy'' = M_x$;

2) $y'' + k^2y = \frac{M_{\Pi}}{EJ}$;

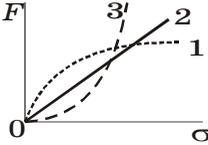
3) $y'' + k^2y = 0$.

42 Приближенный метод решения задач продольно-поперечного изгиба предполагает:

- 1) последовательные приближения;
- 2) аппроксимацию прогибов синусоидой;

3) подобие эпюр моментов и перемещений.

43 График зависимости напряжений от сжимающей силы при продольно-поперечном изгибе:



44 При продольно-поперечном изгибе коэффициент запаса принимается по допустимым:

- 1) силам;
- 2) напряжениям;
- 3) деформациям.

45 Поперечный момент M_{\perp} при уменьшении сжимающей силы F (продольно-поперечный изгиб):

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

46 Поперечный момент M_{\perp} при увеличении сжимающей силы F (продольно-поперечный изгиб):

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

14.5 Динамика. Циклические напряжения. Контактная задача

1 Гипотезы предполагают, что удар:

- 1) абсолютно упругий;
- 2) абсолютно неупругий;
- 3) упругопластический.

2 Эпюра динамических перемещений при ударе:

- 1) совпадает со статической;
- 2) подобна статической;
- 3) обратно пропорциональна статической.

3 Динамический коэффициент при ударе:

$$1) k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}};$$

$$2) \sigma_{cr} = a - b\lambda;$$

$$3) k_d = \frac{1}{1 - \varphi^2 / \omega^2}.$$

4 Динамический коэффициент при ударе по массивной системе:

1) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}}$;

2) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}(1+Q/P)}}$;

3) $k_d = 2$.

5 Динамический коэффициент при мгновенной нагрузке:

1) $k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/w_{st}}$;

2) $k_d = 2$;

3) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl}}$.

6 Динамический коэффициент при ударе с ростом жесткости системы:

1) увеличивается;

2) уменьшается;

3) остается прежним.

7 Динамический коэффициент при ударе с уменьшением жесткости системы:

1) увеличивается;

2) уменьшается;

3) остается прежним.

8 Динамический коэффициент при продольном ударе:

1) $k_d = 2$;

2) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Pl}}$;

3) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}}$.

9 При уменьшении w_{st} динамический коэффициент:

1) увеличивается;

2) уменьшается;

3) остается прежним.

10 Величина динамического коэффициента при ударе:

1) $k_d \geq 2$;

2) $k_d \geq 1$;

3) $k_d \geq 0$.

11 С увеличением w_{st} динамический коэффициент при ударе:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

12 При уменьшении массы системы динамический коэффициент при ударе:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

13 При увеличении массы системы динамический коэффициент при ударе:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

14 Дифференциальное уравнение свободных колебаний:

- 1) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = 0$;
- 2) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = q \sin \varphi t$;
- 3) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \dot{w} + \omega^2 w = 0$.

15 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

- 1) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = 0$;
- 2) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = q \sin \varphi t$;
- 3) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \dot{w} + \omega^2 w = 0$.

16 Дифференциальное уравнение свободных колебаний в среде с сопротивлением:

- 1) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = 0$;
- 2) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = q \sin \varphi t$;
- 3) $\frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \dot{w} + \omega^2 w = 0$.

17 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением:

$$1) \frac{d^2 w}{dt^2} + \omega^2 w = q \sin \varphi t ;$$

$$2) \frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \dot{w} + \omega^2 w = q \sin \varphi t ;$$

$$3) \frac{d^2 w}{dt^2} + \alpha \dot{w} + \omega^2 w = 0 .$$

18 Уравнение свободных колебаний:

$$1) w = A \cos(\omega t + B) ;$$

$$2) w = A \cos(\omega t + B) + \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t ;$$

$$3) w = A e^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) .$$

19 Уравнение вынужденных колебаний:

$$1) w = A \cos(\omega t + B) ;$$

$$2) w = A \cos(\omega t + B) + \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t ;$$

$$3) w = A e^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) .$$

20 Уравнение свободных колебаний в среде с сопротивлением:

$$1) w = A \cos(\omega t + B) ;$$

$$2) w = A \cos(\omega t + B) + \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t ;$$

$$3) w = A e^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) .$$

21 Частота свободных колебаний:

$$1) \omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}} ;$$

$$2) \varphi = \pi n / 30 ;$$

$$3) q = Sg/P .$$

22 Уравнение вынужденных колебаний в среде с сопротивлением:

$$1) w = A \cos(\omega t + B) + \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2} \sin \varphi t ;$$

$$2) w = A e^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) ;$$

$$3) w = A e^{-nt} \cos(\omega_1 t + B) + A_0 \sin(\varphi t - \alpha) .$$

23 Частота свободных колебаний в среде с сопротивлением:

$$1) \omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}};$$

$$2) \varphi = \pi n/30;$$

$$3) \omega_1^2 = \omega^2 - n^2.$$

24 Параметр вязкости среды:

$$1) 2n = \frac{\alpha g}{P};$$

$$2) q = Sg/P;$$

$$3) \omega_1^2 = \omega^2 - n^2.$$

25 Амплитуда вынужденных колебаний:

$$1) A_0 = \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2};$$

$$2) 2n = \frac{\alpha g}{P};$$

$$3) q = Sg/P.$$

26 Амплитуда вынужденных колебаний в среде с сопротивлением:

$$1) A_0 = \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2};$$

$$2) A_0 = \frac{S\delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\varphi^2 n^2}{\omega^4}}};$$

$$3) 2n = \alpha g/P.$$

27 Сила сопротивления среды пропорциональна:

1) прогибу;

2) скорости;

3) ускорению.

28 Период свободных колебаний без учета сопротивления среды:

$$1) T = 2\pi/\omega;$$

$$2) \omega_1^2 = \omega^2 - n^2;$$

$$3) 2n = \alpha g/P.$$

29 Период свободных колебаний в среде с сопротивлением:

1) $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

2) $\omega_1^2 = \omega^2 - n^2$;

3) $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2 - n^2}}$.

30 Динамический коэффициент вынужденных колебаний:

1) $k_d = \frac{1}{1 - \varphi^2/\omega^2}$;

2) $k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{st}}}$;

3) $k_d = 2$.

31 Динамический коэффициент в среде с сопротивлением:

1) $k_d = \frac{1}{1 - \varphi^2/\omega^2}$;

2) $\omega_1^2 = \omega^2 - n^2$;

3) $k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varphi^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\varphi^2 n^2}{\omega^4}}}$.

32 В динамическом коэффициенте колебаний параметр φ :

1) частота свободных колебаний;

2) частота возмущающей силы;

3) коэффициент вязкости среды.

33 В динамическом коэффициенте колебаний параметр ω :

1) частота возмущающей силы;

2) коэффициент вязкости среды;

3) частота свободных колебаний.

34 В динамическом коэффициенте колебаний параметр n :

1) частота свободных колебаний;

2) частота возмущающей силы;

3) коэффициент вязкости среды.

35 При частоте возмущающей силы $\varphi \gg \omega$ динамический коэффициент:

- 1) $k_d = 0$;
- 2) $k_d = \infty$;
- 3) $k_d = 2$.

36 При свободных колебаниях внешняя сила:

- 1) $S(t) = S \sin \varphi t$;
- 2) $S(t) = 0$;
- 3) $S(t) = \text{const}$.

37 При увеличении жесткости системы пик резонанса:

- 1) смещается влево;
- 2) смещается вправо;
- 3) остается на месте.

38 При уменьшении жесткости системы пик резонанса:

- 1) смещается влево;
- 2) смещается вправо;
- 3) остается на месте.

39 В упругопластических системах пик резонанса:

- 1) смещается влево;
- 2) смещается вправо;
- 3) остается на месте.

40 В среде с сопротивлением период свободных колебаний:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется.

41 В среде с сопротивлением частота свободных колебаний:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется.

42 В среде с сопротивлением период вынужденных колебаний:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется.

43 В среде с сопротивлением амплитуда свободных колебаний:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется.

44 При резонансе амплитуда колебаний в среде с сопротивлением:

- 1) уменьшается;
- 2) стремится к бесконечности;
- 3) ограничена.

45 При резонансе амплитуда колебаний упругой системы:

- 1) уменьшается;
- 2) стремится к бесконечности;
- 3) ограничена.

46 В дифференциальном уравнении колебаний параметр w – это:

- 1) статический прогиб;
- 2) полный прогиб системы с грузом;
- 3) прогиб от положения статического равновесия.

47 Влияние вязкости среды на динамический коэффициент в диапазоне $0,7 \leq \varphi/\omega \leq 1,3$:

- 1) существенное;
- 2) слабое;
- 3) отсутствует.

48 Влияние вязкости среды на динамический коэффициент в диапазоне $\varphi/\omega \leq 0,7$:

- 1) существенное;
- 2) слабое;
- 3) отсутствует.

49 Влияние вязкости среды на динамический коэффициент в диапазоне $\varphi/\omega \geq 1,3$:

- 1) существенное;
- 2) слабое;
- 3) отсутствует.

50 С увеличением вязкости среды динамический коэффициент:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

51 С уменьшением вязкости среды динамический коэффициент:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

52 Амплитуда цикла напряжений:

$$1) \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

$$2) \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

$$3) A_0 = \frac{q}{\omega^2 - \varphi^2}.$$

53 Стационарное напряжение в цикле:

$$1) \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

$$2) \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

$$3) R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$

54 Коэффициент асимметрии цикла:

$$1) R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}};$$

$$2) \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2};$$

$$3) \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}.$$

55 Коэффициент асимметрии пульсационного цикла напряжений:

$$1) R_\sigma = \infty;$$

$$2) R_\sigma = -1;$$

$$3) R_\sigma = 1.$$

56 Коэффициент асимметрии симметричного цикла напряжений:

$$1) R_\sigma = -1;$$

$$2) R_\sigma = 0;$$

$$3) R_\sigma = 1.$$

57 Коэффициент запаса циклической прочности по нормальным напряжениям:

$$1) n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_\tau \tau_m};$$

$$2) n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m};$$

$$3) n_\sigma = \sigma_y / [\sigma].$$

58 Коэффициент запаса циклической прочности по касательным напряжениям:

$$1) n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m};$$

$$2) n_{\tau} = \frac{\tau_y}{[\tau]};$$

$$3) n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m}.$$

59 Формула Гафа – Полларда:

$$1) n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m};$$

$$2) n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m};$$

$$3) \frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2}.$$

60 Предел выносливости σ_R – это наибольшее напряжение цикла, при котором образцу:

- 1) не разрушается до базы испытаний;
- 2) разрушается при ее достижении;
- 3) не разрушается при бесконечном числе циклов.

61 Предел выносливости σ_R с увеличением диаметра образца:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

62 Эффективный коэффициент концентрации:

- 1) $K_{\sigma} = \sigma_{-1}/\sigma_{-1k}$;
- 2) $\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{ном}}$;
- 3) $K_F = \sigma'_{-1}/\sigma_{-1}$.

63 С ростом σ_u эффективный коэффициент концентрации:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

64 С ростом радиуса выточки вала эффективный коэффициент K_F :

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

65 *С уменьшением радиуса выточки на вале эффективный коэффициент концентрации:*

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

66 *Эффективный коэффициент концентрации учитывает:*

- 1) механические свойства материала;
- 2) величину номинальных напряжений;
- 3) величину предела выносливости материала.

67 *Теоретический коэффициент концентрации:*

1) $K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$;

2) $\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ном}}$;

3) $K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}$.

68 *С уменьшением диаметра отверстия теоретический коэффициент концентрации:*

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

69 *С ростом диаметра отверстия теоретический коэффициент концентрации:*

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

70 *Теоретический коэффициент концентрации определяется:*

- 1) геометрической формой концентратора;
- 2) механическими свойствами материала;
- 3) величиной номинальных напряжений.

71 *Теоретический и эффективный коэффициенты концентрации связаны соотношением:*

1) $K_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1)$;

2) $K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}$;

3) $K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$.

72 Коэффициент масштабного фактора:

1) $K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$;

2) $K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$;

3) $K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}$.

73 Коэффициент масштабного фактора при увеличении диаметра образца:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

74 Коэффициент масштабного фактора при уменьшении диаметра образца:

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

75 Коэффициент качества поверхности:

1) $K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}}$;

2) $K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$;

3) $K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}$.

76 При увеличении шероховатости поверхности коэффициент качества поверхности K_F :

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

77 При уменьшении шероховатости поверхности коэффициент качества поверхности K_F :

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) остается прежним.

78 Усталостное разрушение при циклических напряжениях определяется в основном:

- 1) величинами σ_{\max} , σ_{\min} ;
- 2) частотой изменения напряжений;
- 3) законом изменения напряжений внутри цикла.

- 79** *Диаграмма предельных амплитуд строится:*
- 1) при симметричном цикле;
 - 2) несимметричном цикле;
 - 3) стационарном нагружении.
- 80** *База испытания образца – это:*
- 1) лабораторное оборудование;
 - 2) число циклов до разрушения;
 - 3) число циклов, до которого ведется испытание.
- 81** *Номинальные напряжения определяются:*
- 1) из эксперимента;
 - 2) вычисляются с учетом концентратора;
 - 3) вычисляются без учета концентратора.
- 82** *Кривая усталости – это:*
- 1) диаграммы предельных амплитуд;
 - 2) графическая зависимость $N \sim \sigma$;
 - 3) диаграмма Прандтля.
- 83** *Многоцикловая усталость наблюдается при деформациях:*
- 1) упругих;
 - 2) пластических;
 - 3) разрушения.
- 84** *Малоцикловая усталость наблюдается при деформациях:*
- 1) упругих;
 - 2) пластических;
 - 3) разрушения.
- 85** *У циклически упрочняющихся материалов разрушение:*
- 1) усталостное;
 - 2) квазистатическое;
 - 3) хрупкое.
- 86** *У циклически разупрочняющихся материалов разрушение:*
- 1) усталостное;
 - 2) квазистатическое;
 - 3) хрупкое.
- 87** *У циклически упрочняющихся материалов предел текучести:*
- 1) повышается;
 - 2) уменьшается;
 - 3) не изменяется.
- 88** *Гипотеза Мазинга справедлива для материалов циклически:*
- 1) упрочняющихся;
 - 2) разупрочняющихся;
 - 3) стабильных.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

ОСНОВНЫЕ БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1 Латинские прописные буквы

- A* – площадь (от англ. *area*, фр. *aire*);
E – модуль продольной упругости (от англ. *elasticity*, фр. *élasticité*, нем. *Elastizitätsmodul*);
F – внешняя сила (от англ. и фр. *force*); сосредоточенная нагрузка;
G – модуль сдвига (от нем. *Gleitmodul*);
H – горизонтальная составляющая опорной реакции (от англ. и фр. *horizontal*, нем. *Horizontalkraft*); высота;
J – момент инерции площади сечения (от англ. *inertia*, фр. *inertie*);
K – кинетическая энергия (от англ. *kinetic*, нем. *Kinetische*);
M – внутренний момент (от англ., фр. и нем. *Moment*);
N – продольная (нормальная) сила (от англ. и фр. *normal*, нем. *Normalkraft*);
Q – поперечная сила (от нем. *Querkraft*);
P – вес тела, $P = mg$;
R – расчетное сопротивление материала (от англ. и фр. *résistance*); опорная реакция (от англ. *reaction* и фр. *réaction*);
S – статический момент площади сечения (от англ. *statical*, фр. *statique*, нем. *Statisches*);
U – потенциальная энергия;
V – объем тела (от англ. и фр. *volume*, нем. *Volumen*); вертикальная составляющая опорной реакции (от англ. и фр. *vertical*, нем. *Vertikalkomponente*);
W – момент сопротивления сечения (от нем. *Widerstandsmoment*); работа (от англ. *work*);
X, Y, Z – проекции силы соответственно на оси *x, y, z*.

2 Латинские строчные буквы

- a* – ускорение (от англ. и фр. *accélération*); расстояние;
b – ширина (от англ. *breadth*, нем. *Breite*);
d – диаметр (от англ. *diameter*, фр. *diamètre*, нем. *Durchmesser*);
e – эксцентриситет силы (от англ. *eccentricity*, фр. *excentricité*, нем. *Exzentrizität*);
f – прогиб (от фр. *flèche*);
g – ускорение свободного падения (от англ. *gravity*);
h – высота (от англ. *height*, фр. *hauteur*, нем. *Höhe*);
i – радиус инерции сечения (от англ. *inertia*, фр. *inertie*);
l – длина (от англ. *length*, фр. *longueur*, нем. *Länge*);
m – внешний момент (от англ., фр. и нем. *Moment*); масса тела (от англ. *mass*, фр. и нем. *Masse*);
n – количество (от англ. *number*);

- p – давление (от англ. *pressure*, фр. *pression*); интенсивность нагрузки, распределенной по площади;
 q – интенсивность линейной распределенной нагрузки;
 s – путь;
 t – толщина (от англ. *thickness*); температура (от англ. и фр. *température*, нем. *Temperatur*);
 u – удельная потенциальная энергия;
 v – скорость (от англ. *velocity*, фр. *vitesse*);
 x – горизонтальная ось поперечного сечения бруса;
 y – вертикальная ось поперечного сечения бруса и перемещение (прогиб) вдоль нее;
 z – продольная ось бруса; абсцисса сечения балки.

3 Греческие буквы

- Δ – приращение величины; перемещение;
 Ω – площадь эпюры;
 α – угол; коэффициент линейного расширения;
 β – угол;
 γ – угол сдвига; коэффициент надежности;
 δ – перемещение;
 ε – деформация;
 θ – угловое перемещение;
 λ – гибкость стержня;
 μ – коэффициент приведения длины сжатого стержня;
 ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона);
 ρ – радиус кривизны; радиус-вектор; плотность материала;
 σ – нормальное напряжение;
 τ – касательное напряжение;
 φ – угол закручивания; коэффициент продольного изгиба.

4 Индексы

- C – центр тяжести (от англ. и фр. *centre*);
 c – сжатие (от англ. и фр. *compression*); условия работы (от англ. и фр. *condition*);
 d – изменение формы (от англ. *distortion*, фр. *distorsion*); динамический (от англ. *dynamic*, фр. *dynamique*, нем. *dynamische*);
 f – нагрузка; пояс (полка) балки (от англ. *flange*, нем. *Flansch*);
 i – порядковый номер; инерционный;
 k – порядковый номер;
 m – материал (от англ. *material*, фр. *matière*); среднее значение (от англ. *mean*, фр. *moyen*);
 n – нормативное значение (от англ. *norm*, фр. *norme*, нем. *normalien*);
 p – полярный (от англ. *polar*, фр. *polaire*);
 r – остаточный (от англ. *residual*, *residuelle*, фр. *résiduel*, нем. *rest*);
 s – сдвиг, срез, скалывание (от англ. *shearing*, нем. *schub*, *scherbung*);
 t – растяжение (от англ. *tension*, фр. *traction*);
 u – предельное значение (от англ. *ultimate*);
 V – объем;

- w – стенка балки (от англ. *web*);
 x, y, z – координатные оси;
 y – текучесть (от англ. *yield*);
 cr – критическое значение (от англ. *critical*, фр. *critique*);
 lim – предельное, опасное значение (от англ. *limit*, фр. *limite*);
 max – максимальное значение (от англ., фр. и нем. *Maximum*);
 min – минимальное значение (от англ., фр. и нем. *Minimum*);
 net – нетто (от англ. *net*, фр. *net*, нем. *netto*);
 oct – октаэдрический (от англ. *octahedron*, фр. *octaédrique*);
 pl – пластический (от англ. *plastic*, фр. *plastique*, нем. *plastische*);
 pr – пропорциональность (от англ. *proportionality*, фр. *proportionnalité*, нем. *Proportionalität*);
 red – приведенное значение (от англ. *reduced*, нем. *Reduziert*);
 st – статический.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Таблица Б.1 – Единицы измерения (система СИ)

Обозначение	Наименование	Обозначение единицы
l, a, h, b, d	длина, высота, ширина, диаметр	м
A	площадь	м ²
$J_x, J_y, J_{xy}, J_p, J_t$	моменты инерции сечения	м ⁴
S_x, S_y	статические моменты сечения	м ³
W_x, W_y, W_p, W_t	моменты сопротивления	м ³
i_x, i_y	радиусы инерции сечения	м
F	сила	Н
M, m	момент силы	Н · м
q	погонная сила	Н/м
ρ	плотность	кг/м ³
W	работа	Дж = Н·м
U	потенциальная энергия	Дж = Н·м
p	давление	Па = Н/м ² , МПа
σ, τ	напряжения	Па = Н/м ² , МПа
E, G	модули упругости	Па = Н/м ² , МПа
ν	коэффициент Пуассона	безразмерный
α	коэффициент температурного расширения	1/°С, 1/К

Таблица Б.2 – Греческий алфавит

Буквы	Названия букв	Буквы	Названия букв	Буквы	Названия букв
Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню	Φ φ (φ)	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ (θ)	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Таблица Б.3 – Приставки СИ и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка	Обозначение приставки		Множитель
	международное	русское	
экса	E	Э	10^{18}
пета	P	П	10^{15}
тера	T	Е	10^{12}
гига	G	Г	10^9
мега	M	М	10^6
кило	k	к	10^3
гекто	h	г	10^2
дека	da	да	10^1
деци	d	д	10^{-1}
санتي	c	с	10^{-2}
милли	m	м	10^{-3}
микро	μ	мк	10^{-6}
нано	n	н	10^{-9}
пико	p	п	10^{-12}
фемто	f	ф	10^{-15}
атто	a	а	10^{-18}

Таблица Б.4 – Ориентировочные значения пределов прочности некоторых материалов

Материал	σ_u , МПа	
	на растяжение	на сжатие
Сталь:		
углеродистая горячекатаная	310–600	—
углеродистая конструкционная	330–750	—
легированная конструкционная	430–780	—
Чугун:		
серый	150–440	650–1000
ковкий	300–630	До 1400
Латунь	320–600	
Бронза:		
оловянная	300–900	—
безоловянная	400–1500	—
Алюминий	150–300	—
Дюралюминий	180–500	—
Титановый сплав ВТ4	800–900	—
Винипласт	50	—
Полиэтилен	65	—
Оргстекло	68	120
Стекло	—	600–1200
Базальт	—	250–320
Гранит	—	120–260
Гипс высокопрочный	—	20
Кирпич	—	7–30
Каменная кладка на растворе	0,2–0,5	2,5–9
Бетон:		
тяжелый	0,4–2,5	3–45
на пористых заполнителях	0,23–1,8	1,5–22,5
Бакелизованная фанера	130	115
Дельта-древесина	210	360
Дерево (при влажности 15 %):		
сосна вдоль волокон	80	40
сосна поперек волокон	—	5
ель вдоль волокон	65	35
ель поперек волокон	—	4
дуб вдоль волокон	95	50
дуб поперек волокон	—	15

Таблица Б.5 – Модули упругости и коэффициенты Пуассона

Материал	Модуль упругости, МПа		Коэффициент Пуассона ν
	E	G	
Сталь:			
углеродистая	$(2,0...2,1) \cdot 10^5$	$(0,8...0,81) \cdot 10^5$	0,24–0,28
легированная	$(2,1...2,2) \cdot 10^5$	$(0,8...0,81) \cdot 10^5$	0,25–0,30
Чугун:			
серый, белый	$(1,15...1,60) \cdot 10^5$	$0,45 \cdot 10^5$	0,23–0,27
ковкий	$1,55 \cdot 10^5$	—	—
Медь:			
прокатанная	$1,1 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	0,31–0,34
холоднотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$0,49 \cdot 10^5$	—
литая	$0,84 \cdot 10^5$	—	—
Бронза:			
фосфористая катаная	$1,15 \cdot 10^5$	$0,42 \cdot 10^5$	0,32–0,35
алюминиевая литая	$1,05 \cdot 10^5$	$0,42 \cdot 10^5$	—
Латунь холоднотянутая	$(0,91...0,99) \cdot 10^5$	$(0,35...0,37) \cdot 10^5$	0,32–0,42
Алюминий катаный	$0,69 \cdot 10^5$	$(0,26...0,27) \cdot 10^5$	0,32–0,36
Дюралюминий	$0,71 \cdot 10^5$	$0,27 \cdot 10^5$	—
Стекло	$0,56 \cdot 10^5$	$0,22 \cdot 10^5$	0,25
Лед	$0,10 \cdot 10^5$	$(0,28...0,30) \cdot 10^4$	—
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	—	—
Каменная кладка из кирпича	$(0,27...0,30) \cdot 10^4$	—	—
Бетон при пределе прочности, МПа:			
10	$(0,146...0,196) \cdot 10^5$	—	0,16–0,18
15	$(0,164...0,214) \cdot 10^5$	—	0,16–0,18
20	$(0,182...0,232) \cdot 10^5$	—	0,16–0,18
Бетон на пористых заполнителях	$(0,03...0,23) \cdot 10^5$	—	0,16–0,18
Дельта-древесина	$0,2 \cdot 10^5$	—	0,13
Дерево (сосна, ель):			
вдоль волокон	$(0,1...0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	—
поперек волокон	$(0,005...0,01) \cdot 10^5$	—	—

Таблица Б.6 – Механические характеристики углеродистых конструкционных сталей

Марка стали	Предел прочности $\sigma_{в}$, МПа	Предел текучести $\sigma_{т}$, МПа	Предел прочности $\tau_{в}$, МПа	Относительное остаточное удлинение ϵ_r , %	Ударная вязкость, кДж/м ²	Предел выносливости при изгибе σ_{-1} , МПа	Предел выносливости при кручении τ_{-1} , МПа
10	340	210	140	31	2400	160–220	80–120
20	420	250	160	25	—	170–220	100–130
25	460	280	—	23	900	190–250	—
30	500	300	170	21	800	200–270	110–140
35	540	320	190	20	700	220–300	130–180
40	580	340	—	19	600	230–320	140–190
45	610	360	220	16	500	250–340	150–200
50	640	380	—	14	400	270–350	160–210
55	660	390	—	13	—	—	—
60	690	410	—	12	—	310–380	180–220
20Г	460	280	—	24	—	—	—
30Г	550	320	—	20	800	220–320	—
50Г	660	400	—	13	400	290–360	—
20Х	800	650	—	11	600	380	170–230
40Х	1000	800	—	10	600	350–380	225
45Х	1050	850	—	9	500	400–500	—
30ХМ	950	750	—	11	800	310–410	230
35ХМ	1000	850	—	12	800	470–510	—
40ХН	1000	800	390	11	700	400	240
50ХН	1100	900	—	9	500	550	—
40ХФА	900	750	—	10	900	380–490	—

Примечание – Пределы выносливости получены на полированных образцах. При использовании сталей по ГОСТ 380–71 следует учесть соответствие марок: сталь Ст3 соответствует стали 20, Ст4 – стали 25, Ст5 – стали 35, Ст6 – стали 45.

Таблица Б.7 – Механические характеристики чугуна

Марка чугуна	Предел прочности, МПа, при				Твердость по Бринеллю, НВ	Предел выносливости, МПа, при	
	растяжении σ_u	сжатии σ_u	изгибе σ_u	кручении τ_u		изгибе σ_{-1}	кручении τ_{-1}
СЧ 12	120	500	280	—	143–229	—	—
СЧ 15	150	650	320	240	163–229	70	50
СЧ 18	180	700	360	—	170–229	—	—
СЧ 21	210	750	400	280	171–241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187–217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170–241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187–255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	197–269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207–269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600–1700	—	480–510	156–197	150–170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860–2000	—	740–790	187–255	230–270	170–210
ВЧ 60-2	600	2040–2290	—	660–810	197–269	170–230	150–160
<i>Примечание</i> – Предел текучести σ_y для ВЧ 40-10 составляет 300, ВЧ 50-1,5 – 380, ВЧ 60-2 – 420 МПа.							

Таблица Б.8 – Механические характеристики некоторых цветных металлов

Материал	Предел прочности σ_u , МПа	Предел текучести σ_y , МПа	Относительное остаточное удлинение ϵ_r , %	Твердость по Бринеллю, НВ
Латунь Л68	320; 660	91; 520	55; 30	55; 150
Латунь алюминиевая ЛА77-2	400; 650	140; –	55; 12	60; 170
Латунь марганцевая ЛМц58-2	400; 700	156; –	40; 10	85; 175
Бронза оловянная БрОФ10-1	200; 300	140; –	–; 3	80; 100
Бронза алюминиевая БрА5	380; 400	160; 500	65; 4	60; 200
Нормальный дюралюминий Д1	210; 420	110; 240	18; 15	45; 113
Дюралюминий повышенной прочности Д6	180; 500	50; 380	8; 20	50; 125
Алюминиево-магниевый сплав АМг	180; 250	100; 210	6; 23	45; 60
<i>Примечание</i> – Первые цифры – мягкое состояния материала, вторые – твердое.				

Таблица Б.9 – Ориентировочные значения расчетных сопротивлений стального проката и труб

Марка стали	Толщина проката, мм	Расчетное сопротивление, МПа				
		растяжению, сжатию, изгибу		сдвигу R_s	смятию торцовой поверхности R_p	местному смятию R_{bp}
		по пределу текучести R_y	по пределу прочности R_u			
ВСтЗкп2-1	4–10	230	355	133	355	178
	11–20	220	345	128	345	173
	21–30	210	335	122	335	168
ВСтЗпс6-1	4–10	240	360	140	360	180
	11–20	240	355	140	355	178
	21–30	220	345	128	345	173
ВСтЗпс6-2	4–10	270	370	157	370	185
	11–20	270	360	157	360	180
ВСтЗсп5-1	4–10	250	370	145	370	185
ВСтЗгпс5-1	11–20	240	360	140	360	180
	21–30	230	355	133	355	178
ВСтЗкп2	41–100	195	350	113	350	175
	Свыше 100	175	350	102	350	175

Примечание – $R_s = 0,58R_y$; $R_p = R_u$; $R_{bp} = 0,5R_u$.

Таблица Б.10 – Ориентировочные значения расчетных сопротивлений алюминия

Вид сопротивления материала	Расчетное сопротивление, МПа	
	термически неупрочненного	термически упрочненного
Растяжению, сжатию, изгибу R	25–150	55–200
Срезу R_s	15–90	35–120
Смятию торцовой поверхности R_p	40–225	80–300
Местному смятию R_{bp}	20–110	40–150

Таблица Б.11 – Ориентировочные значения расчетных сопротивлений древесины сосны и ели

Вид сопротивления материала	Расчетное сопротивление бруса круглого или прямоугольного сечения (11–50 см), МПа
Сжатию R_c , изгибу R_{tb} , смятию вдоль волокон R_p	8,5–16
Сжатию R_{c90} , смятию поперек волокон по всей площади R_{p90}	1,8
Местному смятию поперек волокон R_{bp}	3,0
Скалыванию вдоль волокон R_s	2,1–2,4

Таблица Б.12 – Ориентировочные значения основных допускаемых напряжений

Материал	Допускаемое напряжение, МПа, на	
	растяжение	сжатие
Чугун	28–80	120–150
Сталь Ст2	140	
" Ст3	160	
" Ст3 в мостах	140	
" машиностроительная углеродистая	60–250	
" машиностроительная легированная	100–400 и выше	
Медь	30–120	
Латунь	70–140	
Бронза	60–120	
Алюминий	30–80	
Дюралюминий	80–150	
Сосна вдоль волокон	7–10	10–12
" поперек волокон	–	1,5–2
Дуб вдоль волокон	9–13	13–15
" поперек волокон	–	2–3,5
Каменная кладка	До 0,3	0,4–4
Кирпичная кладка	До 0,2	0,6–2,5
Бетон	0,1–0,7	1,0–9

Таблица Б.13 – Предельные прогибы некоторых элементов стальных конструкций

Элемент конструкции	Относительный прогиб
Балка и ферма путей под краны с режимом работы: легким (включая ручные краны, тельферы, тали) средним тяжелым и весьма тяжелым	1/400 1/500 1/600
Балка и ферма покрытия и чердачного перекрытия: с подвесным оборудованием без подвесного оборудования прогон профилированный настил	1/400 1/250 1/200 1/150
Ригель и навесная стеновая панель	1/300

Таблица Б.14 – Предельные прогибы некоторых элементов деревянных конструкций

Элемент конструкции	Относительный прогиб
Балка междуэтажного перекрытия	1/250
" чердачного перекрытия	1/200
" консольная	1/150
Прогон, стропильная нога	1/200
Ферма, клееная балка	1/300
Плита	1/250
Обрешетка, настил	1/150

Таблица Б.15 – Коэффициенты постели для некоторых оснований

Материал основания	$k, \text{Н/м}^3$
Песок свеженасыпанный; глина мокрая, размягченная	$(1...5) \cdot 10^6$
Песок слежавшийся; гравий насыпной; глина влажная	$(5...50) \cdot 10^6$
Песок и гравий, плотно слежавшийся; щебень, глина малой влажности	$(50...100) \cdot 10^6$
Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный; глина твердая	$(100...200) \cdot 10^6$
Известняк, песчаник, мерзлота	$(200...1000) \cdot 10^6$
Твердая скала	$(1000...15000) \cdot 10^6$

Таблица Б.16 – Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в балках

Схема балки и эпюры	Схема балки и эпюры

Таблица В.17 – Значения прогибов характерных сечений балок

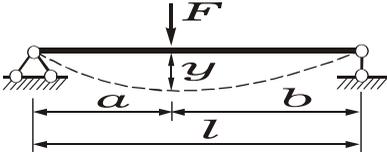
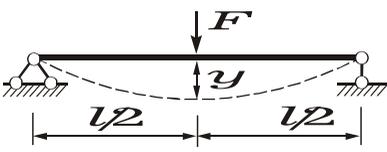
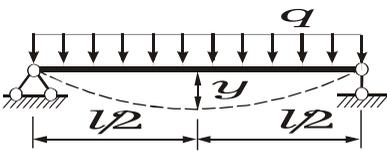
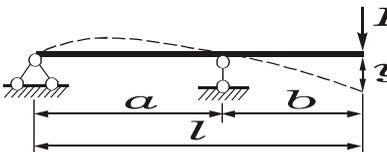
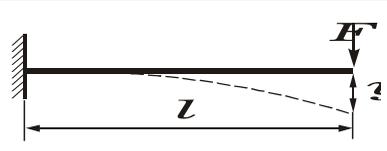
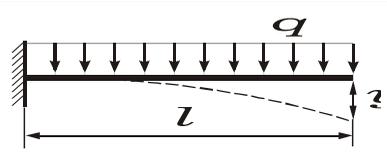
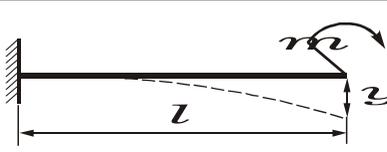
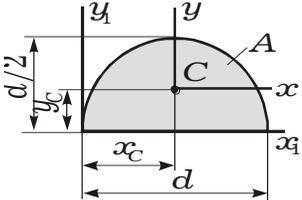
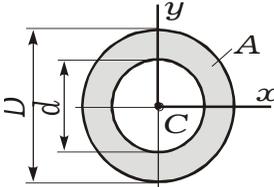
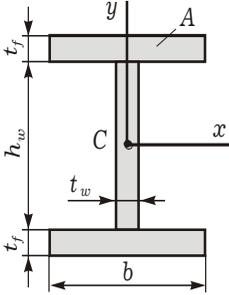
Схема балки и нагрузки	Прогиб
	$y = \frac{F a^2 b^2}{3lEJ}$
	$y = \frac{Fl^3}{48EJ}$
	$y = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$y = \frac{Fb^2(a+b)}{3EJ}$
	$y = \frac{Fl^3}{3EJ}$
	$y = \frac{ql^4}{8EJ}$
	$y = \frac{ml^2}{2EJ}$

Таблица Б.18 – Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

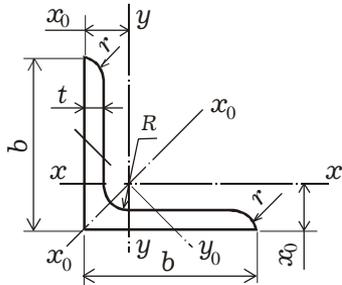
Форма сечения	Геометрические характеристики
	$A = bh; \quad x_C = \frac{b}{2}; \quad y_C = \frac{h}{2};$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{bh^2}{2}; \quad S_{y_1} = \frac{hb^2}{2};$ $J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3};$ $J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad x_C = y_C = \frac{d}{2};$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = S_{y_1} = \frac{\pi d^3}{8};$ $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32};$ $J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{5\pi d^4}{64};$ $W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$
	$A = \frac{bh}{2}; \quad x_C = \frac{b}{3}; \quad y_C = \frac{h}{3};$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{bh^2}{6}; \quad S_{y_1} = \frac{hb^2}{6};$ $J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36};$ $J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{12}$
	$A = \frac{bh}{2}; \quad x_C = \frac{1}{3}(b-2a); \quad y_C = \frac{h}{3};$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{bh^2}{6}; \quad S_{y_1} = \frac{hb^2}{6};$ $J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{bh(b^2 + a^2 - ab)}{36};$ $J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_1} = \frac{h[a^3 + (b-a)^3]}{12}$

Окончание таблицы Б.18

Форма сечения	Геометрические характеристики
	$A = \frac{\pi d^2}{8}; \quad x_C = \frac{d}{2}; \quad y_C = \frac{2d}{3\pi} \approx 0,212d;$ $S_x = S_y = 0; \quad S_{x_1} = \frac{d^3}{12}; \quad S_{y_1} = \frac{\pi d^3}{16};$ $J_x = \frac{d^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00686d^4;$ $J_y = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,0246d^4;$ $J_{x_1} = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,0246d^4; \quad J_{y_1} = \frac{5\pi d^4}{128} \approx 0,1227d^4$
	$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2); \quad \alpha = \frac{d}{D};$ $J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,049D^4 (1 - \alpha^4);$ $J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,098D^4 (1 - \alpha^4);$ $W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,098D^3 (1 - \alpha^4);$ $W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,196D^3 (1 - \alpha^4)$
	$A = t_w h_w + 2 t_f b;$ $J_x = \frac{t_w h_w^3}{12} + \frac{b t_f^3}{6} + \frac{b t_f (h_w + t_f)^2}{2};$ $J_y = \frac{h_w b_w^3}{12} + \frac{t_f b^3}{6};$ $W_x = \frac{J_x}{h_w / 2 + t_f}; \quad W_y = \frac{J_y}{b / 2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ В (справочное)
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Уголки стальные горячекатаные равнополочные
(по ГОСТ 8509–93)



- b – ширина полки; J – момент инерции;
 t – толщина полки; J_{xy} – центробежный момент инерции;
 R – радиус внутреннего закругления; W – момент сопротивления;
 r – радиус закругления полки; i – радиус инерции;
 A – площадь сечения; x_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Таблица В.1 – Геометрические характеристики равнополочных уголков

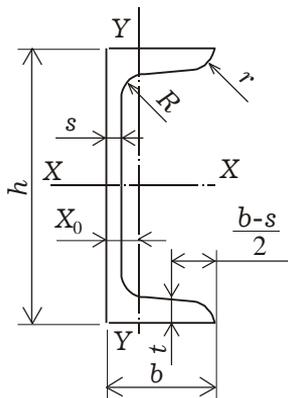
Номер уголка	мм				A, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
	$x-x$		x_0-x_0			y_0-y_0		J_{xy} , см ⁴	x_0 , см							
	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см ⁴		$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см ⁴			W_{y_0} , см ³	$i_{y_0 \min}$, см					
2	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89	
	4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15	
2,5	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12	
	4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46	
2,8	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27	
3	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36	
	4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78	
3,2	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46	
	4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91	
3,5	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60	

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
	мм					x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴	x _o , см	
	J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴		i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см							
3,5	35	4	4,5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
		8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
	мм					x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴	x _o , см	
	J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴		i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см							
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,35	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
		8	12,0	4,0	16,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,6
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей									Масса 1 м, кг	
						x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴		x _o , см
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴	i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см			
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47
		12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
		18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	22,039	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22	24,0	8,0	106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,30	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25	24,0	8,0	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28	24,0	8,0	133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30	24,0	8,0	141,96	8176,82	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	111,44
		35	24,0	8,0	163,71	9281,05	530,11	7,53	14682,73	9,47	3879,37	366,13	4,87	5401,68	7,53	128,51

Швеллеры стальные горячекатаные с уклоном внутренних граней полок (по ГОСТ 8240–97)



h – высота швеллера;

b – ширина полки;

s – толщина стенки;

t – толщина полки;

R – радиус внутреннего закругления;

r – радиус закругления полки;

A – площадь сечения;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

i – радиус инерции;

S_x^* – статический момент площади полусечения;

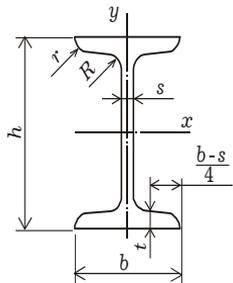
X_0 – расстояние от оси Y – Y до наружной грани стенки

Таблица В.3 – Геометрические характеристики швеллеров

Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R не более	r	A , см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							X_0 , см
									X–X				Y–Y			
									J_x ,	W_x ,	i_x ,	S_x ,	J_y ,	W_y ,	i_y ,	
									см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см	
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44

Окончание таблицы В.3

Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R	r	A, см ²	Масса I м, кг	Справочные значения для осей							X ₀ , см
					не более				X-X				Y-Y			
					мм						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	J _y , см ⁴	
12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14У	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75



Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)

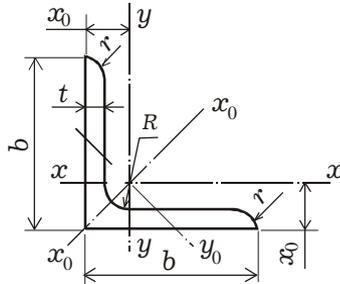
- h – высота балки; r – радиус закругления полки;
 b – ширина полки; J – момент инерции;
 s – толщина стенки; W – момент сопротивления;
 t – средняя толщина полки; i – радиус инерции;
 R – радиус внутреннего закругления; S_x^* – статический момент площади полусечения

Таблица В.4 – Геометрические характеристики двутавров

Номер двутавра	h	b	s	t	R не более	r	A , см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
									X-X				Y-Y		
									J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491	1725,0	182,00	3,54

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(справочное)
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Уголки стальные горячекатаные равнополочные
(по ГОСТ 8509–93)



- b – ширина полки; J – момент инерции;
 t – толщина полки; J_{xy} – центробежный момент инерции;
 R – радиус внутреннего закругления; W – момент сопротивления;
 r – радиус закругления полки; i – радиус инерции;
 x_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
 A – площадь сечения;

Таблица В.1 – Геометрические характеристики равнополочных уголков

Номер уголка	b	t	R	r	A , см ²	Справочные значения величин для осей									Масса 1 м, кг	
						$x-x$			x_0-x_0		y_0-y_0			J_{xy} , см ⁴		x_0 , см
						J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	$J_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$J_{y_0 \min}$, см ⁴	W_{y_0} , см ³	$i_{y_0 \min}$, см			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,44	0,48	0,59	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60

Окончание таблицы В.1

Номер уголка	b	t	R		r	A, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
							x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴	x _o , см	
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴	i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см			
							мм										
3,5	35	4	4,5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10	
		5	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58	
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85	
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42	
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98	
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08	
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73	
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37	
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32	
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05	
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77	
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47	
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44	
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25	
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90	
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81	
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72	
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87	
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38	
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39	
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39	
		8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37	
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80	
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89	
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96	
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02	
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07	

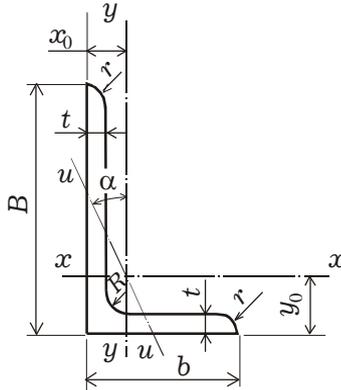
Окончание таблицы В.1

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей											Масса 1 м, кг
						x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴	x _o , см		
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴	i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см				
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78	
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36	
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51	
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65	
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33	
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64	
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,35	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93	
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20	
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06	
		7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79	
		8	12,0	4,0	16,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25	
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10	
		12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91	17,90	
		14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99	20,63	
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89	
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50	
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36	15,6	
		9	14,0	4,6	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40	17,30	
		10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45	19,10	
		12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53	22,68	
		14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61	26,20	
		16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68	29,65	
14	140	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76	19,41	
		10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82	21,45	
		12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90	25,50	

Окончание таблицы В.1

Номер уголка	b	t	R	r	A, см ²	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x-x			x _o -x _o		y _o -y _o			J _{xy} , см ⁴	x _o , см	
						J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _{xo max} , см ⁴	i _{xo max} , см	J _{yo min} , см ⁴	W _{yo} , см ³	i _{yo min} , см			
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30	24,67
		11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35	27,02
		12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39	29,35
		14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47	34,20
		16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55	38,52
		18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63	43,01
		20	16,0	5,3	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70	47,41
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85	30,47
		12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89	33,12
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37	36,97
		13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42	39,92
		14	18,0	6,0	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46	42,80
		16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54	48,65
		20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,37	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70	60,08
		25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89	74,02
		30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07	87,56
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91	47,40
		16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75	61,55
		18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	22,039	4,96	3089,00	6,83	68,86
		20	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91	76,11
		22	24,0	8,0	106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,30	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00	83,31
		25	24,0	8,0	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11	93,97
		28	24,0	8,0	133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23	104,50
		30	24,0	8,0	141,96	8176,82	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31	111,44
		35	24,0	8,0	163,71	9281,05	530,11	7,53	14682,73	9,47	3879,37	366,13	4,87	5401,68	7,53	128,51

Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (по ГОСТ 8510–86)



- B – ширина большой полки; J – момент инерции;
 b – ширина малой полки; i – радиус инерции;
 t – толщина полки; x_0, y_0 – расстояния от центра тяжести до наружных граней полки;
 R – радиус внутреннего закругления;
 r – радиус закругления полки; α – угол наклона главной центральной оси
 W – момент сопротивления;
 A – площадь поперечного сечения;

Таблица В.2 – Геометрические характеристики неравнополочных уголков

Номер уголка	мм					A , см ²	Справочные величины для осей									x_0 , см	y_0 , см	J_{xy} , см ⁴	tg α	Масса 1м уголка, кг
	B	b	t	R	r		$x-x$			$y-y$			$u-u$							
							J_{x^2} , см ⁴	W_{x^2} , см ³	i_{x^2} , см	J_{y^2} , см ⁴	W_{y^2} , см ³	i_{y^2} , см	$J_{u^2 \min}$, см ⁴	W_{u^2} , см ³	$i_{u^2 \min}$, см					
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	0,91
3/2*	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,0	0,43	0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54	3,421	1,46
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	1,17
			4			1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	1,52	
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,68	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281	1,94
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,37
4/3*	40	30	4	4,0	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,26
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2,00	0,539	2,46

Окончание таблицы В.2

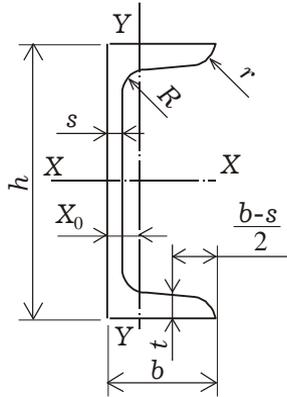
Номер уголка	B	b	t	R	r	A, см ²	Справочные величины для осей									x ₀ , см	y ₀ , см	J _{xy} , см ⁴	tg α	Масса 1м уголка, кг
							x-x			y-y			u-u							
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	J _{u min} , см ⁴	W _u , см ³	i _{u min} , см					
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,40
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,307	3,17
			5			4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	6,03
6,5/5*	65	50	5	6,0	2,0	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2,00	9,77	0,576	4,36
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8			8,62	35,00	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7*			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387	4,49
			6			7,55	46,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
8/6*	80	60	6	8,0	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70

Окончание таблицы В.2

Номер уголка	B	b	t	R	r	A, см ²	Справочные величины для осей									x ₀ , см	y ₀ , см	J _{xy} , см ⁴	tg α	Масса 1м уголка, кг
							x-x			y-y			u-u							
							J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	J _{u min} , см ⁴	W _u , см ³	i _{u min} , см					
10/6,3	100	63	8	10	3,3	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10			15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
10/6,5*	100	65	7	10	3,3	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38,00	0,415	8,81
			8			12,73	128,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,64	0,414	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8			15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406	12,53
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,0	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,0	0,400	18,34
14/9	140	90	8	12	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,0	0,411	4,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,0	0,400	17,46
16/10	160	100	9	13	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,0	0,391	17,96
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,0	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,0	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,0	0,385	27,26
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,83	295,0	0,376	22,20
			12			33,69	1122,5	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,0	0,374	26,40
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,87	1449,0	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,0	0,392	27,37
			12			37,89	1568,2	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,0	0,392	29,74
			14			43,87	1800,8	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,0	0,390	34,43
			16			49,77	2026,1	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,0	0,388	39,07

Примечание – Звездочкой обозначены номера уголков, которых не было в старом ГОСТ 8510–72.

Швеллеры стальные горячекатаные с уклоном внутренних граней полок (по ГОСТ 8240–97)



h – высота швеллера;

b – ширина полки;

s – толщина стенки;

t – толщина полки;

R – радиус внутреннего закругления;

r – радиус закругления полки;

A – площадь сечения;

J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

i – радиус инерции;

S_x – статический момент площади полусечения;

X_0 – расстояние от оси Y – Y до наружной грани стенки

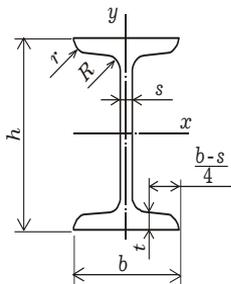
Таблица В.3 – Геометрические характеристики швеллеров

Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R	r	A , см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							X_0 , см					
					не более				X– X				Y– Y								
					мм							J_x ,	W_x ,	i_x ,	S_x ,		J_y ,	W_y ,	i_y ,		
												см ⁴	см ³	см	см ³		см ⁴	см ³	см		
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16					
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24					
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31					

Окончание таблицы В.3

Номер швеллера серии У	h	b	s	t	R	r	A, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							X ₀ , см
					не более				X- X				Y- Y			
	мм				J _x ,	W _x ,	i _x ,	S _x ,	J _y ,	W _y ,	i _y ,					
					см ⁴	см ³	см	см ³	см ⁴	см ³	см					
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14У	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)



h – высота балки;

r – радиус закругления полки;

b – ширина полки;

J – момент инерции;

s – толщина стенки;

W – момент сопротивления;

t – средняя толщина полки;

i – радиус инерции;

R – радиус внутреннего закругления;

S – статический момент площади полусечения

Таблица В.4 – Геометрические характеристики двутавров

Номер двутавра	h	b	s	t	R	r	$A, \text{ см}^2$	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей							
									X-X				Y-Y			
									$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55	
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70	
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88	
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07	
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27	
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37	
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54	
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69	
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79	
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89	
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03	
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09	
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23	
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181	1356,0	151,00	3,39	
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491	1725,0	182,00	3,54	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Абдусаттаров, А.* Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 2 *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2001. – 560 с.
- 3 *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Физматлит, 1976. – 856 с.
- 4 *Биргер, И. А.* Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
- 5 *Борисова, А. Д.* Курс лекций по сопротивлению материалов : учеб. пособие / А. Д. Борисова. – Барнаул : АлтГТУ, 2022. – 73 с.
- 6 *Воробьев, С. А.* Сопротивление материалов. Прикладная теория колебаний / С. А. Воробьев. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 257 с.
- 7 *Горшков, А. Г.* Сопротивление материалов / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М. : Физматлит, 2002. – 544 с.
- 8 *Горшков, А. Г.* Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : Физматлит, 2002. – 416 с.
- 9 *Горшков, А. Г.* Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.
- 10 *Дарков, А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.
- 11 *Журавков, М. А.* Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 12 *Журавков, М. А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 543 с.
- 13 *Заяц, В. Н.* Сопротивление материалов / В. Н. Заяц, М. К. Балькин, И. А. Голубев. – Минск : Высш. шк., 1998. – 366 с.
- 14 *Ильюшин, А. А.* Сопротивление материалов / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский. – М. : Физматлит, 1959. – 371 с.
- 15 *Ицкович, Г. М.* Сопротивление материалов / Г. М. Ицкович. – М. : Высш. шк., 1987. – 352 с.
- 16 *Кривошапко, С. Н.* Сопротивление материалов : учеб. и практикум для вузов / С. Н. Кривошапко. – 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2022. – 397 с.
- 17 *Кузменко, И. М.* Механика материалов : учеб. пособие : в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 18 *Михайлов, А. М.* Сопротивление материалов / А. М. Михайлов. – М. : Стройиздат, 1989. – 353 с.
- 19 *Москвитин, В. В.* Пластичность при переменных нагрузениях / В. В. Москвитин. – М. : Изд-во МГУ, 1965. – 264 с.
- 20 *Москвитин, В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М. : Наука, 1972. – 327 с.

- 21 *Работнов, Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1979. – 744 с.
- 22 Сборник задач по сопротивлению материалов : учеб. пособие для вузов. / Б. А. Антуфьев, А. Г. Горшков, О. В. Егорова, В. Н. Зайцев; под ред. А. Г. Горшкова, Д. В. Тарлаковского. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2003. – 632 с.
- 23 *Смирнов, А. Ф.* Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Н. И. Монахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1975. – 480 с.
- 24 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 220 с.
- 25 *Старовойтов, Э. И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 26 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 376 с.
- 27 *Старовойтов, Э. И.* Техническая механика / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2006. – 235 с.
- 28 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2008. – 384 с.
- 29 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2010. – 384 с.
- 30 *Старовойтов, Э. И.* Механика материалов / Э. И. Старовойтов – Гомель : БелГУТ, 2011. – 380 с.
- 31 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Э. И. Старовойтов, А. Абдусаттаров. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2024. – 482 с.
- 32 *Степин, П. А.* Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высш. шк., 1987. – 367 с.
- 33 *Терегулов, И. Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности / И. Г. Терегулов. – М. : Высш. шк., 1984. – 472 с.
- 34 *Тимошенко, С. П.* Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – 363 с.
- 35 *Феодосьев, В. И.* Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
- 36 *Филин, А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела в 2 т. Т. 1. / А. П. Филин. – М. : Наука, 1975. – 832 с.
- 37 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках : монография / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 38 *Яровая, А. В.* Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
- 39 *Starovoitov, E. I.* Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.
- 40 *Zhuravkov, M. A.* Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, L. Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 41 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields : monograph / E. Starovoitov, M. Zhuravkov, D. Leonenko, Y. Lyu. – Singapore : Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2024. – 386 p.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Баушингер И. (J. Bauschinger) 56
Белелюбский Н. А. 9
Белл Дж. Ф. (J. F. Bell) 70
Беляев Н. М. 9, 304
Бернулли Я. (J. Bernoulli) 12
Болотин В. В. 9
Больцман Л. (L. Boltzmann) 73
Бринелль Ю. А. (J. A. Brinell) 59
Бубнов И. Г. 9

Верецагин А. К. 219
Винклер Э. (E. Winkler) 139
Власов В. З. 9

Галеркин Б. Г. 9
Галилей Г. (G. Galileo) 8
Галин Л. А. 304
Герц Г. Р. (H. R. Hertz) 304
Головин М. Е. 9
Горшков А. Г. 6, 9
Григолюк Э. И. 9
Гриффитс А. 187
Гук Р. (R. Hook) 9

Дарков А. В. 9
Динник А. Н. 304
Дюамель Ж. М. (J. M. Duhamel) 40

Жуковский Н. Е. 9
Журавский Д. И. 9, 114

Ильюшин А. А. 6, 9
Ишлинский А. Ю. 9

Кирпичев В. А. 9
Ковальский Б. С. 304
Крылов А. Н. 9
Кулон Ш. О. (C. A. Coulomb) 183

Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) 8
Лопиталь Г. Ф. (G. P. L'Hopital) 259

Мазинг Г. (G. Masing) 301
Максвелл Дж. К. (J. C. Maxwell) 216
Махутов Н. А. 70

Мизес Р. (R. Mises) 185
Минтер Ф. Дж. (F. J. Minter) 71
Мор О. (O. Mohr) 185, 216
Москвитин В. В. 6, 9, 301
Мухелишвили Н. И. 9
Мусшенбрук Питер ван (P. van Musschenbroek) 240
Мэйкин М. Дж. (M. J. Makin) 71

Навье Анри (A. Navier) 9, 60
Нейман Ф. Е. (F. E. Neumann) 40
Новожилов В. В. 9

Папкович П. Ф. 9
Прандтль Людвиг (L. Prandtl) 61
Пуассон С. Д. (S. D. Poisson) 39

Работнов Ю. Н. 9
Ржаницын А. Р. 74
Роквелл С. П. (S. P. Rockwell) 59

Савин Г. Н. 304
Сен-Венан Б. (B. Saint-Venant) 12
Серенсен С. В. 9
Собко П. И. 9
Соколовский В. В. 9
Соколовский В. И. 9

Тетмайер Л. 247
Тимошенко С. П. 9
Треска А. Э. (H. E. Tresca) 183

Феодосьев В. И. 9

Хенки Г. (H. Hencky) 185
Хубер М. Т. (M. T. Hyber) 185

Шпиро Г. С. 9
Штаерман И. Я. 304

Эйлер Леонард (L. Euler) 9, 240

Юнг Томас (Young T.) 39

Ясинский Ф. С. 9, 245, 247

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А**мплитуда колебаний свободных
274, 276, 280
– – вынужденных 276, 282
– деформаций 301, 302
– напряжений динамических 277
– – циклических 289–291
– – – предельная 294, 297
- Ба**за испытаний 292
Балка 13, 103
Брус 13, 103
- В**ал 13
Верещагина правило 219–221
Вязкоупругие свойства материалов 72
- Г**ибкость стержня 245
– – большая 247
– – малая 247
– – средняя 247
– – предельная 246
Гипотеза(ы) при изгибе 106
– – кручения 79
– Дюамеля – Неймана 40
– контактного взаимодействия 304
– Мазинга 301
– механики материалов 10
– при ударе 265
- Д**вухавр 111, 116–120, 122, 125, 131,
133, 134, 136, 137, 138, 157, 212,
256, 268, 277, 368
Деформация(ии) 8, 10–12, 15, 17, 18,
38, 72–74, 106, 147, 209, 306
– амплитуда 301
– главная 172
– конечная 128
– контактная 304
– линейная (продольная) 18, 38, 107,
112, 142, 143, 171, 181, 203
– малая 9, 11
– объемная 174, 175
– пластическая (остаточная) 11, 53,
55, 56, 60–64, 66, 78, 123, 126,
134, 139, 164, 168, 183, 186, 284,
290, 295, 305
– – циклическая 300–302
– поперечная 39
– при кручении 80
– сдвига 75, 76, 112, 113
– скорость 48, 74
– среза 77
– тензор 171, 172
– тепловая 40
– угловая 18, 171, 203
– удлинения 212
– упругая 11, 18, 55, 56, 139, 175
Диаграмма Прандтля 61, 62, 64, 66,
69, 123
– предельных амплитуд 293–297, 299
– растяжения материалов пластичных
52–54
– – – – температурная 71
– – – – радиационная 72
– – – хрупких 55, 56
– сдвига 76, 77
– сжатия 52, 56
– – материалов пластичных 56
– – – хрупких 57
– циклического деформирования 301
- Ж**есткость 7
– сечения бруса при изгибе 110
– – – кручения 82
– – – – растяжении-сжатии 40
– – – – сдвиге 78
- З**адача Гриффитса 188
– контактная 304
– о кручении стержня 79
– – равнопрочности конструкции 44
– об ударе 266
– плоская 24
– устойчивости стержня 171
– Эйлера 241

- Закон Гука 9, 11
 – – обобщенный 173, 174
 – – при изгибе 106, 107
 – – – – кривого бруса 141–143
 – – – кручения 81
 – – – растяжении-сжатии 39
 – – – с учетом температуры 40
 – – – сдвиге 76
 – парности касательных напряжений 50
- Изгиб** бруса большой кривизны 141
 – косой 15, 103, 147
 – плоский 103
 – поперечный 15, 103, 112
 – продольный 239
 – продольно-поперечный 257
 – прямой 103
 – с кручением 15, 202
 – – растяжением 15, 151
 – прямой чистый 15, 103, 106, 108
- Излом усталостный 288
- Изотропность 10
- Интеграл Мора 214
- Интенсивность нейтронного потока 71
- Колебания** вынужденные 276
 – – демпфирование 281
 – – крутильные 285
 – – резонансные 284
 – – с учетом сопротивления среды 281
 – свободные 272
 – – в вязкой среде 280
- Колонна 20
- Консоль 21
- Концентрация напряжений 288, 295
- Коэффициент асимметрии цикла 289
 – динамический при ударе 304
 – – – – по массивной системе 267
 – – – – продольном 268
 – – вынужденных колебаний 276
 – – – – с учетом сопротивления среды 283
 – жесткости опоры 20
 – запаса прочности 61, 62, 67, 178
 – – при циклическом нагружении 299
 – – – – плоском 309
 – качества обработки поверхности 297
 – концентрации напряжений теоретический 295
 – – – эффективный 296
 – – линейного температурного расширения 40
 – масштабного фактора 297
 – надежности по нагрузке 63
 – – – материалу 64
 – – – назначению 64
 – податливости опоры 20
 – поправочный при кручении 88
 – постели 139
 – приведения длины стержня 245
 – продольного изгиба 248
 – Пуассона 39
 – трения 308
 – угловой 149, 294
 – условий работы 64, 248
 – чувствительности материала к местным напряжениям 297
- Кривизна изогнутой оси балки 109, 110, 112, 141
 – – – – большая 141
 – – – – малая 141
 – главной поверхности 308
- Критерий Гриффитса 189
 – – пластичности и разрушения 142
 – эквивалентности 180
- Кручение 15, 75
 – с изгибом 15, 153, 202
 – стержней 79
 – – круглого поперечного сечения 79
 – – некруглого сечения 86
- Линия** базисная 24
 – Людерса – Чернова 54
 – нейтральная 106
 – – при изгибе с растяжением 153
 – – – косом изгибе 149
 – осевая стержня 13
 – силовая 103
 – упругая 126
- Материал** вязкоупругий 72
 – анизотропный 10
 – идеально упругий 11
 – изотропный 10
 – малопластичный 51
 – однородный 10
 – пластичный 50
 – сплошной 10
 – хрупкий 50

- Матрица тензора деформаций 172
 – – – в главных осях 172
 – – напряжений 160
 – – – в главных осях 162
 Метод Мора 232
 – начальных параметров 129
 – непосредственного интегрирования 128
 – определения перемещений 209
 – перемещений 223
 – последовательных приближений 250
 – практический расчета стержней на устойчивость 248
 – приближенный при продольно-поперечном изгибе 259
 – проб 150
 – расчета на прочность по допускаемым напряжениям 60, 78
 – – – – – нагрузкам 61
 – – – – – предельным состояниям 63, 64, 78
 – сечений 14
 – сил 223, 225
 – энергетический для определения критических нагрузок 262
 Модель Винклера 139
 Модуль сдвига 70, 76
 – Юнга 39
 Момент изгибающий 15
 – инерции главный центральный 96
 – – осевой 91
 – – полярный 92
 – – центробежный 91
 – крутящий 15
 – сопротивления осевой 93
 – – пластический 125
 – – полярный 93
 – статический 89
Нагрузка 13
 – временная 14
 – динамическая 13, 265
 – допускаемая 61, 62, 261
 – нормативная 63
 – объемная 13
 – опасная 66
 – поверхностная 13
 – повторно-переменная 14
 – постоянная 14
 – предельная 66
 – расчетная 63
 – статическая 13
 – ударная 247
 Наклеп 56
 Напряжение(я) 16
 – амплитудное 289
 – главное 162, 165
 – динамическое 266
 – допускаемое 60, 61
 – касательное 16
 – – максимальное 168
 – – октаэдрическое 168
 – – при кручении 81
 – – – изгибе поперечном 113
 – – – растяжении-сжатии 49, 50
 – – – плоском напряженном состоянии 169
 – – – сдвиге 76
 – критическое 245, 247
 – номинальное 293
 – нормальное 16
 – – в кривом бруске 143
 – – октаэдрическое 168
 – – при изгибе косом 148
 – – – поперечном 112
 – – – с растяжением 152
 – – – чистом 108
 – – – плоском напряженном состоянии 169
 – – – растяжении-сжатии 37, 38, 49
 – эквивалентное 178
Опора(ы) 19
 – жесткая заделка 19
 – скользящая заделка 20
 – упруго-податливая 20
 – шарнирно-неподвижная 19
 – шарнирно-подвижная 19
Ось(и) главные инерции 96
 – – тензора деформаций 172
 – – – напряжений 162
 – нейтральная 106
 – стержня (балки) 13
 – центральные 90
Параметр(ы) затухания колебаний 279
 – критические 239
 – начальные 129, 131
 – ядра релаксации 74

- Паскаль 16
 Перемещение(я) вектор 17
 – в стержневой системе 209
 – опоры 20
 – по осям 18
 – при изгибе 126
 – – косом 150
 – – кручении 83
 – – растяжении-сжатии 40
 – сдвиге 78
 Период свободных колебаний 273
 – – – в среде с сопротивлением 279
 – – – крутильных 285
 Петля гистерезиса 302
 Площадка главная тензора деформаций 172
 – – – напряжений 162, 170
 – наклонная 49
 – октаэдрическая 168
 – текучести 53
 Ползучесть 63
 Потенциальная энергия деформации изменения объема 176
 – – – – формы 176
 – – – – полная 175
 – – – – при изгибе 111
 – – – – продольном 262
 – – – – кручении 83
 – – – – растяжении-сжатии 48
 – – – – сдвиге 78
 Правило введения внутренних усилий 24
 – Верещагина 219
 – знаков 79
 – Лопиталья 241
 – построения эпюр 25
 Прандтля диаграмма 61, 123
 Предел выносливости 291, 292
 – – ограниченный 292
 – пропорциональности 52
 – прочности 54
 – текучести 53
 – – технический 55
 – упругости 53
 Принцип Д'Аламбера 272
 – Сен-Венана 12
 – суперпозиции 11
 Прочность 7
 Пуассона коэффициент 39
Работа при изгибе 111
 – – – продольном 262
 – – кручении 83
 – – объемном напряженном состоянии 175
 – – раскрытии трещины 188
 – – растяжении-сжатии 48, 58
 – – сдвиге 78
 Радиус инерции 93
 – кривизны оси балки 107
 – – нейтрального слоя бруса большой кривизны 141
 – – поверхности 304
 Разрушение материала пластическое 59, 302
 – – усталостное 14, 287, 302
 – – хрупкое 55
 Растяжение всестороннее 174
 – пластических материалов 54
 – под действием собственного веса 42
 – с изгибом 152
 – хрупких материалов 55
 – центральное 37
 Расчет на жесткость 64, 66, 68
 – – прочность 64
 – – – при изгибе 121
 – – – – косом 150
 – – – – с кручением 203
 – – – – – растяжением 153
 – – – – кручении 85
 – – – – растяжении-сжатии 65, 66
 – – – – сдвиге 78
 – – удар 265
 – – устойчивость 248
 – по допускаемым нагрузкам 61
 – – – напряжениям 60
 – – несущей способности 60
 – – предельным состояниям 63
 – пространственного бруса 190
 – статически неопределимых систем 23
 Расчетная схема 19, 21
 Расчетное сопротивление 64
 Резонанс 277, 284
 Релаксация 72
Свободные колебания 272
 Сдвиг чистый 76
 – фазы колебаний 275
 Сен-Венана принцип 12
 Сечение бруса наклонное 49

- – опасное 65
- Сжатие 15, 37
- Сила(ы) внешняя 13
 - внутренние 13, 14
 - возмущающая 273
 - инерции 13, 273
 - консервативная 214
 - критическая 239, 240
 - объемная 13
 - поверхностная 13
 - погонная 13
 - поперечная 15, 24
 - продольная 15, 24
 - сосредоточенная 13
- Сопrotивление материалов 7
- Состояние деформированное 171
 - напряженное 159
- Статически неопределимые системы 22
- Стержень 13
- Сужение относительное остаточное при разрыве 58
- Т**вердость 59
 - по Бринеллю 59
 - по Роквеллу 59
- Течучесть 53
- Тензор деформаций 171, 172
 - – главные значения 172
 - – – оси 172
 - – инварианты 172
 - – матрица 172
 - напряжений 159, 160
 - – вековое уравнение 165
 - – главные площадки 162
 - – значения 162, 165
 - – – при плоском напряженном состоянии 169, 170
 - – – оси 162
 - – инварианты 166
 - – матрица 160
- Теорема Клапейрона 48
 - парности касательных напряжений 50, 114, 160
- Теория прочности 178, 179
 - – вторая 181
 - – первая 180
 - – пятая 185
 - – разрушения 186
 - – третья 182
 - – – для изгиба с кручением 183
 - – – четвертая 183
 - – – для изгиба с кручением 184
 - – – трещин Гриффитса 189
- Треска – Сен-Венана теория прочности 181
- У**гол закручивания относительный 80
 - полный 83
 - перелома 124
 - сдвига 76, 81
- Уголок неравнополочный 363–365
 - равнополочный 359–362
- Удар 265
 - по массивной системе 267
 - поперечный 266
 - продольный 267
- Ударная вязкость 59
- Удлинение абсолютное 38
 - участка стержня 40
 - – остаточное при разрыве 58
- Упругость идеальная 11
- Уравнение вековое 165, 172
 - дифференциальное упругой линии балки 126, 127, 153
 - – – – на упругом основании 139, 140
 - – – – равновесия при продольном изгибе стержня 241
 - – – – – гибкого 243
 - – – – – продольно-поперечном изгибе 257
 - колебаний вынужденных 276
 - – – в среде с сопротивлением 282
 - – – дифференциальное 276
 - – – – с учетом рассеивания энергии 282
 - – крутильных 286
 - – – дифференциальное 286
 - – свободных 273
 - – – дифференциальное 273
 - – – – с учетом рассеивания энергии 289
 - линейной вязкоупругости 73
 - Навье 9
 - нулевой линии при косом изгибе 148, 150
 - – – – внецентренном растяжении 154
 - предельной прямой 299
 - совместности перемещений 22, 46, 47, 68

- энергетического баланса 48
- Условие(я) граничные 128, 135, 140, 242
- жесткости 64, 66, 86
- начальные 273, 280
- перпендикулярности прямых 167
- предельного равновесия 61, 69
- прочности 61, 62, 64–66, 78, 85, 121, 122, 150, 177, 180–182, 184, 185, 196, 204, 249, 310
- равноустойчивости 253
- роста трещины 189
- устойчивости 248
- эквивалентности 179
- экстремума функции 96
- Усталость материалов 287, 288
- малоцикловая 300
- Устойчивость 239

Фаза колебаний 273

- Формула Журавского 114, 115, 119
- Эйлера 242
- Ясинского 247

- Х**арактеристики геометрические плоских сечений 89
- циклов напряжений 289
- Хубера – Мизеса – Хенки теория прочности 301

- Ц**ентр тяжести сечения 89, 90
- Цикл напряжений 287

- Ч**астота возмущающей силы 275
- свободных колебаний 273
- – – в среде с сопротивлением 280
- – – крутильных 286
- Число степеней свободы 272

Шарнир 19

- пластичности 124
- Швеллер 111, 366, 367

Энергия кинетическая 13, 48

- потенциальная 13, 48
- – удельная изменения объема 176
- – – – формы 176
- – – – полная 175
- – – – при изгибе 111
- – – – продольном 262
- – – – кручении 83
- – – – растяжении-сжатии 49
- – – – сдвиге 78
- раскрытия трещины 188
- Эффект Баушингера 40

Ядро сечения 155

- – круглого 156
- – прямоугольного 156

CONTENTS LIST

1 Introduction in strength of material's	
1.1 Main notions of material's strength	7
1.2 Hypotheses and assumptions of the material's strength	10
1.3 External forces. Internal strains in rods	13
1.4 Stresses at a point in the body	16
1.5 Displacements and deformations	17
1.6 Supports. Calculation scheme of construction	19
1.7 Statically definable and undefinable systems	22
1.8 Construction of epures of internal force factors	24
1.9 Examples	27
2 Rod tension and compression	37
2.1 Internal forces and stresses	37
2.2 Strains	38
2.3 Hooke's law for tension and compression	39
2.4 Displacements for tension and compression	40
2.5 Differential relations for tension and compression	41
2.6 Potential energy of deformation	48
2.7 Stresses at oblique area elements	49
2.8 Mechanical testing of materials	50
2.9 Diagrams of stretching	52
2.10 Elastic and plastic deformations	55
2.11 Compression diagram	56
2.12 Mechanical characteristic of materials	58
2.13 Engineering methods of strength calculation.	
Calculation by admissible stresses	60
2.14 Calculation by admissible loads	61
2.15 Calculation by limiting states	63
2.16 Calculation of rods under tension and compression	65
2.17 Influence of temperature and radiation on the mechanical properties of materials	70
2.18 Viscoelastic properties of materials	72
3 Shear. Torsion	75
3.1 Simple shear	75
3.2 Calculation of shearing work of joints	77
3.3 Torsion of rod with circular cross-section	79
3.4 Shearing stress and torque strength relation	81
3.5 Displacements. Potential strain energy	83
3.6 Geometrical characteristics of sections at torsion	84
3.7 Strength and rigidity analysis during torsion	85
3.8 Torsion of rod with noncircular cross-section	86
4 Geometrical characteristics of plane section rods	89
4.1 Static moments and center of figure	89
4.2 Moment of inertia of section	91
4.3 Moment of inertia changing due to parallel shift of coordinate axes	93
4.4 Moment of inertia changing due to turning of coordinate axes	95
4.5 Basic axes and basic moments of inertia	96
4.6 Geometrical characteristics of simplest figures	98

5 Symmetric bending	103
5.1 Internal bending strains	103
5.2 Hooke's law for pure bending	106
5.3 Normal stress for pure bending	108
5.4 Strain energy for pure bending	111
5.5 Stress for lateral bending	112
5.6 Distribution of stress over rectangular and double-tee cross section	116
5.7 Shearing stress for thin-walled rods	118
5.8 Strength analysis for bending	121
5.9 Beam calculation considering the development of plastic deformations	123
5.10 Differential equation of beam deflection curve	126
5.11 Determination of displacement for bending	128
5.12 Praxis of beam analysis for symmetrical bending	131
5.13 Beam at elastic foundation	138
5.14 Beam bending with large curvature. Hooke's law	141
5.15 Normal stresses in crooked beam	143
5.16 Neutral layer radius of curvature	145
6 Complex resistance	147
6.1 Unsymmetrical bending	147
6.2 Bending with stretching (compression)	151
6.3 Eccentric tension (compression)	154
7 Stress-strain states at a point	159
7.1 Stress state at the point	159
7.2 Stress on an arbitrary site	160
7.3 Principal axes and principal values of stress tensor	162
7.4 Calculation of principal values of the stress tensor	164
7.5 Stresses on octahedral pads	166
7.6 Plane stress state	169
7.7 The deformed state at the point	171
7.8 Generalized Hooke's Law	173
7.9 Volumetric deformation	174
7.10 Total potential energy of deformation	175
7.11 Potential energy of volume and form change	176
8 The theory of strength and destruction	177
8.1 Strength under combined stress state	177
8.2 Theory of maximal normal stresses (The first theory of strength)	180
8.3 Theory of maximal linear strains (The second theory of strength)	181
8.4 Tresca – Saint-Venant's theory of maximal shear stresses (The third theory of strength)	182
8.5 Hyber – Mises – Hencky's theory of energy (The fourth theory of strength)	183
8.6 Theory of limiting states by Mohr (The fifth strength theory)	185
8.7 Destruction theory	186
8.8 Spatial beam computation	190
8.9 Bending with torsion of circular in section rods	202
9 Displacements in framed structures	209
9.1 Potential energy of framed structure	209
9.2 Castigliano theorem	213
9.3 Mohr's integral	214
9.4 Mohr's integral calculation technique	217

9.5 Theorems about mutuality of works and displacements	221
9.6 Statically uncertainty	222
9.7 Calculations of statically undefinable systems by force method	225
10 Stability of compressed rod	239
10.1 Conception of stability	239
10.2 Euler's problem	241
10.3 Dependence of critical load upon rod fixing conditions	243
10.4 Loss of stability at stresses above proportional limit	245
10.5 Practical stability analysis of rods	248
10.6 Transverse-longitudinal bending	257
10.7 Bending moment at transverse-longitudinal bending	259
10.8 Approximate problem-solving procedure under transverse-longitudinal bending	259
10.9 Safe load under transverse-longitudinal bending	261
10.10 Energy method of critical load computation	262
11 Dynamic loading	265
11.1 Impact calculation	265
11.2 Longitudinal impact. Impact against massive elastic system	267
11.3 Free oscillations of systems with one degree of freedom	272
11.4 Forced oscillations of systems with one degree of freedom	275
11.5 Energy scattering during oscillations	279
11.6 Forced oscillations subject to environment resistance	281
11.7 Resonance curves.	283
11.8 Shaft torsional oscillation with one degree of freedom	285
12 Strength at cyclic strains	287
12.1 Fatigue of material. Characteristics of stress cycles	287
12.2 Fatigue curves. Fatigue limit of materials	291
12.3 Diagrams of ultimate amplitudes	293
12.4 Stress concentration	295
12.5 Scale effect. Quality coefficient of surface treatment	297
12.6 Safety factor of cyclic loading	299
12.7 Notion of low cyclic material fatigue	300
13 Contact strains	303
13.1 General information	303
13.2 Ball's compression	305
13.3 Cylinder compression	306
13.4 A general case of two bodies contact	308
13.5 Strength validation under contact strains	310
14 Test tasks	313
14.1 An introduction to the strength of materials. Stretching, compression and torsion of rods	313
14.2 Geometrical characteristics of plane section rods. Bending	323
14.3 Combined resistance. Foundation of the strain-stress theory. The theory of strength and destruction	334
14.4 Displacements in framed structures. Compressed rod stability	341
14.5 Dynamics. Cyclic stresses. Contact strains	347
Appendix A. Basic letter designations	360
Appendix B. Reference materials	362
Appendix B. Rolled steel grade	375
Literature list	385
Author's index	387
Subject index	388

STAROVOITOV E. I.
STRENGTH OF MATERIAL'S

The textbook covers to the traditional program on mechanics (strength) of materials in technical colleges. The following sections are discussed: rod tension and compression, torsion, geometrical characteristics of plane section rods, bending, combined resistance, foundation of the strain-stress theory, plasticity and destruction criteria, compressed rod stability, dynamic loading, strength at cyclic strains, contact strains, displacements in framed structures, test tasks. Methods and examples of solutions are set up.

Учебное издание

СТАРОВОЙТОВ Эдуард Иванович

Сопротивление материалов

Учебник

Редактор *А. А. Павлюченкова*

Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 20.06.2025 г. Формат 60 × 84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 23,02. Уч.-изд. л. 21,17. Тираж 300 экз.
Зак. № 1178. Изд. № 5.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий

№ 1/361 от 13.06.2014 г.

№ 2/104 от 01.04.2014 г.

№ 3/1583 от 14.11.2017 г.

ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель,