

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

А. В. Яровая

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по строительным специальностям*

Гомель 2013

УДК 624.04 (075.8)
ББК 38.112
Я78

Рецензенты: *В. И. Игнатюк*, канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Строительная механика» Брестского государственного технического университета;
И. М. Кузменко, канд. техн. наук, доцент кафедры «Сопротивление материалов» Белорусско-Российского университета

Яровая, А. В.

Я78 Строительная механика. Статика стержневых систем: учеб. пособие / А. В. Яровая; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.

ISBN 978-985-468-954-8

Учебное пособие соответствует традиционной программе курса строительной механики для строительных специальностей вузов. Излагаются основные методы расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых систем на неподвижную и подвижную нагрузки, тепловое и кинематическое воздействия. Приведены примеры расчетов основных типов плоских стержневых систем: балок, рам, ферм, арок.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 624.04 (075.8)
ББК 38.112

ISBN 978-985-468-954-8

© Яровая А. В., 2013
© Оформление. УО «БелГУТ», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	9
1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ	10
1.1 Предмет и задачи строительной механики	10
1.1.1 Предмет строительной механики. 1.1.2 Связь с другими науками. 1.1.3 Задачи расчета сооружений. 1.1.4 Понятие о задачах оптимизации	
1.2 Обзор развития строительной механики	15
1.2.1 Развитие общей механики. 1.2.2 Развитие строительной механики как науки. 1.2.3 Направления развития строительной механики	
1.3 Нагрузки и воздействия на сооружения	20
1.3.1 Нагрузки. 1.3.2 Воздействия. 1.3.3 Определение величин нагрузок и воз- действий	
1.4 Сооружение и его расчетная схема	24
1.4.1 Элементы сооружений. 1.4.2 Расчетная схема сооружения. 1.4.3 Класси- фикация стержневых систем	
1.5 Связи и их характеристики	29
1.5.1 Реальные и идеальные связи. Реакции связей. 1.5.2 Стержень и шарнир- но подвижная опора. 1.5.3 Шарнир и шарнирно неподвижная опора. 1.5.4 Жесткий узел и жесткая заделка. 1.5.5 Скользящая заделка. 1.5.6 Упру- гоподатливые связи. 1.5.7 Плавающая заделка	
1.6 Учет механических свойств материалов. Основные уравнения строительной механики	35
1.6.1 Физические модели материалов. 1.6.2 Применимость физических моде- лей. 1.6.3 Основные уравнения строительной механики. 1.6.4 Линейно и нели- нейно деформируемые системы	
1.7 Основные допущения строительной механики и следствия из них . 38	
1.7.1 Гипотезы и допущения относительно свойств материала. 1.7.2 Гипотезы относительно поперечных сечений стержней. 1.7.3 Допущение о малости де- формаций и следствия из него. 1.7.4 Принцип независимости действия сил (суперпозиции)	
1.8 Геометрическая неизменяемость сооружений	43
1.8.1 Геометрически изменяемые и неизменяемые системы. Диск. 1.8.2 Связи абсолютно необходимые и лишние (избыточные). 1.8.3 Мгновенно изменяемые (вырожденные) системы. 1.8.4 Центр вращения. Фиктивный шарнир	
1.9 Кинематический анализ сооружений: геометрический метод	48
1.9.1 Цель и методы кинематического анализа сооружений. 1.9.2 Принципы геометрически неизменяемого соединения дисков. 1.9.3 Проведение кинемати- ческого анализа сооружений геометрическим методом	
1.10 Число степеней свободы и степень изменяемости плоской стерж- невой системы	52
1.10.1 Число степеней свободы. 1.10.2 Формула Чебышева. 1.10.3 Число сте- пеней свободы (степень изменяемости) плоской стержневой системы. 1.10.4 Об- щая формула для определения числа степеней свободы (степени изменяемости) плоской стержневой системы. 1.10.5 Число степеней свободы (степень изме- няемости) ферм. 1.10.6 Число степеней свободы (степень изменяемости) рам	
1.11 Кинематический анализ сооружений: аналитические методы	60
1.11.1 Необходимое аналитическое условие геометрической неизменяемости. 1.11.2 Общий аналитический метод. 1.11.3 Метод нулевой нагрузки. 1.11.4 По- рядок проведения кинематического анализа	

2 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ	66
2.1 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета на статическую нагрузку	66
2.1.1 Внутренние усилия как реакции связей. 2.1.2 Статическая определенность и неопределимость. 2.1.3 Свойства статически определимых систем. 2.1.4 Классификация методов расчета стержневых систем на статическую нагрузку	
2.2 Кинематический метод определения усилий	70
2.2.1 Принцип возможных перемещений. 2.2.2 Применение принципа возможных перемещений для нахождения усилий в статически определимых системах. 2.2.3 Порядок определения усилий кинематическим методом. 2.2.4 Общая формулировка и доказательство принципа суперпозиции	
2.3 Метод замены связей	77
2.3.1 Замена одной связи. 2.3.2 Замена нескольких связей	
2.4 Расчеты на подвижную нагрузку методом линий влияния	80
2.4.1 Подвижные нагрузки в задачах статики. 2.4.2 Расчетное положение нагрузки. 2.4.3 Понятие о линиях влияния	
2.5 Статический метод построения линий влияния	83
2.5.1 Общий ход расчета. 2.5.2 Линии влияния опорных реакций в балке. 2.5.3 Линии влияния внутренних усилий в междуопорном сечении балки. 2.5.4 Линии влияния усилий в консольном сечении балки. 2.5.5 Проверка линий влияния и правила их графического построения	
2.6 Кинематический метод построения линий влияния	88
2.6.1 Применение кинематического метода к построению линий влияния. 2.6.2 Модели линий влияния различных усилий	
2.7 Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния	91
2.7.1 Действие вертикальных сосредоточенных сил. 2.7.2 Действие распределенной нагрузки. 2.7.3 Действие сосредоточенных моментов	
2.8 Линии влияния при узловой передаче нагрузки	94
2.8.1 Понятие об узловой передаче нагрузки. 2.8.2 Особенности очертания линий влияния при узловой передаче нагрузки. 2.8.3 Порядок построения линий влияния при узловой передаче нагрузки	
2.9 Невыгоднейшее нагружение линий влияния	97
2.9.1 Действие одной сосредоточенной силы. 2.9.2 Действие системы сосредоточенных сил. 2.9.3 Действие равномерно распределенной нагрузки произвольной протяженности. 2.9.4 Действие равномерно распределенной нагрузки заданной протяженности. 2.9.5 Эквивалентная нагрузка	
2.10 Определение усилий в матричной форме	104
2.10.1 Определение внутренних усилий от сосредоточенных сил. 2.10.2 Формирование матрицы влияния. 2.10.3 Учет особенностей внешней нагрузки	
2.11 Огибающие (объемлющие) эпюры внутренних усилий	108
2.11.1 Понятие об огибающей эпюре. 2.11.2 Способы построения огибающих эпюр. 2.11.3 Совместное действие постоянных и временных нагрузок	
3 МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ И РАМЫ	113
3.1 Общие сведения о многопролетных балках и рамах	113
3.1.1 Классификация статически определимых балок. 3.1.2 Кинематический анализ многопролетных балок. 3.1.3 Особенности конструкции многопролетных шарнирных балок и рам	
3.2 Расчет многопролетных балок и рам на неподвижную нагрузку	117
3.2.1 Статический метод. Поэтажные схемы. 3.2.2 Кинематический метод	
3.3 Линии влияния в многопролетных балках	124
3.3.1 Статический метод. 3.3.2 Кинематический метод	

3.4 Пример расчета трехпролетной балки железнодорожного моста . .	130
3.4.1 Кинематический анализ. 3.4.2 Вычисление внутренних усилий от постоянной нагрузки. 3.4.3 Построение линий влияния изгибающих моментов. 3.4.4 Проверка ординат эпюры моментов с помощью линий влияния. 3.4.5 Схемы невыгоднейшего нагружения. 3.4.6 Вычисление эквивалентных нагрузок. 3.4.7 Построение огибающей эпюры изгибающих моментов	
4 СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ БЕЗРАСПОРНЫЕ ФЕРМЫ	139
4.1 Общие сведения о фермах	139
4.1.1 Фермы и их расчетные схемы. 4.1.2 Основные элементы ферм. 4.1.3 Статическая определенность плоских ферм	
4.2 Классификация плоских ферм	142
4.2.1 Классификация по очертанию поясов. 4.2.2 Классификация по системе решетки. 4.2.3 Классификация по условиям опирания	
4.3 Определение усилий в стержнях ферм при неподвижной нагрузке	145
4.3.1 Идея фермы. 4.3.2 Методы расчета на неподвижную нагрузку. 4.3.3 Анализ распределения усилий в фермах от вертикальной нагрузки. 4.3.4 Рекомендации по проектированию ферм	
4.4 Линии влияния продольных сил: статический метод	150
4.4.1 Порядок построения линий влияния N статическим методом. 4.4.2 Примеры построения линий влияния в фермах. 4.4.3 Проверка линий влияния	
4.5 Линии влияния продольных сил: кинематический метод	159
4.5.1 Последовательность построения линий влияния N кинематическим методом. 4.5.2 Примеры построения моделей линий влияния	
4.6 Шпренгельные фермы: расчет на неподвижную нагрузку	162
4.6.1 Назначение и типы шпренгелей. 4.6.2 Расчетная схема шпренгельной фермы. Определение усилий от неподвижной нагрузки	
4.7 Шпренгельные фермы: расчет на подвижную нагрузку	167
4.7.1 Особенности построения линий влияния в шпренгельных фермах. 4.7.2 Примеры построения линий влияния в шпренгельных фермах	
5 ТРЕХШАРНИРНЫЕ СИСТЕМЫ	176
5.1 Общие сведения о трехшарнирных системах	176
5.1.1 Основные параметры трехшарнирной системы. 5.1.2 Опорные реакции. 5.1.3 Типы трехшарнирных систем. 5.1.4 Трехшарнирная арка с затяжкой. 5.1.5 Очертание оси трехшарнирной системы	
5.2 Расчет трехшарнирной системы с опорами в одном уровне на вертикальную нагрузку	180
5.2.1 Опорные реакции. 5.2.2 Внутренние усилия. 5.2.3 Эпюры внутренних усилий в трехшарнирной системе. 5.2.4 Расчет трехшарнирной системы с затяжкой	
5.3 Общий случай расчета трехшарнирной системы	185
5.3.1 Опорные реакции. 5.3.2 Внутренние усилия. 5.3.3 Расчет на вертикальную нагрузку	
5.4 Дифференциальные зависимости между усилиями в криволинейных стержнях	186
5.4.1 Зависимость между изгибающими моментами и поперечными силами. 5.4.2 Зависимости между поперечными и продольными силами	
5.5 Рациональная ось трехшарнирной системы	188
5.5.1 Уравнение рациональной оси трехшарнирной системы. 5.5.2 Действие равномерно распределенной нагрузки. 5.5.3 Действие сосредоточенных сил. 5.5.4 Действие радиальной нагрузки (гидростатического давления)	

5.6	Линии влияния усилий в трехшарнирной системе	191
	5.6.1 Линии влияния опорных реакций. 5.6.2 Линия влияния изгибающего момента: способ наложения. 5.6.3 Линия влияния изгибающего момента: способ нулевой точки. 5.6.4 Линия влияния поперечной силы: способ наложения. 5.6.5 Линия влияния поперечной силы: способ нулевой точки. 5.6.6 Линия влияния продольной силы: способ наложения. 5.6.7 Линия влияния продольной силы: способ нулевой точки. 5.6.8 Учет узловой передачи нагрузки на арку	
5.7	Определение напряжений в арках	203
	5.7.1 Определение напряжений в арках без учета кривизны. 5.7.2 Определение напряжений с помощью ядровых моментов. 5.7.3 Определение напряжений в арках с учетом кривизны	
5.8	Расчетное положение подвижной нагрузки на арке	208
	5.8.1 Раздельное использование линий влияния M и N . 5.8.2 Использование линий влияния крайних напряжений. 5.8.3 Использование линий влияния ядровых моментов	
5.9	Примеры расчета трехшарнирных систем	211
6	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ	224
6.1	Вводные замечания	224
	6.1.1 Цель определения перемещений. 6.1.2 Методы определения перемещений в стержневых системах. 6.1.3 Обобщенные силы и обобщенные перемещения. 6.1.4 Особенности применения принципа возможных перемещений к деформируемым системам	
6.2	Общая формула для определения перемещений от произвольных внешних воздействий	226
	6.2.1 Плоские системы, состоящие из прямолинейных стержней. 6.2.2 Общий случай пространственной системы. 6.2.3 Замечания	
6.3	Формула Мора	231
	6.3.1 Формула Мора для плоской системы, состоящей из прямолинейных стержней. 6.3.2 Формула Мора для пространственной системы, состоящей из прямолинейных стержней. 6.3.3 Порядок определения перемещений с помощью формулы Мора	
6.4	Частные случаи применения формулы Мора	235
	6.4.1 Балки, испытывающие плоский изгиб. 6.4.2 Плоские рамы. 6.4.3 Арки и криволинейные стержни. 6.4.4 Фермы. 6.4.5 Пространственные стержни, испытывающие сложное сопротивление	
6.5	Техника вычисления интегралов Мора	238
	6.5.1 Способ (правило) Верещагина. 6.5.2 Использование формулы Симпсона. 6.5.3 Правило перемножения прямолинейных эпюр (трапеций). 6.5.4 Способ Мюллера-Бреслау. 6.5.5 Применимость способов «перемножения эпюр»	
6.6	Примеры вычисления перемещений в стержневых системах от различных нагрузок	244
6.7	Перемещения, вызванные изменением температуры	253
	6.7.1 Формула для перемещений в плоской статически определимой системе от температурного воздействия. 6.7.2 Частные случаи. 6.7.3 Примеры вычисления перемещений от температурных воздействий в статически определимых системах. 6.7.4 Перемещения в плоской статически неопределимой системе от температурного воздействия	
6.8	Перемещения, вызванные смещением опор	261
	6.8.1 Перемещения в статически определимых системах при случайной осадке опор. 6.8.2 Перемещения в статически определимых системах при действии нагрузки, вызывающей осадки опор. 6.8.3 Перемещения в статически неопределимых системах при случайной осадке опор	
6.9	Теоремы о взаимности в строительной механике	263
	6.9.1 Обозначения перемещений и работ. 6.9.2 Теорема о взаимности работ (Бетти). 6.9.3 Теорема о взаимности единичных перемещений (Максвелла). 6.9.4 Теорема о взаимности единичных реакций в статически неопределимых	

системах (первая теорема Рэлея). 6.9.5 Теорема о взаимности единичных реакций и перемещений в статически неопределимых системах (вторая теорема Рэлея)

7 МЕТОД СИЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПЛОСКИХ РАМ И БАЛОК	268
7.1 Статически неопределимые системы и их свойства	268
7.1.1 Степень статической неопределимости. 7.1.2 Формулы для вычисления степени статической неопределимости. 7.1.3 Свойства статически неопределимых систем. 7.1.4 Особенности расчета статически неопределимых систем	
7.2 Основная система и основные неизвестные метода сил	273
7.2.1 Идея метода сил. 7.2.2 Основная система. 7.2.3 Основные неизвестные метода сил	
7.3 Канонические уравнения метода сил	276
7.3.1 Вывод канонических уравнений. 7.3.2 Матричная запись канонических уравнений	
7.4 Вычисление и проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	279
7.4.1 Определение единичных и грузовых перемещений для различных стержневых систем. 7.4.2 Проверка правильности вычисления перемещений	
7.5 Определение внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе	283
7.5.1 Способы определения внутренних усилий в заданной системе. 7.5.2 Особенности определения Q и N в плоских рамах и балках	
7.6 Проверка правильности определения внутренних усилий. Порядок расчета рам методом сил	285
7.6.1 Кинематическая (деформационная) проверка правильности определения внутренних усилий. 7.6.2 Статическая проверка правильности определения внутренних усилий. 7.6.3 Порядок расчета рам методом сил	
7.7 Примеры расчетов статически неопределимых рам на различные виды нагрузок	288
7.8 Расчет статически неопределимых систем на температурное и кинематическое воздействия	298
7.8.1 Канонические уравнения метода сил при температурном и кинематическом воздействиях. 7.8.2 Определение внутренних усилий. 7.8.3 Проверки расчета. 7.8.4 Примеры расчета рам на температурное и кинематическое воздействия	
7.9 Возможные упрощения при расчете статически неопределимых систем методом сил	309
7.9.1 Понятие о рациональной основной системе. 7.9.2 Учет симметрии системы. 7.9.3 Введение жестких консолей. 7.9.4 Рациональная расстановка шарниров. 7.9.5 Рациональный выбор направлений неизвестных. 7.9.6 Группировка неизвестных. 7.9.7 Зависимость точности расчета от принятой основной системы	
7.10 Перемещения в статически неопределимых системах	315
8 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ К РАСЧЕТУ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК, ФЕРМ И НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК	319
8.1 Основные понятия о расчете арок	319
8.1.1 Типы статически неопределимых арок. 8.1.2 Особенности расчета статически неопределимых арок. 8.1.3 Законы изменения сечений арок	
8.2 Расчет двухшарнирной арки на неподвижную нагрузку	322
8.2.1 Общий ход расчета. 8.2.2 Особенности расчета арки с балочной основной системой	

8.3 Расчет двухшарнирной арки с затяжкой	332
8.3.1 Общий ход расчета. 8.3.2 Влияние жесткости затяжки на усилия и напряжения	
8.4 Расчет бесшарнирной арки на неподвижную нагрузку	336
8.4.1 Общий ход расчета. 8.4.2 Особенности расчета с основной системой, полученной разрезанием арки по оси симметрии	
8.5 Расчет статических неопределимых ферм	341
8.5.1 Статическая неопределимость плоских ферм. 8.5.2 Общий ход расчета	
8.6 Расчет неразрезных балок. Основная система метода сил	353
8.6.1 Общие сведения о неразрезных балках. 8.6.2 Степень статической неопределимости неразрезной балки. 8.6.3 Основная система метода сил	
8.7 Уравнение трех моментов	356
8.7.1 Вывод уравнения трех моментов. 8.7.2 Формула для грузового перемещения. 8.7.3 Особенности применения уравнений трех моментов. 8.7.4 Порядок расчета неразрезной балки	
9 МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	367
9.1 Кинематическая неопределимость	367
9.1.1 Идея метода перемещений. 9.1.2 Основные неизвестные метода перемещений. 9.1.3 Допущения метода перемещений. 9.1.4 Степень кинематической неопределимости	
9.2 Основная система метода перемещений	372
9.2.1 Дополнительные связи и цель их введения. 9.2.2 Таблицы реакций и внутренних усилий в стержне как элементе основной системы	
9.3 Канонические уравнения метода перемещений	375
9.3.1 Система канонических уравнений для n раз кинематически неопределимой конструкции. 9.3.2 Матричная запись канонических уравнений	
9.4 Вычисление и проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	377
9.4.1 Статический метод определения реакций. 9.4.2 Общий (кинематический) метод определения реакций. 9.4.3 Проверка правильности вычисления реакций	
9.5 Определение внутренних усилий и их проверка. Алгоритм расчета рам методом перемещений	383
9.5.1 Определение изгибающих моментов. 9.5.2 Определение поперечных и продольных сил. 9.5.3 Проверки правильности определения внутренних усилий. 9.5.4 Порядок расчета рам методом перемещений	
9.6 Примеры расчета рам методом перемещений	385
9.7 Особенности расчета рам с наклонными элементами	396
9.7.1 Особенности построения эпюр моментов от линейных смещений связей. 9.7.2 Особенности вычисления реакций дополнительных связей.	
9.8 Расчет рам на изменение температуры	399
9.8.1 Канонические уравнения метода перемещений при температурном воздействии. 9.8.2 Температурное воздействие на отдельный стержень. 9.8.3 Температурное воздействие на основную систему метода перемещений. 9.8.4 Определение «температурных» реакций. 9.8.5 Определение внутренних усилий от изменения температуры и их проверка	
9.9 Расчет рам на смещение опор	409
9.9.1 Канонические уравнения метода перемещений при кинематическом воздействии (смещении связей). 9.9.2 Определение реакций в основной системе от кинематического воздействия. 9.9.3 Определение внутренних усилий от кинематического воздействия и их проверка	
9.10 Расчет неразрезных балок методом перемещений	415
9.10.1 Рекомендации по формированию основной системы. 9.10.2 Канонические уравнения	

9.11 Упрощения при «ручных» расчетах рам методом перемещений	420
9.11.1 Использование основных систем с неполным числом наложенных связей.	
9.11.2 Группировка неизвестных в симметричных системах	
10 СМЕШАННЫЙ И КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ	425
10.1 Выбор метода расчета статически неопределимой системы	425
10.1.1 Сравнительный анализ метода сил и метода перемещений.	
10.1.2 Выбор метода расчета стержневой системы	
10.2 Смешанный метод	426
10.2.1 Основная система.	
10.2.2 Канонические уравнения.	
10.2.3 Построение окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка	
10.3 Комбинированный метод расчета симметричных рам	433
10.3.1 Методика расчета.	
10.3.2 Пример расчета симметричной рамы	
10.4 Комбинированный метод расчета рам в общем случае	435
10.4.1 Общие замечания.	
10.4.2 Главный – метод сил, вспомогательный – метод перемещений.	
10.4.3 Главный – метод перемещений, вспомогательный – метод сил	
Список литературы	442
Приложения	443

От автора

Стержневые системы широко применяются в современном строительстве. Кроме того, они представляют собой простой и удобный объект для изучения основных принципов и методов строительной механики, на базе которых в дальнейшем могут быть легко поняты методы расчета более сложных инженерных конструкций.

Строительная механика стержневых систем в учебном процессе следует непосредственно за сопротивлением материалов и является его логическим продолжением.

В данном учебном пособии рассмотрены вопросы определения внутренних усилий и перемещений в плоских стержневых системах при статических силовых нагрузках, температурных и кинематических воздействиях. Для лучшего усвоения материала во всех разделах пособия приведены примеры расчета, поясняющие теоретические положения и способствующие выработке практических навыков решения характерных задач.

При написании работы я основывалась на одноименном курсе, читаемом в течение ряда лет в Белорусском государственном университете транспорта для студентов специальности ПГС. Замечания любого характера будут приняты мною с благодарностью (av.yar@yandex.by).

1.1 Предмет и задачи строительной механики

1.1.1 Предмет строительной механики. Инженерные сооружения различного назначения (здания, мосты, плотины, летательные аппараты, корабли, машины, механизмы и т. д.) проектируются и создаются на основании предварительного расчета, обеспечивающего надежность и долговечность их эксплуатации.

Наука, которая разрабатывает принципы и методы расчета различных инженерных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, называется *строительной механикой*.

Строительная механика представляет собой раздел механики деформируемого твердого тела (МДТТ) – науки, изучающей напряжения, деформации и перемещения в телах различного вида от внешних воздействий (рисунок 1.1).

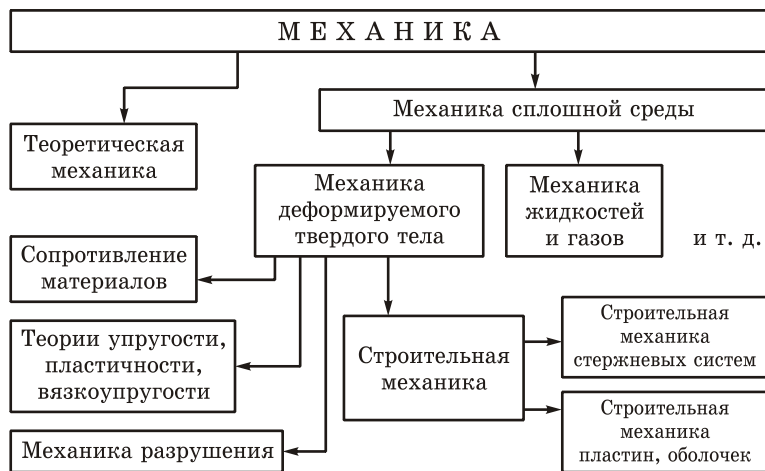


Рисунок 1.1

Определенную ветвь МДТТ составляет и курс сопротивления материалов, где основным объектом исследования является *стержень*. В курсе строительной механики изучаются уже более сложные *системы*, которые состоят из отдельных стержней, пластин, оболочек. И в сопротивлении материалов, и в строительной

механике для решения задач применяются сравнительно простые математические методы. В теориях упругости, пластичности и вязкоупругости на первый план выдвигается большая строгость и точность выводов, поэтому используется более сложный математический аппарат.

Четкую границу между всеми отмеченными науками провести нельзя, так как многие граничные вопросы можно отнести к любой из этих дисциплин.

Как отдельные направления существуют, например, строительная механика сооружений (строительных конструкций), машин, летательных аппаратов, строительная механика корабля.

В широком смысле под строительной механикой понимается комплекс дисциплин, предназначенных для определения напряжений и деформаций во всех сооружениях, создаваемых инженером.

В узком, общеупотребительном смысле под строительной механикой понимается техническая, инженерная дисциплина, занимающаяся расчетом конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при статических и динамических нагрузках, а также различных воздействиях. Традиционно строительная механика включает статику, динамику и устойчивость сооружений.

В настоящее время значительная часть курса строительной механики посвящена расчету *стержневых систем*. Это объясняется, во-первых, широким применением подобных систем в строительстве. Во-вторых, стержневые системы представляют собой простой и удобный объект для освоения основных принципов и методов строительной механики, на базе которых в дальнейшем легко могут быть поняты методы расчета более сложных инженерных конструкций.

Особенность строительной механики как науки в том, что в ней в основном изучаются не напряжения, а их равнодействующие – *внутренние усилия* (продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты), а также исследуются *перемещения* отдельных точек и узлов системы.

1.1.2 Связь с другими науками. Строительная механика основывается на законах *математики* и *физики*. Она широко использует методы *теоретической механики*, изучающей равновесие и движение абсолютно твердых тел, но в отличие от последней учитывает их деформирование.

Строительная механика как инженерная наука применяет гипотезы и допущения относительно свойств конструкционных материалов, введенные в *сопротивлении материалов*. В своих теоретических исследованиях она использует результаты, получен-

ные более строгими и точными методами *теории упругости и пластичности*.

В настоящее время для расчета широкого класса конструкций на базе теоретических методов строительной механики разработаны универсальные программно-вычислительные комплексы. С появлением более совершенной вычислительной техники совершенствуются и указанные комплексы с использованием достижений *вычислительной математики, численных методов решения задач, информатики*. Упрощается ввод исходных данных, более наглядным становится вывод результатов расчета, используются более точные расчетные схемы, позволяющие учесть большее количество факторов и лучше отражающие работу конструкций.

Строительная механика использует *результаты испытаний* сооружений, а также *данные продолжительных наблюдений* за ними в процессе эксплуатации. Это дает возможность проверить точность и достоверность выводов, полученных теоретическими методами, а также уточнить сами методы.

Строительная механика создает необходимую подготовку для изучения *курсов строительных конструкций* (железобетонных, металлических, деревянных, пластмассовых, композитных и др.), *мостов и дорог*. Она изучает методы определения внутренних усилий и перемещений. Следующий же этап расчета сооружений – подбор и конструирование самих элементов – обычно излагается в специальных курсах конструкций.

В отдельных случаях строительная механика дает возможность инженеру-строителю теоретически обосновывать и разрабатывать *технологии возведения зданий и инженерных сооружений*. Эта наука позволяет понимать работу сооружения под нагрузкой, вовремя устранять неточности его возведения, которые при эксплуатации могут пагубно отражаться на работе системы.

1.1.3 Задачи расчета сооружений. Основной *целью расчета* любого сооружения является обеспечение его надежности и долговечности при экономически обоснованном расходе материалов.

Надежность строительных конструкций, зданий и сооружений в целом определяется их способностью сохранять заданные эксплуатационные качества в течение расчетного срока службы и невозможностью реализации в них предельных состояний.

Предельное (предаварийное) *состояние* – состояние здания или сооружения, его отдельных элементов, при котором их дальнейшая эксплуатация недопустима или восстановление их работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно вследствие появления чрезмерных прогибов, трещин, локального или общего разрушения и других признаков ресурсного отказа.

Долговечность зданий и сооружений – предельный срок службы зданий и сооружений, в течение которого они сохраняют требуемые эксплуатационные качества.

Надежность и долговечность будут обеспечены, если сооружение будет достаточно прочным, жестким и устойчивым. *Расчет на прочность* предполагает определение внутренних усилий и напряжений в элементах конструкции и выяснение ее несущей способности. Цель *расчета на жесткость* – не допустить больших перемещений (прогибов, горизонтальных отклонений и т. п.), обеспечив тем самым требуемые эксплуатационные показатели объекта. При *расчете на устойчивость* устанавливается величина нагрузки, при которой может быть соблюдена первоначальная устойчивая форма равновесия. Кроме этого, изучаются колебания конструкций, чтобы предупредить возникновение резонанса, приводящего часто к их разрушению.

Каждая задача расчета сооружения включает в себя три этапа: постановку, решение и анализ результатов.

При *постановке (формулировке) задачи*:

- устанавливаются характер, место приложения, направление и величина внешней нагрузки либо воздействия (см. подразд. 1.3);
- формируется расчетная схема сооружения, учитывающая конфигурацию и способы опирания системы, распределение геометрических и физических параметров по ее элементам (см. подразд. 1.4);
- выбирается физическая модель материала, т. е. соотношение между напряжениями и деформациями, определяющее особенности поведения материала конструкции при деформировании (см. подразд. 1.6).

Для *решения задач* расчета сооружений разработаны аналитические и численные методы, ориентированные в настоящее время на применение компьютера. Графические методы, предложенные на начальном этапе развития строительной механики, сейчас практически не используются. В результате решения задачи получают аналитические выражения и числовые значения внутренних усилий, перемещений, напряжений, деформаций в элементах рассматриваемой конструкции.

Далее производится *анализ полученных результатов*, выявляются закономерности изменения расчетных величин при изменении внешних нагрузок и воздействий, геометрических и жесткостных параметров системы, делается вывод о надежности и экономичности сооружения. Для проверки точности и достоверности полученных теоретических результатов производится их

качественное и количественное сравнение с данными расчета аналогичных конструкций, а также с экспериментальными данными (если они имеются).

Задачи строительной механики могут решаться в *детерминированной* или в *вероятностной (статистической) постановке*. В первой из них все исходные параметры задачи считаются вполне определенными, во второй – имеющими разбросы, относящиеся к геометрическим и физическим характеристикам конструкции или к внешним воздействиям.

При постановках задач расчета сооружений приходится принимать целый ряд идеализаций: при назначении характера и величин нагрузок и воздействий, выборе расчетной схемы и физической модели материала. Каждая из этих идеализаций в определенной мере отличает действительную работу конструкции от результатов расчета, т. е. значения внутренних усилий и перемещений получаются увеличенными либо уменьшенными. Как бы мы ни старались математически точно осуществить решение задачи, ответ всегда будет приближенным.

Один из путей повышения точности и достоверности результатов – *вероятностная постановка* задач расчета сооружений. Внешние воздействия представляются как случайные величины или случайный процесс. Сама же конструкция рассматривается как объект с характеристиками, являющимися случайными величинами или функциями (это возможные начальные искривления элементов, случайные эксцентриситеты, случайные распределения физических параметров и т. п.). На основе полученных сведений о вероятности появления в конструкции тех или иных значений усилий и перемещений решается вопрос о надежности и долговечности сооружения.

1.1.4 Понятие о задачах оптимизации. Для обеспечения необходимой надежности основные элементы конструкции должны иметь достаточно большие размеры сечений. Экономика же требует, чтобы расход материалов был возможно меньшим. Ясно, что одновременно удовлетворить в известном смысле противоречивые требования надежности и экономичности очень непросто.

Один из подходов к проектированию сооружений рекомендует составление нескольких вариантов проекта, решение для каждого из них задачи расчета сооружения при вполне определенных исходных данных и последующее сравнение по различным показателям.

Другой подход предполагает решение *задач оптимизации*. При постановке задачи оптимизации конструкция не рассматривается как полностью заданный объект. Напротив, некоторые па-

раметры, определяющие общую конфигурацию системы, распределение в ней материала и т. д., считаются неизвестными. Далее, при решении задачи, составляется так называемая функция цели, зависящая от упомянутых неопределенных параметров. В отношении этой величины необходимо добиться того, чтобы она была минимальна (стоимость, вес) либо максимальна (несущая способность и т. п.). При расчете используются методы математического программирования. В результате определяются оптимальные значения параметров конструкции, обеспечивающие экстремум или близость к нему целевой функции.

Рассмотрим, какими величинами можно варьировать при постановках задач оптимизации. Наиболее актуальны задачи оптимизации физических параметров (проектные задачи): при заданных нагрузках и форме конструкции требуется установить такое распределение, например, жесткостей элементов, которое отвечает критерию оптимальности сооружения. Может оптимизироваться также форма конструкции при заданных нагрузках и жесткостях элементов.

Следует обратить внимание на существенную разницу между задачами оптимизации в строительной механике и задачами оптимального проектирования. При решении задач оптимизации получаем усилия, перемещения и деформации, а также законы распределения нагрузки или физических параметров элементов сооружения, отвечающих критериям оптимальности. *Оптимальное проектирование* – это второй этап расчета, на котором на основании полученных усилий согласно принятым нормам подбираются сечения элементов.

Было бы ошибочно утверждать, что один тип задач может заменить другой. На практике встречается много случаев, когда требуется решать лишь задачи анализа, например, если необходимо рассчитывать на прочность, жесткость и устойчивость уже существующие или запроектированные конструкции. В то же время, когда создаются новые, много раз повторяющиеся системы (в типовом проектировании) или сложные уникальные сооружения, для которых очень важны такие факторы, как масса, стоимость и т. п., необходимо решать задачи оптимизации.

1.2 Обзор развития строительной механики

1.2.1 Развитие общей механики.

История оставила нам много сложных и совершенных в конструктивном отношении памятников архитектуры (индийские пагоды, египетские пирамиды, храмы, крепости, обелиски и т. п.). Мы не располагаем данными, что

для возведения этих сооружений применялись методы расчета. Предполагается, что все зависело от особого таланта зодчих, которые интуитивно чувствовали работу сооружений и умели находить нужные размеры элементов зданий. Большое значение имело накопление опыта строительства, подчас тяжелой ценой обрушения неудачно выполненных сооружений.

Опыт древних строителей в значительной степени был утрачен в средние века – период общего упадка культуры. Вновь интерес к строительному искусству, как и вообще ко всем наукам, возник в эпоху Возрождения. В этот период появились крупные мастера в области архитектуры и строительного искусства, возникла отдельная отрасль знаний – механика, наука о прочности. Гораздо позднее из этой науки выделился ряд самостоятельных дисциплин, таких, как сопротивление материалов, строительная механика, теория упругости и др.

Первые работы по механике принадлежат великому художнику, мыслителю и инженеру *Леонардо да Винчи* (1452–1519), однако они не были опубликованы и остались для его современников неизвестными. Начало развития механики обычно связывают с именем знаменитого математика, физика и астронома *Г. Галилея* (1564–1642), который первым сделал попытку найти аналитическую зависимость между прочностью элементов сооружения и их геометрическими параметрами. Галилей сделал важные выводы, не утратившие своего значения и в настоящее время, хотя он считал твердые тела неупругими и не знал физического закона, связывающего перемещения и силы. Позднее этот закон в простейшей форме был установлен *Р. Гуком* (1635–1703) и сформулирован так: каково растяжение – такова сила.

Дальнейшее развитие науки о прочности сооружений связано с деятельностью выдающихся ученых своего времени: *И. Ньютона* (1642–1747), *Э. Мариотта* (1620–1684), *Я. Бернулли* (1654–1705), *Л. Эйлера* (1707–1783), *Ш. О. Кулона* (1736–1806), *Ж. Л. Лагранжа* (1736–1813). Наш великий соотечественник *М. В. Ломоносов* (1711–1765) фактически подошел к открытию всеобщего закона сохранения материи, а тем самым и закона сохранения энергии, имеющего исключительно большое значение для механики. Знаменитый русский механик *И. П. Кулибин* (1733–1818), используя законы общей механики, разработал проект деревянного арочного моста пролетом 300 м. Для определения очертания оси он использовал веревочный многоугольник; с помощью модели он определил распор арки. Эта работа положила начало экспериментальному методу в мостостроении.

1.2.2 Развитие строительной механики как науки. Строительная механика выделилась из общей механики в середине XIX века, когда началось бурное развитие крупного промышленного строительства. Главными объектами изучения строительной механики были стержневые конструкции, в частности, фермы. Для статически определимых ферм были предложены остроумные способы расчета.

Постепенно научные методы расчета на прочность стали все более и более удовлетворять требованиям практики и в большой степени потеснили интуицию при проектировании. Большой удельный вес среди них занимали графические способы, многие из которых сохранили свое значение и в настоящее время. В этой области следует отметить работы *К. Кульмана* (1821–1881), *Л. Кремоны* (1830–1903).

Развитие аналитических и численных методов, особенно в связи с появлением машинной техники расчетов, привело к вытеснению графических методов из курса строительной механики. При этом главные трудности заключались в решении систем совместных уравнений. Усилия исследователей были направлены на создание приближенных методов расчета, а также на разработку специальных способов решения уравнений.

К концу XIX века в основном были разработаны методы расчета стержневых конструкций. Одновременно с расчетом статически определимых конструкций развивались методы расчета статически неопределимых систем.

Еще в 1857 г. *Б. П. Клапейроном* (1799–1864) было предложено уравнение трех моментов для расчета неразрезных балок. В 1864 г. *Дж. К. Максвеллом* (1831–1879) и в 1874 г. *О. Мором* (1835–1918) была найдена формула для определения перемещений в упругих системах по заданным внутренним силам, которая давала возможность удобного расчета сложных статически неопределимых конструкций. Впоследствии выделились три основных метода определения усилий в статически неопределимых системах: метод сил, метод перемещений и смешанный метод.

Первые большие достижения отечественной строительной механики связаны с деятельностью русских инженеров-мостовиков, строителей первой железной дороги Петербург–Москва.

Большое значение для строительной механики имели работы *Н. Ф. Ястржембского* (1810–1874), основоположника русской теории сопротивления материалов. Ястржембский издал учебники «Курс практической механики», «Краткий обзор постепенного развития механики в древние и новые времена», «Начальные основы общей и прикладной механики», подобных которым в Рос-

сии не было, спроектировал несколько мостов в Витебске и Могилеве. Ястржембский доказал, что при строительстве висячих мостов, возведение которых в России только начиналось, надо применять не сталь, которая в определенных условиях становится хрупкой, а железо.

Важно выделить работы следующих русских ученых: профессора *Д. И. Журавского* (1821–1891), автора первой теории расчета раскосных ферм; профессора *Ф. С. Ясинского* (1856–1899), предложившего первые решения по различным задачам устойчивости стержней и по теории пространственных ферм; почетного члена Академии наук СССР *В. Г. Шухова* (1853–1939), автора ряда новых плоских и пространственных ферм (сетчатые перекрытия, башни в виде сетчатого однополостного гиперboloида), и *Н. А. Беллелюбского* (1845–1922), автора первого полного курса строительной механики.

Большую роль в популяризации новых методов строительной механики сыграли работы *В. Л. Кирпичева* (1845–1916), в которых наиболее полно изложены графическая статика и анализ основных положений теории статически неопределимых систем.

Значительное развитие теории расчета ферм было достигнуто благодаря работам *Л. Д. Проскурякова* (1858–1926) и *В. Г. Шухова*. Замечательный конструктор и изобретатель, Шухов предложил ряд оригинальных проектов металлических конструкций. Известна его сетчатая ферма со схемой в виде двух дисков, связанных тремя стержнями. Замечательны также гиперболические башни Шухова (маяк высотой 80 м, мачта радиостанции высотой 160 м, многочисленные водонапорные башни), использующие простое свойство совмещения на поверхности однополостного гиперboloида прямолинейных элементов.

Большой интерес представляли работы профессора *С. И. Белзецкого* по расчету арок и труб: «Теория рациональных форм цилиндрических сводов» (1902), «Рациональные формы сплошных упругих арок в железнодорожных мостах и трубах» (1905) и «Типы каменных труб под насыпями» (1912). Ценный вклад в развитие строительной механики корабля сделан профессором *И. Г. Бубновым* (1872–1919), которому принадлежит оригинальное исследование устойчивости равнопролетного стержня на упругих опорах (1912), а также академиком *А. Н. Динником* (1876–1950), который занимался вопросами устойчивости стержней переменного сечения и получил многочисленные решения по устойчивости арок. Следует выделить труды академика *А. Н. Крылова* (1863–1945) по строительной механике корабля,

теории продольного изгиба, теории вынужденных колебаний и расчету балки на упругом основании.

Академик *Б. Г. Галеркин* (1871–1945) дал ряд решений по плитам, собранных в его капитальном труде «Упругие тонкие плиты», разработал общие методы решения задач устойчивости и теории упругости. Член-корреспондент АН СССР, профессор *И. М. Рабинович* (1886–1977) создал теорию вантовых многоопоясных систем и сделал много ценных обобщений и исследований по статике и динамике сооружений, опубликованных в его капитальном труде «Строительная механика стержневых систем» и в других работах. Профессор *В. З. Власов* (1906–1958) предложил новую стройную математическую теорию оболочек и тонкостенных стержней; профессор *Н. В. Корнухов* разработал теорию устойчивости каркасных рам (в особенности метод перемещений); профессор *А. А. Гвоздев* (1897–1986) разработал смешанный метод расчета рам и развил теорию расчета сооружений по предельному состоянию; профессор *К. С. Завриев* впервые предложил метод расчета сжато-изогнутых стержней по предельным состояниям, профессор *А. Ф. Смирнов* (1909–1986) разработал матричную форму решения различных задач статике, устойчивости и динамики сооружений; *А. Р. Ржаницын* (1911–1987) распространил задачи устойчивости на системы, обладающие свойствами ползучести, разработал методы вероятностного расчета конструкций, составивших впоследствии основы теории надежности строительных конструкций.

Значительный вклад в разработку методов расчета сооружений внесли *Н. И. Безухов*, *В. В. Болотин*, *Д. В. Вайнберг*, *П. М. Варвак*, *А. В. Дарков*, *Г. К. Клейн*, *В. А. Киселев*, *И. П. Прокофьев*, *А. П. Сеницын*, *Н. К. Снитко* и многие другие. В данном обзоре невозможно назвать имена всех выдающихся ученых, обогативших эту науку своими достижениями. Обзор развития строительной механики можно найти в [1–10, 13, 14, 17–19].

1.2.3 Направления развития строительной механики. Хотя строительная механика является достаточно разработанной наукой, она постоянно развивается. В настоящее время ее развитие идет, с одной стороны, по пути *уточнения расчетных схем и исходных гипотез*, положенных в основу расчета, с другой – по пути *разработки все более совершенных методов расчета*, ориентированных на применение компьютера.

Современные компьютеры способны не только решать системы уравнений с сотнями и тысячами неизвестных, но и формировать эти уравнения, принимая на себя большую часть процесса расчета и проектирования сооружений. Это дает возможность рассчи-

тывать сложные пространственные конструкции, состоящие из стержней, пластин, оболочек, тросов и т. п., переходя от их поэлементного рассмотрения к расчету систем как единого целого.

Из курса строительной механики практически исчезли графические методы, и существенно сократилось описание классических приемов решения многих задач. Больше внимание теперь уделяется аналитическим и численным методам, обладающим достаточной общностью, т. е. применимым для решения широко класса задач, а также удобным для программирования.

Однако классические методы расчета не утратили своего значения, так как именно они лежат в основе современных численных методов, таких, например, как метод конечных элементов. Кроме этого, они дают наглядное представление о физическом содержании рассматриваемой задачи, формируя у студента четкое инженерное мышление.

Уточняются условия нагружения и величины внешних нагрузок и воздействий, физические модели поведения материалов. Развивается теория надежности строительных конструкций, разрабатываются методы оптимизации. Все теснее становится связь строительной механики с проектированием конструкций, с технологией их изготовления, с вычислительной математикой, физикой, экономикой. Все это позволяет инженерам обеспечить создание более прочных, надежных, долговечных и экономичных конструкций.

1.3 Нагрузки и воздействия на сооружения

1.3.1 Нагрузки. Первый этап расчета сооружений состоит в выявлении величины, направления и расположения действующих на них активных внешних сил, называемых *нагрузками*.

Внешние нагрузки можно классифицировать по способу приложения, сроку, способу и характеру действия (рисунок 1.2).

По способу приложения можно выделить нагрузки *сосредоточенные* и *распределенные* (по длине или по площади). Они приложены к поверхности сооружения и поэтому называются *поверхностными*. Кроме этого, существуют и так называемые *объемные силы*, действующие на каждую единицу объема. К ним относятся гравитационные силы, силы инерции, магнитного притяжения и др. Объемные силы можно заменить сосредоточенными, приложенными в отдельных частях объема тела.

Следует отметить, что в реальности нагрузка не может быть передана через точку, она обычно действует на определенной площадке. Однако, если размеры площадки малы по сравнению с

размерами элемента конструкции, тогда можно считать, что нагрузка передается через центр тяжести этой площадки. Часто распределенные по длине или по поверхности нагрузки заменяются равнодействующими, приложенными в центрах тяжести соответствующих участков.

По сроку действия различают постоянные и временные нагрузки. Временные нагрузки, в свою очередь, разделяют на длительные, кратковременные и особые.

Постоянная нагрузка действует непрерывно в течение всего срока службы сооружения, не меняя ни величины, ни направления (например, собственный вес сооружения, давление грунта, предварительное напряжение). *Временная длительная нагрузка* – это вес тех частей сооружения, которые во времени могут менять свое положение (временные перегородки, стационарное оборудование для книгохранилищ и т. п.). К категории *кратковременной нагрузки* относятся действие ветра, температурные климатические воздействия, а также вес снега, людей, мебели, если он превышает определенную норму. *Временные особые нагрузки* – это сейсмические и возможные взрывные действия, неравномерные осадки грунта.

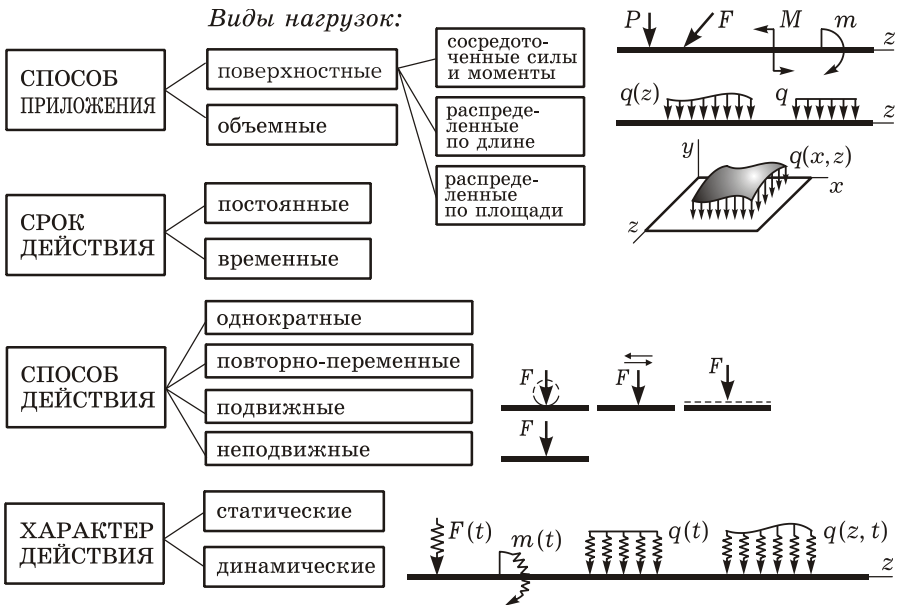


Рисунок 1.2

В зависимости от способа действия различают нагрузки однократные, повторно-переменные, а также подвижные и неподвижные.

Однократное нагружение представляет система сил, когда все ее составляющие одновременно увеличиваются от нуля до определенного значения.

Повторно-переменное нагружение вызывает система сил, когда каждая составляющая может изменяться по своей величине в определенных пределах независимо от других сил. Например, ветер может действовать на сооружение с одной или с другой стороны независимо от действия других нагрузок.

Подвижная нагрузка может передвигаться и занимать различные положения на определенной части конструкции (состав поезда, колонна автомобилей, краны, автокары и т. п.).

Неподвижная нагрузка сохраняет неизменное положение длительное время (оборудование, стационарные установки).

В зависимости от характера изменения во времени различают статические и динамические нагрузки. *Статические нагрузки* изменяются во времени настолько медленно, что ускорениями сооружения и его элементов можно пренебречь. Иными словами, при действии статической нагрузки колебания сооружения либо совсем не появляются, либо они незначительны. Это основная особенность статической нагрузки. Например, нагрузка, меняющая свою величину и место положения, но не вызывающая значительных колебаний сооружения, также относится к категории статических. В данном случае она называется *квазистатической нагрузкой*. При статическом нагружении упругой системы в любой момент времени всегда имеет место *равновесие* между внешними и внутренними силами.

Под *динамической* понимают нагрузку, при которой сооружение и его элементы получают ускорения. При действии динамических нагрузок необходимо учитывать силы инерции как самой системы, так и расположенного на ней оборудования. Динамическое нагружение более опасно, чем статическое, и учет его характера действия может привести к катастрофическим последствиям.

Особенности схематического изображения различных видов нагрузок отражены на рисунке 1.2.

1.3.2 Воздействия. Существенное влияние на сооружение оказывают различные *воздействия*, такие как изменение температуры, осадка фундамента (кинематическое воздействие), землетрясение, действие огня, химическая агрессия, коррозия и т. п.

Например, при кинематическом и тепловом воздействиях элементы многих конструкций деформируются (рисунок 1.3), следовательно, в них возникают внутренние усилия. Их значения определяются соответствующим расчетом.

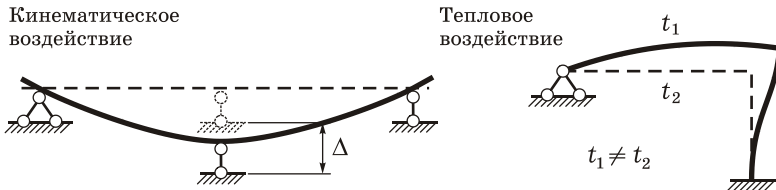


Рисунок 1.3

Весьма сложно ведет себя сооружение во время землетрясения. При перемещениях основания сооружение испытывает вынужденные колебания, вследствие чего возникают динамические напряжения. При этом конструкция получает большие ускорения, возникают значительные силы инерции и большие деформации, часто приводящие к разрушению системы.

Для ряда сооружений проводятся расчеты на действие огня. При горении здания от действия высокой температуры резко изменяются механические характеристики материала, из которого изготовлены его элементы. Вместе с этим меняется и сопротивляемость конструкции действующей нагрузке, что часто приводит к обрушению конструкции. Расчет конструкций на действие огня изучается в специальных курсах строительной механики.

1.3.3 Определение величин нагрузок и воздействий. Нагрузки, действующие на сооружения, обладают определенной изменчивостью. Установленные нормами наибольшие величины внешних нагрузок и воздействий называют *нормативными нагрузками и воздействиями*. Отклонения нагрузок от нормативных значений учитываются введением коэффициентов надежности по нагрузке. Умножая нормативные нагрузки на указанные коэффициенты, получают *расчетные нагрузки*, на которые и выполняют расчет сооружений.

На реальное сооружение воздействует одновременно несколько типов нагрузок (например, снег, ветер, вес транспорта и т. д.), поэтому исследуют возможное их *сочетание*.

В данном учебном пособии рассматриваются задачи, в которых величины внешних нагрузок и воздействий определены в исходных данных.

1.4 Сооружение и его расчетная схема

1.4.1 Элементы сооружений. Всякая конструкция представляет собой совокупность отдельных элементов, работающих под нагрузкой как единое целое. Все конструктивные элементы можно свести к четырем основным типам – стержни, пластины, оболочки, массивные тела (рисунок 1.4).

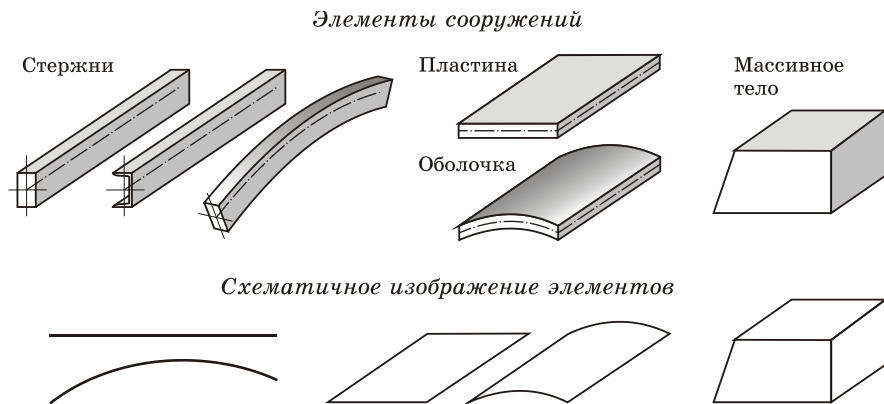


Рисунок 1.4

Стержень – элемент системы, у которого размеры поперечного сечения много меньше длины. Схематично стержень изображают в виде линии, соединяющей центры тяжести поперечных сечений (оси). Сечение при этом определяют геометрическими и жесткостными характеристиками (площадью A , моментами инерции J , жесткостями на растяжение-сжатие EA , на изгиб EJ и т. д.), абстрагируясь от описания его формы и размеров.

Различают стержни с прямолинейной и криволинейной осью, с постоянным и переменным по длине сечением. Стержни, у которых поперечное сечение представляет собой профиль, толщина стенки которого значительно меньше габаритных размеров, считаются *тонкостенными*.

В зависимости от расположения в конструкции и особенностей работы под нагрузкой стержень может называться балкой, бруском, стойкой, колонной, ригелем, полуаркой, раскосом, подкосом, затяжкой и т. п. Системы, состоящие из стержней, являются *стержневыми*.

Узлами в стержневых системах считают точки соединения отдельных стержней. Узлы могут быть шарнирными, жесткими и упруго-податливыми.

Пластина (плита) и оболочка – элементы, толщина которых мала по сравнению с двумя другими размерами. Схематично пластину изображают в виде срединной плоскости, оболочку – в виде срединной поверхности.

Массивные тела – элементы сооружений и окружающей среды, все размеры которых (длина, ширина, толщина) имеют один и тот же порядок, а иногда и неограниченные. Примеры массивных тел: подпорные стенки, плотины, фундаменты отдельно стоящих колонн, грунтовые и скальные массивы.

В зависимости от вида элементов сооружений применяют различные методы их расчета. Стержни сплошного сечения и стержневые системы рассчитывают по законам сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем. Расчет пластин, оболочек и тонкостенных стержней ведут по правилам соответствующих разделов строительной механики и прикладной теории упругости. Исследование напряженно-деформированного состояния массивных тел осуществляют методами математической теории упругости и пластичности.

1.4.2 Расчетная схема сооружения. Расчет реальной системы с точным учетом всех особенностей ее конструкции является практически неразрешимой задачей. И дело здесь не только в том, что излишняя детализация этого расчета загрождает исследование и приводит к возрастанию трудоемкости вычислений. Почти всегда можно выделить ряд второстепенных факторов, учет которых нецелесообразен или невозможен: они не оказывают заметного влияния на результаты расчетов, либо их воздействие на конструкцию пока недостаточно изучено.

Как известно, во многих научных дисциплинах исследование реального объекта или явления заменяют исследованием его модели. В строительной механике моделью сооружения является его *расчетная схема* – упрощенная идеализированная схема, учитывающая только основные данные о поведении сооружения при тех или иных нагрузках и воздействиях.

При составлении расчетной схемы:

- стержни заменяются осевыми линиями, пластины – срединными плоскостями, оболочки – срединными поверхностями;
- реальные опорные устройства и связи между элементами заменяются идеальными связями (см. подразд. 1.5);
- поперечные сечения стержней независимо от их формы и размеров определяются своими геометрическими характеристиками;
- нагрузки с поверхностей элементов переносятся на оси, срединные плоскости или поверхности.

Составление расчетной схемы является одной из самых ответственных частей расчета сооружения. С одной стороны, необходимо обеспечить простоту расчета, с другой – точность и достоверность результатов. Для одной и той же конструкции могут быть приняты различные расчетные схемы. Это зависит от требуемой точности расчета, имеющегося времени, наличия тех или иных вычислительных средств.

Пример 1.1 Рассмотрим конструкцию, состоящую из элементов различных типов (рисунок 1.5, а).

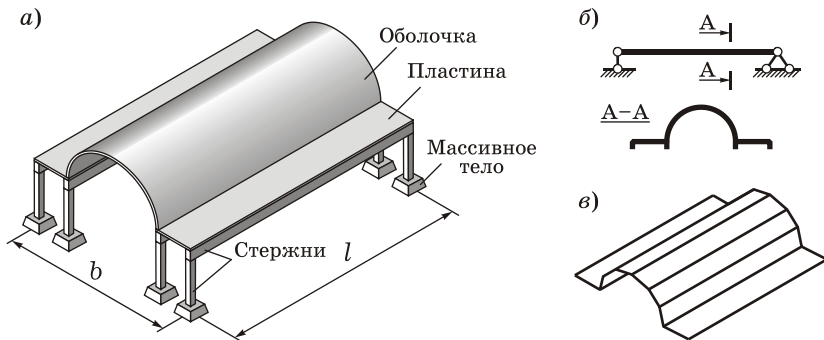


Рисунок 1.5

Если размер l вдоль конструкции заведомо больше ее ширины b , в первом приближении можно рассматривать перекрытие как стержень, свободно опертый по концам, с поперечным сечением сложной формы (рисунок 1.5, б). Расчет такого стержня на изгиб при действии основной вертикальной нагрузки (собственного веса, снеговой нагрузки) позволит оценить величины напряжений в поперечном сечении и назначить достаточно рациональные основные размеры системы. Величины напряжений от возможного кручения такого стержня можно оценить, применяя теорию расчета тонкостенных стержней в предположении недеформируемости контура поперечного сечения.

Далее необходимо провести более точный расчет, учитывающий деформацию контура и изгиб элементов системы в поперечном направлении, заменив оболочку системой нескольких прямоугольных пластин (рисунок 1.5, в). Выполнение расчетов по этой схеме потребует привлечения современной вычислительной техники и комплексов программ.

Если использовать расчетную схему с цилиндрической оболочкой, получатся более точные значения напряжений и деформаций системы. Однако для этого потребуется большее количество времени и применение более сложных методик и программ расчета.

С развитием компьютерной техники появляется возможность использовать более сложные и точные расчетные схемы, лучше

отражающие истинную работу сооружения. Это позволяет выявлять скрытые резервы прочности сооружений и проектировать их более легкими и экономичными.

1.4.3 Классификация стержневых систем. Объектами изучения в данном учебном пособии являются стержневые системы. Поэтому здесь рассмотрим классификацию расчетных схем именно этих конструкций.

По конструктивным решениям различают *плоские* (балки, фермы, арки, рамы) и *пространственные* (каркасы многоэтажных промышленных зданий) стержневые системы. Иногда выделяют *плоско-пространственные* конструкции, представляющие собой совокупность стержней, лежащих в одной плоскости, а внешняя нагрузка имеет составляющие в перпендикулярном к этой плоскости направлении (рисунок 1.6). Как самостоятельные сооружения плоские системы практически не встречаются, они являются частью пространственных сооружений, из которых выделяются для упрощения расчета.

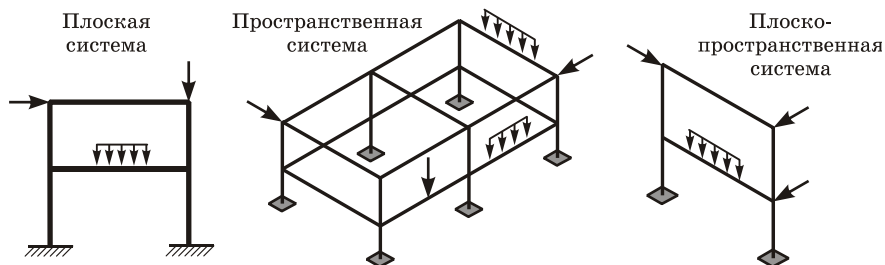


Рисунок 1.6

Далее рассмотрим основные типы стержневых систем, различающиеся по особенностям работы.

Балочные конструкции воспринимают поперечные нагрузки и работают на изгиб (рисунок 1.7). В горизонтальных балках при действии вертикальной нагрузки в опорах не возникает горизонтальных составляющих опорных реакций (*распора*), поэтому балочные системы называют *безраспорными*.

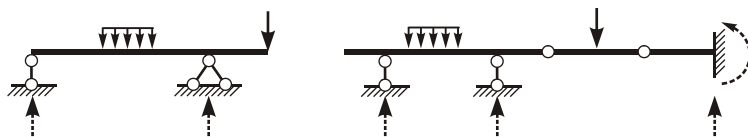


Рисунок 1.7

Арочные конструкции состоят из криволинейных стержней, выпуклость которых направлена в сторону, противоположную действию нагрузки (рисунок 1.8). Вертикальная нагрузка вызывает в опорах арки кроме вертикальных реакций еще и горизонтальные – *распор*, поэтому арочные конструкции считаются *распорными*. Работают арки в основном на внецентренное сжатие.

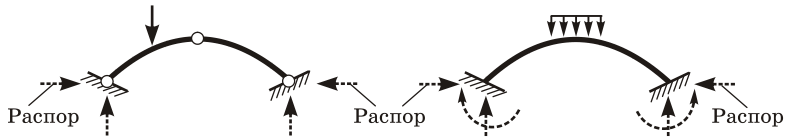


Рисунок 1.8

Ра́мы – стержневые системы с жестким соединением прямолинейных элементов во всех или некоторых узлах, нагруженные поперечными или изловыми нагрузками (рисунок 1.9). Элементы рам работают на изгиб с растяжением или сжатием.

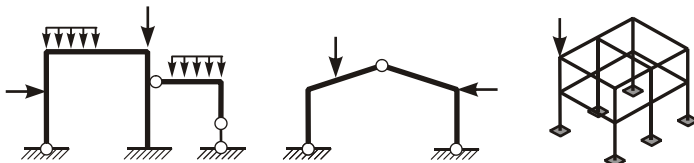


Рисунок 1.9

Фермы – системы прямолинейных стержней, которые нагружены узловыми нагрузками и испытывают преимущественно деформации растяжения или сжатия. При расчетах узлы ферм часто считают шарнирными (рисунок 1.10).

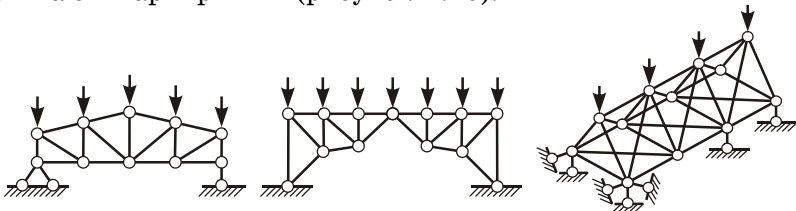


Рисунок 1.10

Комбинированные системы представляют собой совокупности некоторых рассмотренных выше систем, объединенных для совместной работы. Часть стержней работает на изгиб, другая часть – на растяжение-сжатие. Некоторые примеры комбинированных систем показаны на рисунке 1.11.

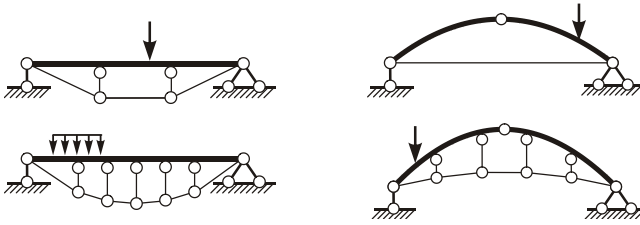


Рисунок 1.11

Разновидностью комбинированных являются *висячие системы* (рисунок 1.12). В них основными являются гибкие элементы (ванты, кабели, тросы), работающие на растяжение. Ванты поддерживают жесткие элементы (балки, фермы), воспринимающие поперечную нагрузку.

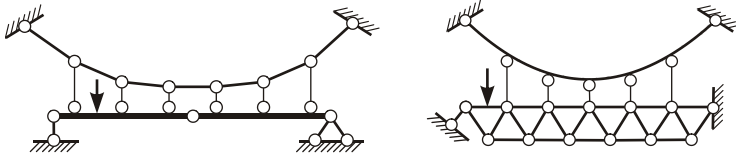


Рисунок 1.12

По статическому признаку сооружения можно разделить на *статически определимые* (все опорные реакции, внутренние силы и моменты можно определить из уравнений статического равновесия) и *статически неопределимые* (для вычисления всех опорных реакций и внутренних усилий уравнений статики недостаточно, дополнительно необходимо использовать уравнения совместности деформаций).

По кинематическому признаку стержневые системы разделяют на *геометрически неизменяемые*, *геометрически изменяемые* и *мгновенно изменяемые системы* (см. подразд. 1.8).

Подробно указанные типы стержневых систем будут рассмотрены далее.

1.5 Связи и их характеристики

1.5.1 Реальные и идеальные связи. Реакции связей. Всякое устройство, препятствующее изменению взаимного положения элементов системы (налагающее ограничения на перемещения), называется *связью*. Связь, соединяющая сооружение с основанием, называется *опорой* (*опорной связью*).

В реальных конструкциях связи осуществляются в виде болтов, заклепок, сварных соединений, замоноличенных стыков и т. п. В задачах строительной механики исследуются расчетные схемы. В них для скрепления элементов между собой и с основанием используются идеальные связи – *стержни, шарниры, жесткие и упругоподатливые соединения.*

Стержни считаются невесомыми и абсолютно жесткими, в шарнирах не возникает сил трения, а усилия на элементы системы передаются строго через центр шарнира.

Напомним, что *реакцией связи* называется сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям. Направлена реакция в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Величина реакции связи всегда зависит от активных внешних сил, действующих на систему, и заранее неизвестна. Для ее определения надо решить соответствующую задачу статики. И активные, и реактивные силы для конструкции являются внешними.

Аксиома связей: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями.

Каждая связь имеет две характеристики. *Кинематическая характеристика* определяет, каким перемещениям одного элемента относительно другого препятствует связь, а *статическая характеристика* – какие реакции могут в ней возникать. Далее рассмотрим основные способы идеализации связей между элементами плоских расчетных схем.

1.5.2 Стержень и шарнирно подвижная опора. Пусть два элемента связаны невесомым стерженьком, закрепленным на концах шарнирами (рисунок 1.13, *а*). Кинематическая характеристика такой связи состоит в том, что она препятствует перемещению одного элемента относительно другого вдоль оси стержня. Допускается взаимный поворот элементов и их смещение в направлении, перпендикулярном оси стержня. В статическом отношении стержень характеризуется наличием реактивных сил (сил взаимодействия) R , направленных вдоль его оси.

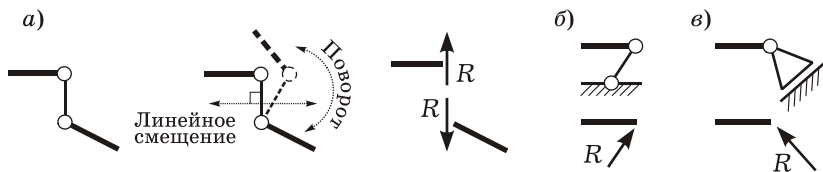


Рисунок 1.13

Если одним из соединяемых элементов является основание, то рассматриваемая связь называется *шарнирно подвижной опорой* (рисунок 1.13, б). Реакция направлена вдоль оси стержня. Еще одно изображение подобной опоры показано на рисунке 1.13, в. Реакция считается перпендикулярной опорной плоскости.

Введение стержня устраняет взаимные перемещения в одном направлении, поэтому подобную связь называют *одиночной* или *элементарной связью*.

1.5.3 Шарнир и шарнирно неподвижная опора. Шарниром называется такое подвижное соединение элементов, которое дает им возможность свободно поворачиваться друг относительно друга.

Шарнир может быть простым и кратным. *Простой шарнир* соединяет два элемента, *сложный (кратный)* – более двух.

С точки зрения кинематики введение простого шарнира устраняет взаимные линейные смещения в двух направлениях, допуская лишь поворот (рисунок 1.14, а). Поэтому шарнир эквивалентен двум одиночным связям. В статическом отношении простой шарнир характеризуется силой взаимодействия R , проходящей через его центр. Эту силу удобно представлять в виде двух составляющих, чаще всего горизонтальной H и вертикальной V .

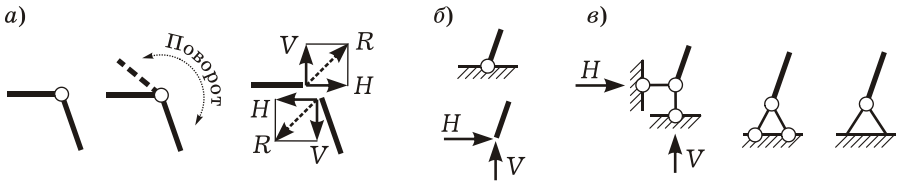


Рисунок 1.14

В случае, когда в качестве одного из соединяемых элементов выступает основание, рассматриваемая связь называется *шарнирно неподвижной опорой* (рисунок 1.14, б). Шарнирное соединение эквивалентно двум одиночным связям и схематично может быть представлено двумя стерженьками, поставленными по фиксированным направлениям (рисунок 1.14, в).

Сложный (кратный) шарнир, соединяющий в одном узле более двух элементов, можно представить в виде совокупности некоторого числа простых шарниров (рисунок 1.15, а). Следовательно, каждый сложный шарнир эквивалентен определенному числу простых шарниров; это число определяет *кратность III сложного шарнира*:

$$III = n - 1, \quad (1.1)$$

где n – число элементов, соединяемых шарниром.

Для простых шарниров (рисунок 1.15, б) кратность $III = 1$.



Рисунок 1.15

1.5.4 Жесткий узел и жесткая заделка. Жесткое соединение элементов характеризуется полным отсутствием взаимных перемещений элементов. Специальных обозначений для жесткого узла обычно не вводят (рисунок 1.16, а). Здесь может возникать реактивная сила любого направления, проходящая через любую точку. Эту силу можно представить в виде трех составляющих: двух сил по заданным направлениям и момента.

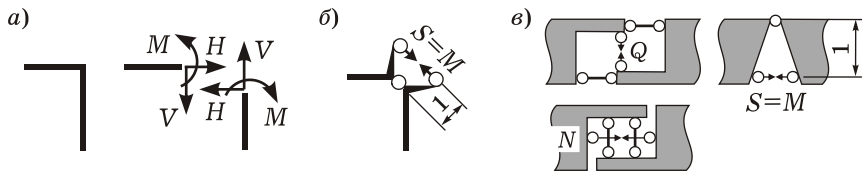


Рисунок 1.16

Жесткое соединение элементов эквивалентно трем одиночным связям либо шарниру и стержню. Оно может быть представлено так, как показано на рисунке 1.16, б. Момент M равен усилию S в стерженьке, поставленном с помощью абсолютно жестких консолей на единичном расстоянии от шарнира.

При определении компонент внутренних сил в сечениях конструкции их также можно представить как усилия в некоторых стерженьках, связывающих две части системы. При вычислении поперечной Q , продольной N сил и изгибающего момента M связи можно схематизировать так, как показано на рисунке 1.16, в.

То есть, все внутренние связи в сечении приводятся к трем одиночным связям, как все внутренние силы в плоской системе были приведены к трем сосредоточенным составляющим N , Q , M . Теперь можно не делать принципиального различия между вычислением реакций и внутренних сил, рассматривая и те, и другие как усилия в некоторых связях.

Жесткая заделка (защемляющая неподвижная опора) выполняется путем плотного защемления опорной части конструкции (рисунок 1.17, а). В ней возникает реактивная сила, которую удобно представлять в виде трех составляющих – двух сил (горизонтальной H и вертикальной V) и момента M .

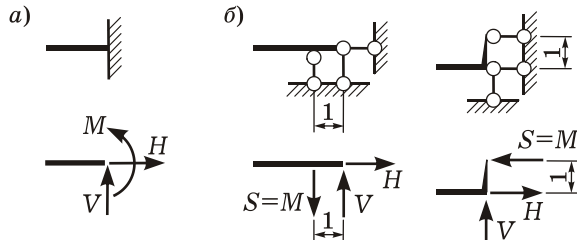


Рисунок 1.17

Жесткая заделка эквивалентна трем одиночным связям и схематично может быть представлена одним из способов, показанных на рисунке 1.17, б). Чтобы заделку можно было считать абсолютно жесткой, элемент на участке единичной длины надо рассматривать как бесконечно жесткий.

1.5.5 Скользящая заделка. Эта опорная связь препятствует повороту и линейным перемещениям, перпендикулярным оси закрепленного элемента, и допускает линейные перемещения вдоль его оси (рисунк 1.18, а). При расчетах вводят две составляющих реакции: силу и момент. Схематично скользящая заделка может быть представлена в виде двух параллельных одиночных связей (рисунк 1.18, б).

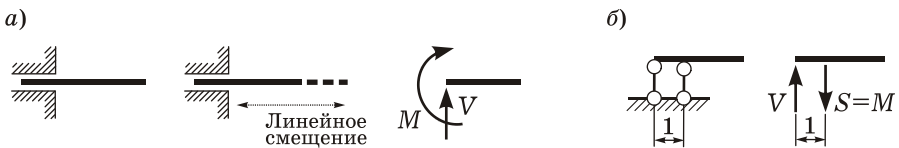


Рисунок 1.18

Отметим, что при представлении любой опоры в виде одиночных связей число этих связей должно равняться числу составляющих полной реакции опоры. В дальнейшем под «реакцией» будем подразумевать одну из этих составляющих.

1.5.6 Упругоподатливые связи. Если реальные связи сооружения допускают пренебрежимо малые перемещения по некоторым направлениям, то в расчетных схемах их заменяют абсолютно жесткими идеальными связями. Если же перемещения малы по сравнению с размерами элементов конструкции, но пренебрегать ими нельзя, то используют особый вид идеальных связей – *упругоподатливые*. Их обычно изображают в виде пружин (рисунк 1.19, а).

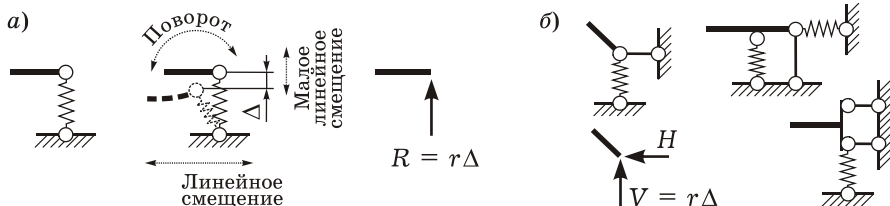


Рисунок 1.19

Кроме тех перемещений, которым они никак не препятствуют, эти связи допускают малые перемещения по своим направлениям. Можно сказать, что упругоподатливая связь – это «недостаточно жесткий» одиночный стержень.

Обычно считают, что реакция R упругоподатливой связи прямо пропорциональна соответствующему перемещению Δ :

$$R = r\Delta; \quad \Delta = kR,$$

где r – коэффициент жесткости (реакция, вызванная единичным перемещением); k – коэффициент податливости (перемещение, вызванное единичной реакцией); причем

$$r = 1/k.$$

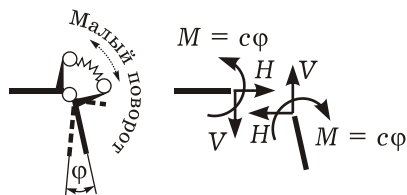


Рисунок 1.20

В схематичном представлении опоры упругоподатливые связи могут быть введены вместо одного или нескольких жестких стержней (рисунок 1.19, б).

Соединение элементов, которое показано на рисунке 1.20, называется *упругим шарниром*.

Оно допускает малые угловые перемещения. Реактивный момент M упругого шарнира

$$M = c\varphi,$$

где c – коэффициент жесткости упругого шарнира; φ – взаимный угол поворота соединяемых элементов.

1.5.7 Плавающая заделка. Эта условная внешняя связь *дополнительно* накладывает на жесткий узел расчетной схемы для того, чтобы препятствовать не только взаимному повороту соединяемых элементов, но и повороту самого узла. В ней возникает реактивный момент m (рисунок 1.21, а). Другие варианты схематичного изображения плавающей заделки показаны на рисунке 1.21, б.

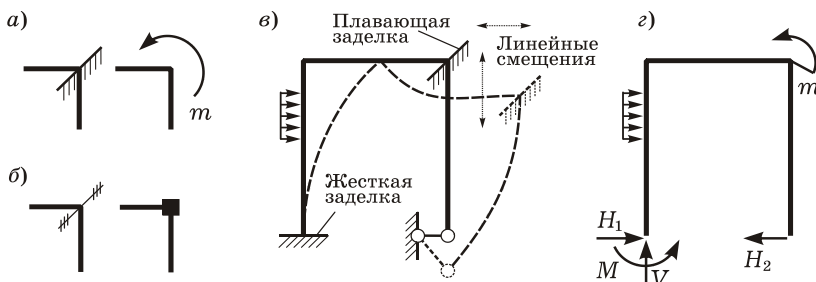


Рисунок 1.21

Заметим, что момент m – внешний по отношению к узлу. Если расечь элементы, сходящиеся в узле, то появятся еще три усилия взаимодействия – M , V , H (см. рисунок 1.16, а).

В отличие от жесткой заделки плавающая заделка не лишает узел линейной подвижности (рисунок 1.21, в). Она может поступательно перемещаться вместе с узлом, но не может поворачиваться до тех пор, пока ей не сообщен принудительный поворот.

Подчеркнем еще раз, что плавающая заделка является *дополнительной внешней связью*. Ее отбрасывание приводит к появлению реактивного момента, который для рамы является внешним сосредоточенным узловым воздействием (рисунок 1.21, г).

Этот вид идеальной связи применяется при расчетах статически неопределимых систем методом перемещений (см. п. 9.2.1).

Мы изучили основные соединения элементов *плоских* стержневых систем. В *пространственных* системах в качестве связей также применяются стержни, шарниры (цилиндрические и сферические), жесткие и упругоподатливые соединения. Особенности расчета пространственных систем рассмотрены в [2, 13].

1.6 Учет механических свойств материалов.

Основные уравнения строительной механики

1.6.1 Физические модели материалов. *Физической моделью материала* называется математическое описание его механического поведения при деформировании конструкции. Естественно, нельзя обойтись без идеализации. Вместо действительных диаграмм поведения материалов пользуются идеализированными схемами, отражающими основные свойства материала, а тем самым и работу сооружения в целом. Рассмотрим основные физические модели материалов, для наглядности изобразим их в виде диаграмм растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ (σ – нормальные напряжения; ε – относительные линейные деформации).

На практике широко применяется расчет сооружений в предположении идеальной упругости материала. Считается, что конструкция способна полностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после разгрузки – устранения причин, вызвавших ее деформацию (снятия нагрузки, температурных, электромагнитных и др. полей). Упругие деформации полностью исчезают, а остаточные деформации не появляются.

Связь между напряжениями и деформациями либо линейна (справедлив закон Гука), либо нелинейна. Работа материала характеризуется физическими моделями *линейно-упругого* либо *нелинейно-упругого тела* (рисунок 1.22, а, б).

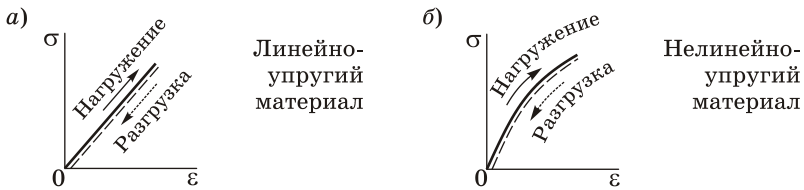


Рисунок 1.22

Расчет конструкций в соответствии с предложенными упругими моделями оправдан, когда конструкция далека от разрушения и напряжения в ней относительно малы.

Другой, широко применяемый на практике подход к расчету сооружения основывается на учете пластических свойств материала. Для этого пользуются физическими моделями упруго-пластического и жестко-пластического тела, учитывающими появление остаточных деформаций после разгрузки.

Диаграмма растяжения для *идеального упругопластического* материала (диаграмма Прандтля) состоит из двух частей (рисунок 1.23, а). Наклонная ее часть отвечает линейно-упругой работе материала, а горизонтальная – условию *идеальной пластичности*, когда при постоянных напряжениях деформации, отвечающие пределу текучести σ_y , неограниченно растут.

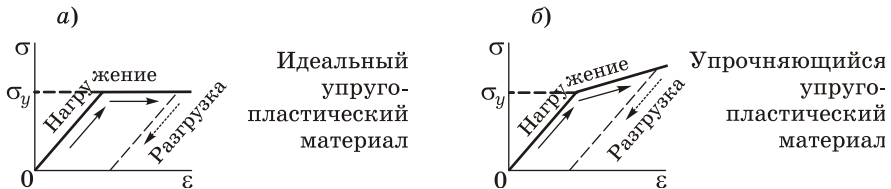


Рисунок 1.23

Диаграмма растяжения для *упрочняющегося упругопластического* материала (рисунок 1.23, б) предполагает, что после достижения предела текучести деформации растут лишь при росте напряжений. Закон упрочнения может быть линейным или нелинейным.

Если упругие деформации по сравнению с пластическими невелики или их определение не требуется самим расчетом, тогда пользуются физическими моделями *идеально жесткопластического* и *упрочняющегося жесткопластического* материала. Соответствующие диаграммы приведены на рисунке 1.24, а, б.

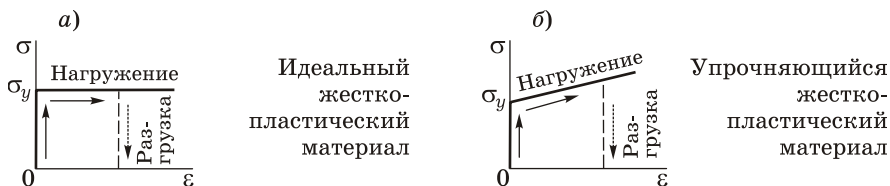


Рисунок 1.24

При расчетах конструкций применяются и другие идеализированные физические модели материалов. Например, для стали, работающей в условиях высоких температур, для бетона и пластмасс, работающих в нормальных условиях, характерны явления *ползучести* и *релаксации*. То есть, с течением времени при постоянных напряжениях увеличиваются деформации или при постоянных деформациях уменьшаются напряжения. Физические модели ползучего тела, учитывающие параметр времени, достаточно сложные [15].

1.6.2 Применимость физических моделей. Различные физические модели материала позволяют рассчитывать сооружения для разных условий их работы.

Например, для конструкции, изготовленной из мягкой стали, потеря несущей способности сопровождается значительными пластическими деформациями. Следовательно, при расчете должна использоваться *физическая модель пластического материала*. В то же время нормальная эксплуатация многих сооружений возможна лишь тогда, когда будут выполнены условия жесткости, т. е. перемещения будут невелики, и в конструкциях не появятся остаточные деформации. Этим условиям удовлетворяет *физическая модель упругого материала*.

Отсюда следует важный вывод: в зависимости от цели расчета и условий работы одна и та же конструкция может рассчитываться при различных физических моделях материала.

1.6.3 Основные уравнения строительной механики. Как и в сопротивлении материалов, все уравнения строительной механики можно разделить на три группы.

Уравнения равновесия представляют статическую сторону задачи расчета сооружения. Эти уравнения записываются для внешних и внутренних сил, которые входят в них линейно, т. е. в первой степени. Таким образом, уравнения равновесия всегда *линейные*.

Уравнения совместности деформаций представляют геометрическую сторону задачи расчета сооружений. В этих уравнениях деформации растяжения, сжатия, изгиба и т. п. связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения *нелинейные*. Но если считать перемещения малыми по сравнению с размерами элементов конструкции (см. п. 1.7.1), то уравнения, связывающие их, становятся *линейными*.

Физические уравнения связывают усилия (напряжения) с перемещениями (деформациями). Эти уравнения могут быть линейными или нелинейными в зависимости от принятой физической модели материала.

1.6.4 Линейно и нелинейно деформируемые системы. Если все уравнения – равновесия, совместности деформаций и физические, составленные для данной конструкции, – линейные, то систему называют *линейно деформируемой*. Как правило, большинство строительных конструкций можно рассчитывать в предположении их линейной деформируемости.

Геометрическая нелинейность встречается в строительных конструкциях сравнительно редко. Исключение представляют гибкие конструкции, у которых начальная форма и размеры значительно меняются после нагружения. Для них неприменимы приближенные формулы (например, дифференциальное уравнение упругой линии балки в виде $EJy'' = M_x$), и уравнения совместности деформаций оказываются нелинейными.

Физической нелинейностью обладают в той или иной степени все конструкции. Однако с определенной точностью при небольших напряжениях нелинейные физические зависимости можно заменить линейными.

1.7 Основные допущения строительной механики и следствия из них

В основной части курса строительной механики изучаются достаточно жесткие стержневые системы, работающие при сравнительно небольших нагрузках и воздействиях. При этом для

каждого отдельного элемента такой системы считаются справедливыми гипотезы и допущения сопротивления материалов, а также основные формулы для напряжений и деформаций, полученные на основании этих гипотез [16].

1.7.1 Гипотезы и допущения относительно свойств материала.

Гипотезы сплошности, однородности и изотропности. Материал представляет собой однородную сплошную среду, которая непрерывно (без пустот) заполняет отведенный ей объем; физико-механические свойства материала во всех точках тела и по всем направлениям одинаковы.

Гипотеза об идеальной упругости материала. В большинстве задач среда считается абсолютно упругой: конструкция способна восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших ее деформацию (снятия нагрузки, температурных и др. полей).

Допущение о справедливости закона Гука. При постановках большинства задач строительной механики используется физическая модель линейно-упругого материала (см. рисунок 1.22, а). Деформации в точках тела считаются прямо пропорциональными напряжениям, а перемещения сечений элементов – силам, вызывающим эти перемещения. Если же учитывается отступление от идеальной упругости и закона Гука, то это специально оговаривается. Например, в расчетах конструкций по методу предельного равновесия материал считается идеальным упругопластическим (см. рисунок 1.23, а).

1.7.2 Гипотезы относительно поперечных сечений стержней.

Гипотеза плоских сечений Бернулли. Поперечные сечения, плоские и нормальные к недеформированной оси стержня, остаются плоскими и нормальными к его деформированной оси.

Гипотеза Сен-Венана. В сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Эта гипотеза позволяет заменять сложные нагрузки их равнодействующими.

Пример 1.2 Если к торцу бруса приложена равномерно распределенная нагрузка, гипотеза плоских сечений выполняется строго. При действии сосредоточенной силы сечения деформируются (рисунок 1.25). Однако на сравнительно небольшом удалении от торца (порядка высоты сечения) сечения остаются плоскими.

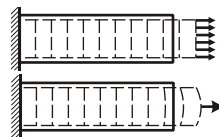


Рисунок 1.25

1.7.3 Допущение о малости деформаций и следствия из него. Деформации в точках тела считаются настолько малыми, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение приложенных к телу сил.

В более общем виде допущение о малости деформаций может быть представлено *принципом относительной жесткости* [8], в силу которого деформации элементов ε , а также отношения перемещения любой его точки (например, прогиба w) к некоторому характерному наименьшему линейному размеру элемента l должны быть намного меньше единицы: $\varepsilon \ll 1$; $w/l \ll 1$.

Следствие. При изгибе стержней продольными перемещениями сечений можно пренебречь по сравнению с прогибами, т. е. считать, что все точки смещаются по нормали к недеформированной оси. Длина изогнутого стержня и его проекция на первоначальную ось считается равной его первоначальной длине. Углы поворота сечений настолько малы, что полагаются равными их тангенсам, а косинусы – равными единице.

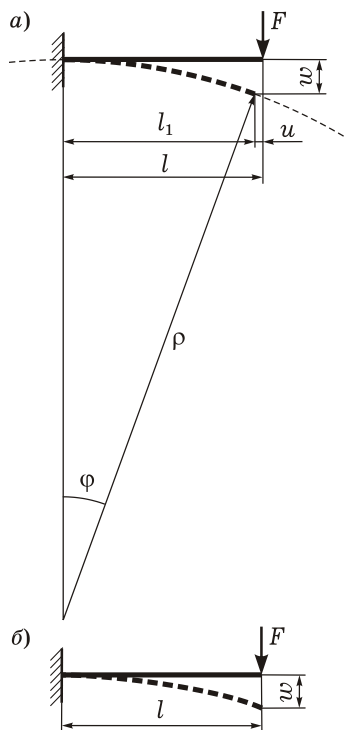


Рисунок 1.26

Пример 1.3 Рассмотрим простейшую стержневую систему – консольную балку, нагруженную на конце силой F (рисунок 1.26, а). Предположим для простоты, что изогнутая ось балки совпадает с окружностью радиуса ρ . Считая, что ось нерастяжима, имеем $l = \rho\varphi$. Тогда продольное перемещение u и прогиб w

$$u = l - l_1 = \rho \left(\frac{l}{\rho} - \sin \frac{l}{\rho} \right);$$

$$w = \rho - \rho \cos \varphi = 2\rho \sin^2 \frac{l}{2\rho}. \quad (a)$$

Если считать отношение l/ρ малой величиной, то перемещения (а) можно представить в виде

$$u \approx \rho \left(\frac{l}{\rho} - \frac{l}{\rho} + \frac{l^3}{6\rho^3} - \dots \right) \approx \frac{l^3}{6\rho^2}; \quad w \approx \frac{l^2}{2\rho}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{u}{l} \approx \frac{l^2}{6\rho^2}; \quad \frac{w}{l} \approx \frac{l}{2\rho}. \quad (б)$$

Теперь, если по определению $w/l \ll 1$, то из (б) следует

$$\frac{u}{w} \approx \frac{l}{3\rho} \ll 1.$$

Отсюда вытекает, что продольными перемещениями u можно пренебречь по сравнению с прогибами w , т. е. можно считать, что все точки балки смещаются по вертикали (рисунок 1.26, б).

Принцип относительной жесткости и следствие из него позволяют вести расчеты сооружений *по недеформированной схеме*, т. е. при составлении уравнений равновесия рассматривать систему как *абсолютно твердое тело*, имеющее после нагружения те же геометрические размеры и форму, что и до приложения нагрузки.

Этот подход применим при решении задач статики для достаточно жестких элементов и систем. При статических расчетах гибких систем, а также в задачах устойчивости и динамики деформации уже не могут считаться малыми, поэтому необходимо производить расчеты по *деформированной схеме*. Это значит, что уравнения для конструкции должны быть составлены с учетом деформаций ее элементов.

В качестве примера можно указать на расчет висячих мостов больших пролетов. Изменение очертания кабеля моста из-за перемещений хотя и не очень велико, но оно существенно сказывается на распределении нагрузки, передающейся с кабеля на балку. Изгибающие моменты в балке существенно меняются. Таким образом, сама расчетная схема в процессе нагружения изменяется (деформируется), и это необходимо учитывать при расчете.

Заметим, что при расчетах по деформированной схеме *все* конструкции являются *статически неопределимыми*. Если же уравнения равновесия составлять по недеформированной схеме, то многие системы можно считать статически определенными. Поясним сказанное примером.

Пример 1.4 Рассмотрим ту же балку, что и в примере 1.3. Из уравнений равновесия, составленных по недеформированной схеме (рисунок 1.27, а), могут быть достаточно просто найдены опорные реакции и внутренние усилия в произвольном сечении, т. е. балка *статически определима*. Например, момент в заделке $M = Fl$, реакция $V = F$.

Строго говоря, уравнения равновесия для определения усилий следует составлять, рассматривая балку в деформированном состоянии (рисунок 1.27, б). При таком расчете необходимо знать перемещения w и u . Но их, в свою очередь, нельзя найти, не зная реакций и внутренних сил. Система является *статически неопределимой*. Добавим еще, что

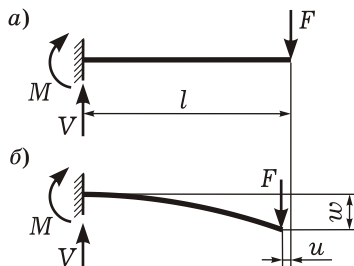


Рисунок 1.27

здесь должно быть введено дополнительное условие относительно поведения силы F (остается она вертикальной или поворачивается).

1.7.4 Принцип независимости действия сил (суперпозиции).

Результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения.

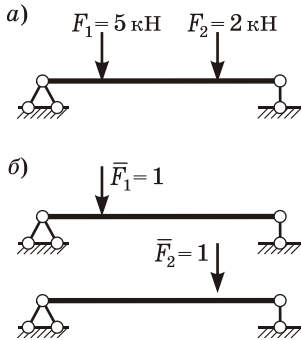


Рисунок 1.28

Пример 1.5 Рассмотрим балку, изображенную на рисунке 1.28, *a*. Допустим, требуется определить прогиб посередине пролета от двух сил F_1 и F_2 . Вместо того, чтобы сразу рассчитывать балку на общую нагрузку, можно сначала найти прогиб от силы $F_1 = 5 \text{ кН}$, затем от $F_2 = 2 \text{ кН}$, и полученные данные сложить.

Более того, можно сначала рассмотреть действие единичной силы $\bar{F}_1 = 1$, приложенной в направлении F_1 (рисунок 1.28, *б*), определить от нее прогиб и умножить его на 5 кН. Затем следует рассчитать прогиб от действия единичной силы $\bar{F}_2 = 1$, приложенной в направлении F_2 , и умножить его на 2 кН, после чего сложить результаты умножений.

Так могут быть найдены не только перемещения, но и другие величины, например, опорные реакции, внутренние усилия или напряжения в сечениях конструкции.

Этот принцип является основным при решении подавляющего большинства задач строительной механики. Однако применим он только для линейно деформируемых систем. Для геометрически или физически нелинейных систем пользоваться им нельзя.

В сопротивлении материалов принцип суперпозиции давался именно как «принцип» – без доказательства, но с последующей проверкой на конкретных задачах. В статически определимых системах он вытекает из допущения о недеформируемости расчетной схемы. В общем виде сформулируем его и докажем позже, после изучения методов расчета стержневых систем (см. п. 2.2.4).

Принятые гипотезы и допущения являются основополагающими в строительной механике стержневых систем, но не исчерпывают всевозможных приемов идеализации свойств материала и характера деформирования изучаемых объектов. В дальнейшем будут вводиться и другие упрощения, позволяющие доводить инженерный расчет до числа.

1.8 Геометрическая неизменяемость сооружений

1.8.1 Геометрически изменяемые и неизменяемые системы.

Диск. Геометрически неизменяемой называется система, допускающая перемещения точек составляющих ее элементов лишь за счет деформации самих элементов (рисунок 1.29).

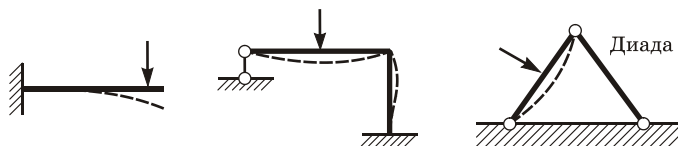


Рисунок 1.29

Диском в строительной механике называется система или ее часть, геометрическая неизменяемость которой очевидна или доказана. Дисками, например, считаются отдельный стержень, шарнирно-стержневой треугольник, Г-, Т-, П-образные элементы рам и т. п. Земля (основание) является неподвижным диском.

Диада – это простейшая неизменяемая система, состоящая из двух прямолинейных стержней, шарнирно соединенных между собой и с основанием (см. рисунок 1.29).

Любая геометрически неизменяемая система способна принимать на себя и уравнивать внутренними силами нагрузки и воздействия различных видов вплоть до разрушения материала.

Геометрически изменяемой называется система, у которой перемещения элементов возможны без их деформации (рисунок 1.30). Она способна менять свою форму без изменения длин и формы стержней и представляет собой механизм.

Кинематическая цепь – это изменяемая система из прямолинейных стержней, последовательно соединенных шарнирами (см. рисунок 1.30).

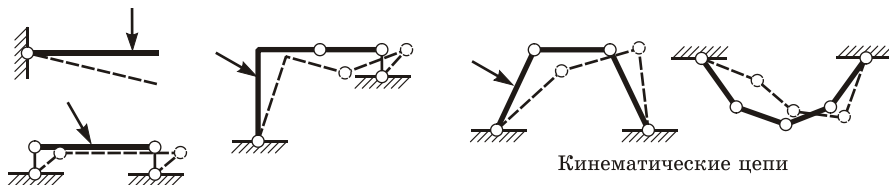


Рисунок 1.30

Всякая геометрически изменяемая система может принимать на себя и уравнивать внутренними силами, не меняя заданной формы, некоторые нагрузки частных видов. При этом равновесие может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Для простейшей кинематической цепи примеры подобных нагрузок показаны на рисунке 1.31.

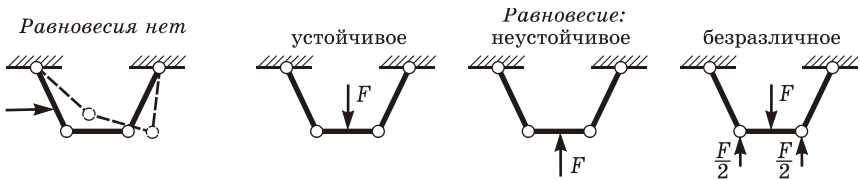


Рисунок 1.31

Как правило, в качестве расчетных схем большинства строительных конструкций применяются геометрически неизменяемые системы. В висячих сооружениях используются кинематические цепи, которые вместе с другими элементами образуют геометрически неизменяемые расчетные схемы (см. рисунок 1.12).

Если система геометрически изменяема, то для ликвидации ее подвижности необходимо ввести дополнительные связи или изменить направление существующих. Число связей и их взаимное расположение должны обеспечить, с одной стороны, неподвижность сооружения по отношению к основанию, а с другой – геометрическую неизменяемость самой системы.

1.8.2 Связи абсолютно необходимые и лишние (избыточные).

Если при устранении какой-либо связи геометрически неизменяемая система становится изменяемой, то такая связь называется *абсолютно необходимой*.

Связь, которую можно удалить из конструкции без нарушения ее геометрической неизменяемости, называется *избыточной* (или *лишней, условно необходимой*).

Пример 1.6 Рассмотрим неразрезную балку (рисунок 1.32, а). Для неизменяемого соединения балки с землей достаточно трех непараллельных и не пересекающихся в одной точке стержней, т. е. один из вертикальных стержней является избыточным.

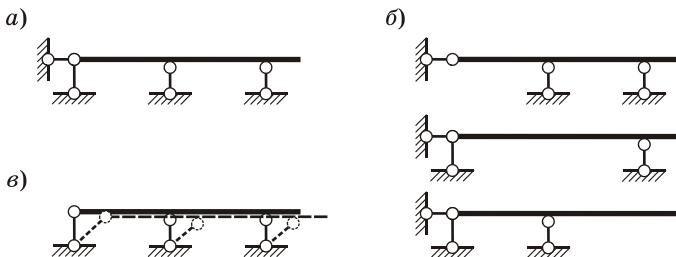


Рисунок 1.32

Удаление любого из вертикальных стержней не приведет к геометрической изменяемости балки (рисунок 1.32, б). Горизонтальный стержень – абсолютно необходимая связь; устранив его, получим геометрически изменяемую систему (рисунок 1.32, в).

Подчеркнем, что термин «лишняя связь» нужно понимать с точки зрения геометрической неизменяемости и неподвижности системы. По условиям работы конструкции эта связь необходима, так как при ее отсутствии прочность и жесткость системы могут оказаться недостаточными.

1.8.3 Мгновенно изменяемые (вырожденные) системы. Эти системы занимают промежуточное положение между указанными выше двумя типами конструкций (рисунок 1.33). Они изначально являются геометрически изменяемыми, так как допускают малые перемещения элементов (теоретически – бесконечно малые) без их деформации (стадия I). После того, как перемещения произойдут, эти системы принимают новую конфигурацию и становятся геометрически неизменяемыми. То есть, дальнейшие перемещения точек сооружений будут сопровождаться деформациями элементов (стадия II).

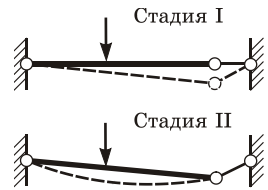


Рисунок 1.33

Реакции связей мгновенно изменяемых систем в стадии I не могут уравновесить действующую нагрузку. Хотя в стадии II равновесие наблюдается, но возникающие в элементах усилия достигают очень больших значений; в результате конструкция либо разрушается, либо получает недопустимо большие перемещения.

Пример 1.7 Рассмотрим симметричную систему из двух стержней (дисков) AC и BC, шарнирно соединенных между собой и с землей (неподвижным диском). Шарниры A, B, C лежат на одной прямой (рисунок 1.34, а). Опорные реакции горизонтальны (это следует, например, из уравнения моментов левой части относительно шарнира C). Из уравнения проекций на вертикальную ось видно, что эти реакции не могут уравновесить действующую силу F. Система геометрически изменяема.

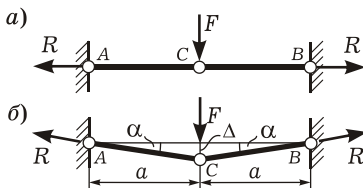


Рисунок 1.34

Когда узел C переместится вниз на малую величину, стержни AC и BC не будут находиться на одной прямой (рисунок 1.34, б), и система станет неизменяемой. Определим опорные реакции этой системы. Проецируя все силы на вертикальную ось, получим $2R\sin\alpha = F$, откуда

$$R = \frac{F}{2\sin\alpha}. \quad (a)$$

Из формулы (а) следует, что при малом значении α реакция R получает конечное очень большое значение, которое вызывает если не разрушение, то значительные опасные деформации. При $\alpha \rightarrow 0$ усилие $R \rightarrow \infty$.

Подсчитаем деформацию (относительное удлинение) стержня AC :

$$\varepsilon = \frac{1}{a} \left(\frac{a}{\cos \alpha} - a \right) = \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\cos \alpha}. \quad (б)$$

Пусть теперь перемещение Δ – бесконечно малая величина. Тогда

$$\sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta}{2a}, \quad \cos \alpha \rightarrow 1,$$

и из (б) имеем $\varepsilon = \frac{\Delta^2}{2a^2}$.

Таким образом, деформация стержня является величиной второго порядка малости по отношению к величине перемещения Δ и должна быть исключена из рассмотрения. Это означает, что в данной системе возможны бесконечно малые перемещения при отсутствии деформаций ее элементов, что и является характерным признаком мгновенно изменяемых систем.

Пример 1.8 Пусть оси трех стержней, прикрепляющих ферму к основанию, пересекаются в точке A (рисунок 1.35, а). При нагружении силой F возникают реакции R_1, R_2, R_3 , линии действия которых также пересекаются в точке A . Составим уравнение моментов всех сил относительно этой точки: $\sum M_A = Fa \neq 0$. Равновесия нет.

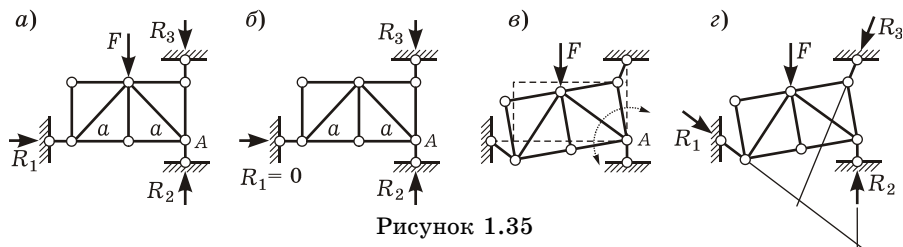


Рисунок 1.35

При отсутствии нагрузки ($F = 0$) равновесие теоретически возможно, но некоторые реакции не определены (рисунок 1.35, б). Действительно, из уравнения проекций на горизонтальную ось $R_1 = 0$; из любых других уравнений равновесия можно лишь установить, что $R_2 = R_3$. Поэтому мгновенно изменяемые системы еще называют *вырожденными* [10].

Даже при очень малом значении F произойдет перемещение относительно основания без деформаций фермы. Она повернется на бесконечно малый угол (рисунок 1.35, в). Центром вращения будет точка A . После этого направления опорных связей изменятся, и возникающими в них реакциями возможно будет уравновесить силу F (рисунок 1.35, г). Однако одна или несколько реакций будут бесконечно большими, вызывая бесконечно большие усилия в стержнях, что недопустимо.

На практике следует избегать подобных систем. Если же конструкция близка к мгновенно изменяемой (вырожденной), как, например, пологая арка (рисунок 1.36), то ее расчет необходимо производить по деформированной схеме. Для этого придется использовать уравнения более сложные, чем те, которые будут приводиться в этом курсе.



Рисунок 1.36

Термин «мгновенно изменяемые системы» не совсем удачный. Некоторые авторы объясняют это название тем, что система оказывается изменяемой лишь в первый момент («мгновение») приложения нагрузки. Но подобная трактовка некорректна, так как фактор времени здесь не рассматривается.

Попробуем объяснить этот термин иначе. Предположим, что при проектировании сооружения какой-либо геометрический параметр можно менять, например, угол наклона опорного стержня α (рисунок 1.37, а). При каком-то одном («мгновенном») значении этого параметра ($\alpha = 0$) система изменяема, так как опорный стержень не может препятствовать повороту балки относительно шарнира А (рисунок 1.37, б). При всех остальных значениях ($\alpha \neq 0$) система геометрически неизменяема [9].

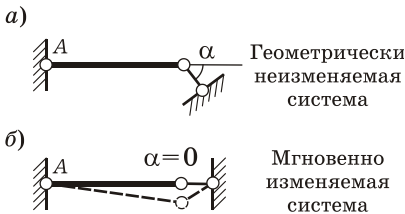


Рисунок 1.37

Заметим, что мгновенно изменяемые (вырожденные) системы обладают некоторыми свойствами статически неопределимых систем, известными еще из курса сопротивления материалов. Например, в них возникают внутренние силы и напряжения от изменения температуры. Можно сказать, что в таких системах от-

сутствуют связи по нужным направлениям за счет излишних связей по некоторым другим направлениям. Так, например, в балке на рисунке 1.37, б горизонтальным перемещениям препятствует шарнир А, поэтому в связи в виде горизонтального опорного стержня нет необходимости. В то же время отсутствует связь, удерживающая систему от поворота относительно шарнира А.

1.8.4 Центр вращения. Фиктивный шарнир. Любая изменяемая система содержит диски, которые могут перемещаться относительно основания либо друг друга. Точка, относительно которой возможен поворот геометрически изменяемой конструкции или ее части, называется *центром вращения*.

Рассмотрим диск, прикрепленный к основанию двумя стержнями (рисунок 1.38, а). Траекториями движения его точек А и В

будут прямыми, перпендикулярными соответствующим стержням (согласно п. 1.7.3). Центр вращения диска находится в точке пересечения перпендикуляров к этим траекториям, т. е. в точке пересечения осей опорных стержней С.

Из сказанного следует, что два стержня в плоской системе эквивалентны шарниру, находящемуся в точке их пересечения (рисунок 1.38, б). В дальнейшем точку пересечения осевых линий двух стержней будем считать *фиктивным шарниром*.

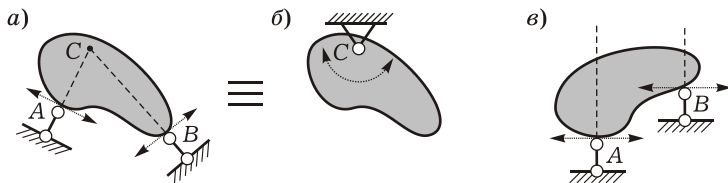


Рисунок 1.38

Если два стержня, прикрепляющие диск к земле, параллельны, то диск может перемещаться относительно земли поступательно. В этом случае считают, что центр вращения диска также существует, но бесконечно от него удален (рисунок 1.38, в).

Для мгновенно изменяемой системы центр вращения называется *мгновенным*. Относительно него происходит поворот на малую величину, после чего перемещения без деформаций становятся невозможными (см. пример 1.8).

1.9 Кинематический анализ сооружений: геометрический метод

1.9.1 Цель и методы кинематического анализа сооружений.

Расчетные схемы строительных конструкций должны быть геометрически и мгновенно неизменяемыми. Это обеспечивается достаточным количеством связей и правильной их расстановкой. Для того, чтобы выяснить, неизменяема система или нет, проводится ее *кинематический анализ*. Кроме этого, определяется количество либо недостающих, либо избыточных связей.

Этот анализ может проводиться двумя методами – геометрическим или аналитическим. *Геометрический метод* основан на расчленении системы на отдельные диски и анализе их соединения между собой. Подобный подход оказывается эффективным в случаях, когда система может быть сведена к двум или трем дискам. *Аналитический метод* заключается в проверке двух аналитических условий геометрической неизменяемости: необходимого и достаточного. На практике эти два метода часто сочетают.

1.9.2 Принципы геометрически неизменяемого соединения дисков. Расчетные схемы сооружений удобно рассматривать как системы дисков, соединенных идеальными связями. Для выявления их геометрической и мгновенной изменяемости необходимо проанализировать, как диски соединены между собой и с основанием.

Заметим, что системы элементов, связанных *жестко*, всегда неизменяемы и могут считаться одним диском. Многие из них из-за избыточного количества связей статически неопределимы.

Рассмотрим далее основные способы геометрически неизменяемого соединения дисков *минимальным* количеством связей (шарниров и одиночных стержней).

Для соединения *двух дисков* в геометрически неизменяемую систему достаточно:

- трех стержней (одиночных связей), оси которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке (рисунок 1.39, а);
- шарнира (действительного или фиктивного) и стержня, причем шарнир не должен лежать на оси стержня (рисунок 1.39, б).



Рисунок 1.39

Так как в кинематическом отношении два стержня и шарнир эквивалентны, то указанные способы соединения двух дисков равнозначны. Если оси трех стержней пересекаются в одной точке или шарнир лежит на оси стержня, система *мгновенно изменяема* (рисунок 1.40, а). Если оси трех стержней параллельны, она *геометрически изменяема* (рисунок 1.40, б).

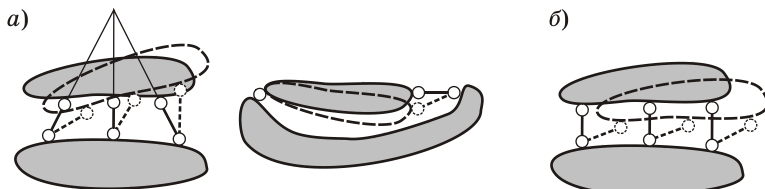


Рисунок 1.40

Стержень является простейшим диском. Поэтому из приведенного на рисунке 1.39, б способа соединения двух дисков вытекают следующие правила соединения трех дисков.

Для соединения *трех дисков* в геометрически неизменяемую систему достаточно:

- трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.41, а);
- шести (трех пар) стержней, причем соответствующие каждой паре фиктивные шарниры не должны находиться на одной прямой (рисунок 1.41, б);
- соответствующего количества шарниров и стержней (один шарнир и четыре стержня; два шарнира и два стержня) (рисунок 1.41, в).

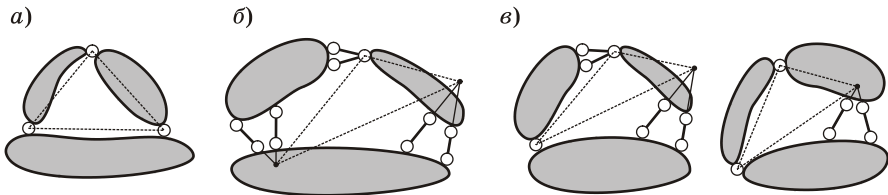


Рисунок 1.41

Таким образом, можно сформулировать *общий признак геометрической неизменяемости трехдискового соединения*: если такое соединение может быть приведено к шарнирному треугольнику, то оно геометрически неизменяемо. Легко сообразить, что особыми случаями будет вырождение треугольника в прямую (рисунок 1.42, а) или стягивание в точку (рисунок 1.42, б). В обоих случаях система будет мгновенно изменяемой.

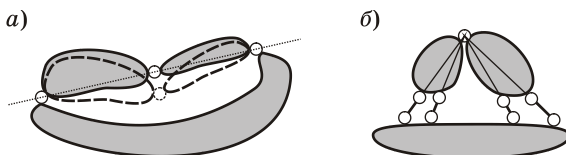


Рисунок 1.42

1.9.3 Проведение кинематического анализа сооружений геометрическим методом. При выполнении кинематического анализа расчетной схемы геометрическим методом в ней выделяют диски и рассматривают их последовательное прикрепление друг к другу, руководствуясь установленными выше четкими правилами геометрически неизменяемого двух- и трехдискового соедине-

ний¹⁾. Основание (землю) также рассматривают в качестве отдельного диска. Если все соединения дисков правильные, то конструкция геометрически неизменяема.

Пример 1.9 Исследуем систему (рисунок 1.43, а), в которой выделим три диска I , II , III (рисунок 1.43, б).

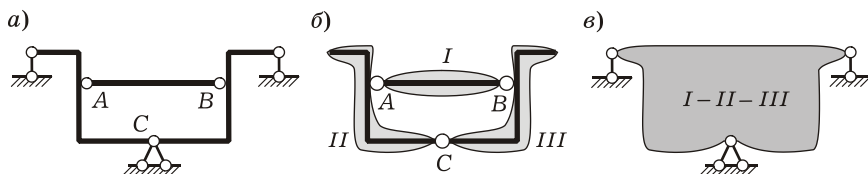


Рисунок 1.43

Диски I , II и III соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (см. рисунок 1.43, б), следовательно, образуют новый диск $I-II-III$. Он соединен с землей при помощи четырех опорных стержней, не параллельных между собой и не пересекающихся в одной точке (рисунок 1.43, в), хотя достаточно было бы трех. **Вывод:** данная система геометрически неизменяема и имеет одну избыточную связь.

Пример 1.10 Рассмотрим систему (рисунок 1.44, а), в которой выделим два диска I , II (рисунок 1.44, б).

Диски I и II образуют новый диск $I-II$, так как неизменно соединены шарнирами A и B , хотя достаточно было бы шарнира и стержня. То есть, имеется одна избыточная связь.

Диск $I-II$ соединен с землей при помощи трех параллельных опорных стержней (рисунок 1.44, в), не обеспечивающих его неподвижность относительно земли. **Вывод:** данная система геометрически изменяема.

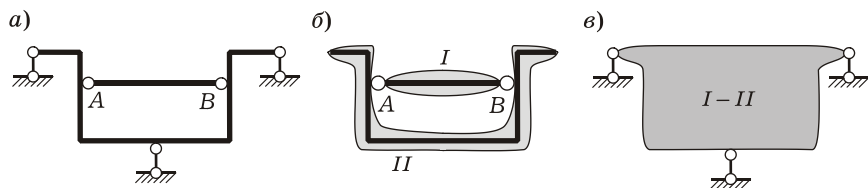


Рисунок 1.44

Пример 1.11 Рассмотрим комбинированную систему – арку с надарочным строением (рисунок 1.45, а). Выделим в ней шесть дисков – две полуарки I , II и четыре горизонтальных элемента $III-VI$.

Вариант 1. Три диска – I , II и земля соединены тремя шарнирами A , B и C , не лежащими на одной прямой, образуя диск « $I-II-земля$ »

¹⁾ В связи с этим кинематический анализ, выполняемый геометрическим методом, называют также *структурным анализом* или *анализом образования*.

(рисунок 1.45, б). К нему шарниром и вертикальным стержнем прикреплен диск *III* (рисунок 1.45, в), причем шарнир не лежит на оси этого стержня. Полученную конструкцию можно считать диском «*I – II – III – земля*». К этому диску таким же образом (шарниром и стержнем) присоединен диск *IV* (рисунок 1.45, з). Аналогично прикреплены элементы в правой части сооружения – диски *V* и *VI*. *Вывод*: система геометрически неизменяема.

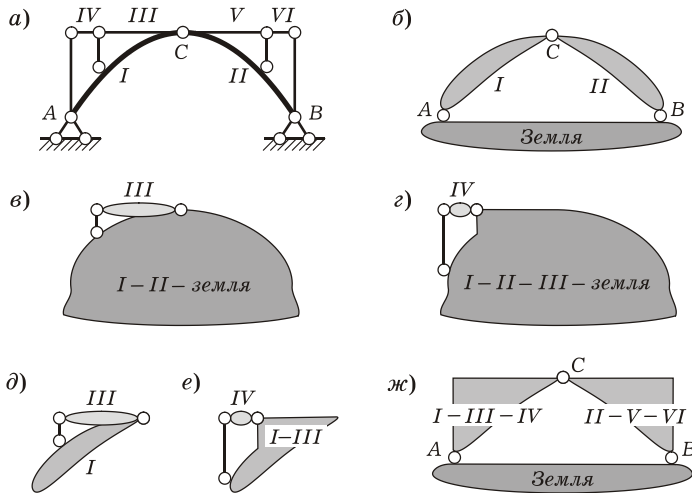


Рисунок 1.45

Вариант 2. Два диска – *I* и *III* соединены шарниром и вертикальным стержнем (рисунок 1.45, д), причем шарнир не лежит на оси этого стержня. К полученному диску «*I – III*» точно таким же образом (шарниром и стержнем) присоединен диск *IV* (рисунок 1.45, е), образуя диск «*I – III – IV*». Аналогично в правой части сооружения элементы *II, V, VI* образуют диск «*II – V – VI*». Диски «*I – III – IV*» и «*II – V – VI*» соединены тремя шарнирами *A, B, C* (рисунок 1.45, ж), не лежащими на одной прямой. *Вывод*: система геометрически неизменяема.

Отметим также, что рассмотренное сооружение имеет минимально необходимое для геометрической неизменяемости количество связей. Все они расставлены правильно, в соответствии с принципами геометрически неизменяемого соединения двух и трех дисков.

1.10 Число степеней свободы и степень изменяемости плоской стержневой системы

1.10.1 Число степеней свободы. Из теоретической механики известно, что *число степеней свободы абсолютно твердого тела* – это наименьшее количество независимых геометрических пара-

метров, определяющих положение тела относительно введенной системы координат. Геометрическими параметрами считаются линейные и угловые координаты точек тела.

Введем на плоскости неподвижную систему координат Oxy . Незакрепленное абсолютно твердое тело может перемещаться линейно и поворачиваться (рисунок 1.46, а).

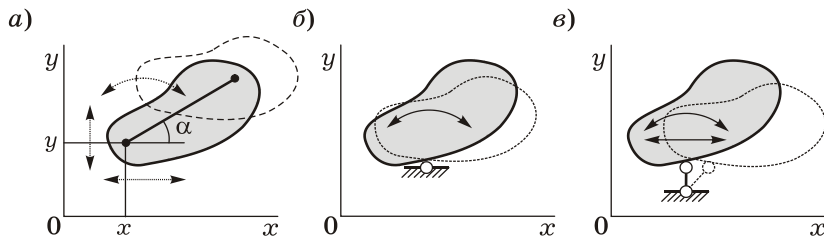


Рисунок 1.46

Положение любой его точки может быть определено тремя независимыми геометрическими параметрами: например, координатами x , y какой-либо точки и углом α наклона прямой, проходящей через данную точку. Следовательно, не закрепленное на плоскости абсолютно твердое тело имеет *три* степени свободы. Аналогично можно выяснить, что в пространстве незакрепленное абсолютно твердое тело обладает *шестью* степенями свободы.

Наложение связей уменьшает число степеней свободы. Закрепим тело шарниром (рисунок 1.46, б). Теперь оно имеет *одну* степень свободы, так как допускается лишь его поворот, и положение любой его точки можно найти через угол α . Если же закрепить тело стержнем (рисунок 1.46, в), оно будет иметь *две* степени свободы.

1.10.2 Формула Чебышева. Рассмотрим систему дисков, соединенных шарнирами и стержнями (одиночными связями). Обозначим: D – количество дисков; $Ш$ – количество простых шарниров; C_0 – количество одиночных связей.

Каждый диск имеет три степени свободы, следовательно, полное число степеней свободы равно $3D$. Каждый простой шарнир эквивалентен наложению двух связей и уменьшает число степеней свободы на два, а стержень – наложению одной связи и уменьшает число степеней свободы на единицу. Если шарнир сложный (кратный), т. е. соединяет не два, а больше дисков, то необходимо учитывать его кратность по формуле (1.1).

Следовательно, введение $Ш$ шарниров и C_0 стержней уменьшает число степеней свободы на $(2Ш + C_0)$. С учетом всего ска-

занного получим формулу для определения числа степеней свободы W плоской системы дисков

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (1.2)$$

где D – количество дисков; $Ш$ – количество простых шарниров, соединяющих диски (количество шарниров с учетом кратности, вычисленной по формуле (1.1)); C_0 – количество одиночных связей между дисками (в том числе опорных стержней).

Формула (1.2) была предложена *П. Л. Чебышевым* для анализа механизмов. Система дисков, имеющая хотя бы одну степень свободы, геометрически изменяема.

1.10.3 Число степеней свободы (степень изменяемости) плоской стержневой системы. Любой элемент реальной конструкции является *деформируемым*, он состоит из бесконечного количества точек. Независимо от количества и характера наложенных на него связей он обладает *бесконечным* числом степеней свободы, так как для описания положения каждой его точки понадобилось бы бесконечное число координат.

Однако при расчетах достаточно жестких конструкций на статические нагрузки уравнения равновесия можно составлять по недеформированной схеме (см. п. 1.7.3), т. е. считать элементы системы дисками. Тогда число степеней свободы может находиться так же, как и для абсолютно твердого тела. Оно будет иметь *конечное*, вполне определенное значение.

Заметим, что при расчетах конструкций на динамические нагрузки, исследовании их устойчивости, статических расчетах по деформированной схеме (например, нахождении перемещений, определении усилий в гибких системах) элементы нельзя считать дисками. Поэтому для тех же конструкций число степеней свободы будет другим. Таким образом, число степеней свободы конструкции зависит от того, как ведется расчет: по деформированной или по недеформированной расчетной схеме.

Отметим, что формула Чебышева была разработана для анализа механизмов, которые заведомо геометрически изменяемые. Их части могут двигаться друг относительно друга без деформаций, т. е. обладают «свободой». Для таких систем $W > 0$.

Понятие W можно трактовать иначе – как число, показывающее *наименьшее количество одиночных связей*, добавление которых к механизму (и, конечно, правильная расстановка) превратит его в *геометрически неизменяемую и статически определенную* систему.

В курсе статики стержневых систем мы будем в основном изучать геометрически неизменяемые сооружения, элементы которых не могут перемещаться без деформации. Для них число степеней свободы должно быть равно нулю: $W = 0$. Это верно для систем, не имеющих лишних связей (статически определимых).

Если же система содержит избыточные (лишние) связи, то вычисленное по формуле Чебышева значение W получится отрицательным: $W < 0$. Тогда оно будет указывать, сколько связей надо *удалить* из системы, чтобы оставшееся их количество было минимально необходимым для геометрической неизменяемости конструкции.

Вывод: при анализе плоских сооружений, элементы которых считаются дисками, понятие «число степеней свободы W » следует трактовать как «наименьшее число одиночных связей, которые необходимо добавить к геометрически изменяемой системе, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую». В связи с этим его также называют *степенью изменяемости* сооружения.

Замечания по применению формулы (1.2):

- земля считается неподвижным диском, но в количество D не включается, так как W определяет степень подвижности сооружения *относительно* нее (системы координат, связанной с землей);

- необходимо следить, чтобы каждый диск и каждая связь были учтены только один раз. Иными словами, если шарнирное соединение диска с землей было учтено как простой шарнир, то это опорное устройство уже нельзя включать в количество C_0 как два опорных стержня;

- если система содержит жесткие соединения дисков (заделки, узлы), то при подсчете W каждое из них необходимо заменять тремя стержнями либо шарниром и стержнем. Скользящие заделки следует заменять двумя стержнями (см. п. 1.5.4, 1.5.5);

- каждый диск должен быть внутренне статически определенной системой (не должен содержать замкнутых контуров) – при заданной нагрузке усилия в любом его сечении можно определить из уравнений равновесия¹⁾. Если же элемент системы имеет замкнутые контуры, его необходимо разбить на несколько дисков и учитывать их жесткое соединение между собой.

Пример 1.12 Рассмотрим раму, в которой выделим диски I , II , соединенные между собой и с землей тремя простыми шарнирами A , B , C и одним опорным стержнем (рисунок 1.47). $D = 2$, $III = 3$, $C_0 = 1$, следовательно, по формуле Чебышева (1.2) число степеней свободы

¹⁾ Каждый замкнутый бесшарнирный контур содержит три лишние связи.

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 1 = -1,$$

т. е. имеется одна лишняя связь.

Пример 1.13 Определим W рамы, изображенной на рисунке 1.48, а. Элемент, выделенный на этом рисунке, внутренне статически неопределим, так как содержит замкнутый контур.

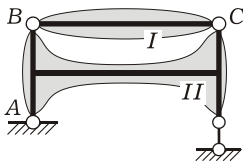


Рисунок 1.47

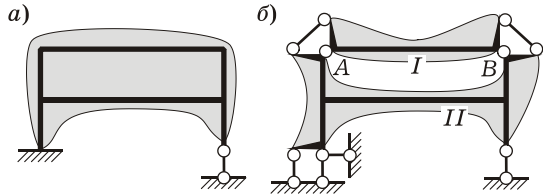


Рисунок 1.48

Чтобы правильно определить число степеней свободы по формуле Чебышева (1.2), разобьем раму на два диска I , II , а жесткие соединения между ними заменим шарниром и стержнем (рисунок 1.48, б). Кроме этого, жесткую заделку представим в виде трех опорных стержней. Тогда $D = 2$, $Ш = 2$ (шарниры A , B), $C_0 = 6$, следовательно,

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 6 = -4,$$

т. е. рама содержит четыре лишние связи.

Рассмотренный пример продемонстрировал недостаток формулы Чебышева: наличие жестких соединений приводит к необходимости замены их одиночными стержнями и шарнирами, а следовательно, к громоздкости расчетов.

1.10.4 Общая формула для определения числа степеней свободы (степени изменяемости) плоской стержневой системы [2]. Указанный выше недостаток можно устранить, дополнив формулу (1.2) слагаемым, учитывающим количество жестких соединений.

Если жестко прикрепить диск к земле или к другому диску, число его степеней свободы уменьшится на три. С учетом этого

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0, \quad (1.3)$$

где D – количество дисков; $Ж$ – количество простых жестких соединений (заделок и узлов, соединяющих между собой два диска); $Ш$ – количество простых шарниров; C_0 – количество одиночных связей.

Замечания по применению формулы (1.3):

- земля не включается в количество D , а каждый диск не должен содержать замкнутых контуров;

■ если жесткий узел или заделка связывает более двух дисков, то такое жесткое соединение считается сложным (кратным), по аналогии со сложным шарниром (см. п. 1.5.4). *Кратность сложного жесткого соединения \mathcal{J}* (т. е. соответствующее количество простых соединений) вычисляется по формуле

$$\mathcal{J} = n - 1,$$

где n – количество соединяемых элементов (дисков);

■ необходимо следить, чтобы каждый диск и каждая связь были учтены только один раз.

Пример 1.14 Используем формулу (1.3) для рамы, рассмотренной в предыдущем примере. Выделим два диска I, II одним из способов, показанных на рисунке 1.49, *а, б*. Жесткие соединения A, B, C простые, так как каждое из них соединяет два диска. Тогда $\mathcal{D} = 2$, $\mathcal{J} = 3$, $\mathcal{I} = 0$, $C_0 = 1$, следовательно,

$$\begin{aligned} W &= 3\mathcal{D} - 3\mathcal{J} - 2\mathcal{I} - \\ &- C_0 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - \\ &- 2 \cdot 0 - 1 = -4. \end{aligned}$$

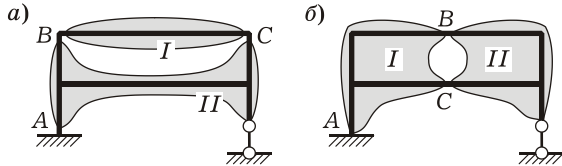


Рисунок 1.49

Результат совпал с тем, который был получен в примере 1.13.

1.10.5 Число степеней свободы (степень изменяемости) ферм. Расчетная схема фермы (шарнирно-стержневая система) предполагает соединение элементов в узлах полными шарнирами и отсутствие жестких связей. Число степеней свободы такой системы можно определить по формуле (1.2), но в данном случае это неудобно, так как многие из шарниров кратные.

Если считать центры шарниров отдельными точками, не связанными друг с другом и с землей, то каждая из них будет иметь на плоскости *две* степени свободы. Стержни, соединяющие узлы, обеспечивают сохранение между ними постоянного расстояния. Следовательно, каждый из стержней фермы, как и опорные стержни, эквивалентен одной элементарной связи и устраняет *одну* степень свободы.

С учетом этого получим формулу для подсчета числа степеней свободы фермы:

$$W = 2\mathcal{Y} - C_0 = 2\mathcal{Y} - C_{\text{ф}} - C_{\text{оп}}, \quad (1.4)$$

где \mathcal{Y} – количество шарнирных узлов фермы, непосредственно не связанных с землей; $C_0 = C_{\text{ф}} + C_{\text{оп}}$ – количество одиночных связей (стержней фермы и опорных стержней); $C_{\text{ф}}$ – количество стержней фермы; $C_{\text{оп}}$ – количество опорных стержней.

Пример 1.15 Определим число степеней свободы фермы, показанной на рисунке 1.50.

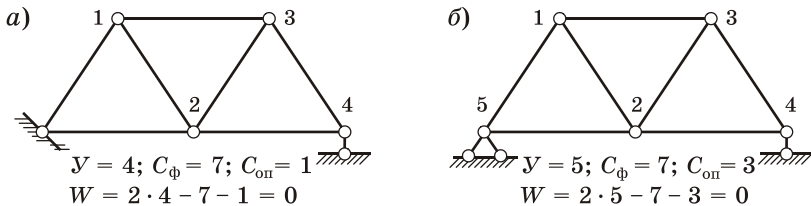


Рисунок 1.50

Было показано (см. п. 1.8.4), что шарнир в плоской системе эквивалентен двум непараллельным стержням. Поэтому фактически на рисунке 1.50, а, б изображены расчетные схемы одной и той же фермы. Однако формально эти две схемы содержат разное количество Y и $C_{оп}$ — узлов, не связанных с землей непосредственно (на рисунке пронумерованы), и опорных связей. Воспользовавшись формулой (1.4), и в одном, и в другом случае получаем $W = 0$.

1.10.6 Число степеней свободы (степень изменяемости) рам.

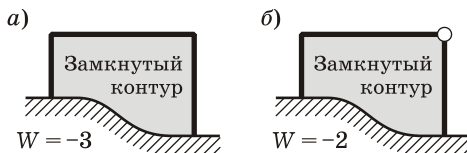


Рисунок 1.51

Получим еще одну формулу вычисления W , удобную для исследования рам.

Рассмотрим простейшую раму, представляющую собой один бесшарнирный замкнутый контур (рисунок 1.51, а). Подсчи-

тав число степеней свободы по одной из предложенных выше формул, получим $W = -3$, т. е. имеются три лишние связи. Если количество замкнутых контуров K , то $W = -3K$.

Врежем простой шарнир в один из жестких узлов рамы (рисунок 1.51, б). Этим мы увеличим число степеней свободы на единицу, так как удалим одну элементарную связь (жесткое соединение эквивалентно трем одиночным связям, шарнирное — двум). Врезание III простых шарниров увеличивает число степеней свободы на III единиц. С учетом этого

$$W = III - 3K, \quad (1.5)$$

где III — количество простых шарниров; K — количество замкнутых контуров.

Замечание по применению формулы (1.5): при подсчетах W по этой формуле опорные стержни считаются *элементами системы*,

т. е. принадлежащие им шарниры с учетом кратности подсчитываются в количестве III .

Подчеркнем, что в соотношениях (1.2), (1.3) количество III уменьшает W на $2III$, в (1.5) – увеличивает на III . Это связано с различием в понятиях «закрепление элемента шарниром» и «врезание шарнира». Закрепляя свободный элемент с помощью шарнира, мы делаем конструкцию менее подвижной; врезание шарнира означает замену жесткой связи шарнирной, т. е. увеличение подвижности (рисунок 1.52).



Рисунок 1.52

Пример 1.16 Подсчитаем число степеней свободы рамы (рисунок 1.53, а) двумя способами. Воспользовавшись формулой (1.3) (рисунок 1.53, б), получаем:

$$W = 3D - 3Ж - 2III - C_0 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 = -3,$$

по формуле (1.5) (рисунок 1.53, в)

$$W = III - 3K = 6 - 3 \cdot 3 = -3,$$

следовательно, рама содержит три лишние связи.

Обратим внимание на то, что в первом случае диски I , II связаны между собой простым шарниром A и простым жестким соединением, с основанием – простым шарниром B и двумя одиночными связями.

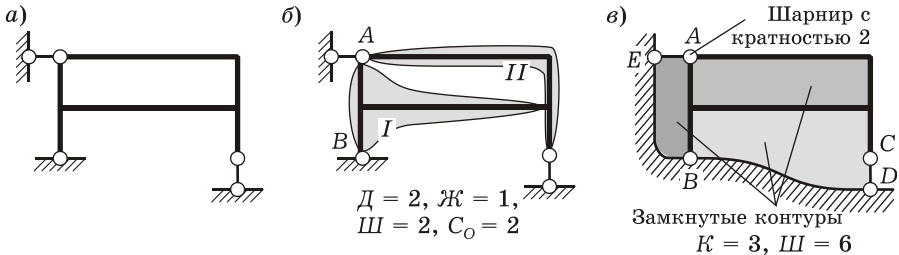


Рисунок 1.53

Во втором случае стержни AE и CD считаются элементами системы, все шарниры учитываются в количестве III , причем B, C, D, E – шарниры простые, A – кратный.

В заключение повторим, что понятие числа степеней свободы W , введенное в п. 1.10.2 – 1.10.6, применяется для анализа плоских стержневых систем, рассчитываемых на статические нагрузки по недеформированной схеме. Если при этом

- $W > 0$, то система не имеет достаточного количества связей и поэтому является геометрически изменяемой;
- $W = 0$, то система обладает минимально необходимым для неизменяемости числом связей; при правильной их расстановке система геометрически неизменяема и статически определима;
- $W < 0$, то система обладает избыточным для неизменяемости числом связей; при правильной их расстановке система геометрически неизменяема и статически неопределима.

1.11 Кинематический анализ сооружений: аналитические методы

Изложенный выше геометрический метод (см. подразд. 1.9) является наглядным и эффективным средством кинематического анализа стержневых систем. Однако, к сожалению, он оказывается

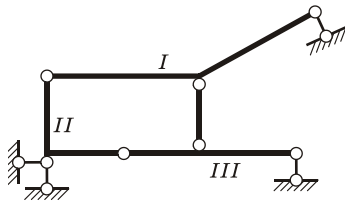


Рисунок 1.54

применим не во всех случаях. В качестве такого примера рассмотрим шарнирно-стержневую систему, изображенную на рисунке 1.54. В ней можно выделить диски *I*, *II*, *III* и диск земли. Однако соединение этих дисков не укладывается в способы двух- и трехдискового соединений, рассмотренные в п. 1.9.2.

В подобных случаях применяются аналитические методы кинематического анализа сооружения. При этом проверяются два условия (признака) геометрической неизменяемости: необходимый и достаточный.

1.11.1 Необходимое аналитическое условие геометрической неизменяемости. Как было показано выше, у геометрически неизменяемой системы имеется достаточное количество связей, которые при правильной расстановке обеспечивают ее неподвижность. Такая конструкция не должна обладать «свободой», т. е. необходимо, чтобы ее число степеней свободы было не большим нуля. Следовательно, *необходимое аналитическое условие геометрической неизменяемости* системы имеет вид

$$W \leq 0. \quad (1.6)$$

Ее определитель

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & -a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 1(-a) - (-1)a = 0.$$

Конструкция мгновенно изменяема; опорные стержни не могут удержать ее от поворота относительно точки A . Иначе говоря, опорные реакции не уравновешивают внешнюю нагрузку.

Недостатком общего аналитического метода кинематического анализа является его громоздкость, так как требует составления системы алгебраических уравнений и вычисления ее определителя. Однако для достаточно простых конструкций этот метод удобен, особенно когда их элементы скреплены не по известным правилам соединения двух и трех дисков.

1.11.3 Метод нулевой нагрузки. Этот метод несколько проще, чем рассмотренный выше. Суть его в следующем: определяются усилия в элементах конструкции при отсутствии нагрузки; равенство их нулю говорит о неизменяемости системы, если же усилия оказываются неопределенными, то система изменяема.

Пример 1.18 Рассмотрим ферму (рисунок 1.56, a). Проверим, достаточно ли в ней стержней для геометрической неизменяемости, пользуясь формулой (1.4). Здесь $У = 7$; $C_0 = C_{\text{ф}} + C_{\text{оп}} = 11 + 3 = 14$, следовательно, $W = 2У - C_0 = 2 \cdot 7 - 14 = 0$. Система обладает минимально необходимым для неизменяемости числом связей.

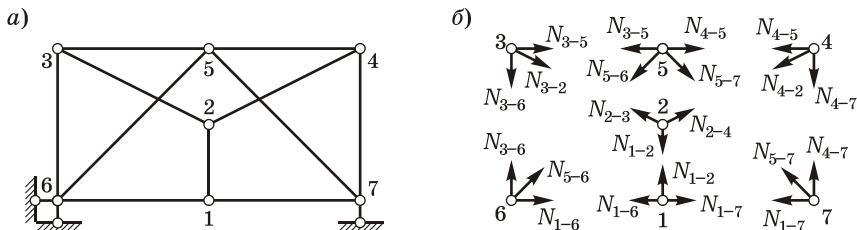


Рисунок 1.56

В данной ферме нет ни одного узла, где сходятся два стержня. Докажем, что при отсутствии нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю. Воспользуемся известным из теоретической механики способом вырезания узлов (см. п. 4.3.2). Опорные реакции нулевые.

Сначала вырежем узел 1 (рисунок 1.56, b). Проецируя все силы на вертикаль, найдем, что $N_{1-2} = 0$. Затем вырежем узел 2, в котором имеется два новых стержня и нет нагрузки, поэтому

$$N_{2-3} = 0 \quad \text{и} \quad N_{2-4} = 0.$$

После этого перейдем к узлам 3 и 4 и, удовлетворяя тому же условию (в каждом узле два новых стержня), получим:

$$N_{3-5} = 0; N_{3-6} = 0; N_{4-5} = 0; N_{4-7} = 0.$$

Теперь рассмотрим узел 5:

$$N_{5-6} = 0; N_{5-7} = 0.$$

Вырезая узлы 6 и 7, находим:

$$N_{1-6} = 0; N_{1-7} = 0.$$

Усилия во всех стержнях данной фермы при отсутствии нагрузки нулевые, следовательно, конструкция геометрически неизменяема.

Заметим, что оба рассмотренных здесь метода применимы только к системам с *минимально необходимым* количеством связей ($s = W = 0$).

Для выявления геометрической и мгновенной изменяемости также применяется *метод замены связей*. Его мы изучим позже, после методов определения внутренних усилий в статически определимых системах (см. п. 2.3.2).

1.11.4 Порядок проведения кинематического анализа. Кинематический анализ расчетной схемы конструкции, как известно, выполняется с целью установить, изменяема система или нет, а также найти количество либо недостающих, либо избыточных связей. Его удобно проводить в два этапа:

- определение числа степеней свободы системы по одной из формул (1.2)–(1.5) и проверка необходимого аналитического условия неизменяемости (1.6);
- анализ правильности расположения связей с использованием геометрического метода кинематического анализа (на основании принципов геометрически неизменяемого соединения двух и трех дисков) или, если он неприменим, одного из аналитических методов.

Если связи правильно расположены, то конструкция статически определима при их минимально необходимом количестве и статически неопределима, если есть избыточные связи.

Пример 1.19 Рассмотрим шарнирно-стержневую систему (рисунок 1.57, а). Число степеней свободы определим по формуле (1.4). Здесь $U = 7$; $C_0 = C_{\phi} + C_{\text{оп}} = 11 + 3 = 14$, поэтому

$$W = 2U - C_0 = 2 \cdot 7 - 14 = 0.$$

Система имеет минимально необходимое для геометрической неизменяемости число связей.

Выделим в системе диски I , II и III (диск I – вертикальный стержень). Три диска соединены шарниром C и двумя парами стержней 1, 2 и 3, 4 (рисунок 1.57, б). Фиктивные шарниры A и B , соответствующие этим парам, находятся в бесконечном удалении от шарнира C по вертикали. Мысленно соединяя их, получим шарнирный треугольник ABC ,

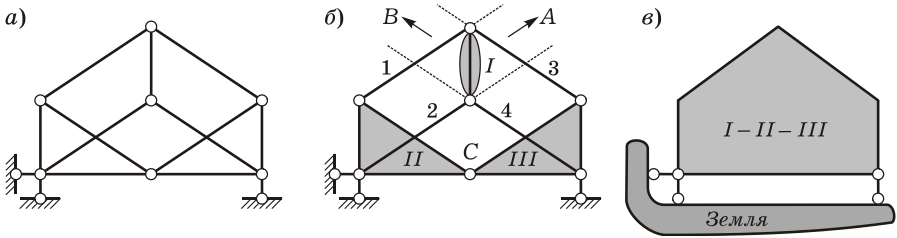


Рисунок 1.57

что говорит о геометрической неизменяемости данного соединения. Теперь совокупность дисков $I-II-III$ можно считать одним диском (рисунок 1.57, в). Этот диск прикреплен к земле тремя стержнями, оси которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке, т. е. по правилу неизменяемого двухдискового соединения.

Вывод: система является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Пример 1.20 Рассмотрим балочную конструкцию (рисунок 1.58), в которой дисками будем считать отдельные балки $I-IV$. Воспользовавшись формулой (1.3), где $D = 4$, $Ж = 1$, $III = 3$, $C_0 = 2$, получаем:

$$W = 3D - 3Ж - 2III - C_0 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

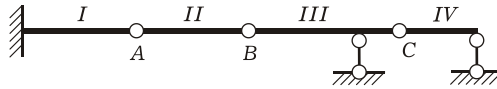


Рисунок 1.58

Вывод: система геометрически изменяема. Она не имеет достаточного количества связей и не может воспринимать внешние нагрузки.

2.1 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета на статическую нагрузку

2.1.1 Внутренние усилия как реакции связей. Расчет сооружений на прочность предполагает нахождение опорных реакций и внутренних усилий в их элементах. Из курса сопротивления материалов известно, что все внутренние силы для плоской стержневой системы можно привести к трем сосредоточенным составляющим – продольной N и поперечной Q силам и изгибающему моменту M .

Аналогично все внутренние связи в некотором сечении можно заменить тремя одиночными стержнями (см. п. 1.5.4), соединяющими «левую» и «правую» части конструкции (кавычки здесь поставлены потому, что части могут быть, например, верхней и нижней). Вариантов расположения этих трех связей в сечении может быть несколько (см. рисунок 1.17, *в*), главное, чтобы все они не были параллельными и не пересекались в одной точке.

Каждое из внутренних усилий N , Q , M может быть переведено в разряд *внешних* отбрасыванием соответствующей одиночной связи (рисунок 2.1). Поэтому можно говорить, что задачей расчета некоторой стержневой системы является определение усилий во всех ее связях, не делая при этом различия между опорными и внутренними связями.

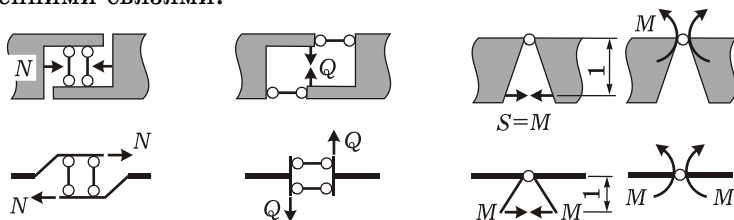


Рисунок 2.1

2.1.2 Статическая определимость и неопределимость. Термин «статически определимая система» предполагает, что усилия во всех связях такой системы можно найти из уравнений статического равновесия конструкции в целом или отдельных ее частей. Здесь количество неизвестных усилий равно количеству независимых уравнений равновесия.

Соответственно для нахождения усилий в элементах *статически неопределимых* систем уравнений статики недостаточно, так как количество неизвестных усилий превышает количество независимых уравнений равновесия.

Статически определимые системы содержат *минимально необходимое* для геометрической неизменяемости количество связей, для них число степеней свободы $W = 0$. Статически неопределимые конструкции содержат *больше* связей, чем необходимо для их неизменяемости, для них $W < 0$.

Строго говоря, все стержневые системы при точном расчете по деформированной схеме являются статически неопределимыми (см. п. 1.7.3). И лишь в рамках линейно деформируемой модели, где уравнения равновесия можно составлять по недеформированной схеме (как для абсолютно твердого тела), многие конструкции можно считать статически определимыми.

Необходимым и достаточным признаком статической определимости системы является ее геометрическая и мгновенная неизменяемость и отсутствие лишних связей.

2.1.3 Свойства статически определимых систем. Отметим, не приводя доказательств, основные свойства этих конструкций:

- Все связи статически определимой системы являются *абсолютно необходимыми*, т. е. при удалении хотя бы одной из них система превращается в геометрически изменяемую с числом степеней свободы $W > 0$.

- Каждой конкретной конечной нагрузке соответствуют конечные и вполне определенные значения усилий (*свойство единственности решения*). При отсутствии нагрузки усилия в элементах статически определимых систем равны нулю.

- Самоуравновешенная нагрузка, приложенная к локальной неизменяемой части конструкции, вызывает усилия в элементах только этой части; в остальных элементах системы усилия будут нулевыми (рисунок 2.2).

Еще одно свойство статически определимых систем проявляется в случаях, когда в конструкции можно выделить *основные* и *дополнительные* элементы. Основная часть системы сама по себе геометрически неизменяема, а дополнительные части опираются на нее, обеспечивая тем самым собственную неизменяемость.

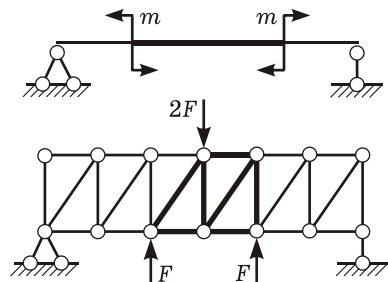


Рисунок 2.2

■ Нагрузка, приложенная к основной части конструкции, будет вызывать усилия только в ее элементах. Например, для балки, изображенной на рисунке 2.3, при нагружении основной части, расположенной левее шарнира, в правой части никаких усилий не возникает.



Рисунок 2.3

Из трех групп уравнений строительной механики для определения усилий достаточно лишь одной группы – уравнений равновесия; уравнения совместности деформаций и физические не задействованы. Задачи расчета на прочность (вычисление усилий) и жесткость (определение перемещений) получаются *независимыми*. Отсюда вытекают следующие два свойства:

■ Геометрические характеристики поперечных сечений, деформации элементов, а также характеристики упругих свойств материалов в уравнения равновесия не входят и поэтому не влияют на значения усилий.

■ Смещения опор и температурные воздействия не вызывают усилий в статически определимой системе.

Статически определимые системы просты и удобны в расчете. Однако они обладают меньшей жесткостью по сравнению со статически неопределимыми. Кроме этого, разрушение одного из элементов влечет за собой выход из строя всей системы, что уменьшает надежность и безопасность конструкции.

2.1.4 Классификация методов расчета стержневых систем на статическую нагрузку. Для определения усилий в элементах сооружений при статических нагрузках и воздействиях были разработаны *аналитические, графические и графоаналитические* методы (рисунок 2.4). В настоящее время последние две группы методов потеряли свою прежнюю актуальность и в расчетной практике используются редко. Рассмотрим далее основные аналитические методы, позволяющие получить значения реакций и внутренних усилий в элементах стержневых систем.

Статические методы подразумевают составление уравнений статического равновесия твердого тела. Эти уравнения можно брать в различных формах (уравнения проекций на оси; моментов), записывать для различных частей конструкции, использовать последовательно в различных порядках. Среди статических можно выделить метод сечений и его разновидности, а также метод замены связей.

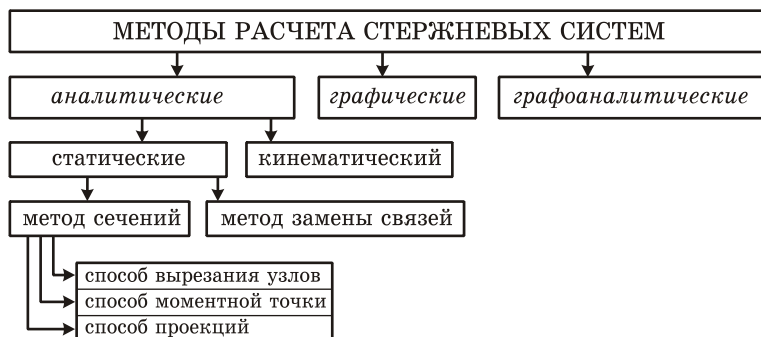


Рисунок 2.4

Метод сечений подробно изучался в сопротивлении материалов [16], поэтому лишь кратко напомним его суть. Чтобы найти внутренние усилия в поперечном сечении, необходимо:

- мысленно рассечь стержень (стержневую систему) в интересующем месте;
- отбросить одну из образовавшихся частей;
- заменить действие отброшенной части на оставшуюся внутренними усилиями (рисунок 2.5);
- составить уравнения статического равновесия всех сил, приложенных к оставшейся части.

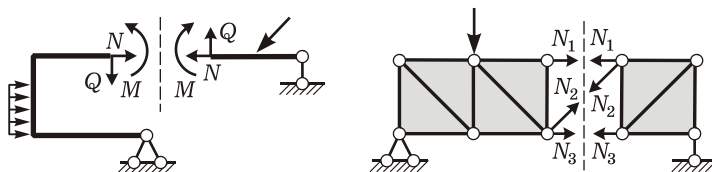


Рисунок 2.5

Уравнения равновесия можно брать в различных формах, записывать для различных частей конструкции, использовать последовательно в различных порядках. Обычно стремятся использовать такие способы их составления, которые приводят к наиболее простым вычислениям, т. е. каждое из усилий находится из одного независимого уравнения, а не из системы двух-трех совместных уравнений.

Различают несколько разновидностей метода сечений: *способы вырезания узлов; проекций; моментной точки*. Заметим, что эти

названия чаще всего употребляются, когда говорят о расчетах шарнирно-стержневых систем – ферм (см. п. 4.3.2).

Метод замены связей, основанный на принципе суперпозиции, применяется для «ручного» расчета сложных стержневых систем. Заданную конструкцию заменяют более простой путем отбрасывания одних связей и введения других; определяют усилия в новой системе, а затем переходят к исходной.

Кинематический метод основан на принципе возможных перемещений и для определения искомых усилий предполагает составление уравнений возможных работ.

2.2 Кинематический метод определения усилий

2.2.1 Принцип возможных перемещений. Напомним известный из курса теоретической механики вариационный принцип Лагранжа: для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех приложенных к ней сил на любых возможных перемещениях была равна нулю.

Возможными перемещениями точек системы называются любые бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. Такие перемещения еще называют *виртуальными*, так как это условные, «несуществующие» перемещения, не зависящие от приложенных нагрузок.

Возможная работа какой-либо силы постоянной величины определяется как произведение этой силы на возможное перемещение по ее направлению. Если направления силы и перемещения совпадают, возможная работа считается положительной, если эти направления противоположны – работа отрицательна.

Формально запись принципа возможных перемещений имеет следующий вид:

$$A^{(e)} + A^{(i)} = 0, \quad (2.1)$$

где $A^{(e)}$ – возможная работа внешних сил; $A^{(i)}$ – возможная работа внутренних сил.

Внешние силы, к которым относятся и опорные реакции, совершают работу на возможных перемещениях точек их приложения к системе, внутренние силы – на соответствующих этим силам возможных перемещениях сечений, возникших за счет деформаций элементов конструкции.

2.2.2 Применение принципа возможных перемещений для нахождения усилий в статически определимых системах. Как было указано в п. 2.1.2, статически определимой система может считаться только при условии выполнения расчетов по недефор-

мированной схеме, т. е. при составлении уравнений для определения усилий (и опорных реакций, и внутренних сил) элементы конструкции считаются абсолютно твердыми. Кроме этого, отмечалось, что у геометрически неизменяемой и статически определимой системы перемещения без деформаций невозможны (см. п. 1.8.1). Как же тогда задать системе возможные перемещения, одновременно считая ее стержни абсолютно твердыми?

Чтобы точки такой конструкции могли перемещаться, необходимо удалить одну или несколько связей, заменив их действие реакциями. При этом система станет геометрически изменяемой – механизмом ($W = 1$) или кинематической цепью ($W > 1$). Как правило, удобнее рассматривать механизмы с одной степенью свободы, полученные отбрасыванием одной связи.

В п. 1.8.1 было отмечено, что любая геометрически изменяемая система может находиться в равновесии под действием нагрузок частных видов. Задача теперь заключается в том, чтобы *подобрать* такое значение реакции в отброшенной связи, чтобы механизм был в равновесии под действием приложенных к нему сил.

При определении реакций связей возможная работа внутренних сил $A^{(i)} = 0$. Заметим, что *даже при нахождении внутренних сил* по рассматриваемой методике работа $A^{(i)} = 0$, так как деформации конструкции не рассматриваются. Искомые внутренние силы необходимо предварительно перевести в разряд *внешних*, для чего представить их как усилия в трех одиночных стерженьках, скрепляющих две части конструкции (см. рисунок 2.1), затем один стерженок отбросить и заменить нужным усилием.

Поэтому общая запись принципа возможных перемещений (2.1) при определении усилий в статически определимых системах преобразуется к следующему виду:

$$A^{(e)} = 0, \quad (2.2)$$

где $A^{(e)}$ – возможная работа всех внешних сил. Если принцип применяется для нахождения какой-либо внутренней силы, то эта сила должна быть предварительно переведена в разряд внешних.

Пусть требуется найти усилие в какой-либо связи статически определимой системы, безразлично, внешней или внутренней. Используем для этого принцип (2.2).

Пример 2.1 Определим реакцию в опоре B двухпролетной балки (рисунок 2.6, *a*). Отбросим опорную связь в точке B , заменив ее действием искомого усилия V_B , и зададим бесконечно малые возможные перемещения (рисунок 2.6, *b*). Геометрически неизменяемая статически определимая система ($W = 0$) превратилась в механизм с одной степенью свободы ($W = 1$), так как ее отклонения от исходного положения равнове-

сия можно характеризовать одним параметром. В качестве этого параметра примем, например, угол поворота φ левой балки, через который можно выразить вертикальные перемещения по направлениям приложенных сил:

$$\Delta_1 = a \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi a ; \Delta_B = 2\varphi a ; \Delta_2 = \Delta_3 = 3\varphi a .$$

Составим уравнение возможных работ всех сил в форме (2.2):

$$A^{(e)} = -F_1 \Delta_1 + V_B \Delta_B - F_2 \Delta_2 + F_3 \Delta_3 = 0 ,$$

из которого найдем интересующую нас реакцию:

$$V_B = \frac{1}{\Delta_B} (F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 - F_3 \Delta_3) = \frac{1}{2\varphi a} (F \cdot \varphi a + 2F \cdot 3\varphi a - 3F \cdot 3\varphi a) = -F .$$

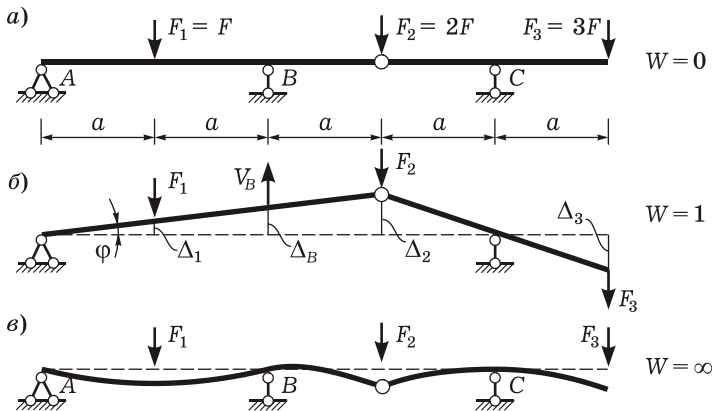


Рисунок 2.6

Необходимо предупредить о часто встречающемся неправильном понимании существа этой методики. Возможные перемещения, показанные на рисунке 2.6, б, возникли не от силы V_B и не от нагрузки. Эти условные перемещения заданы нами и зависят только от конфигурации механизма, сформированного для определения V_B .

Рассмотренный метод определения усилий в статически определимых системах, основанный на принципе возможных перемещений, называется *кинематическим*, так как исследуется кинематика механизмов. Так как каждый из них будет иметь одну степень свободы, то для определения каждого усилия получается одно уравнение с одним неизвестным.

Все уравнения составляются независимо друг от друга; для каждой силы (опорной реакции либо внутреннего усилия) исследуется свой механизм. В этом и *достоинство* метода (не нужно

решать систему уравнений), и его *недостаток*. Для решения уравнения возможных работ необходимо все возможные перемещения Δ_i , на которых совершают работу силы F_i , выразить через один параметр (φ или какой-либо другой). Таким образом, основное внимание уделяется исследованию геометрии (точнее, кинематики) механизмов. Для вычисления многих усилий необходимо исследовать много механизмов. Это нелегко автоматизировать, поэтому кинематический метод чаще применяется при «ручном» счете. Да и в этом случае он используется чаще всего в расчетах на подвижную нагрузку (см. подразд. 2.7). Однако сущность этого метода более понятна на примерах с неподвижной нагрузкой.

Замечание. Принцип возможных перемещений можно использовать не только для нахождения усилий, но также и для определения перемещений – прогибов, углов поворота и т. д. Но расчетная схема сооружения должна быть в этом случае другой. Необходимо будет рассматривать конструкцию как систему с бесконечным числом степеней свободы (рисунок 2.6, в) и вести расчеты *по деформированной схеме* (см. п. 6.1.4). В этом случае не будет нулевой работа внутренних сил $A^{(i)}$.

Мы еще раз убедились в том, что при решении различных задач для одной и той же конструкции могут быть применены различные расчетные схемы. Так, при вычислении усилий стержни системы рассматриваются как абсолютно жесткие элементы, при определении перемещений – как деформируемые.

2.2.3 Порядок определения усилий кинематическим методом.

Для того, чтобы найти некоторое усилие (опорную реакцию, какой-либо внутренний силовой фактор) в статически определимой системе, необходимо:

- удалить ту связь (внешнюю или внутреннюю), реакция в которой определяется, превратив систему в механизм с одной степенью свободы;
- задать полученному механизму бесконечно малое возможное перемещение;
- приложить заданную внешнюю нагрузку и неизвестное пока усилие в отброшенной связи;
- составить уравнение возможных работ всех сил, из которого выразить искомый силовой фактор.

Если требуется определить продольную силу в стержне фермы, удаляется сам стержень. Для нахождения компонент опорных реакций в заделке, внутренних усилий в сечении балки или рамы эти связи предварительно схематизируются в виде трех одиночных стержней. Затем один из них, соответствующий иско-

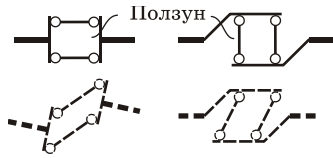


Рисунок 2.7

тому усилию, отбрасывается. При определении момента в сечении остается шарнир, продольной и поперечной сил — два параллельных стержня, называемые *ползун* (рисунок 2.7).

Пример 2.2 Определим продольную силу в стержне 1 консольной фермы от заданной нагрузки (рисунок 2.8, а). Для вычисления N_1 удалим рассматриваемый стержень и полученному механизму зададим бесконечно малое перемещение δ в направлении искомого усилия (рисунок 2.8, б).

Уравнение возможных работ

$$A^{(e)} = N_1 \delta + F \Delta_1 + F \Delta_2 + F \Delta_3 + F \Delta_4 = 0.$$

В качестве параметра, через который выразим все возможные перемещения, примем угол φ . Тогда

$$\Delta_1 = \varphi d; \quad \Delta_2 = 2\varphi d;$$

$$\Delta_3 = 3\varphi d; \quad \Delta_4 = 4\varphi d;$$

$$\delta = \varphi a \cos \alpha = \varphi h.$$

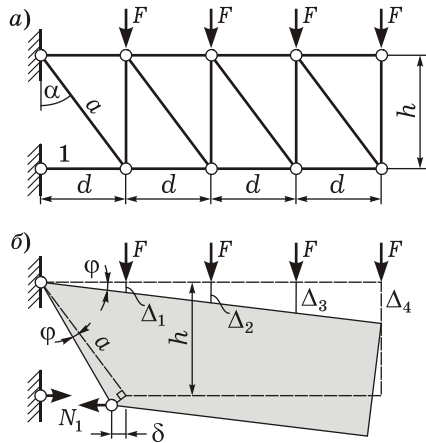


Рисунок 2.8

Подставляя выражения перемещений в уравнение работ и сокращая на φ , находим

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{\delta} (F \Delta_1 + F \Delta_2 + F \Delta_3 + F \Delta_4) = \\ &= -\frac{1}{\varphi h} (F \varphi d + F \cdot 2\varphi d + F \cdot 3\varphi d + F \cdot 4\varphi d) = -10 \frac{F d}{h}. \end{aligned}$$

Знак минус показывает, что стержень сжат.

2.2.4 Общая формулировка и доказательство принципа суперпозиции. В статически определимых системах этот принцип вытекает из допущения о недеформируемости расчетной схемы.

Рассмотрим статически определимую систему (рисунок 2.9, а), на которую действует n внешних силовых факторов F_1, F_2, \dots, F_n . Пусть требуется определить какой-либо параметр напряженно-деформированного состояния (например, усилие или перемещение в произвольной точке k). Представим искомый параметр в виде усилия в условном стержне и обозначим S_k (рисунок 2.9, б).

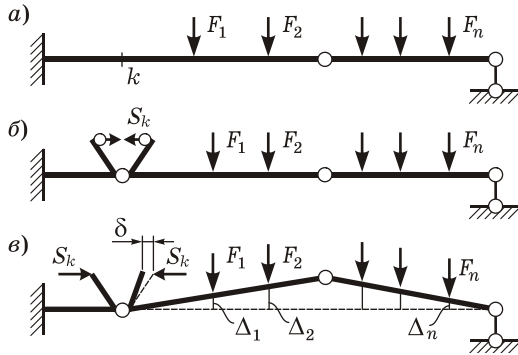


Рисунок 2.9

Отбросив этот стержень, получим механизм с $W = 1$. Зададим ему бесконечно малые перемещения (рисунок 2.9, в). В качестве характерного параметра, через который будем выражать необходимые нам возможные перемещения, примем перемещение δ , на котором совершает работу искомый фактор S_k .

Возможные перемещения по направлениям сил F_1, F_2, \dots, F_n являются функцией параметра δ :

$$\Delta_1 = f_1(\delta), \Delta_2 = f_2(\delta), \dots, \Delta_n = f_n(\delta).$$

Случай, когда параметр δ с точностью до малых первого порядка равен нулю, возможен только в мгновенно изменяемых системах. Такие системы сейчас не рассматриваются. В силу малости перемещений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ каждое из них можно разложить в ряд по степеням δ :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 + b_1\delta + c_1 \frac{\delta^2}{2} + \dots; \quad \Delta_2 = a_2 + b_2\delta + c_2 \frac{\delta^2}{2} + \dots; \\ \dots; \quad \Delta_n &= a_n + b_n\delta + c_n \frac{\delta^2}{2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где слагаемые a_1, a_2, \dots, a_n должны равняться нулю, так как на основании недеформируемости расчетной схемы при $\delta \rightarrow 0$ и перемещения $\Delta_1 \rightarrow 0, \Delta_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta_n \rightarrow 0$. Бесконечно малые второго и высшего порядков в (2.3) можно отбросить. В результате

$$\Delta_1 = b_1\delta; \quad \Delta_2 = b_2\delta; \quad \dots; \quad \Delta_n = b_n\delta. \quad (2.4)$$

Из недеформируемости расчетной схемы также следует, что коэффициенты b_1, b_2, \dots, b_n зависят лишь от исходной геометрии системы и не зависят от величин нагрузок, упругих характеристик материала и т. п.

Запишем уравнение возможных работ в форме (2.2):

$$A^{(e)} = S_k \delta - F_1 \Delta_1 - F_2 \Delta_2 - \dots - F_n \Delta_n = 0.$$

Подставив в него выражения (2.4), получим

$$S_k \delta - F_1 b_1 \delta - F_2 b_2 \delta - \dots - F_n b_n \delta = 0.$$

Сокращая на δ , получим выражение для искомого фактора S_k :

$$S_k = b_1 F_1 + b_2 F_2 + \dots + b_n F_n = \sum_{i=1}^n b_i F_i. \quad (2.5)$$

Обозначив коэффициенты b_i через s_{ki} , перепишем (2.5) в виде

$$S_k = \sum_{i=1}^n S_{ki} = \sum_{i=1}^n s_{ki} F_i, \quad (2.6)$$

где $S_{ki} = s_{ki} F_i$.

Вясним теперь физический смысл коэффициентов s_{ki} . Положим, например, $F_1 = 1$, остальные силы $F_2 = 0, \dots, F_n = 0$. Тогда S_k будет численно равно s_{k1} . Таким образом, s_{ki} – это усилие в сечении k , вызванное действием единичной силы, приложенной по направлению F_i .

Формула (2.6) – общая запись *принципа суперпозиции*. Она показывает, что в статически определимой системе любое усилие от действия нескольких силовых факторов может быть представлено в виде алгебраической суммы усилий от каждого фактора в отдельности. При этом каждое слагаемое можно представить в виде произведения величины соответствующего усилия от единичного воздействия s_{ki} на F_i .

Обратим еще внимание на порядок расстановки индексов в обозначении s_{ki} . Первый индекс показывает, где вычисляется усилие, второй – от чего.

Рассуждения, сделанные при получении формулы (2.4), будут справедливыми и в случае, когда нагрузка задана в виде обобщенных сил. Например, если имеется внешний момент M_i (пара сил), то соответствующее ему перемещение Δ_i – угол поворота.

Понятие единичной силы тоже условно. Это может быть как единичная сосредоточенная сила, так и момент, и распределенная нагрузка единичной интенсивности.

2.3 Метод замены связей

Суть данного метода состоит в том, что заданную систему заменяют более простой путем отбрасывания одних стержней (заменяемых) и введения других (заменяющих). При этом вновь полученная система должна оставаться геометрически неизменяемой и поддаваться простому расчету. Далее определяют усилия в стержнях новой системы, а затем переходят к усилиям в стержнях заданной системы.

2.3.1 Замена одной связи. Самый простой вариант метода замены связей: в заданной системе отбрасывается всего один стержень, а взамен его вводится один новый.

Пример 2.3 Рассмотрим шарнирно-стержневую систему – ферму (рисунок 2.10, а). При любом расчленении не удастся выбрать моментную точку так, чтобы в уравнение моментов входило бы только одно неизвестное усилие. Вырезав любой узел, будем иметь три неизвестных усилия, а уравнений равновесия для каждого узла будет только два; поэтому мы сразу не сможем найти то или иное усилие. Можно составить и решить совместную систему 12 уравнений, если рассмотреть равновесие всех шести узлов. При наличии компьютера с соответствующим программным обеспечением сделать это несложно.

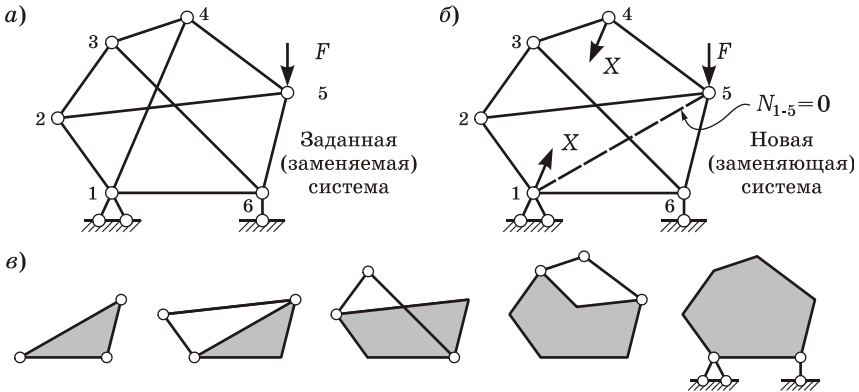


Рисунок 2.10

Однако мы еще не провели кинематический анализ системы и поэтому не уверены в ее геометрической неизменяемости. Связей достаточно, так как $У = 6$; $C_0 = 12$;

$$W = 2У - C_0 = 2 \cdot 6 - 12 = 0.$$

Но, мысленно проанализировав структуру конструкции, убеждаемся, что она не сводится к известным принципам неизменяемого соединения двух или трех дисков. Попытаемся найти другой способ анализа.

Удалим из системы стержень 1-4, заменив его действие неизвестной пока силой X . Вместе с этим введем в систему новый стержень 1-5, чтобы получить более простую по структуре ферму (рисунок 2.10, б).

Эта новая ферма геометрически неизменяема, так как ее образование последовательно сводится к принципам соединения трех дисков тремя шарнирами, а затем двух дисков тремя стержнями (рисунок 2.10, в).

На новую (заменяющую) ферму действуют уже две внешние силы — F и X . Значение силы X найдем из условия равенства нулю продольной силы в заменяющем стержне 1-5:

$$N_{1-5} = 0.$$

На основании принципа суперпозиции представим N_{1-5} в виде

$$N_{1-5} = N_X + N_F,$$

где N_X , N_F — соответственно усилия в стержне 1-5 от сил X и F , приложенных к системе по отдельности.

Далее представим N_X как произведение

$$N_X = \bar{N} \cdot X,$$

где \bar{N} — усилие в стержне 1-5 от единичной силы, приложенной по направлению X (рисунок 2.11). Его можно найти, вырезав последовательно узлы 4, 3, 2, 1.

Таким образом, $N_{1-5} = \bar{N} \cdot X + N_F$. Приравняв это выражение нулю, получим уравнение метода замены связей

$$\bar{N} \cdot X + N_F = 0, \quad (2.7)$$

из которого найдем

$$X = -N_F / \bar{N}. \quad (2.8)$$

Проанализируем соотношение (2.8). Если \bar{N} не равно нулю, то сила X имеет конечное вполне определенное значение. Зная его, можно найти усилия во всех стержнях фермы. Для этого необходимо последовательно вырезать узлы и рассмотреть их равновесие. Начав с узла 4, в котором сходятся теперь всего две неизвестные силы, мы будем иметь достаточно простые уравнения.

Если же окажется, что $\bar{N} = 0$, то $X = -N_F / 0 = -\infty$. Усилие в отброшенном стержне 1-4 заданной фермы бесконечно большое, что является статическим признаком ее изменяемости (см. п. 1.11.3).

Отсюда следует *правило*: если от силы, приложенной вместо отброшенного стержня, усилие в заменяющем стержне равно нулю, то заданная система *мгновенно изменяема*.

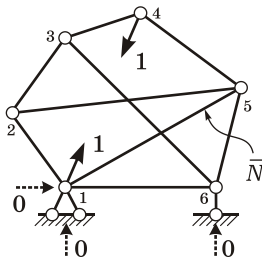


Рисунок 2.11

2.3.2 Замена нескольких связей. Изложенный метод можно распространить и на большее количество заменяемых связей. Он применим не только к фермам, но и к любым другим стержневым системам и служит для определения любых усилий: опорных реакций, моментов, поперечных, продольных сил и т. п. [13, 17].

Для общности дальнейших рассуждений обозначим искомые усилия S .

В случае, когда для образования более простой в расчете системы заменяются n связей, вместо одного уравнения (2.7) будет система n линейных алгебраических уравнений. Она записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1F} &= 0; \\ s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2F} &= 0; \\ \dots & \\ s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nF} &= 0, \end{aligned}$$

в матричной форме

$$\mathbf{L}_S \vec{X} + \vec{S}_F = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_F = \begin{pmatrix} S_{1F} \\ S_{2F} \\ \dots \\ S_{nF} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь \vec{X} – вектор усилий в отброшенных связях; \vec{S}_F – так называемый «грузовой» вектор усилий во вновь введенных (заменяющих) связях от заданной нагрузки; \mathbf{L}_S – матрица усилия S , которая в данном случае квадратная; каждый ее элемент s_{ki} – это усилие в заменяющей связи k от единичного усилия, приложенного в направлении X_i .

Если определитель матрицы \mathbf{L}_S отличен от нуля ($\det \mathbf{L}_S \neq 0$), система (2.9) имеет единственное решение, определяющее искомый вектор \vec{X} :

$$\vec{X} = -\mathbf{L}_S^{-1} \vec{S}_F. \quad (2.10)$$

Зная усилия X_1, X_2, \dots, X_n в отброшенных связях, можно найти усилия во всех остальных связях системы.

Теперь допустим, что мы изменяем геометрию системы так, что $\det \mathbf{L}_S \rightarrow 0$. Тогда элементы обратной матрицы \mathbf{L}_S^{-1} будут бесконечно возрастать и, согласно формуле (2.10), будут бесконечно

возрастать усилия X_1, X_2, \dots, X_n . Возможность появления бесконечно больших усилий при конечной нагрузке служит признаком изменяемости системы (см. п. 1.11.2).

Следовательно, если в заменяющей системе определитель

$$\det \mathbf{L}_S = 0,$$

то исходная система *мгновенно изменяема*.

Выводы. Таким образом, метод замены связей позволяет:

- выявить мгновенную изменяемость заданной системы, если невозможно свести способы соединения ее стержней к принципам геометрически неизменяемого соединения двух и трех дисков;
- при определении усилий избежать решения совместной системы уравнений равновесия большого порядка, рассмотрев вместо этого несколько независимых уравнений и систем гораздо меньшего порядка.

Однако метод замены связей имеет достаточно сложный алгоритм расчета. Его применение требует от расчетчика опыта решения более простых задач и умения преобразовывать систему к более простой перестановкой связей. Этот метод относительно удобен для ручного счета, но его трудно автоматизировать: процесс составления уравнений равновесия в каждом конкретном случае нестандартен, он требует выполнения достаточно большой умственной работы.

Для определения усилий метод замены связей был актуален ранее, когда решение систем уравнений даже с небольшим количеством неизвестных было проблемой. В настоящее время, имея под рукой современный компьютер, гораздо проще составить и решить совместную систему уравнений статического равновесия. Но для выявления мгновенной изменяемости стержневых систем со сложной структурой этот метод остается важным.

2.4 Расчеты на подвижную нагрузку методом линий влияния

2.4.1 Подвижные нагрузки в задачах статики. *Подвижной* называется временная нагрузка, положение которой на сооружении меняется в течение всего периода ее действия.

Многие сооружения воспринимают различные виды подвижных нагрузок: мосты – нагрузки от движущегося по ним транспорта, подкрановые балки – от тележек кранов и т. д.

В большинстве случаев подвижная нагрузка представляет собой систему связанных между собой *вертикальных грузов* (давление колес локомотивов, автомобилей, крановых тележек и т. д.). В некоторых случаях подвижная нагрузка схематизируется в ви-

де *распределенной нагрузки* (например, гусеничная техника, толпа людей) (рисунок 2.12).

При больших скоростях движения необходимо учитывать возникающие силы инерции. Такие расчеты выполняются методами динамики сооружений и в данном пособии не рассматриваются. Полагая, что скорости движения грузов достаточно малы, будем считать подвижную нагрузку *статической* (квазистатической), не учитывая силы инерции.

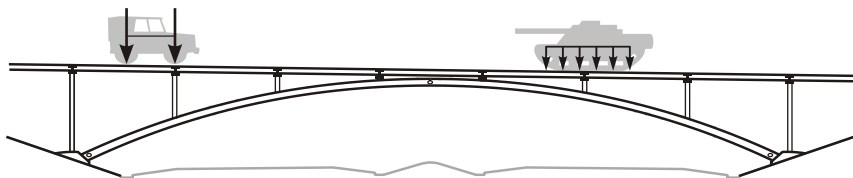


Рисунок 2.12

2.4.2 Расчетное положение нагрузки. При изменении положения нагрузки в элементах сооружения изменяют свои значения внутренние силы, напряжения и перемещения. Поэтому расчет систем на подвижную нагрузку сложнее, чем на неподвижную.

Возникают следующие задачи: 1) найти такое положение нагрузки, при котором усилия в элементах системы будут наибольшими или наименьшими (экстремальными); 2) вычислить экстремальные значения усилий.

Расчетным (опасным, невыгоднейшим) положением нагрузки называется такое ее положение, при котором некоторое усилие S в определенном сечении или стержне системы достигает экстремального значения. Напомним, что под S может пониматься опорная реакция, изгибающий момент, продольная сила и т. п.

Наиболее распространенным и универсальным методом определения расчетного положения нагрузки является *метод линий влияния*, основанный на принципе суперпозиции. Он применим для линейно деформируемых стержневых систем.

Суть его состоит в следующем. Вначале рассматривают движение по сооружению всего одной сосредоточенной силы $\bar{F}=1$. Это простейшая базовая сила, с помощью которой можно получить любую нагрузку (момент есть пара сил, распределенная нагрузка – бесконечное число элементарных сил). Затем, имея расчет конструкции на действие единичной силы, переходят к заданной подвижной нагрузке.

2.4.3 Понятие о линиях влияния. *Линией влияния* какого-либо усилия называется график, изображающий закон изменения

этого усилия в зависимости от положения на системе подвижной единичной силы $\bar{F} = 1$, имеющей постоянное направление. Такую силу называют *грузом*, так как чаще всего она направлена вниз.

Понятие линии влияния можно распространить и на другие факторы – напряжения, перемещения и т. д.

Следует подчеркнуть разницу между понятиями «линия влияния» и «эпюра». Ведь, по сути, эпюра – это тоже графическое изменение закона изменения какого-либо усилия. Сравним, например, эпюру изгибающих моментов M и линию влияния изгибающего момента в сечении k (рисунок 2.13).

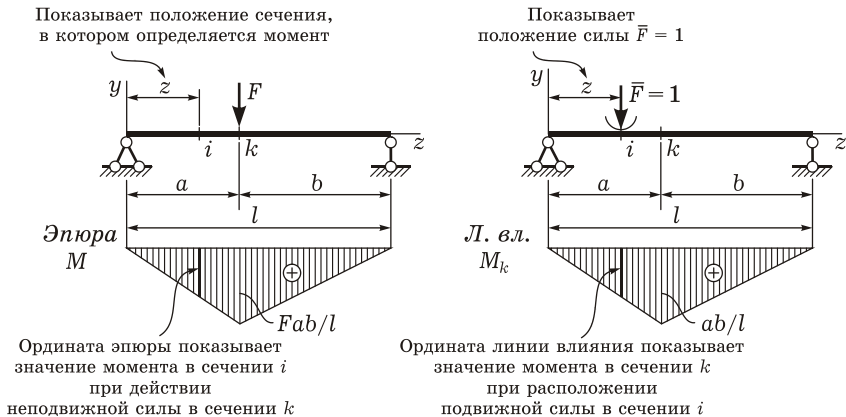


Рисунок 2.13

Эпюра – это график усилий *во всех сечениях* конструкции, она соответствует фиксированному положению нагрузки. Линия влияния показывает усилие только в *одном сечении* – в том, для которого она построена; это график численных значений данного усилия.

В соответствии с тем, что линии влияния строятся всегда от безразмерной единичной сосредоточенной силы, размерность их определяется зависимостью:

$$\text{Размерность ординат линии влияния} = \frac{\text{размерность искомой величины}}{\text{размерность силы}}.$$

Так, например,

$$[\text{Л. вл. } V, Q, N] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{Н}} \right] = [-] \text{ (безразмерная)}; [\text{Л. вл. } M] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \right] = [\text{М}].$$

Линии влияния находят применение при расчетах сооружений не только на действие подвижных нагрузок. Их широко ис-

пользуют для исследования усилий от неподвижных нагрузок, особенно при многовариантном нагружении конструкции.

Для построения линий влияния в статически определимых системах можно использовать любые методы расчета на статическую нагрузку (см. п. 2.1.3).

2.5 Статический метод построения линий влияния

2.5.1 Общий ход расчета. Обычно построение линии влияния некоторого силового фактора S статическим методом ведут в следующем порядке:

- груз $\bar{F}=1$ располагают на участке его движения (рисунок 2.14);

- выбирают систему координат y, z , в которой координатой z фиксируют положение груза;

- считая груз неподвижным, с помощью уравнений равновесия находят аналитическое выражение для искомой величины $S = S(z)$;

- по этому выражению строят график – линию влияния S .

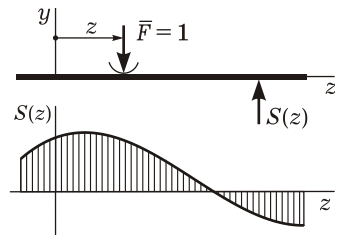


Рисунок 2.14

Продemonстрируем сказанное на примерах построения линий влияния усилий в однопролетной балке. В других, более сложных системах (многопролетных балках, фермах, арках) методика получения линий влияния будет дана в соответствующих разделах.

2.5.2 Линии влияния опорных реакций в балке. Рассмотрим балку, по которой перемещается груз $\bar{F}=1$ (рисунок 2.15, а). Совместим начало координат с левой опорой A .

В опорах возникают вертикальные реакции $V_A(z)$ и $V_B(z)$, меняющие свои значения в зависимости от положения груза. Определим их из уравнений моментов:

$$\sum M_B = 0; \quad -V_A l + 1 \cdot (l - z) = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_B l - 1 \cdot z = 0;$$

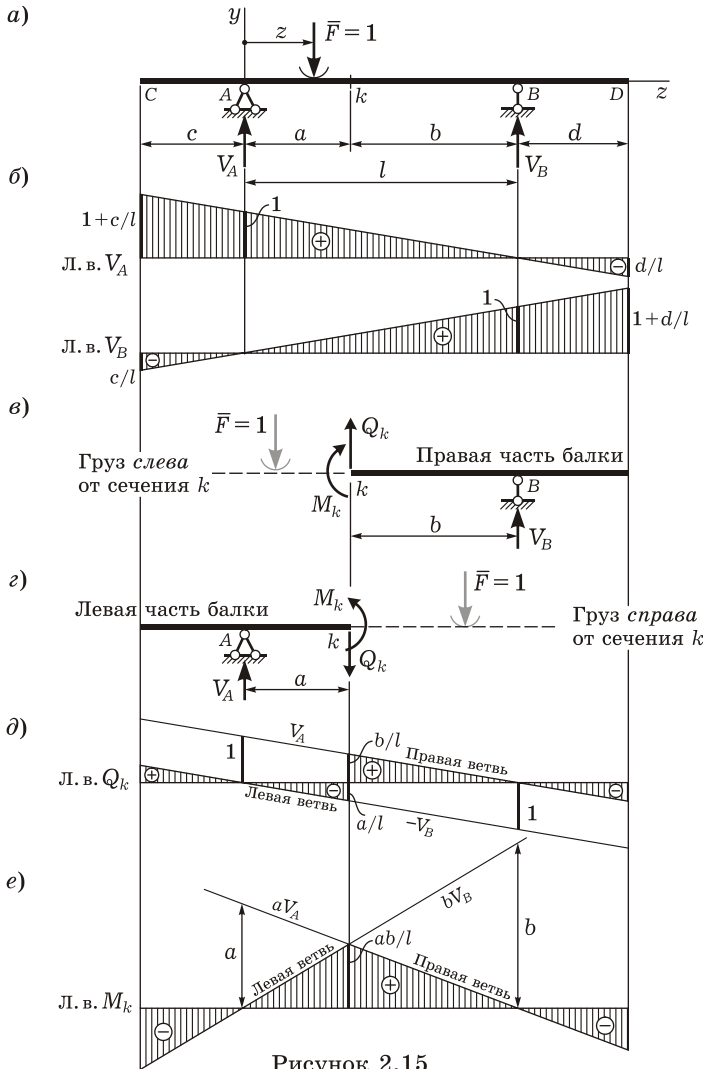
откуда

$$V_A(z) = \frac{l-z}{l}; \quad V_B(z) = \frac{z}{l}. \quad (2.11)$$

Полученные уравнения (2.11) линейны, следовательно, линии влияния V_A и V_B ограничены прямыми. Эти прямые могут быть проведены через любые две точки из отрезка $-c \leq z \leq l+d$. Удобнее всего найти значения под опорами:

при $z = 0$ $V_A = 1$; $V_B = 0$,

при $z = l$ $V_A = 0$; $V_B = 1$.



По этим данным выполнены построения, показанные на рисунке 2.15, б. Прямые продолжены до концов консолей в обе стороны. Ординаты под точками C и D найдены путем подстановки соответствующих значений z в уравнения (2.11).

Заметим, что линии влияния опорных реакций не зависят от конструкции балки; такими же они будут, если вместо балки рассматривать балочную ферму.

2.5.3 Линии влияния внутренних усилий в междуопорном сечении балки. Построим теперь линии влияния поперечной силы и изгибающего момента, возникающих в некотором сечении k между опорами балки (см. рисунок 2.15, а).

Заметим, что аналитические выражения внутренних усилий получатся различными при расположении груза левее и правее сечения. Поэтому рассмотрим оба этих положения.

Разрежем балку на две части и введем внутренние усилия Q и M . Для удобства и простоты расчетов будем рассматривать равновесие той части, на которой нет единичного груза.

I Груз $\bar{F}=1$ слева от сечения k ($z \leq a$). Из уравнений равновесия правой части балки (рисунок 2.15, в)

$$\sum Y^{\text{прав.ч}} = 0; \quad \sum M^{\text{прав.ч}} = 0$$

получим

$$Q_k = -V_B = -\frac{z}{l}; \quad M_k = bV_B = \frac{bz}{l}; \quad (2.12)$$

$$\text{при } z = 0 \quad Q_k = 0; \quad M_k = 0,$$

$$\text{при } z = a \quad Q_k = -a/l; \quad M_k = ab/l.$$

II Груз $\bar{F}=1$ справа от сечения k ($z \geq a$). Из уравнений равновесия левой части (рисунок 2.15, г)

$$\sum Y^{\text{лев.ч}} = 0; \quad \sum M^{\text{лев.ч}} = 0$$

будем иметь

$$Q_k = V_A = \frac{l-z}{l}; \quad M_k = aV_A = a\frac{l-z}{l}; \quad (2.13)$$

$$\text{при } z = a \quad Q_k = b/l; \quad M_k = ab/l,$$

$$\text{при } z = l \quad Q_k = 0; \quad M_k = 0.$$

Уравнения (2.12) определяют левые, а (2.13) – правые отрезки линий влияния (рисунок 2.15, г, д), поэтому их называют соответственно *левыми* и *правыми прямыми (ветвями)*.

Легко видеть, что каждая из ветвей представляет собой линию влияния соответствующей опорной реакции, умноженную на постоянный коэффициент. Так как л. в. V_A и V_B уже известны, то построения можно выполнять, не пользуясь последними членами уравнений (2.12), (2.13), содержащими координату z .

2.5.4 Линии влияния усилий в консольном сечении балки. Построим линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в сечении n на консоли балки (рисунок 2.16, а, б).

Начало координат удобно поместить в сечении и независимо от положения груза (правее или левее сечения) искомые усилия определять из условий равновесия той части консоли, которая находится ближе к ее концу.

Таким образом, поперечную силу и изгибающий момент будем находить из уравнений

$$\sum Y^{\text{прав.ч}} = 0; \quad \sum M^{\text{прав.ч}} = 0.$$

I Груз $\bar{F}=1$ слева от сечения n ($z \leq 0$) (рисунок 2.16, в). Получим:

$$Q_n = 0; \quad M_k = 0. \quad (2.14)$$

II Груз $\bar{F}=1$ справа от сечения n ($z \geq 0$) (рисунок 2.16, г)

$$Q_n = \bar{F} = 1;$$

$$M_k = -\bar{F}z = -z; \quad (2.15)$$

$$\text{при } z = 0 \quad M_n = 0;$$

$$\text{при } z = d \quad M_n = -d.$$

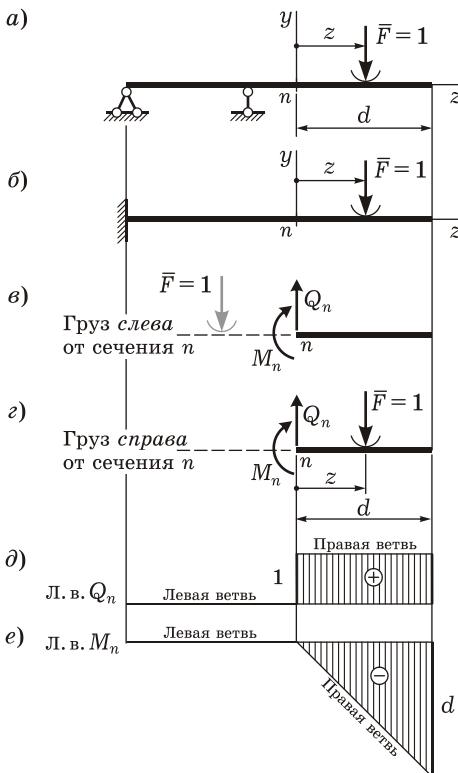


Рисунок 2.16

Уравнения (2.14), (2.15) определяют соответственно *левые* и *правые прямые (ветви)* линий влияния (рисунок 2.16, д, е).

Заметим, что все линии влияния усилий в статически определимых системах *прямолинейны*. Это будет подтверждено дальнейшими построениями и для более сложных стержневых конструкций (многопролетных балок, ферм, арки).

2.5.5 Проверка линий влияния и правила их графического построения. Анализируя построенные выше линии влияния (см. рисунки 2.15, 2.16), заметим следующие их особенности:

- линия влияния вертикальной реакции V для балки (или балочной фермы) на двух опорах имеет ординату $(+1)$ под той опорой, для которой она построена, и (0) под второй опорой;
- для линии влияния Q левая и правая ветви *параллельны*, под сечением наблюдается скачок на единицу вверх;
- для линии влияния M левая и правая ветви *пересекаются под сечением*.

Эти закономерности служат для проверки линий влияния. Они также позволяют установить *правила их графического построения*. Суть этих правил ясна из рисунков 2.17–2.19.

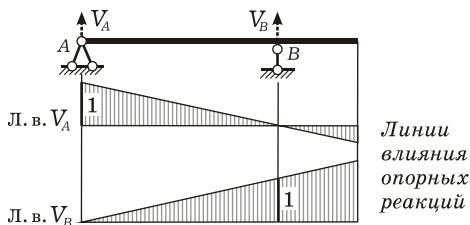


Рисунок 2.17

Линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в междуопорном сечении

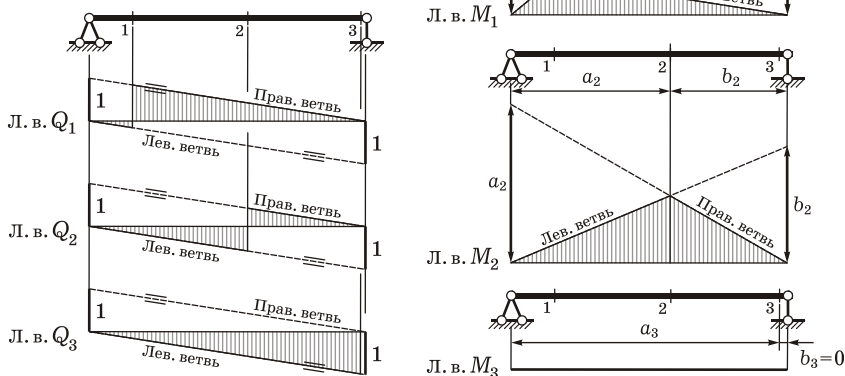


Рисунок 2.18

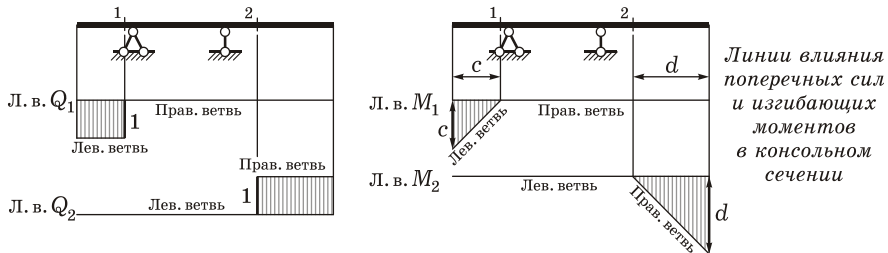


Рисунок 2.19

Ординаты линий влияния усилий, построенных на основании графических закономерностей, легко найти через основные характерные ординаты из подобия треугольников.

2.6 Кинематический метод построения линий влияния

2.6.1 Применение кинематического метода к построению линий влияния. Кинематический метод определения реакций связей (см. п. 2.2.3) позволяет рассчитывать статически определимые системы на любой вид статической нагрузки: и неподвижную, и подвижную. Рассмотрим, как этим методом построить линию влияния какого-либо силового фактора.

Пример 2.4 Построим линию влияния опорной реакции V_B балки (рисунок 2.20, а). В зависимости от положения груза $\bar{F}=1$ реакция V_B меняет свое значение: $V_B = V_B(z)$. Отбросим опорный стержень в точке

B , заменив его действием искомого усилия V_B , получим механизм с одной степенью свободы.

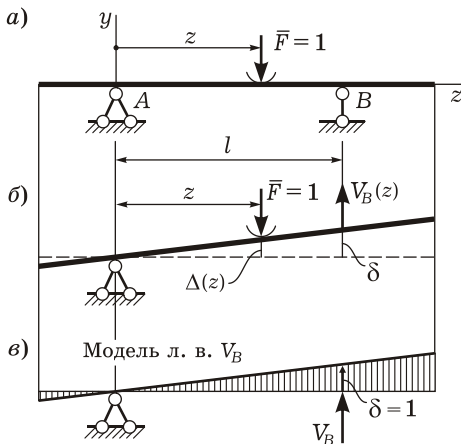


Рисунок 2.20

Зададим механизму бесконечно малые возможные перемещения (рисунок 2.20, б). Перемещение по направлению силы V_B обозначим δ ; перемещение, на котором производит работу единичный груз, — Δ . Так как груз может быть на балке в любой точке, то Δ — функция положения груза $\Delta = \Delta(z)$, т. е. *эюра возможных перемещений*.

Составим уравнение работ:

$$A^{(e)} = V_B(z)\delta - \bar{F}\Delta(z) = 0,$$

из которого найдем интересующую нас реакцию:

$$V_B(z) = \frac{\bar{F}\Delta(z)}{\delta} = \frac{\Delta(z)}{\delta}. \quad (2.16)$$

Выразим Δ через δ : $\Delta = \delta z/l$. Подставив это в (2.16), получим

$$V_B(z) = z/l,$$

что в точности совпадает со вторым из уравнений (2.11).

Обратимся еще раз к выражению (2.16). Здесь возможное перемещение δ – величина постоянная. Следовательно, линия влияния V_B с точностью до постоянного множителя совпадает с эпюрой возможных перемещений механизма, полученного отбрасыванием связи B (т. е. является ее моделью). Если положить $\delta = 1$, то л. в. V_B будет полностью совпадать с эпюрой перемещений (рисунок 2.20, в).

Аналогично можно доказать, что линия влияния любого другого усилия (изгибающего момента, поперечной и продольной силы) совпадает с эпюрой возможных перемещений системы, если удалить связь, соответствующую искомому усилию, и задать по его направлению единичное перемещение.

Эту замечательную особенность впервые заметил Г. Ф. Мюллер-Бреслау¹⁾. Он сформулировал принцип, согласно которому для получения линии влияния некоторого усилия необходимо:

- удалить ту связь, усилие в которой определяется, превратив систему в механизм с одной степенью свободы;
- задать механизму возможные перемещения так, чтобы по направлению искомого усилия перемещение было единичным;
- по эпюре возможных перемещений (модели линии влияния) построить саму линию влияния искомого усилия.

2.6.2 Модели линий влияния различных усилий. Рассмотрим особенности построения моделей различных линий влияния в статически определимых стержневых системах.

Вертикальные реакции в двухопорной балке (ферме). Отбросим вертикальный стержень; полученному механизму сообщим

¹⁾ Мюллер-Бреслау Генрих Франц Бернхард (Müller-Breslau Heinrich Franz Bernhard) (1851–1925), немецкий ученый, один из основоположников современной строительной механики, специалист в теории сооружений и мостостроении. Самоучкой изучил математику и механику. С 1875 г. инженер-конструктор, с 1883 г. – профессор Ганноверского политехнического института, затем – профессор и ректор Высшей технической школы, Берлин-Шарлоттенбург. Его работа «Графическая статика строительных конструкций» (1886) получила мировое признание.

возможные перемещения так, чтобы по направлению положительной реакции (вертикально вверх) смещение было единичным ($\delta = 1$) (рисунок 2.21, а, б).

Если кинематическим методом определяются реакции в *жесткой заделке* (рисунок 2.22, а), то предварительно необходимо заделку схематизировать в виде трех стержней (рисунок 2.22, б).

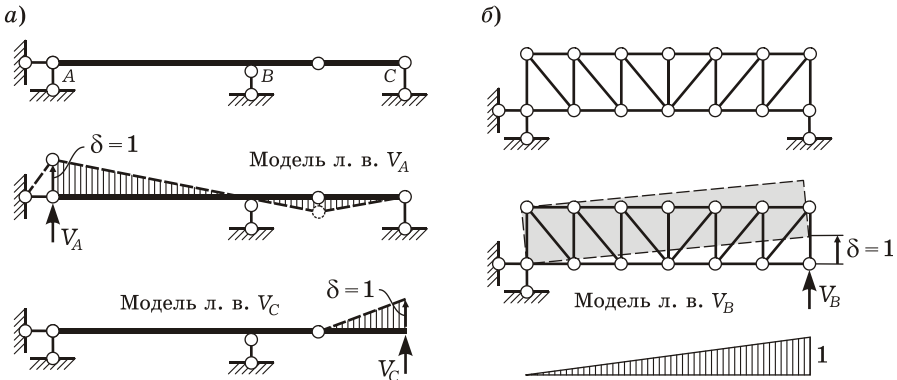


Рисунок 2.21

Вертикальная реакция в заделке. Для построения модели л. в. V_A отбрасываем вертикальный стержень и получаем *ползун* (рисунок 2.22, в). Сообщая вертикально вверх возможное перемещение $\delta = 1$, получаем требуемую модель.

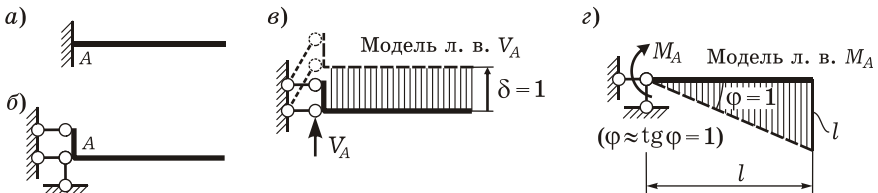


Рисунок 2.22

Изгибающий момент в заделке. Для построения модели л. в. M_A удалим один горизонтальный стержень; в опорном сечении останутся два стержня, эквивалентные шарниру (рисунок 2.22, г). Сообщим по направлению момента перемещение на угол φ , тангенс которого $\text{tg } \varphi = 1$. В силу малости угла $\varphi \approx \text{tg } \varphi$, поэтому в дальнейшем будем считать $\varphi = 1$. Ордината на конце консоли равна длине консоли.

Внутренняя поперечная сила. В заданном сечении врезаем ползун (см. рисунок 2.7) и задаем возможные перемещения

в направлении искомой поперечной силы. При этом на опорах перемещения нулевые, а правая и левая части механизма параллельны (рисунок 2.23, а).

Внутренний изгибающий момент. В сечении врезаем шарнир (рисунок 2.23, б) и задаем возможные перемещения в направлении положительных моментов так, чтобы взаимный угол поворота правой и левой частей был единичным ($\varphi = 1$).

Продольные силы в стержнях ферм. Удаляем рассматриваемый стержень фермы и задаем возможные перемещения так, чтобы сближение его узлов $\delta = 1$ (рисунок 2.24). Подробно построение линий влияния в стержнях ферм будет рассмотрено далее (см. подразд. 4.5).

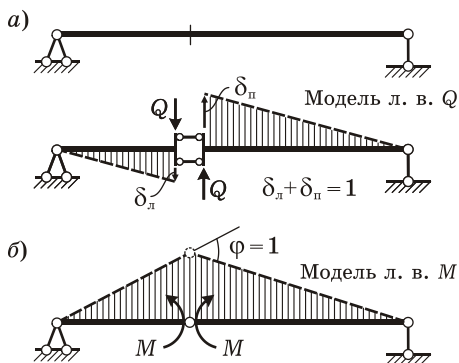


Рисунок 2.23

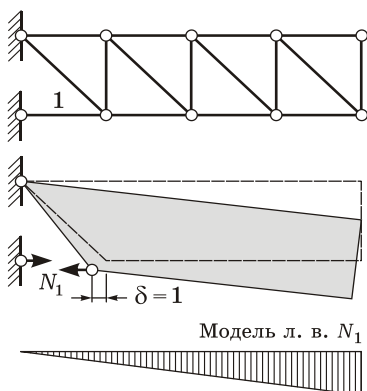


Рисунок 2.24

Выводы. Кинематический метод во многих случаях позволяет легко установить форму линий влияния. Вычисление их ординат указанным методом, как правило, сложнее, так как требует детального кинематического анализа механизмов.

Поэтому обычно линии влияния строят статическим методом, а кинематическим методом производят их качественную проверку (построение моделей без вычисления ординат).

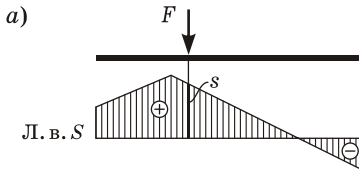
2.7 Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния

Допустим, что для конструкции построена линия влияния усилия S в некотором стержне или сечении. По ее ординатам можно вычислить значения усилия S от различных видов неподвижных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов, распределенных нагрузок).

Определяя то или иное усилие в конструкции от различных нагрузок с помощью линии влияния, часто говорят, что этими нагрузками *загружают* линию влияния.

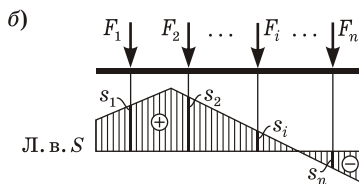
2.7.1 Действие вертикальных сосредоточенных сил. По определению, каждая из ординат л. в. S представляет собой значение усилия S при нахождении единичного груза над этой ординатой. Следовательно, при нахождении на системе *одной вертикальной силы* F (рисунок 2.25, а) значение усилия S можно вычислить по формуле

$$S = Fs, \quad (2.17)$$



где s – ордината л. в. S под силой F .

Если на систему действует n *сосредоточенных вертикальных сил* (рисунок 2.25, б), то на основании принципа суперпозиции (2.6)



$$\begin{aligned} S &= F_1 s_1 + F_2 s_2 + \dots + F_n s_n = \\ &= \sum_{i=1}^n F_i s_i, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где s_i – ордината л. в. S под силой F_i .

Если действующая вертикальная сила направлена вверх (противоположно грузу $\bar{F}=1$), то ее значение берется со знаком «минус».

2.7.2 Действие распределенной нагрузки. Пусть на некотором участке системы ab приложена распределенная нагрузка интенсивностью $q(z)$ (рисунок 2.26, а). Выделим малый участок длиной dz и найдем элементарную сосредоточенную силу $dF = q(z)dz$. На основании формулы (2.17) значение элементарного усилия

$$dS = dF \cdot s = q(z) dz \cdot s(z).$$

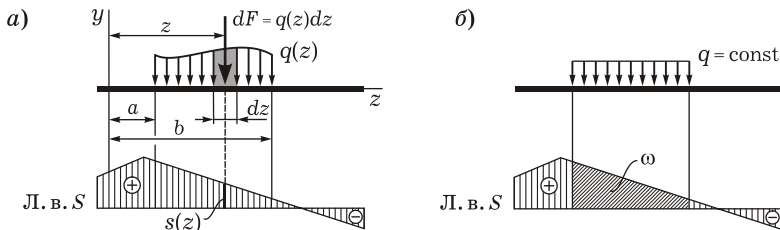


Рисунок 2.26

Для определения полной величины S необходимо проинтегрировать это выражение по длине участка нагружения:

$$S = \int_a^b q(z)s(z) dz . \quad (2.19)$$

Если на балку действует *равномерно распределенная нагрузка* $q = \text{const}$ (рисунок 2.26, б), то

$$S = \int_a^b q \cdot s(z) dz = q \int_a^b s(z) dz = q\omega , \quad (2.20)$$

где $\omega = \int_a^b s(z) dz$ – площадь л. в. S под нагрузкой q , причем площадь понимается как определенный интеграл в алгебраическом смысле: площадь л. в. S под осью z отрицательна.

2.7.3 Действие сосредоточенных моментов. Действие момента m заменим двумя силами F с малым плечом a (рисунок 2.27):

$$m = Fa . \quad (2.21)$$

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда линия влияния искомого фактора S прямолинейна. Величина S от действия двух сосредоточенных сил по формуле (2.18)

$$S = Fs_2 - Fs_1 = F(s_2 - s_1) .$$

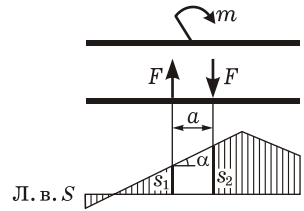


Рисунок 2.27

Подставляя сюда значение силы $F = m/a$, выраженное из (2.21), получаем

$$S = m \frac{s_2 - s_1}{a} = m \operatorname{tg} \alpha , \quad (2.22)$$

где α – угол наклона л. в. S в точке приложения момента m .

Заметим, что знак усилия S в формуле (2.22) зависит от направления момента m и от наклона линии влияния на загруженном участке. Положительным будем считать момент, направленный по часовой стрелке. Кроме этого, если л. в. S «восходящая» ($s_1 < s_2$), как на рисунке 2.25, то $\operatorname{tg} \alpha$ положителен. Если л. в. S «нисходящая», ($s_1 > s_2$), то $\operatorname{tg} \alpha$ отрицателен.

Если линия влияния S *криволинейна*, то к ней в точке приложения момента m необходимо провести касательную, найти тангенс угла ее наклона и умножить на значение m .

2.8 Линии влияния при узловой передаче нагрузки

2.8.1 Понятие об узловой передаче нагрузки. Во многих сооружениях подвижная нагрузка перемещается не по основной несущей конструкции, а по вспомогательному строению. Оно представляет собой систему продольных и поперечных элементов, передающих нагрузку на основную конструкцию лишь в определенных точках – *узлах* (рисунок 2.28, а). Подобный способ передачи нагрузки называется *узловым*. Участок конструкции между двумя соседними узлами называется *панелью*.

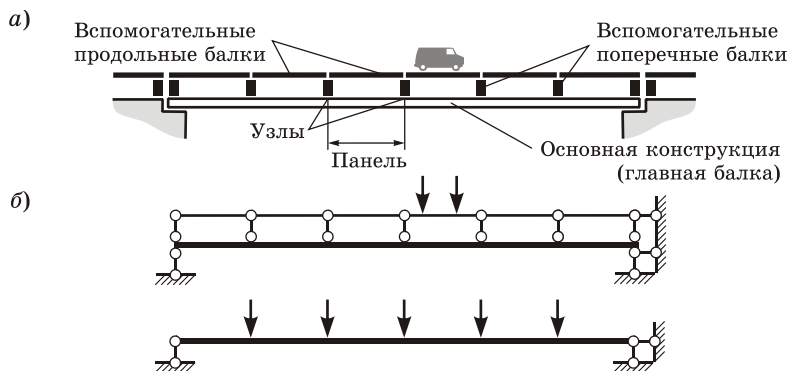


Рисунок 2.28

Расчетная схема сооружения, содержащего вспомогательное строение, представляет собой комбинированную стержневую систему (рисунок 2.28, б). В ней нагрузка приложена к вспомогательным продольным балкам; поперечные элементы схематизированы в виде одиночных вертикальных стерженьков, которые передают на узлы основной конструкции лишь вертикальные силы.

Узловая передача нагрузки характерна, например, для мостовых арок и большинства ферм (рисунок 2.29).

На расчетных схемах сооружений часто показывается лишь основная конструкция с действующими на нее нагрузками, однако при расчетах узловая передача нагрузки обязательно учитывается.

2.8.2 Особенности очертания линий влияния при узловой передаче нагрузки. Рассмотрим, как меняется форма линии влияния некоторого усилия S при движении груза $F=1$ не по основной конструкции, а по вспомогательному верхнему строению (рисунок 2.30, а).

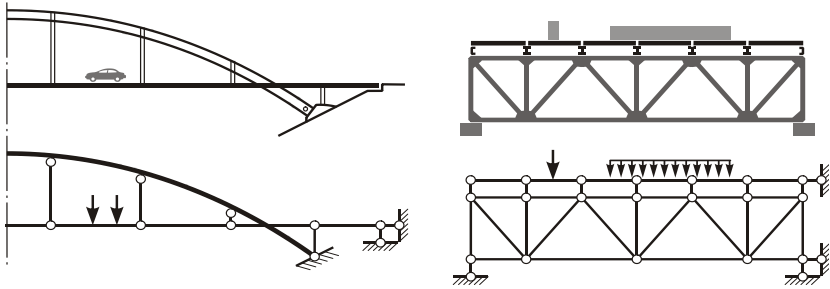


Рисунок 2.29

Вначале мысленно уберем верхнее строение и предположим, что единственный груз перемещается по основной конструкции (рисунок 2.30, б). Допустим, что в этом случае линия влияния усилия S известна; обозначим ее л. в. S^0 .

Далее рассмотрим передвижение груза по одной из вспомогательных балок ik . Отделим эту балку от всей конструкции (рисунок 2.30, в). В ее опорах возникают реакции, выражения для которых аналогичны уравнениям (2.11):

$$V_i(z) = \frac{d-z}{d};$$

$$V_k(z) = \frac{z}{d}. \quad (2.23)$$

На основную конструкцию действуют две силы, равные опорным реакциям вспомогательной балки ik (рисунок 2.30, г). При этом реакции других вспомогательных балок нулевые, так как нагрузка на них отсутствует.

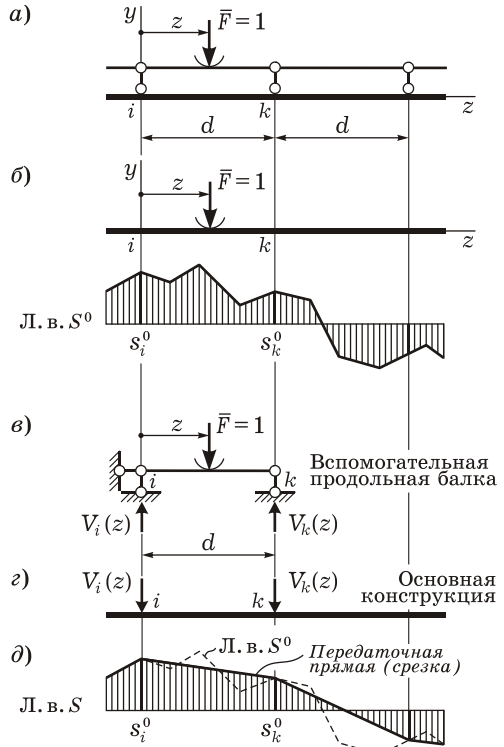


Рисунок 2.30

По принципу суперпозиции на основании формулы (2.18)

$$S = V_i(z)s_i^0 + V_k(z)s_k^0.$$

С учетом выражений (2.23)

$$S(z) = s_i^0 \frac{d-z}{d} + s_k^0 \frac{z}{d}. \quad (2.24)$$

Так как ординаты s_i^0, s_k^0 – числа, не зависящие от z , то уравнение (2.24) линейное. Следовательно, линия влияния S в пределах панели ik ограничена прямой линией. Проведем эту прямую через две точки (рисунок 2.30, ∂):

$$\text{при } z=0 \quad S(z) = s_i^0; \quad \text{при } z=d \quad S(z) = s_k^0.$$

Таким образом, под узлами i, k ординаты л. в. S совпали с ординатами л. в. S^0 , построенной при непосредственном приложении нагрузки к основной конструкции.

Прямая, соединяющая узловые ординаты в пределах рассматриваемой панели, называется *передаточной прямой*. Так как эта прямая уменьшает, «срезает» ординаты линии влияния, ее часто называют *срезкой*.

Рассматривая расположение груза $\bar{F}=1$ на любой другой вспомогательной балке, можно сделать аналогичные выводы:

- в пределах каждой панели л. в. S прямолинейна;
- под узлами справедливы ординаты л. в. S^0 , полученные без учета узловой передачи нагрузки.

2.8.3 Порядок построения линий влияния при узловой передаче нагрузки. Для получения линии влияния какого-либо фактора в элементе основной несущей конструкции S при узловой передаче нагрузки на нее необходимо:

- построить линию влияния искомого фактора без учета узловой передачи нагрузки (при движении груза $\bar{F}=1$ непосредственно по основной конструкции) – л. в. S^0 ;
- выделить ординаты л. в. S^0 под узлами;
- узловые ординаты соединить передаточными прямыми – получится л. в. S .

Пример 2.6 Построим линии влияния внутренних усилий в сечении I и II консольной балки с верхним строением (рисунок 2.31).

Мысленно уберем верхнее строение и построим линии влияния при движении груза $\bar{F}=1$ непосредственно по балке – л. в. $Q_I^0, M_I^0, Q_{II}^0, M_{II}^0$. Далее выделим ординаты под узлами 1–5 и соединим их передаточными прямыми (см. рисунок 2.31). Получим л. в. Q_I, M_I, Q_{II}, M_{II} .

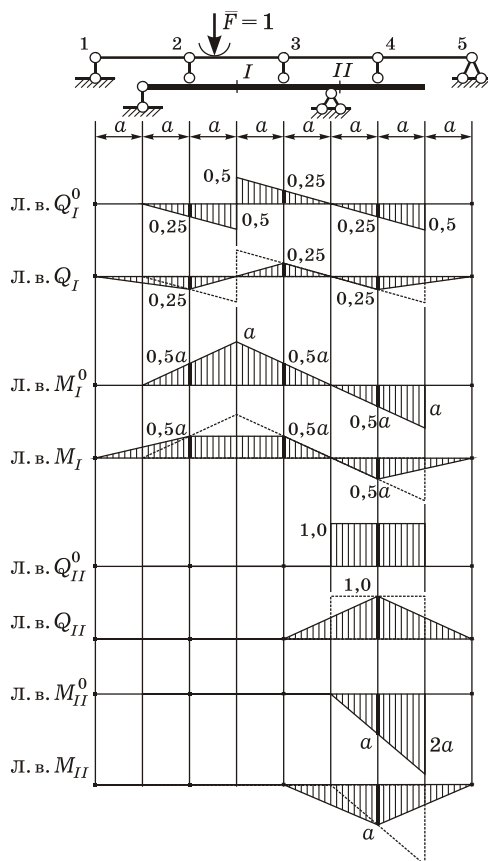


Рисунок 2.31

Заметим, что узловыми являются также крайние нулевые ординаты под точками 1 и 5.

2.9 Невыгоднейшее нагружение линий влияния

Напомним, что расчетным (опасным, невыгоднейшим) называется такое положение заданной подвижной нагрузки на сооружении, при котором исследуемый силовой фактор достигает экстремума (см. п. 2.6.2).

Будем считать, что линия влияния исследуемого усилия S построена. Рассмотрим, как для него найти расчетное положение подвижных нагрузок различных видов.

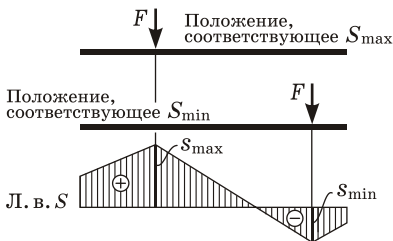


Рисунок 2.32

2.9.1 Действие одной сосредоточенной силы. Если силу F расположить над максимальной ординатой s_{\max} л. в. S , значение исследуемого усилия будет наибольшим (рисунок 2.32):

$$S_{\max} = F s_{\max} ;$$

если над минимальной ординатой s_{\min} , – наименьшим:

$$S_{\min} = F s_{\min} .$$

Из двух значений S_{\max} , S_{\min} выбирают наиболее опасное для данной конструкции. При этом учитывают, как ее материал сопротивляется растяжению и сжатию, усилия и напряжения какого знака для него более опасны. Соответствующее положение силы F и будет расчетным.

2.9.2 Действие системы сосредоточенных сил. Система жестко связанных между собой сосредоточенных вертикальных сил (грузов) с неизменными расстояниями между ними моделирует давление колес автомобиля, поезда, крана и т. п.

Вначале рассмотрим самый простой случай – движение системы грузов F_1, F_2, \dots, F_n над участком линии влияния S , ограниченным *одной прямой* (рисунок 2.33, а). Докажем, что при таком расположении грузов их можно заменить равнодействующей.

Рассматриваемый участок линии влияния пересекается с осью z в точке O . Выразим ординаты под силами через расстояния до этой точки:

$$s_i = z_i \operatorname{tg} \alpha , \quad (2.25)$$

где s_i – ордината л. в. S под силой F_i ; z_i – расстояние от s_i до точки O ; α – угол наклона л. в. S к оси z .

Согласно формуле (2.18) усилие S определяется так:

$$S = \sum_{i=1}^n F_i s_i .$$

Подставив в это выражение соотношение (2.25), получим

$$S = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n F_i z_i .$$

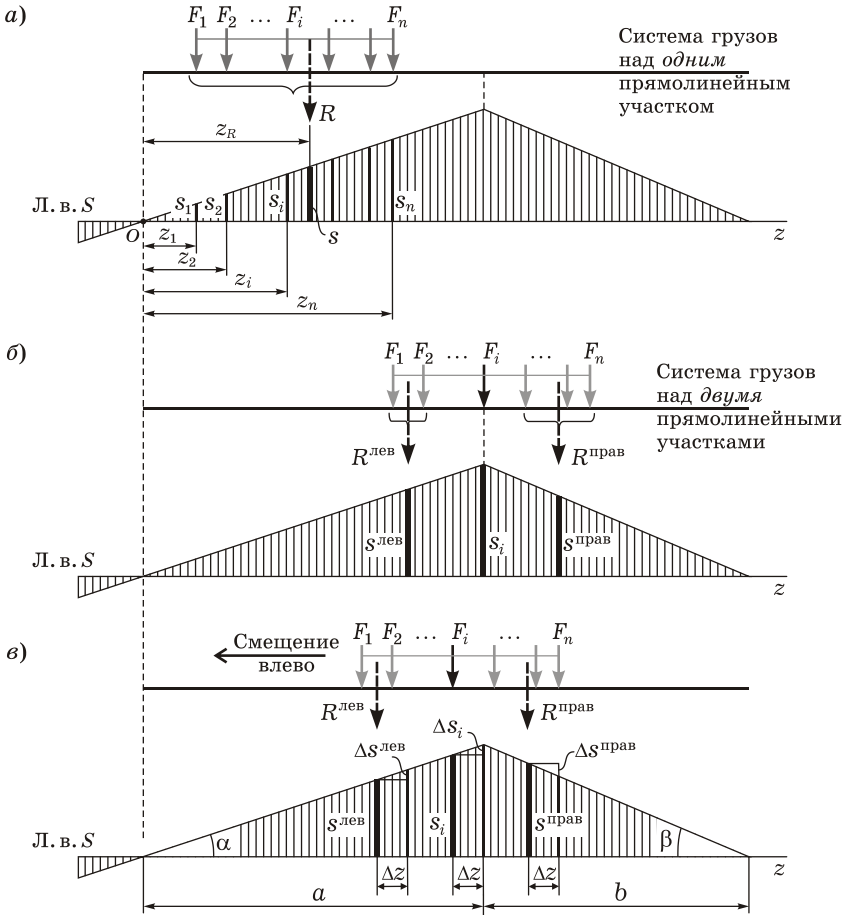


Рисунок 2.33

Здесь $\sum_{i=1}^n F_i z_i$ – момент грузов F_1, F_2, \dots, F_n относительно точки O . Его можно записать через равнодействующую грузов R :

$$\sum_{i=1}^n F_i z_i = R z_R .$$

Тогда искомое усилие

$$S = \operatorname{tg} \alpha \cdot R z_R = R s ,$$

где $s = z_R \operatorname{tg} \alpha$ – ордината л. в. S под равнодействующей R .

Вывод: если система связанных сосредоточенных грузов находится над одним прямолинейным участком линии влияния, ее можно заменить *равнодействующей*.

Пусть теперь система грузов располагается над *двумя прямолинейными участками* треугольной линии влияния, причем один из грузов, F_i , находится над вершиной (рисунок 2.33, б). Введем две силы $R^{\text{лев}}$, $R^{\text{прав}}$ – равнодействующие левых и правых грузов соответственно.

Предположим, что показанная на рисунке 2.33, б нагрузка занимает расчетное положение. Это значит, что усилие S принимает экстремальное значение S_{max} , т. е. при любом бесконечно малом изменении положения нагрузки усилие будет удовлетворять условию $S < S_{\text{max}}$.

Груз F_i , располагающийся над вершиной линии влияния, когда усилие S достигает экстремального значения, называется *критическим грузом*.

Можно показать, что для любой полигональной линии влияния эта ситуация реализуется только тогда, когда один из грузов располагается над одной из ее вершин.

Предположим, что данное положение системы связанных грузов действительно является расчетным. Усилие S при этом определяется по формуле

$$S_{\text{max}} = R^{\text{лев}}s^{\text{лев}} + F_i s_i + R^{\text{прав}}s^{\text{прав}},$$

где $s^{\text{лев}}$, $s^{\text{прав}}$ – ординаты л. в. S под равнодействующими $R^{\text{лев}}$, $R^{\text{прав}}$; s_i – ордината под критическим грузом F_i .

Если грузы сдвигаются влево на величину Δz (рисунок 2.33, в), ординаты под силами $R^{\text{лев}}$, F_i уменьшаются, ордината под $R^{\text{прав}}$ увеличивается. Исследуемое усилие изменяется на величину $\Delta S = S - S_{\text{max}}$. Так как предыдущее положение нагрузки было невыгоднейшим, то приращение усилия S отрицательно:

$$\Delta S = -R^{\text{лев}}\Delta s^{\text{лев}} - F_i\Delta s_i + R^{\text{прав}}\Delta s^{\text{прав}} < 0. \quad (2.26)$$

Выразив приращения ординат через углы наклона линии влияния α , β , получим:

$$\Delta s^{\text{лев}} = \Delta z \operatorname{tg} \alpha; \quad \Delta s_i = \Delta z \operatorname{tg} \alpha; \quad \Delta s^{\text{прав}} = \Delta z \operatorname{tg} \beta.$$

Подставим значения приращений ординат в соотношение (2.26), учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = s_i/a$; $\operatorname{tg} \beta = s_i/b$. Сократив на $\Delta z s_i$, получим неравенство

$$\frac{R^{\text{лев}} + F_i}{a} > \frac{R^{\text{прав}}}{b}, \quad (2.27)$$

где a, b – расстояния от вершины треугольной линии влияния до крайних нулевых ординат.

Аналогично, рассмотрев смещение грузов вправо, получим неравенство

$$\frac{R^{\text{лев}}}{a} < \frac{R^{\text{прав}} + F_i}{b}. \quad (2.28)$$

Таким образом, если для какого-нибудь груза F_i неравенства (2.27), (2.28) одновременно выполняются, то по определению этот груз является критическим, а соответствующее положение нагрузки – расчетным. Одновременное выполнение обоих неравенств достигается путем нескольких попыток. После этого расчетное значение величины S вычисляют по формуле (2.18).

Подчеркнем, что формулы (2.27), (2.28) могут быть использованы только в том случае, когда система связанных грузов полностью располагается над треугольной линией влияния.

2.9.3 Действие равномерно распределенной нагрузки произвольной протяженности. Если распределенную нагрузку интенсивностью $q = \text{const}$ расположить над положительными участками линии влияния S (рисунок 2.34), значение исследуемого усилия будет наибольшим:

$$S_{\text{max}} = q\omega_{(+)}; \quad (2.29)$$

если над отрицательными, – наименьшим:

$$S_{\text{min}} = q\omega_{(-)}, \quad (2.30)$$

где $\omega_{(+)}, \omega_{(-)}$ – площади положительной и отрицательной частей л. в. S .

Из двух значений $S_{\text{max}}, S_{\text{min}}$, вычисленных по формулам (2.29), (2.30), выбирают наиболее опасное для данной конструкции. Соответствующее ему положение равномерно распределенной нагрузки и будет расчетным.

2.9.4 Действие равномерно распределенной нагрузки заданной протяженности. Пусть подвижная равномерно распределенная нагрузка имеет неизменную длину c (рисунок 2.35). Положение этой нагрузки будем задавать координатой z .

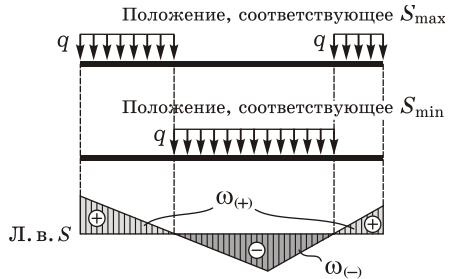


Рисунок 2.34

Тогда по формуле (2.19)

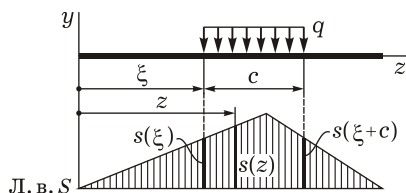


Рисунок 2.35

$$S = \int_{\xi}^{\xi+c} q s(z) dz = q \int_{\xi}^{\xi+c} s(z) dz . \quad (2.31)$$

Усилие S (2.31) достигает экстремума, если

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = q[s(\xi+c) - s(\xi)] = 0 .$$

Следовательно,

$$s(\xi) = s(\xi+c) .$$

Таким образом, если равномерно распределенная нагрузка постоянной протяженности c расположена над участком л. в. S , крайние ординаты которого равны между собой, это положение является для усилия S невыгоднейшим.

2.9.5 Эквивалентная нагрузка. На практике при расчетах мостов вместо того, чтобы подбирать невыгоднейшую схему загрузки, удобнее заменять заданную систему сил эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой.

Эквивалентной называется нагрузка v , распределенная равномерно по всей длине линии влияния и вызывающая то же экстремальное значение усилия S_{\max} , что и заданная нагрузка при ее невыгодном расположении.

Рассмотрим один треугольный участок линии влияния, загруженный системой сосредоточенных сил (рисунок 2.36). С одной стороны, при невыгоднейшем положении системы сил

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^n F_i s_i ,$$

где s_i – ордината л. в. S под силой F_i .

С другой стороны, при действии равномерно распределенной нагрузки интенсивностью v по всей длине линии влияния

$$S_{\max} = v\omega ,$$

где ω – площадь треугольного участка линии влияния.

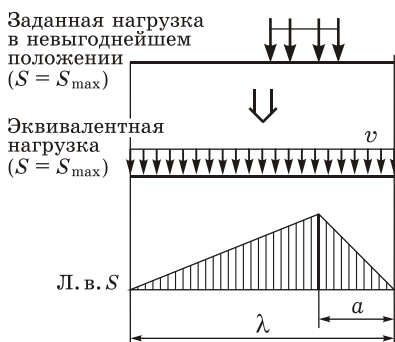


Рисунок 2.36

Приравняем правые части этих выражений и выразим *интенсивность эквивалентной нагрузки*:

$$v = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n F_i s_i . \quad (2.32)$$

Если линия влияния состоит из нескольких участков одного или различных знаков, то эквивалентную нагрузку необходимо определять для каждого участка в отдельности.

Замечание. При практических расчетах формулой (2.32) пользоваться неудобно, так как для каждого участка линии влияния вначале необходимо подбирать невыгоднейшую схему загрузки конкретным видом нагрузки, затем вычислять множество ординат под силами и площадь участка.

В нормативной литературе¹⁾ имеются эмпирические формулы и таблицы, по которым удобно находить величину эквивалентной нагрузки v в зависимости от типа подвижной нагрузки, длины участка линии влияния и положения его вершины. При этом используются следующие обозначения (см. рисунок 2.36): λ – длина треугольного участка линии влияния; a – наименьшее расстояние от вершины линии влияния до ее нулевой точки; $\alpha = a/\lambda$ – относительное положение вершины ($0 \leq \alpha \leq 0,5$).

Пример 2.7 Требуется найти значения эквивалентной нагрузки от железнодорожного подвижного состава СК (К – класс нагрузки) для загрузки линии влияния некоторого усилия S , имеющей два треугольных участка одинаковой длины (рисунок 2.37). При расчете капитальных сооружений следует принимать $K = 14$.

Загрузим два участка линии влияния (см. рисунок 2.37) эквивалентными нагрузками v_1 и v_2 , соответствующими нагрузке СК. Длины участков $\lambda_1 = \lambda_2 = 12$ м, для первого максимальная ордината находится по середине, для второго – в конце. При этом

$$a_1 = 6 \text{ м}; \quad \alpha_1 = a_1/\lambda_1 = 6/12 = 0,5;$$

$$a_2 = 0; \quad \alpha_2 = a_2/\lambda_2 = 0/12 = 0.$$

Далее по таблице А.1 приложения А находим значения эквивалентных нагрузок при $K = 1$, которые затем умножаем на 14 (при $K = 14$):

$$v_1 = 14,68 \cdot 14 = 206 \text{ кН/м пути}; \quad v_2 = 16,78 \cdot 14 = 235 \text{ кН/м пути}.$$

¹⁾ Например, на территории Республики Беларусь с 2011 года действует ТКП 45-3.03-232-2011 (02250) «Мосты и трубы. Строительные нормы проектирования», введенный взамен СНиП 2.05.03-84. Рассчитанные в соответствии с этим документом нормативные эквивалентные нагрузки от железнодорожного подвижного состава СК приведены в приложении А.

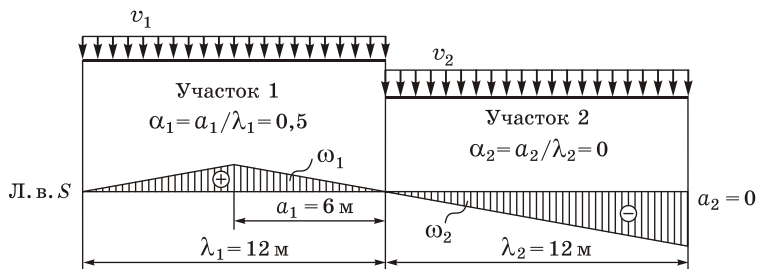


Рисунок 2.37

Заметим, что эквивалентные нагрузки можно вычислить непосредственно по формуле (А.1):

$$v_{1,2} = 14 \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04\lambda_{1,2}}} + \frac{43,149}{\lambda_{1,2}^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha_{1,2}}{4} \right).$$

Тогда

$$v_1 = 14 \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04 \cdot 12}} + \frac{43,149}{12^2} \right) \left(1 - \frac{6}{4} \right) = 206 \text{ кН/м пути};$$

$$v_2 = 14 \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04 \cdot 12}} + \frac{43,149}{12^2} \right) \left(1 - \frac{0}{4} \right) = 235 \text{ кН/м пути}.$$

Экстремальные значения усилия S определяются по формулам:

$$S_{\max} = v_1 \omega_1; \quad S_{\min} = v_2 \omega_2,$$

где ω_1, ω_2 – площади первого и второго участков линии влияния S , взятые со своими знаками (см. рисунок 2.37).

2.10 Определение усилий в матричной форме

Расчеты многих конструкций, предполагающие решение систем линейных уравнений высокого порядка, удобно производить в матричной форме. Такая форма позволяет более компактно записывать основные формулы и уравнения, а также помогает инженеру более широко смотреть на многие проблемы расчетов, видеть их суть, не вдаваясь в смысл каждой операции над числами.

2.10.1 Определение внутренних усилий от сосредоточенных сил. Пусть на стержневую систему действуют сосредоточенные силы F_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Требуется найти внутренние усилия S_k , возникающие в заранее выбранных сечениях $k = 1, 2, \dots, m$ (рисунок 2.38, а). В качестве S_k могут выступать изгибающие моменты, продольные, поперечные силы и т. д.

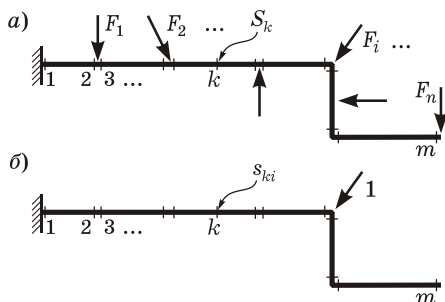


Рисунок 2.38

На основании принципа суперпозиции (2.6) уравнения для определения интересующих нас усилий можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 S_1 &= s_{11}F_1 + s_{12}F_2 + \dots + s_{1i}F_i + \dots + s_{1n}F_n ; \\
 S_2 &= s_{21}F_1 + s_{22}F_2 + \dots + s_{2i}F_i + \dots + s_{2n}F_n ; \\
 &\dots \\
 S_k &= s_{k1}F_1 + s_{k2}F_2 + \dots + s_{ki}F_i + \dots + s_{kn}F_n ; \\
 &\dots \\
 S_m &= s_{m1}F_1 + s_{m2}F_2 + \dots + s_{mi}F_i + \dots + s_{mn}F_n .
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Здесь s_{ki} – силовой фактор в сечении k , вызванный единичной силой, приложенной по направлению F_i (рисунок 2.38, б). Т. е. первый индекс (k) показывает, где вычисляется усилие, второй индекс (i) – от чего.

В матричной форме система (2.33) записывается так:

$$\vec{S} = \mathbf{L}_S \vec{F} , \tag{2.34}$$

где \vec{S} – вектор искомых внутренних усилий; \vec{F} – вектор внешних сил; \mathbf{L}_S – матрица влияния фактора S порядка $m \times n$:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_k \\ \dots \\ S_m \end{pmatrix} ; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{L}_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mi} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix} . \tag{2.35}$$

В общем случае $m \neq n$, и матрица \mathbf{L}_S несимметрична. Если отыскиваются изгибающие моменты в сечениях балки или рамы,

то $S = M$, и матрица $L_S = L_M$ называется *матрицей влияния изгибающих моментов*, при определении сил в стержнях фермы $S = N$, при этом $L_S = L_N$ – *матрица влияния продольных сил*.

2.10.2 Формирование матрицы влияния. Всякий i -й столбец матрицы влияния L_S может быть получен (при силах F_1, F_2, \dots, F_n любых направлений) как значения усилия S от единичной силы, приложенной в точке i .

Всякая k -я строка матрицы влияния L_S может быть получена (при силах F_1, F_2, \dots, F_n одного направления) через линию влияния усилия S в сечении k (л. в. S_k), построенную от единичного груза $\bar{F} = 1$, параллельного данным силам.

Следовательно, каждый столбец матрицы является дискретным аналогом соответствующей единичной эпюры (при внешних силах любых направлений), каждая строка – аналогом соответствующей линии влияния (при силах одного направления):

$$L_S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1i} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2i} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k1} & s_{k2} & \dots & s_{ki} & \dots & s_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mi} & \dots & s_{mn} \end{pmatrix}$$

Ординаты
линии
влияния S_k

Ординаты
единичной эпюры \bar{S}_i

На практике часто встречается загрузка конструкции вертикальными сосредоточенными силами. При этом матрицу влияния можно сформировать двумя способами: 1) *по столбцам* – с помощью единичных эпюр; 2) *по строкам* – с помощью линий влияния. Рассмотрим эти способы на примере простой балки.

Пример 2.8 Для балки (рисунок 2.39) требуется построить эпюру изгибающих моментов, если $F_1 = 0,5F$; $F_2 = 2F$; $F_3 = F$; $F_4 = 4F$.

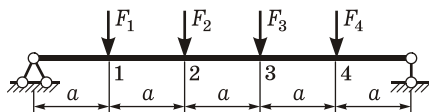


Рисунок 2.39

Матрица влияния изгибающих моментов L_M . Выбираем расчетные сечения 1, 2, 3, 4, совпадающие с точками приложения сил. В этом случае количество сечений равно количеству внешних сил, следовательно, матрица влияния (2.35) будет квадратной.

Способ 1: последовательно загружаем балку неподвижными единичными силами в точках 1, 2, 3, 4 (рисунок 2.40) и строим соответствующие единичные эпюры моментов; из их ординат по столбцам формируем матрицу влияния \mathbf{L}_M :

$$\mathbf{L}_M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{pmatrix}.$$

Эпюры \overline{M}_1 \overline{M}_2 \overline{M}_3 \overline{M}_4

Способ 2: строим линии влияния изгибающих моментов в расчетных сечениях 1, 2, 3, 4 от единичной силы, пробегающей всю балку (рисунок 2.41); из их ординат по строкам формируем матрицу влияния \mathbf{L}_M :

$$\mathbf{L}_M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Л. в. } M_1 \\ \text{Л. в. } M_2 \\ \text{Л. в. } M_3 \\ \text{Л. в. } M_4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{pmatrix}.$$

Вектор внешних сил. Образует вектор внешних вертикальных сил:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5F \\ 2F \\ F \\ 4F \end{pmatrix}.$$

Определение изгибающих моментов. Из системы (2.34), заменив S на M , находим изгибающие моменты в сечениях 1–4:

$$\vec{M} = \mathbf{L}_M \vec{F};$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a & 0,6a & 0,4a & 0,2a \\ 0,6a & 1,2a & 0,8a & 0,4a \\ 0,4a & 0,8a & 1,2a & 0,6a \\ 0,2a & 0,4a & 0,6a & 0,8a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5F \\ 2F \\ F \\ 4F \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8a \cdot 0,5F + 0,6a \cdot 2F + 0,4a \cdot F + 0,2a \cdot 4F \\ 0,6a \cdot 0,5F + 1,2a \cdot 2F + 0,8a \cdot F + 0,4a \cdot 4F \\ 0,4a \cdot 0,5F + 0,8a \cdot 2F + 1,2a \cdot F + 0,6a \cdot 4F \\ 0,2a \cdot 0,5F + 0,4a \cdot 2F + 0,6a \cdot F + 0,8a \cdot 4F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8Fa \\ 5,1Fa \\ 5,4Fa \\ 4,7Fa \end{pmatrix}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов M (рисунок 2.42).

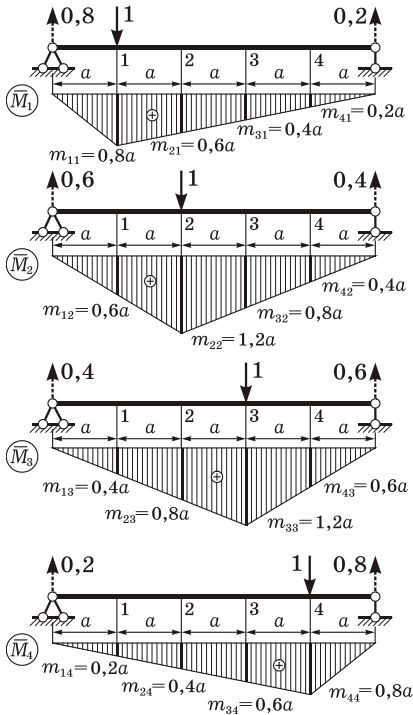


Рисунок 2.40

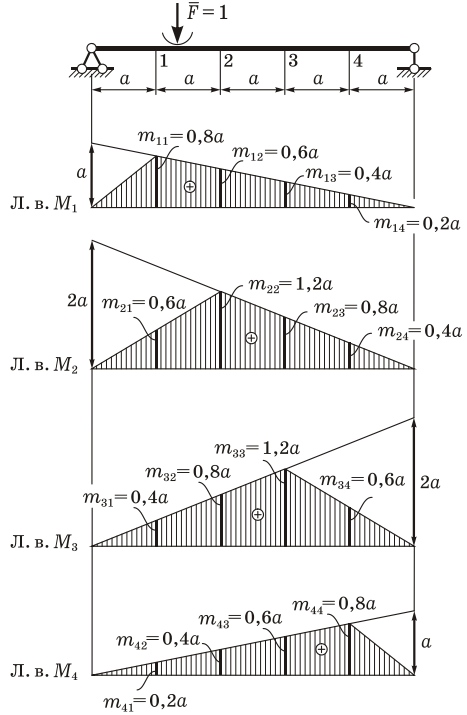


Рисунок 2.41

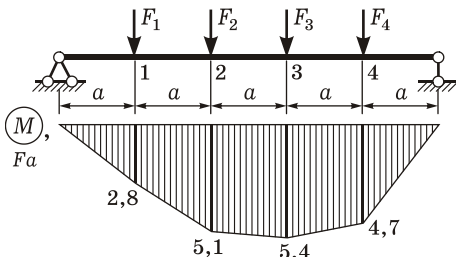


Рисунок 2.42

Заметим, что матричная форма расчета особенно удобна при исследовании нескольких вариантов загрузки одной и той же системы. Если значения внешних сил изменяются, новые значения внутренних усилий легко найти, умножив матрицу влияния L_S на новый вектор \bar{F} .

2.10.3 Учет особенностей внешней нагрузки. В общем случае элементы конструкции могут быть загружены не только сосредоточенными силами, но и моментами, распределенными нагрузками и т. д. Учет этих факторов может осуществляться в двух фор-

мах: приведение всех нагрузок к сосредоточенным силам или же непосредственный их учет без преобразования.

При приведении нагрузок к сосредоточенным силам сосредоточенный момент заменяют парой сил, находящихся на достаточно малом расстоянии друг от друга. Распределенную нагрузку заменяют группой сосредоточенных сил, приложенных на границах малых участков, при этом каждая из сил есть равнодействующая нагрузки на половинах двух соседних участков. Число участков должно быть не менее четырех.

Указанные преобразования можно сделать на основании принципа Сен-Венана (см. п. 1.7.2), так как эффекты от действия заданных нагрузок и введенных сосредоточенных сил на некотором удалении от мест их приложения равноценны.

2.11 Огибающие (объемлющие) эпюры внутренних усилий

2.11.1 Понятие об огибающей эпюре. В рассмотренных ранее примерах расчета на подвижную нагрузку было задано *одно* сечение, для которого нужно было построить линию влияния какого-либо усилия. Далее по ней можно было легко найти опасное положение нагрузки и определить экстремальное значение усилия.

Однако задача расчета сооружения не ограничивается исследованием одного сечения. Чтобы запроектировать конструкцию, например, балку, работающую на подвижную нагрузку, необходимо знать наименьшие и наибольшие значения усилий *в ряде характерных сечений* (на опорах, в пролете). Для этой цели используются огибающие эпюры.

Огибающая (объемлющая) эпюра усилия S показывает распределение экстремальных (и максимальных, и минимальных) значений этого усилия, вызываемых заданной подвижной нагрузкой. Эта эпюра имеет две ограничивающие линии (ветви) – верхнюю и нижнюю. Одна из них соединяет максимальные ординаты S_{\max} , другая – минимальные S_{\min} .

2.11.2 Способы построения огибающих эпюр. Чаще всего подобные эпюры используют при расчетах балочных систем, где определяющим усилием является изгибающий момент. Поэтому способы построения этих эпюр рассмотрим на примере эпюры моментов.

Способ 1 – исследование множества последовательных положений подвижной нагрузки. Непрерывное движение нагрузки заменяют большим числом ее положений. При каждом конкретном положении строят эпюру изгибающих моментов (рисунок 2.43). Затем для каждого сечения (k) выбирают из всех возможных зна-

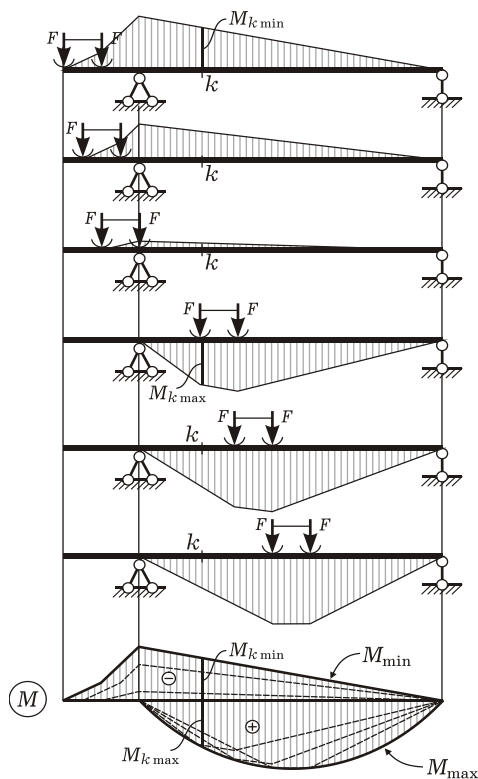


Рисунок 2.43

сечений момента наибольшие и наименьшие ординаты ($M_{k \min}$, $M_{k \max}$), которые соединяют двумя плавными кривыми – нижней и верхней ветвями. Иными словами, огибающая эпюра ограничивает снизу и сверху все эпюры моментов от заданной нагрузки в различных положениях, совмещенные на одной базе.

Заметим, что огибающая эпюра показывает экстремальные значения момента только от одного вида подвижной нагрузки. При необходимости исследования воздействия других нагрузок приходится строить новые эпюры, в чем состоит недостаток данного способа.

Способ 2 – с помощью линий влияния. Намечают ряд характерных сечений, для которых строят линии влияния моментов. Загружают каждую из них подвижной нагрузкой сначала так, чтобы момент в данном

сечении был наибольшим, затем – наименьшим. Определяют эти два значения и откладывают положительные ординаты снизу, отрицательные – сверху, как принято на эпюрах изгибающих моментов. Соединяя наибольшие и наименьшие ординаты, получают нижнюю и верхнюю ветви огибающей эпюры.

Данный способ удобен тем, что при действии подвижной нагрузки другого вида ординаты новой огибающей эпюры получают по тем же линиям влияния.

Методика определения усилий от подвижных и неподвижных нагрузок с помощью линий влияния основана на принципе суперпозиции. Поэтому второй способ применим только в линейно деформируемых системах. В нелинейно деформируемых конструкциях, где нельзя использовать принцип суперпозиции, основным является первый способ.

Пример 2.9 Рассмотрим балку, воспринимающую подвижную нагрузку в виде двух сосредоточенных сил (рисунок 2.44, а). Построим для нее огибающую эпюру изгибающих моментов вторым способом – с помощью линий влияния.

Намечаем сечения 1–5, для которых строим линии влияния M_1 – M_5 от подвижного груза $\bar{F} = 1$ (рисунок 2.44, б). Далее загружаем каждую из них так, чтобы момент в данном сечении был минимальным и максимальным (положения I–IV на рисунке 2.44, б) и определяем:

$$M_{1\min} = -\frac{1}{2}Fa; \quad M_{1\max} = 0; \quad M_{2\min} = -Fa - \frac{1}{2}Fa = -\frac{3}{2}Fa; \quad M_{2\max} = 0;$$

$$M_{3\min} = -\frac{3}{4}Fa - \frac{3}{8}Fa = -\frac{9}{8}Fa; \quad M_{3\max} = \frac{3}{4}Fa + \frac{5}{8}Fa = \frac{11}{8}Fa;$$

$$M_{4\min} = -\frac{1}{2}Fa - \frac{1}{4}Fa = -\frac{3}{4}Fa; \quad M_{4\max} = \frac{3}{4}Fa + Fa = \frac{7}{4}Fa;$$

$$M_{5\min} = -\frac{1}{4}Fa - \frac{1}{8}Fa = -\frac{3}{8}Fa; \quad M_{5\max} = \frac{5}{8}Fa + \frac{3}{4}Fa = \frac{11}{8}Fa.$$

Положительные ординаты откладываем снизу, отрицательные – сверху, как принято на эпюрах моментов. Соединяя наименьшие ординаты $M_{1\min}$ – $M_{5\min}$, получаем верхнюю ветвь огибающей эпюры; наибольшие ординаты $M_{1\max}$ – $M_{5\max}$ образуют ее нижнюю ветвь (рисунок 2.44, в).

2.11.3 Совместное действие постоянных и временных нагрузок. Часто при подборе сечений балок строят огибающие (объемлющие) эпюры другого вида – как эпюры наибольших и наименьших значений усилий в сечениях конструкции от *совместного действия* постоянных и временных нагрузок.

Постоянная нагрузка располагается на всем протяжении балки, а временная устанавливается в соответствии с видом линий влияния момента в данном сечении.

Для определения наибольшего момента в каком-либо сечении балки к моменту от постоянной нагрузки прибавляют положительные моменты от временной нагрузки. Для вычисления наименьшего момента в данном сечении к моменту от постоянной нагрузки прибавляют отрицательные моменты от временной нагрузки. Такие расчеты выполняют для всех схем загрузки временными нагрузками, результаты представляют в виде эпюр. Совмещая все эпюры на одной базе и соединяя минимальные, а затем максимальные ординаты, получают огибающую эпюру моментов. Аналогично строят огибающую эпюру поперечных сил.

Огибающие эпюры используются при проектировании многопролетных шарнирных и неразрезных балок; особенно удобны они для конструирования элементов переменного сечения.

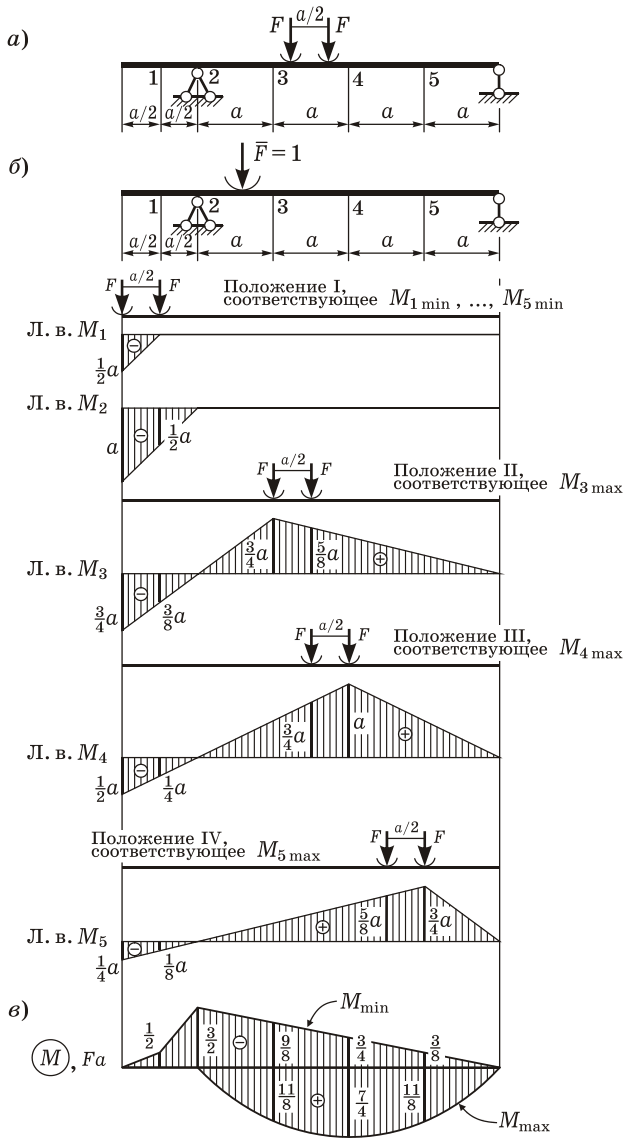


Рисунок 2.44

3.1 Общие сведения о многопролетных балках и рамах

3.1.1 Классификация статически определимых балок. Все статически определимые балки, применяемые в расчетной практике, можно разделить:

- на *консольные балки (консоли)* – балки, защемленные одним концом;
- *однопролетные балки* с двумя шарнирными опорами; среди них выделяют *простые двухопорные балки*, опоры которых расположены на концах, и *двухопорные балки с консолями*;
- *многопролетные шарнирные балки*, перекрывающие два и более пролетов; они состоят из отдельных балок, соединенных шарнирами (рисунок 3.1).

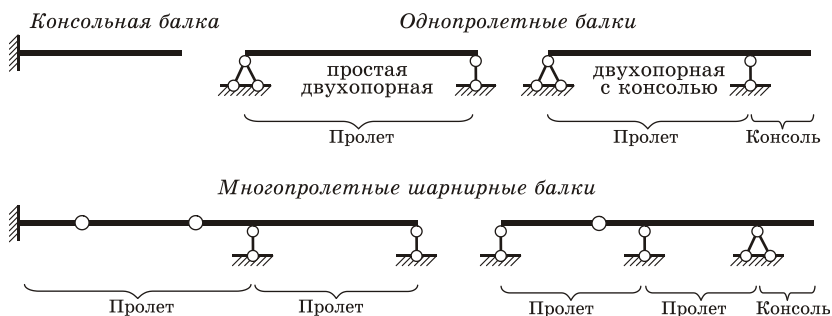


Рисунок 3.1

Для перекрытия нескольких смежных пролетов также используются неразрезные балки, не имеющие шарниров. Они являются статически неопределимыми (см. подразд. 8.6).

3.1.2 Кинематический анализ многопролетных балок. Прежде чем начинать расчет любой конструкции, необходимо убедиться в ее геометрической неизменяемости. Для этого выполняется кинематический анализ (см. п. 1.11.4).

В составе многопролетной системы прежде всего необходимо выделить диски. При этом отдельные балки, скрепленные шарнирами с другими элементами, могут считаться либо дисками, либо одиночными связями.

Число степеней свободы стержневой системы в общем случае определяется с помощью соотношений (1.2), (1.3), которые можно применить и для многопролетной балки:

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (3.1)$$

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0, \quad (3.2)$$

где D – количество дисков (отдельных балок); $Ж$ – количество жестких заделок; $Ш$ – количество шарниров, соединяющих отдельные балки; C_0 – количество одиночных связей.

Формула (3.1) используется при отсутствии жестких заделок; если же они имеются, необходимо каждую из них заменить тремя одиночными стержнями либо применять формулу (3.2).

Если $W = 0$, то балка обладает минимально необходимым числом связей и при правильной их расстановке геометрически неизменяема и статически определима.

Далее необходимо проанализировать соединение дисков между собой и с основанием.

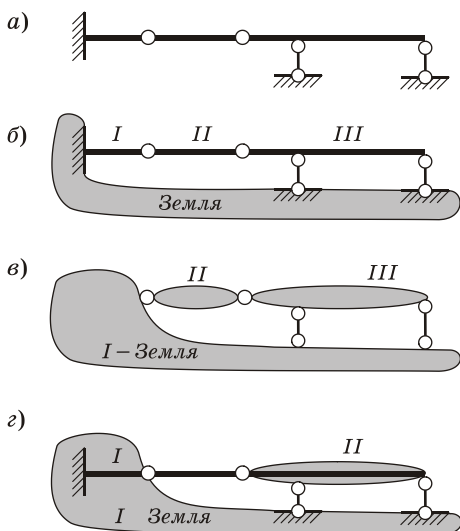


Рисунок 3.2

Пример 3.1 Рассмотрим балку (рисунок 3.2, а), для которой $D = 3$ (диски I, II, III), $Ж = 1$, $Ш = 2$, $C_0 = 2$ (рисунок 3.2, б). В соответствии с формулой (3.2)

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 = 0.$$

Балка обладает минимально необходимым для неизменяемости количеством связей.

Диск I прикреплен к земле жестко (см. рисунок 3.2, б), образуя новый диск «I-Земля». К нему при помощи двух шарниров и двух стержней присоединены диски II и III (рисунок 3.2, в), причем фиктивный шарнир, соответствующий двум параллельным стержням, не лежит на одной прямой с реальными шарнирами. **Вывод:** балка геометрически неизменяема и статически определима.

Кинематический анализ можно произвести иначе, считая вторую слева балку одиночной связью. Тогда $D = 2$, $Ж = 1$, $Ш = 0$, $C_0 = 3$ (рисунок 3.2, б). В соответствии с формулой (3.2)

$$W = 3Д - 3Ж - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0.$$

Диски «I-Земля» и III соединены тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке (рисунок 3.2, з).

Вывод: балка геометрически неизменяема и статически определима.

3.1.3 Особенности конструкции многопролетных шарнирных балок и рам. Из различных возможных типов многопролетных статически определимых балок в строительной практике наиболее широкое распространение получили следующие два типа: балки с чередующимися бесшарнирными и двухшарнирными пролетами (рисунок 3.3, а) и балки с одним бесшарнирным и последующими одношарнирными пролетами (рисунок 3.3, б).



Рисунок 3.3

На рисунке 3.4 показаны примеры конструкции шарнирного стыка для клеенощитых балок.

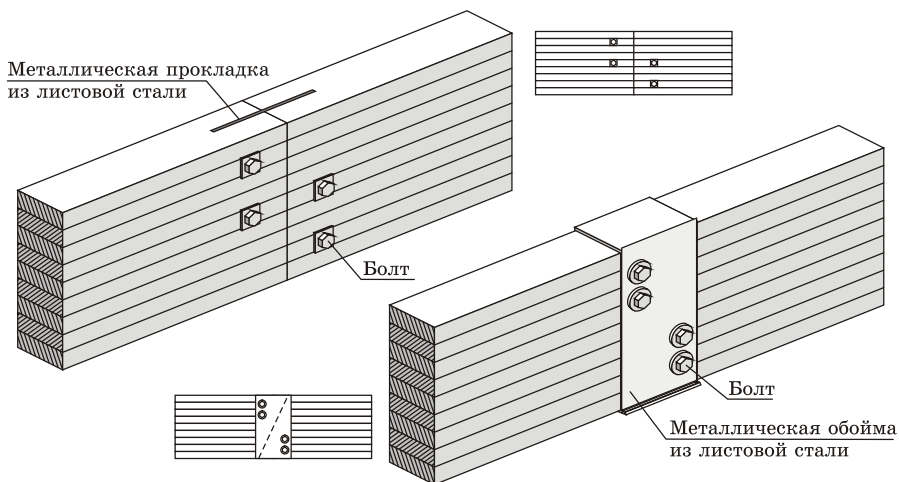


Рисунок 3.4

Для перекрытия нескольких пролетов можно использовать ряд последовательно уложенных однопролетных балок. Расчетная схема такой конструкции может быть представлена в виде одной балки с шарнирами в опорных сечениях (рисунок 3.5, а). Однако это менее рационально, чем применение многопролетной шарнирной балки (рисунок 3.5, б). Это видно, например, по характеру эпюр изгибающих моментов, построенных от равномерно распределенной нагрузки. Подобный эффект снижения моментов наблюдается также в статически неопределимой неразрезной балке (рисунок 3.5, в).

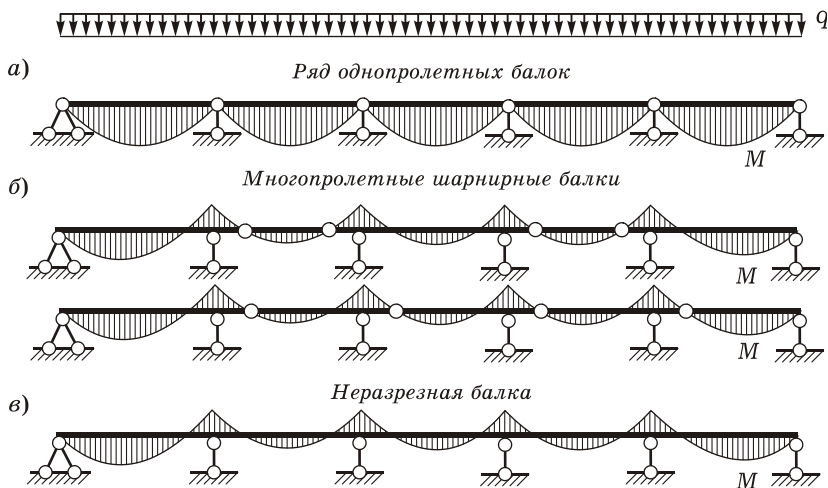


Рисунок 3.5

С точки зрения оптимизации конструкции шарниры целесообразно располагать так, чтобы наибольшие изгибающие моменты в пролетах и на опорах были равны между собой по абсолютному значению или находились в заданном соотношении.

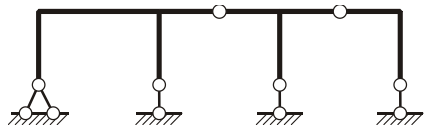


Рисунок 3.6

Многопролетные шарнирные балки широко используются в современном строительстве в качестве основных несущих конструкций.

Находят применение также многопролетные статически определимые рамы (рисунок 3.6).

Достоинством шарнирных балок и рам является то, что благодаря статической определимости в них не возникает усилий от теплового воздействия и осадки опор, а также распределение усилий в них не зависит от соотношений жесткостей отдельных элементов. Недостаток – меньшая жесткость и конструктивные трудности при устройстве шарниров.

3.2 Расчет многопролетных балок и рам на неподвижную нагрузку

Определение опорных реакций и внутренних усилий в сечениях многопролетных балок и рам можно выполнять любым удобным методом – статическим или кинематическим.

3.2.1 Статический метод. Поэтажные схемы. Формальный расчет многопролетных балок и рам статическим методом приводит к сложным аналитическим выражениям при нахождении реакций и внутренних усилий. Часто при этом приходится решать системы уравнений, порядок которых тем больше, чем сложнее конструкция. Поэтому многопролетные системы стремятся расчленивать на простые элементы – основные и дополнительные – и рассчитывать каждый элемент по отдельности.

Основными считают элементы (диски), имеющие достаточное количество связей для обеспечения собственной геометрической неизменяемости. Они прикреплены к земле при помощи заделки или двух шарнирных опор. *Дополнительные (присоединенные)* элементы геометрически неизменяемы только при соединении с основными дисками. Разновидностью дополнительных являются *подвесные* элементы, не связанные с землей (рисунок 3.7, а).

Графическое изображение схемы взаимодействия основных и дополнительных частей конструкции носит название *поэтажной схемы* (рисунок 3.7, б).

При составлении поэтажной схемы:

- основные элементы располагаются на нижнем этаже;
- дополнительные элементы помещаются на верхних этажах;
- каждый из шарниров, соединяющих основные и дополнительные диски, заменяется двумя стержнями, образуя шарнирно неподвижную опору;
- для подвесного диска один из образовавшихся наклонных стержней является избыточной связью; он переносится в опору нижележащего диска, чтобы обеспечить собственную геометрическую неизменяемость последнего. Это допускается делать только при вертикальной нагрузке, при которой опорные реакции вертикальны, так как при переносе стержня направления реакций сохраняются.

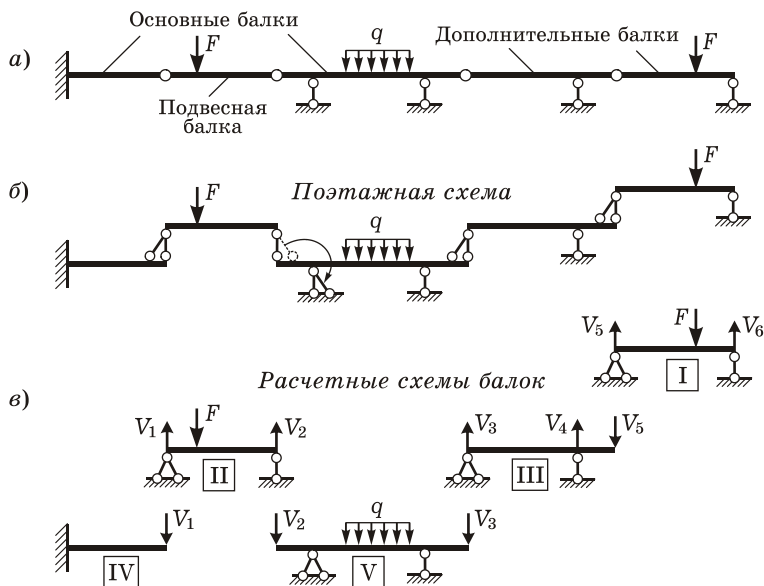


Рисунок 3.7

Полученная поэтажная схема и каждый ее элемент в отдельности должны быть геометрически неизменяемыми.

Естественно, что нагрузка, приложенная к нижним этажам, не вызывает усилий в вышележащих этажах. Это обстоятельство предопределяет последовательность расчета многопролетной балки: расчет начинается с рассмотрения самых верхних элементов поэтажной схемы, после чего рассчитываются нижележащие элементы. Последовательность расчета отдельных балок (рисунок 3.7, в) показана римскими цифрами I–V. При этом опорные реакции верхних балок прикладываются к нижним в обратных направлениях и рассматриваются для них как *дополнительные внешние силы*. Эпюры внутренних усилий обычно строятся на одной базе для всей системы.

Аналогично формируются поэтажные схемы для многопролетных рам (рисунок 3.8).

Таким образом, основная идея использования поэтажных схем состоит в том, что сложная многопролетная система разбивается на простые части, для которых определение опорных реакций и внутренних усилий не представляет сложности. Далее эти части последовательно рассчитываются с учетом сил взаимодействия между ними.

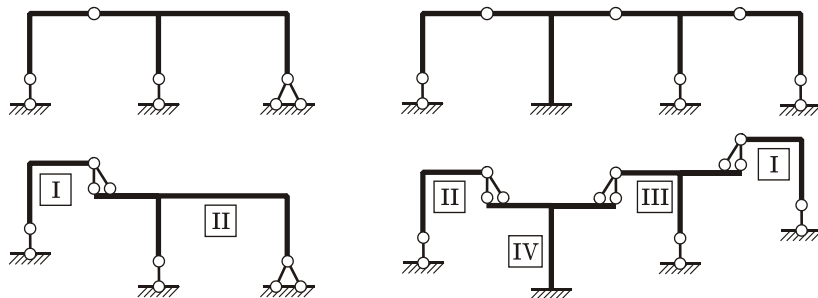


Рисунок 3.8

Пример 3.2 Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в двухпролетной шарнирной балке (рисунок 3.9, а).

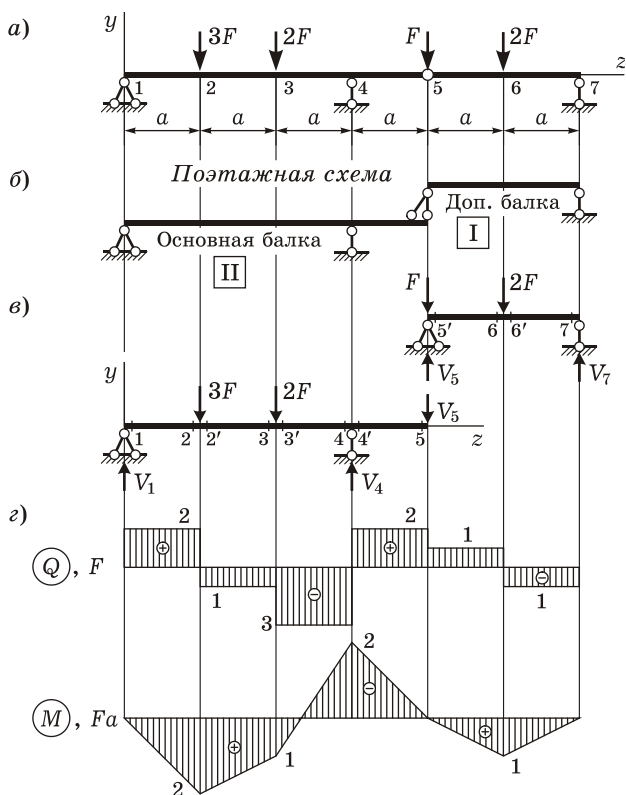


Рисунок 3.9

Поэтажная схема. Основную балку 1–5 располагаем на 1-м этаже, дополнительную балку 5–7 – на 2-м. Шарнир 5 заменяем двумя стержнями (шарнирно неподвижной опорой) (рисунок 3.9, б).

Последовательность расчета балок показана цифрами I, II. Их расчетные схемы изображены на рисунке 3.9, в. К нижележащей основной балке помимо заданных нагрузок приложена сила, равная реакции V_5 дополнительной балки.

I *Расчет дополнительной балки 5–7.* Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum M_5 &= 0; & V_7 \cdot 2a - 2F \cdot a &= 0; \\ \sum M_7 &= 0; & F \cdot 2a + 2F \cdot a - V_5 \cdot 2a &= 0,\end{aligned}$$

из которых следует, что $V_7 = F$; $V_5 = 2F$.

Для проверки составим уравнение

$$\sum Y = V_5 + V_7 - F - 2F = 2F + F - 3F = 0.$$

Проверка выполняется.

Найдем поперечные силы и изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}Q_{5-6} &= V_5 - F = 2F - F = F; & Q_{6-7} &= -V_7 = -F; \\ M_{5'} &= 0; & M_6 = M_{6'} &= V_7 \cdot a = Fa; & M_7 &= 0.\end{aligned}$$

II *Расчет основной балки 1–5.* Реакции найдем из уравнений

$$\begin{aligned}\sum M_1 &= 0; & V_4 \cdot 3a - 3F \cdot a - 2F \cdot 2a - V_5 \cdot 4a &= 0; \\ \sum M_4 &= 0; & 3F \cdot 2a + 2F \cdot a - V_5 \cdot a - V_1 3a &= 0,\end{aligned}$$

откуда $V_4 = 5F$; $V_1 = 2F$.

Для проверки составим уравнение

$$\sum Y = V_1 + V_4 - 3F - 2F - V_5 = 2F + 5F - 2F - 3F - 2F = 0.$$

Проверка выполняется.

Определим поперечные силы и изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}Q_{1-2} &= V_1 = 2F; & Q_{2-3} &= V_1 - 3F = 2F - 3F = -F; \\ Q_{3-4} &= V_1 - 3F - 2F = 2F - 5F = -3F; & Q_{4-5} &= V_5 = 2F; \\ M_1 &= 0; & M_2 = M_{2'} &= V_1 a = 2Fa; & M_3 = M_{3'} &= V_1 \cdot 2a - 3Fa = \\ & & &= 2F \cdot 2a - 3Fa = Fa; & M_4 = M_{4'} &= -V_5 a = -2Fa; & M_5 &= 0.\end{aligned}$$

По полученным данным строим эпюры Q и M (рисунок 3.9, г).

Пример 3.3 Для двухпролетной рамы (рисунок 3.10, а) требуется выполнить кинематический анализ и построить эпюры внутренних усилий.

Кинематический анализ. В структуре рамы выделим два диска – рамы AB и CD ($D = 2$), которые соединены между собой шарниром C

($Ш = 1$), а с землей – четырьмя одиночными связями ($C_O = 4$). Число степеней свободы определим по формуле Чебышева (1.2):

$$W = 3Д - 2Ш - C_O = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

следовательно, рама обладает минимально необходимым для неизменяемости количеством связей.

Основная рама AB прикреплена к земле неподвижно при помощи трех опорных стержней, не параллельных и не пересекающихся в одной точке, образуя диск « AB -Земля». К нему при помощи шарнира и стержня, не лежащих на одной прямой, присоединена дополнительная рама CD . Вывод: рама статически определима и геометрически неизменяема.

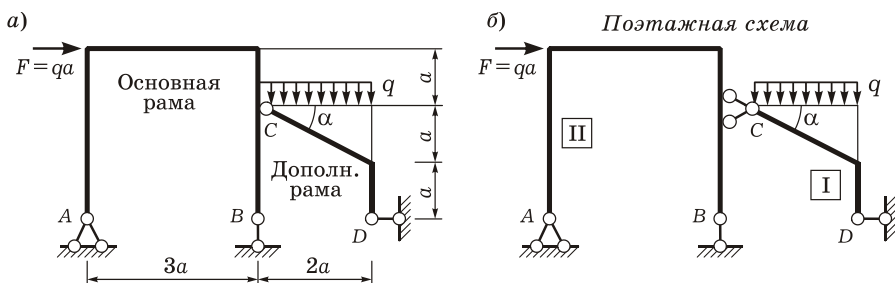


Рисунок 3.10

Поэтажная схема. Основную раму AB будем считать 1-м этажом, дополнительную CD – 2-м. Шарнир C заменим двумя стержнями (рисунок 3.10, б). Последовательность расчета отдельных рам покажем римскими цифрами I, II.

Разделим раму на две части (рисунок 3.11). К основной раме кроме заданных нагрузок приложим две силы, равные реакциям дополнительной рамы. Точки приложения сил и узлы пронумеруем от 1 до 4. Так как $\operatorname{tg} \alpha = a/(2a) = 0,5$, то угол $\alpha = 26,6^\circ$; $\sin \alpha = 0,447$; $\cos \alpha = 0,894$.

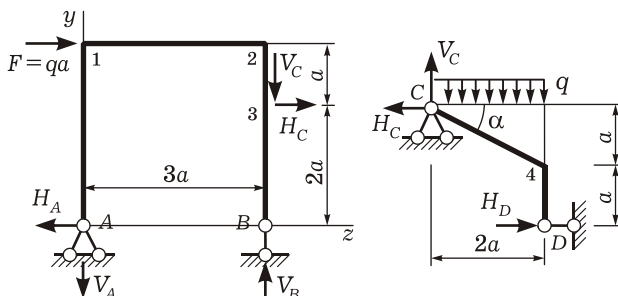


Рисунок 3.11

I Расчет дополнительной рамы CD. Найдем опорные реакции из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; \quad H_D \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0; \\ \sum Z = 0; \quad H_D - H_C = 0; \quad \sum Y = 0; \quad V_C - q \cdot 2a = 0, \end{aligned}$$

откуда

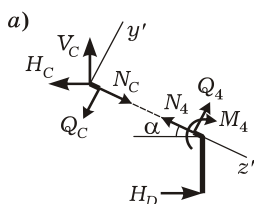
$$H_C = qa; \quad V_C = 2qa; \quad H_D = qa.$$

Для проверки составим уравнение

$$\sum M_D = q \cdot 2a \cdot a - V_C \cdot 2a + H_C \cdot 2a = 2qa^2 - 2qa \cdot 2a + qa \cdot 2a = 0.$$

Проверка выполняется.

Найдем внутренние усилия (рисунок 3.12, а).



$$M_C = 0; \quad M_D = 0; \quad M_4 = H_D a = qa^2$$

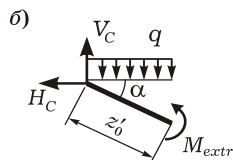
(растянуты внутренние волокна);

$$Q_{D-4} = -H_D = -qa; \quad N_{D-4} = 0.$$

Из равновесия левой части

$$\begin{aligned} \sum Y' = 0; \quad Q_C = V_C \cos \alpha - H_C \sin \alpha = \\ = 2qa \cdot 0,894 - qa \cdot 0,447 = 1,341qa; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Z' = 0; \quad N_C = V_C \sin \alpha + H_C \cos \alpha = \\ = 2qa \cdot 0,447 + qa \cdot 0,894 = 1,788qa. \end{aligned}$$



Из равновесия правой части

$$\sum Y' = 0; \quad Q_4 = -H_D \sin \alpha = -qa \cdot 0,447 = -0,447qa;$$

$$\sum Z' = 0; \quad N_4 = H_D \cos \alpha = qa \cdot 0,894 = 0,894qa.$$

Рисунок 3.12

По полученным данным строим эпюры для дополнительной рамы (рисунок 3.13). Эпюра Q пересекает ось на некотором расстоянии z'_0 от точки C, следовательно, здесь будет максимальный момент (рисунок 3.12, б). Найдем величину z'_0 из подобия треугольников:

$$z'_0 = \frac{2a}{\cos \alpha} \cdot \frac{1,341}{1,341 + 0,447} = 1,68a.$$

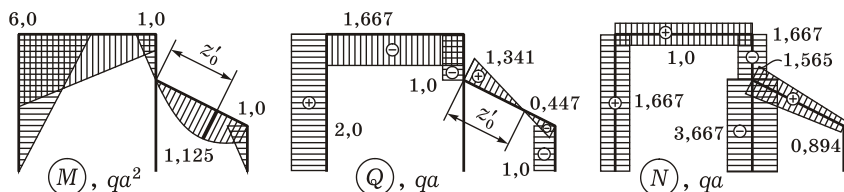


Рисунок 3.13

Экстремальный момент

$$M_{extr} = V_C z'_0 \cos \alpha - H_C z'_0 \sin \alpha - q(z'_0 \cos \alpha)^2 / 2 = \\ = 2qa \cdot 1,68a \cdot 0,894 - qa \cdot 1,68a \cdot 0,447 - q \cdot (1,68a \cdot 0,894)^2 / 2 = 1,125qa^2.$$

II Расчет основной рамы AB. Определим опорные реакции (см. рисунок 3.10), для чего составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; V_B \cdot 3a - F \cdot 3a - H_C \cdot 2a - V_C \cdot 3a = 0;$$

$$\sum M_A = 0; V_A \cdot 3a - F \cdot 3a - H_C \cdot 2a = 0;$$

$$\sum Z = 0; H_C - H_A + F = 0;$$

откуда

$$V_A = 1,667qa; V_B = 3,667qa; H_A = 2qa.$$

Проверка:

$$\sum Z = V_B - V_A - V_C = 3,667qa - 1,667qa - 2qa = 0.$$

Проверка выполняется.

Далее определим внутренние усилия:

$$M_A = M_B = M_3 = 0; M_1 = H_A \cdot 3a = 2qa \cdot 3a = 6qa^2;$$

$$M_2 = H_C \cdot a = qa \cdot a = qa^2 \text{ (растянуты внутренние волокна).}$$

$$Q_{A-1} = H_A = 2qa; Q_{1-2} = -V_A = -1,667qa; Q_{2-3} = -H_C = -qa; Q_{3-B} = 0.$$

$$N_{A-1} = V_A = 1,667qa; N_{1-2} = H_A = 2qa;$$

$$N_{2-3} = -V_A = -1,667qa; N_{3-B} = -V_B = -3,667qa.$$

На той же базе строим эпюры для основной рамы (см. рисунок 3.13).

3.2.2 Кинематический метод. При определении какого-либо усилия кинематическим методом система превращается в механизм отбрасыванием соответствующей связи, и для этого механизма составляется всего одно уравнение возможных работ с одним неизвестным (см. подразд. 2.2). Конечно, это удобно, так как нет необходимости совместно решать несколько уравнений. Однако для каждой силы (опорной реакции либо внутреннего усилия) приходится исследовать свой механизм. Поэтому, если требуется рассчитать всю конструкцию с построением эпюр, то использование кинематического метода нецелесообразно.

Данный метод рекомендуется применять, когда необходимо найти небольшое количество усилий или проверить расчеты, выполненные статическим методом.

Пример определения опорной реакции от неподвижной нагрузки в двухпролетной балке кинематическим методом был рассмотрен в разд. 2 (см. пример 2.1).

рукцией. Иными словами, расположение груза над шарниром эквивалентно его нахождению в крайнем сечении нижней балки.

Также отметим, что в многопролетных шарнирных балках, как и в других статически определимых системах, линии влияния усилий имеют линейное или кусочно-линейное очертание.

Обобщая указанные закономерности, получим методику построения линий влияния в многопролетных балках, которая сводится к следующим операциям:

- формируем поэтажную схему;
- начинаем с рассмотрения той однопролетной балки, к которой принадлежит заданное сечение или опора, и статическим методом строим линию влияния под ней (шаг 1);
- далее продолжаем линию влияния в *верхние* этажи: для каждой вышележащей дополнительной балки соединяем прямой линией ординату под шарниром с нулевой ординатой под опорой, продлевая эту прямую до конца балки (шаг 2);
- в *нижние* этажи линию влияния не продолжаем: проводим под ними прямую с нулевыми ординатами (шаг 3).

Данный способ продемонстрируем на примере построения л. в. Q_k (рисунок 3.15).

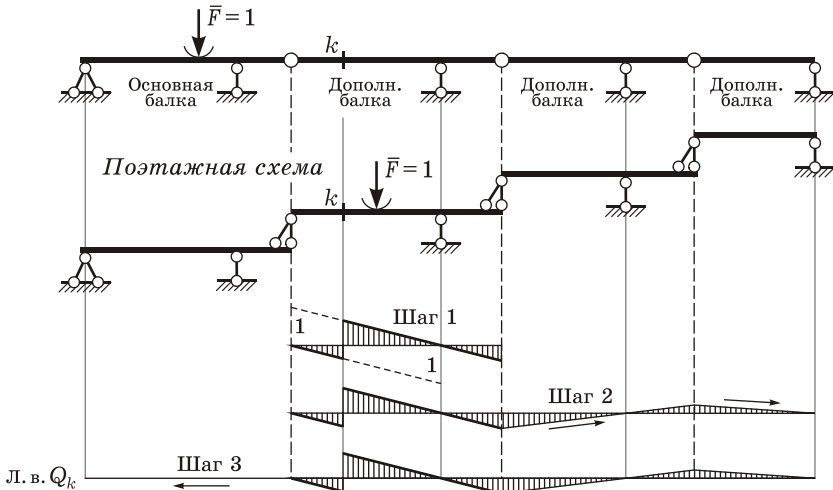


Рисунок 3.15

Аналогично получим линии влияния опорных реакций и изгибающих моментов в сечениях балки (рисунок 3.16).

Обосновать рассмотренную выше методику построения можно, получив аналитические зависимости искомых усилий от положения единичного груза на каждой балке (см. пример 3.4). Однако проще всего это сделать путем построения тех же линий влияния кинематическим методом (см. пример 3.5).

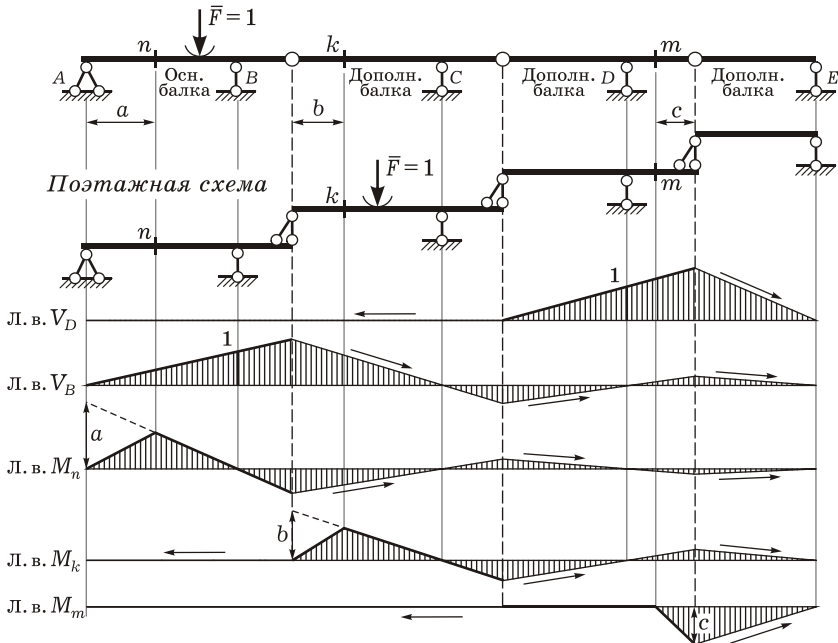


Рисунок 3.16

Пример 3.4 Для двухпролетной балки (рисунок 3.17, а) требуется построить линии влияния опорных реакций и внутренних усилий. Поэтажная схема изображена на рисунке 3.17, б.

Линии влияния опорных реакций. Разделим конструкцию на две однопролетные балки и рассмотрим каждую из них отдельно. При этом реакцию верхней балки V_5 приложим к нижней как дополнительную внешнюю силу.

Получим аналитические зависимости всех искомых реакций от положения единичного груза $\bar{F} = 1$: $V = V(z)$, для чего составим уравнения равновесия в виде сумм моментов всех сил относительно опор.

I Груз на дополнительной балке, $4a \leq z \leq 6a$ (рисунок 3.17, в).

$$\sum M_5 = 0; \quad V_7 \cdot 2a - \bar{F}(z - 4a) = 0; \quad V_7 = \frac{z - 4a}{2a};$$

$$\sum M_7 = 0; \quad -V_5 \cdot 2a + \bar{F}(6a - z) = 0; \quad V_5 = \frac{6a - z}{2a};$$

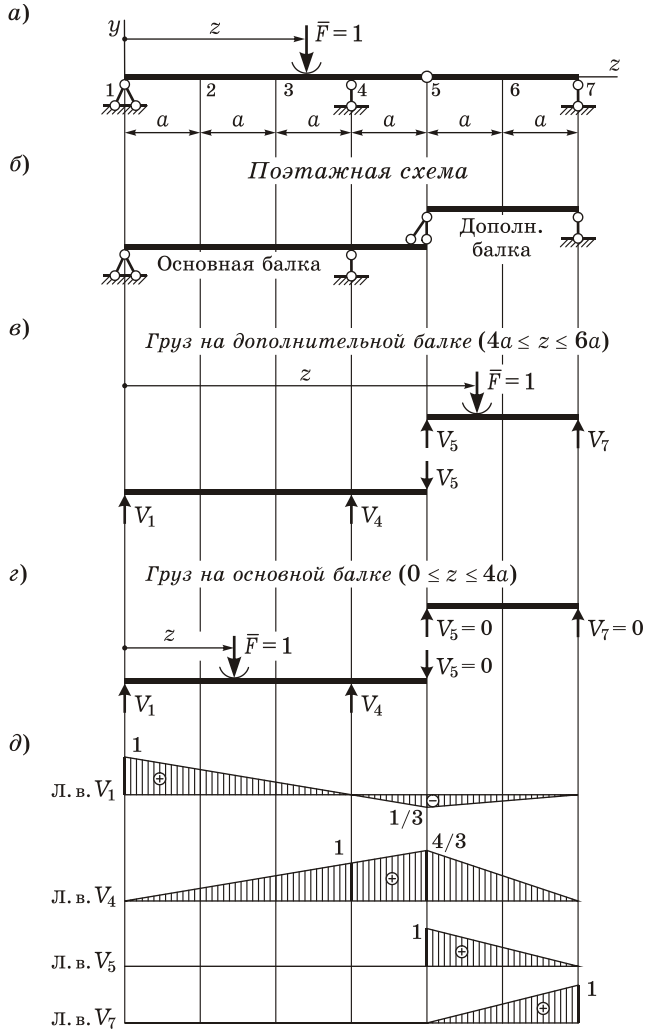


Рисунок 3.17

$$\sum M_1 = 0; \quad V_4 \cdot 3a - V_5 \cdot 4a = 0; \quad V_4 = \frac{4}{3} V_5 = \frac{2(6a - z)}{3a};$$

$$\sum M_4 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a - V_5 \cdot a = 0; \quad V_1 = -\frac{1}{3} V_5 = \frac{z - 6a}{6a};$$

при $z = 4a$ $V_7 = 0$; $V_5 = 1$; $V_4 = 4/3$; $V_1 = -1/3$;

при $z = 6a$ $V_7 = 1$; $V_5 = 0$; $V_4 = 0$; $V_1 = 0$.

□ II Груз на основной балке, $0 \leq z \leq 4a$ (рисунок 3.17, з).

$V_7 = 0$; $V_5 = 0$;

$\sum M_1 = 0$; $V_4 \cdot 3a - \bar{F}z = 0$; $V_4 = \frac{z}{3a}$;

$\sum M_4 = 0$; $F(3a - z) - V_1 3a = 0$; $V_1 = \frac{3a - z}{3a}$;

при $z = 0$ $V_4 = 0$; $V_1 = 1$; при $z = 3a$ $V_4 = 1$; $V_1 = 0$;

при $z = 4a$ $V_4 = 4/3$; $V_1 = -1/3$.

Выполняем построения (рисунок 3.17, д). Заметим, что для каждой реакции получились *разные* аналитические выражения при движении груза по основной и по дополнительной балкам. Поэтому каждая линия влияния ограничена *двумя прямыми*.

Линии влияния внутренних усилий. Сечения 1–5 принадлежат основной балке, поэтому л. в. $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, M_2, M_3, M_4$ строим сначала под ней, используя известные приемы статического метода (см. подразд. 2.6). Далее продолжаем все линии влияния в верхний этаж, для каждой из них соединяя ординату под шарниром 5 с нулевой ординатой под опорой 7 дополнительной балки (рисунки 3.18, 3.19).

Сечения 5', 6, 7 принадлежат дополнительной балке, поэтому строим л. в. Q_6, Q_5', Q_7, M_6 сначала под ней. В нижний этаж линии влияния не распространяем: проводим под основной балкой прямые с нулевыми ординатами (см. рисунки 3.18, 3.19).

3.3.2 Кинематический метод. Как уже было сказано, при инженерных расчетах балок достаточно иметь графическое изображение зависимости $S = S(z)$ – л. в. S . Поэтому для многопролетных балок кинематическим методом строят *модели* линий влияния (см. п. 2.6.2), а характерные ординаты находят из подобия треугольников.

Пример 3.5 Требуется кинематическим методом построить модели линий влияния V_4, V_7, Q_2, M_2 для двухпролетной балки, рассмотренной в примере 3.4 (рисунок 3.20, а).

Модель л. в. V_4 . Отбросим вертикальный стержень 4; полученному механизму сообщим возможные перемещения так, чтобы по направлению реакции V_4 (вертикально вверх) было $\delta = 1$ (рисунок 3.20, б).

Модель л. в. V_7 . Отбросим стержень 7 и зададим возможные перемещения так, чтобы по направлению реакции V_7 перемещение $\delta = 1$ (рисунок 3.20, в).

Модель л. в. Q_2 . В сечении 2 врезаем ползун и задаем возможные перемещения в направлении поперечной силы. При этом на опорах перемещения нулевые, а правая и левая части механизма параллельны

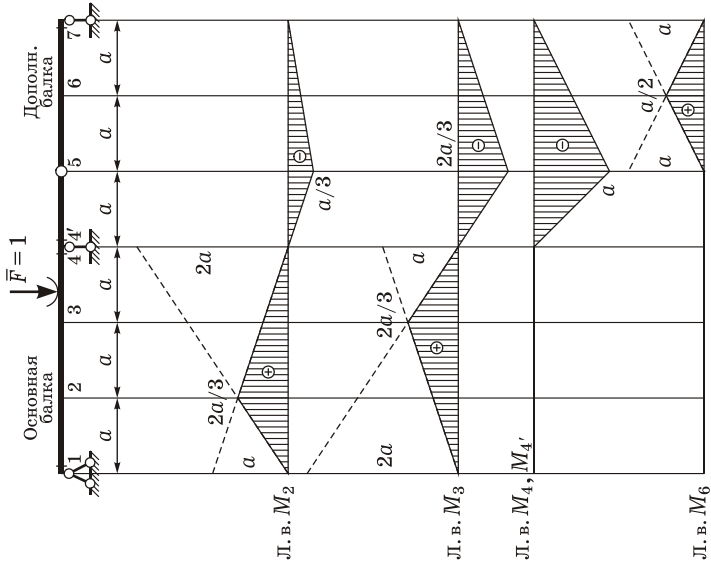


Рисунок 3.19

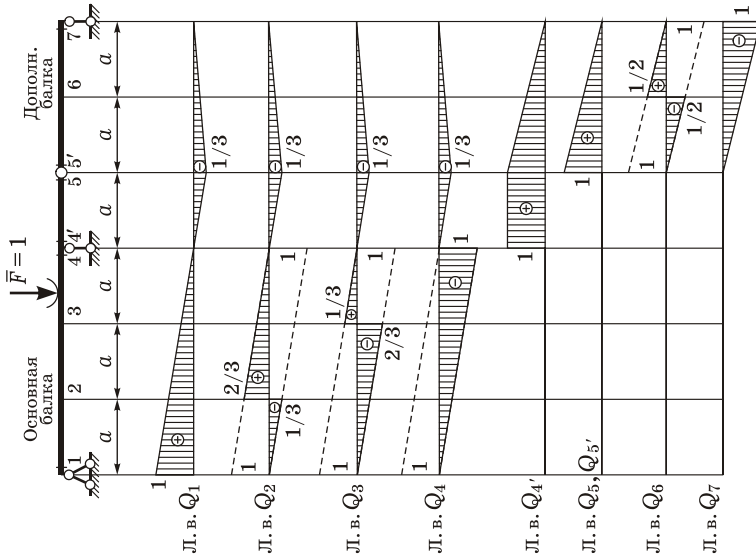


Рисунок 3.18

(рисунок 3.20, *з*). Сумма перемещений левой и правой частей должна быть равна единице, тогда эпюра перемещений механизма совпадет с искомой линией влияния.

Модель л. в. M_2 . В сечении 2 врезаем шарнир (рисунок 3.20, *д*) и задаем возможные перемещения в направлении положительных моментов так, чтобы взаимный угол поворота правой и левой частей $\varphi = 1$.

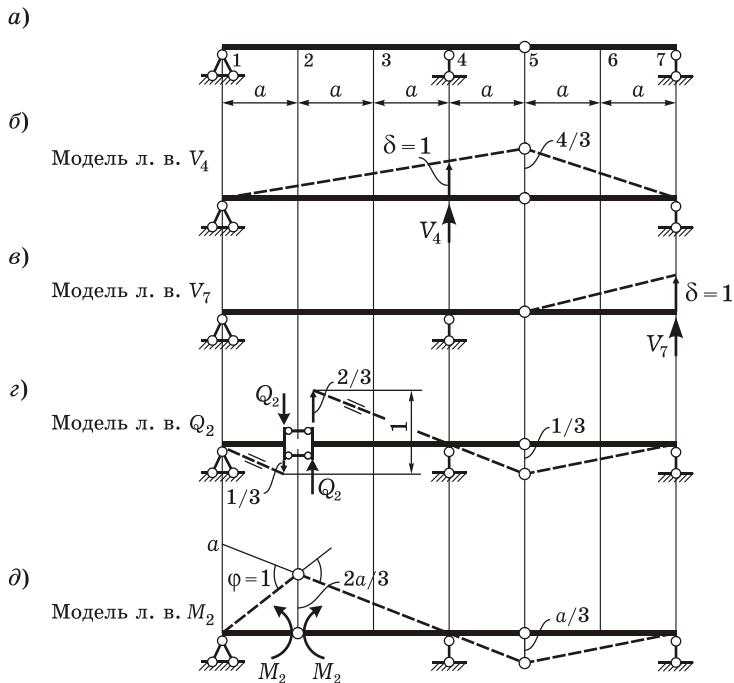


Рисунок 3.20

Ординаты полученных моделей линий влияния легко находятся из подобия треугольников.

3.4 Пример расчета трехпролетной балки железнодорожного моста

Для балки железнодорожного моста (рисунок 3.21, *а*) требуется: 1) выполнить кинематический анализ; 2) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M от постоянной равномерно распределенной нагрузки $q = 20$ кН/м; 3) построить линии влияния изгибающих моментов в характерных сечениях; 4) проверить ординаты эпюры M , загрузив линии влияния постоянной нагрузкой q ; 5) наметить расчетные

положения временной равномерно распределенной эквивалентной нагрузки v , соответствующей нагрузке СК от движущегося поезда при $K = 14$; найти значения эквивалентных нагрузок; б) построить огibaющую эпюру изгибающих моментов от постоянной и временной нагрузок.

3.4.1 Кинематический анализ. Многопролетная балка состоит из четырех отдельных балок – дисков ($D = 4$) (см. рисунок 3.21, а), соединенных тремя простыми шарнирами ($Ш = 3$). К земле она крепится при помощи жесткой заделки ($Ж = 1$) и трех опорных стержней ($C_0 = 3$). Определяем число степеней свободы по формуле (3.2)

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Необходимое условие неизменяемости $W \leq 0$ выполняется, следовательно, балка имеет минимально необходимое для геометрической неизменяемости количество связей.

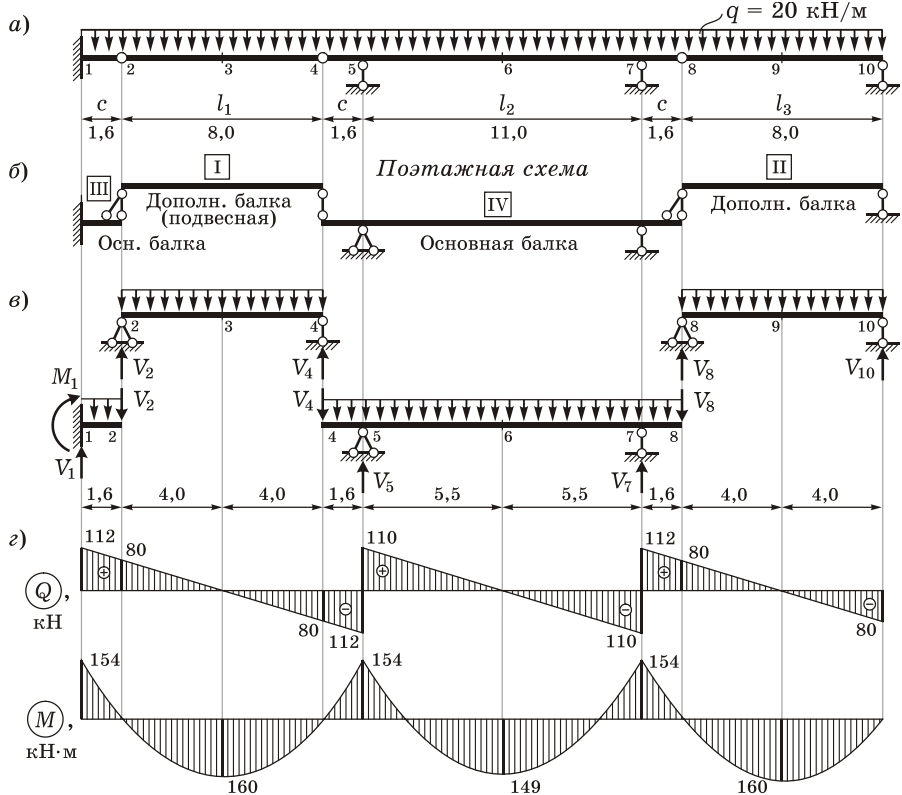


Рисунок 3.21

Балка 1–2 при помощи заделки присоединена к земле, образуя вместе с ней новый диск. Этот диск и балки 2–4 и 4–8 связаны по правилу неизменяемого соединения трех дисков – при помощи двух шарниров (2 и 4) и двух опорных стержней (5 и 7), для которых фиктивный шарнир не лежит на одной прямой с шарнирами 2 и 4. Полученную систему «1–2, 2–4, 4–8, земля» можно рассматривать как один диск. К нему по правилу соединения двух дисков прикреплена балка 8–10 – при помощи шарнира 8 и стержня 10, ось которого не проходит через шарнир. *Вывод:* балка геометрически неизменяема и статически определима.

3.4.2 Вычисление внутренних усилий от постоянной нагрузки. Изобразим поэтажную схему (рисунок 3.21, б). Расчет начнем с дополнительных балок 2–4 и 8–10, на которые действует только распределенная нагрузка. Далее переходим к основным балкам 1–2 и 4–8, прикладывая к ним помимо заданной нагрузки силы, равные опорным реакциям вышележащих балок. Последовательность расчета указана цифрами I–IV (рисунок 3.21, в).

I Расчет дополнительной балки 2–4. В силу симметрии опорные реакции балки можно определить по формулам:

$$V_2 = V_4 = ql_1 / 2 = 20 \cdot 8 / 2 = 80 \text{ кН.}$$

Поперечные силы и изгибающие моменты:

$$Q_2 = V_2 = 80 \text{ кН}; \quad Q_3 = V_2 - ql_1 / 2 = 80 - 20 \cdot 4 = 0; \quad Q_4 = -V_4 = -80 \text{ кН}; \\ M_2 = 0; \quad M_3 = V_2 l_1 / 2 - ql_1^2 / 8 = 80 \cdot 4 - 20 \cdot 8^2 / 8 = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = 0.$$

II Расчет дополнительной балки 8–10. Балка симметрична, поэтому опорные реакции

$$V_8 = V_{10} = ql_3 / 2 = 20 \cdot 8 / 2 = 80 \text{ кН.}$$

Поперечные силы и изгибающие моменты:

$$Q_8 = V_8 = 80 \text{ кН}; \quad Q_9 = V_8 - ql_3 / 2 = 80 - 20 \cdot 4 = 0; \quad Q_{10} = -V_{10} = -80 \text{ кН}; \\ M_8 = 0; \quad M_9 = V_8 l_3 / 2 - ql_3^2 / 8 = 80 \cdot 4 - 20 \cdot 8^2 / 8 = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{10} = 0.$$

III Расчет основной балки 1–2. Реакции в заделке

$$V_1 = V_2 + qc = 80 + 20 \cdot 1,6 = 112 \text{ кН};$$

$$M_1 = -V_2 c - qc^2 / 2 = -80 \cdot 1,6 - 20 \cdot 1,6^2 / 2 = 154 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Поперечные силы и изгибающие моменты:

$$Q_1 = V_1 = 112 \text{ кН}; \quad Q_2 = V_2 = 80 \text{ кН}; \quad M_1 = 154 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 0.$$

IV Расчет основной балки 4–8. Составим уравнения моментов относительно опор 5 и 7:

$$\sum M_5 = 0; \quad V_4 c + V_7 l_2 - V_8 (l_2 + c) - q(l_2 + 2c)l_2 / 2 = 0;$$

$$\sum M_7 = 0; \quad V_4 (l_2 + c) + q(l_2 + 2c)l_2 / 2 - V_8 c - V_5 l_2 = 0,$$

из которых найдем, что $V_7 = 222$ кН; $V_5 = 222$ кН.

Далее определим внутренние усилия:

$$Q_4 = -V_4 = -80 \text{ кН}; \quad Q_5^{\text{слева}} = -V_4 - qc = -80 - 20 \cdot 1,6 = -112 \text{ кН};$$

$$Q_5^{\text{справа}} = V_5 - V_4 - qc = 222 - 80 - 20 \cdot 1,6 = 110 \text{ кН};$$

$$Q_6 = V_5 - V_4 - q(c + l_2/2) = 222 - 80 - 20(1,6 + 5,5) = 0;$$

$$Q_7^{\text{слева}} = V_8 - V_7 + qc = 80 - 222 + 20 \cdot 1,6 = -110 \text{ кН};$$

$$Q_7^{\text{справа}} = V_8 + qc = 80 + 20 \cdot 1,6 = 112 \text{ кН}; \quad Q_8 = V_8 = 80 \text{ кН};$$

$$M_4 = 0; \quad M_5 = -V_4 c - qc^2/2 = -80 \cdot 1,6 - 20 \cdot 1,6^2/2 = 154 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -V_4(c + l_2/2) - q(c + l_2/2)^2/2 =$$

$$= -80 \cdot (1,6 + 5,5) - 20 \cdot (1,6 + 5,5)^2/2 = 154 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = -V_8 c - qc^2/2 = -80 \cdot 1,6 - 20 \cdot 1,6^2/2 = 154 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8 = 0.$$

По полученным данным строим эпюры Q и M (рисунок 3.21, *з*).

При проектировании многопролетных балок стремятся к приблизительно равенству пролетных и опорных моментов. В нашем примере это достигнуто за счет длин пролетов и расположения шарниров.

3.4.3 Построение линий влияния изгибающих моментов. Пользуясь предложенной в п. 3.3.1 методикой, построим линии влияния моментов в характерных сечениях балки (рисунок 3.22, *а*). Формируем поэтажную схему (рисунок 3.22, *б*).

Л. в. M₁. Начинаем с рассмотрения основной балки-консоли 1–2, к которой принадлежит сечение 1, и строим линию влияния под ней (рисунок 3.22, *в*). Под точкой 1 имеем нуль, под точкой 2 ордината равна длине консоли со знаком минус ($-c$) = $-1,6$ м. Далее продолжаем линию влияния под верхний этаж 2–4: соединяем ординату под шарниром 2 с нулем под шарниром 4. На участке 4–10 ординаты нулевые, так как при расположении здесь груза момент в сечении 1 не возникает.

Л. в. M₃. Сечение 3 находится посередине подвесной балки 2–4, на которую другие балки не опираются. Поэтому линия влияния будет ненулевой только между шарнирами 2 и 4. Для построения левой прямой откладываем под опорой 4 ординату $l_1/2 = 4$ м и соединяем ее с нулем под опорой 2. Аналогично получаем правую прямую. Линия влияния симметрична, максимальная ордината $l_1/4 = 2$ м.

Л. в. M₅. Начинаем с основной балки 4–8, к которой принадлежит сечение 5, и строим линию влияния под ней. Продолжаем ее в верхний этаж 2–4: соединяем ординату под шарниром 4 с нулем под шарниром 2. На остальных участках ординаты нулевые, так как при расположении здесь груза момент в сечении 5 не возникает.

Л. в. M₆. Строим линию влияния под балкой 4–8. Распространяем ее в верхние этажи 2–4 и 8–10: соединяем ординаты под шарнирами 4 и 8

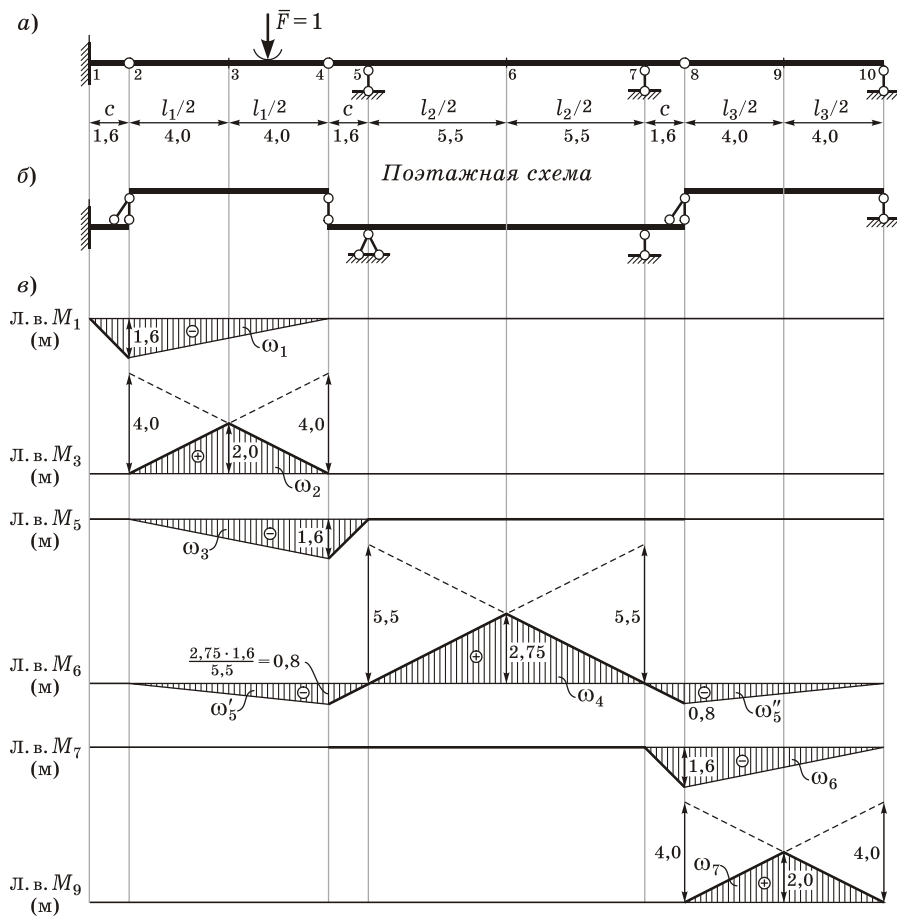
с нулями под опорами 2 и 10. Под основной балкой 1–2 ординаты нулевые. Значения под шарнирами вычисляем из подобия треугольников.

Л. в. M_7 получаем аналогично л. в. M_5 .

Л. в. M_9 . Эта линия влияния будет находиться только под дополнительной балкой 8–10, под которой ее и изображаем (см. рисунок 3.22, в).

Выборочно проверим линии влияния, построив их модели кинематическим методом.

Модель л. в. M_1 . Отбрасывание связи, соответствующей моменту M_1 , эквивалентно врезанию шарнира в сечение 1 (рисунок 3.23, а).



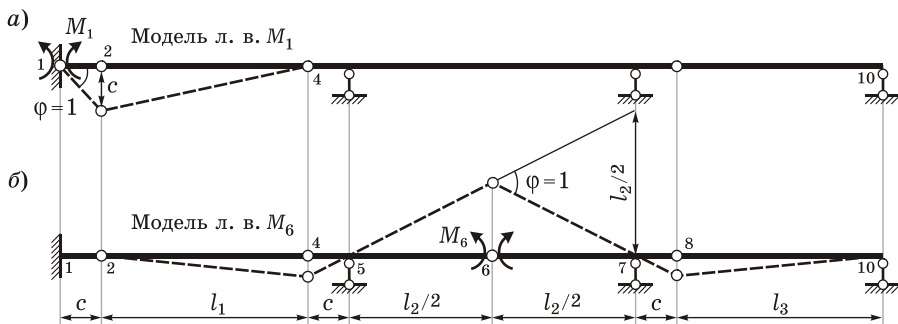


Рисунок 3.23

Шарниры 1, 2 и 4 расположены на одной прямой, следовательно, диски 1–2 и 2–4 образуют мгновенно изменяемую систему. По направлению искомого момента задаем возможное единичное перемещение $\varphi = 1$. В результате шарнир 2 опускается вниз на (c) . На участке 4–10 система остается геометрически неизменяемой.

Модель л. в. M_6 . Врезаем шарнир в сечение 6 и по направлению искомого момента задаем возможное перемещение $\varphi = 1$. Шарнир 6 поднимается вверх, в результате чего элементы 4–6 и 6–8 поворачиваются относительно опор 5 и 7, опуская вниз шарниры 4 и 8 (рисунок 3.23, б).

Сравнивая построенные ранее линии влияния с соответствующими моделями, убеждаемся в совпадении их форм.

3.4.4 Проверка ординат эпюры моментов с помощью линий влияния. Определим площади участков линий влияния (см. рисунок 3.22):

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_6 = -9,6 \cdot 1,6 / 2 = -7,68 \text{ м}^2;$$

$$\omega_2 = \omega_7 = 8 \cdot 2,0 / 2 = 8,0 \text{ м}^2; \quad \omega_4 = 11 \cdot 2,75 / 2 = 15,13 \text{ м}^2;$$

$$\omega'_5 = \omega''_5 = -9,6 \cdot 0,8 / 2 = -3,84 \text{ м}^2.$$

Умножив интенсивность распределенной нагрузки q на площади, соответствующие каждой из л. в. M_1 – M_9 , получим значения моментов:

$$M_1 = q\omega_1 = 20(-7,68) = -154 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = q\omega_2 = 20 \cdot 8 = 160 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = q\omega_3 = 20(-7,68) = -154 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = q(\omega_4 + \omega'_5 + \omega''_5) = 20(15,13 - 3,84 - 3,84) = -149 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = q\omega_6 = 20(-7,68) = -154 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9 = q\omega_7 = 20 \cdot 8 = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вычисленные значения совпадают с полученными ранее ординатами эпюры изгибающих моментов (см. рисунок 3.21).

3.4.5 Схемы невыгоднейшего нагружения. Рассматриваемая балка проектируется под нагрузку СК ($K = 14$), состоящую из сосредоточенных сил, моделирующих давление колес локомотива, и распределенной вагонной нагрузки. Подобрать схему невыгоднейшего расположения данной нагрузки для каждой линии влияния сложно. Поэтому ее заменяют эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой v .

Загрузим балку так, чтобы в расчетных сечениях моменты были экстремальными. Максимальные изгибающие моменты возникают при расположении распределенной нагрузки над положительными участками линий влияния, минимальные – над отрицательными (рисунок 3.24). Каждый треугольный участок загружается отдельно.

Эквивалентные нагрузки, соответствующие схемам 1, ..., 7, обозначим v_1, \dots, v_7 . Здесь же укажем, какому значению момента соответствует каждая схема, а также обозначим площади участков линий влияния ($\omega_1, \dots, \omega_7$).

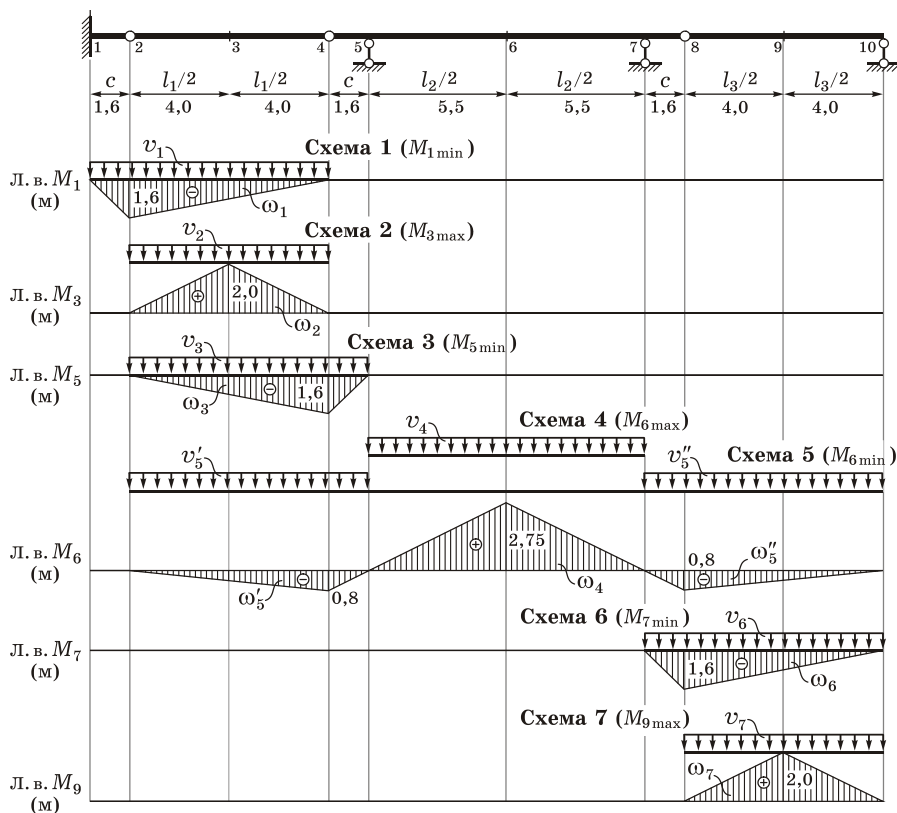


Рисунок 3.24

3.4.6 Вычисление эквивалентных нагрузок. Для каждой схемы выписываем длины загрузки участков линии влияния λ и вычисляем относительные положения вершин $\alpha = a/\lambda$ (a – наименьшее расстояние от вершины линии влияния до ее нулевой точки). Затем по таблице А.1 приложения А в зависимости от λ и α выбираем эквивалентные нагрузки для $K = 1$, приходящиеся на все сооружение (две балки).

Если нужных значений λ или α в таблице нет, используем интерполяцию. Например, для $\lambda = 9,6$ м известны

$$v|_{\alpha=0} = 17,62 \text{ кН/(м пути)}; \quad v|_{\alpha=0,25} = 16,52 \text{ кН/(м пути)}.$$

Для $\alpha = 0,17$ получаем:

$$v|_{\alpha=0,17} = 16,52 + \frac{0,25-0,17}{0,25-0} (17,62 - 16,52) = 16,87 \text{ кН/(м пути)}.$$

Окончательные значения эквивалентных нагрузок v_1, \dots, v_7 для $K = 14$, действующих на одну балку, получаем, умножив табличные данные на 14 и разделив на 2. Результаты записываем в таблицу 3.1.

3.4.7 Построение огибающей эпюры изгибающих моментов. Вычисляем максимальные и минимальные моменты в расчетных сечениях от временной нагрузки. Для этого величину эквивалентной нагрузки для каждой схемы загрузки умножим на площадь соответствующего участка линии влияния. При этом, так как л. в. M_1 не имеет положительных ординат, $M_{1 \max} = 0$. Аналогично выясняем, что

$$M_{3 \min} = 0; \quad M_{5 \max} = 0; \quad M_{7 \max} = 0; \quad M_{9 \min} = 0.$$

Результаты записываем в графу 13 таблицы 3.1. В графу 14 перенесим моменты от постоянной нагрузки (см. п. 3.4.2). Просуммировав значения граф 13 и 14, получаем расчетные максимальные и минимальные значения изгибающих моментов – ординаты огибающей эпюры M (рисунок 3.25). Нижняя ветвь соединяет максимальные ординаты $M_{1 \max}, \dots, M_{9 \max}$, верхняя – минимальные $M_{1 \min}, \dots, M_{9 \min}$.

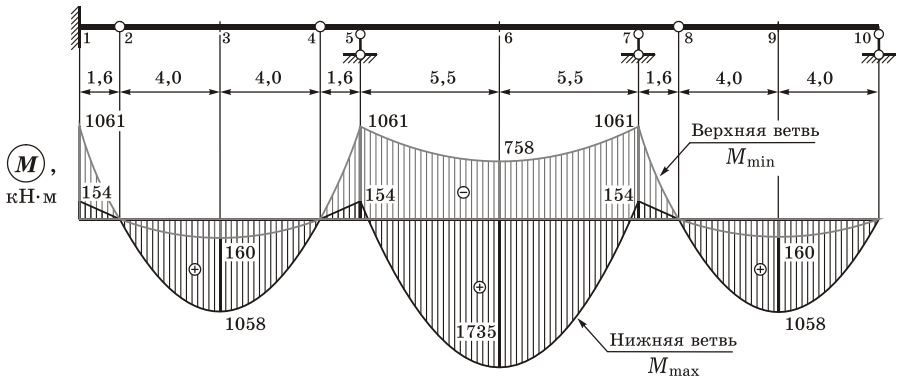


Рисунок 3.25

4.1 Общие сведения о фермах

4.1.1 Фермы и их расчетные схемы. Ферма представляет собой стержневую систему из прямолинейных элементов, воспринимающую, как правило, узловые нагрузки. После условной замены всех ее узлов полными шарнирами ферма остается геометрически неизменяемой системой.

Стержни ферм могут быть соединены жестко, как в монолитных железобетонных и металлических сварных фермах с фасонками (рисунок 4.1), либо в большей или меньшей степени *податливо* в деревянных, сборных железобетонных и стальных бесфасоночных фермах.

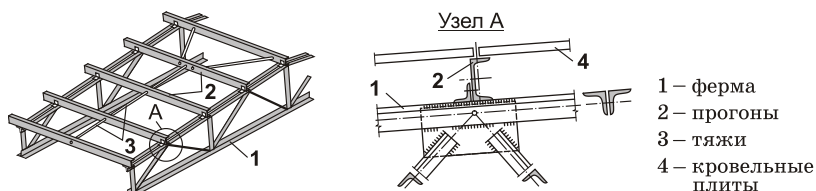


Рисунок 4.1

Эксперименты с ферменными конструкциями, а также расчеты их как статически неопределимых систем с жесткими узлами показали, что стержни испытывают как деформации растяжения–сжатия, так и деформации изгиба. Однако большинство ферм проектируется под *узловую нагрузку*, а их стержни достаточно *гибкие*¹⁾. При этом хотя и возникает незначительный изгиб отдельных элементов, но напряжения изгиба малы по сравнению с напряжениями растяжения–сжатия. Для таких ферм в качестве расчетной схемы принимается *шарнирно-стержневая система* – совокупность прямых стержней, связанных в узлах идеальными полными шарнирами (рисунок 4.2). Элементы этой системы работают на центральное растяжение–сжатие, в них возникают только продольные силы N .

¹⁾ Этот вопрос рассматривается в курсах конструкций: металлических, железобетонных, деревянных и т. п. Например, для стальных ферм из уголков достаточно гибкими считаются стержни, у которых $h/l < 0,1$ (h – высота сечения, l – расчетная длина стержня).

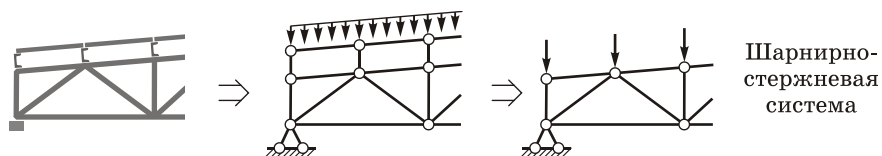


Рисунок 4.2

В то же время в ряде случаев (например, в железобетонных или металлических фермах с массивными стержнями) даже при узловой нагрузке игнорирование изгибающих моментов ведет к существенным погрешностям в определении напряженного состояния. Поэтому в качестве расчетной схемы такой конструкции должна приниматься *рамная система с жесткими узлами* (рисунок 4.3). Допускается производить расчет подобных ферм по схеме с шарнирными узлами, использовать его в качестве первого приближения, а затем вводить соответствующие поправки.

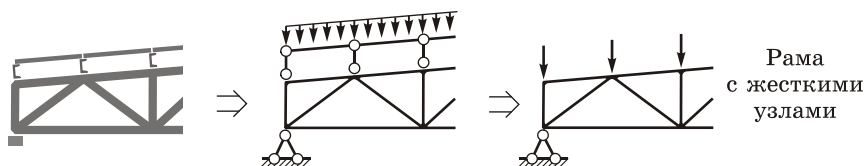


Рисунок 4.3

В дальнейшем, употребляя термин «ферма», будем иметь в виду шарнирно-стержневую систему, воспринимающую узловые нагрузки за счет растяжения-сжатия элементов. Конструкцию с жесткими узлами будем называть «рамой».

4.1.2 Основные элементы ферм. Стержни фермы, расположенные по верхнему и нижнему внешнему контурам, образуют *пояса*. Пояс, к которому приложена нагрузка, называется *грузовым*. Совокупность стержней между поясами называется *решеткой*. Решетка, как правило, состоит из *раскосов*, *стоек* и *подвесок* – наклонных и вертикальных элементов соответственно (рисунок 4.4).

Стойки обычно сжаты, нагрузка на них действует сверху. *Подвески* – это растянутые стержни, к которым силы приложены снизу.

Расстояние между осями опор называется *пролетом*, наибольшее расстояние между поясами – *высотой*. Часть фермы, расположенная между смежными узлами пояса, называется *панелью*, а расстояние между этими узлами пояса – длиной панели. Свешивающаяся часть является *консолью* (см. рисунок 4.4).

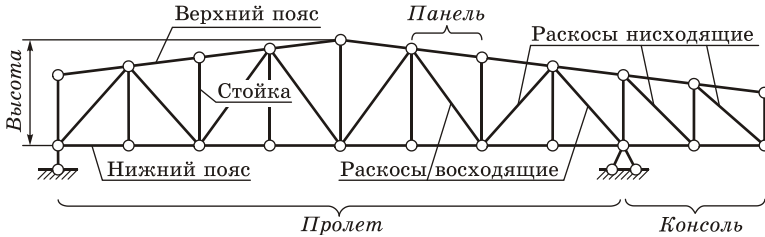


Рисунок 4.4

Если мысленно двигаться вдоль раскосов от опор фермы к середине пролета или концу консоли, то по одним раскосам придется идти вниз, «нисходить», по другим – вверх, «восходить». В соответствии с этим раскосы подразделяются на *нисходящие* и *восходящие*.

4.1.3 Статическая определимость плоских ферм. Необходимым и достаточным признаком статической определимости любой стержневой системы является ее геометрическая и мгновенная неизменяемость и отсутствие лишних связей (см. п. 2.1.2).

Для плоской фермы эти требования обеспечиваются:

- 1) наличием минимально необходимого количества стержней; т. е. должно выполняться условие

$$2U = C_0 = C_\phi + C_{\text{оп}}, \quad (4.1)$$

где U – количество узлов фермы (шарниров), непосредственно не связанных с землей; $C_0 = C_\phi + C_{\text{оп}}$ – количество односторонних связей; C_ϕ – количество стержней фермы; $C_{\text{оп}}$ – количество опорных стержней;

- 2) правильным расположением стержней.

В простой по образованию ферме стержни шарнирами соединены в треугольники. Как известно (см. п. 1.9.2), система, состоящая из шарнирных треугольников, геометрически неизменяема. Чтобы неподвижно прикрепить ее к земле, минимально необходимо три опорных стержня, не параллельных и не пересекающихся в одной точке. Для фермы указанной структуры условие (4.1) выполняется, связи расположены правильно. Следовательно, она статически определима (рисунок 4.5, а).

Если имеются лишние стержни ($2U < C_0$) и все они расположены правильно, ферма статически неопределима (рисунок 4.5, б). Если же связей недостаточно ($2U > C_0$) или способы скрепления стержней не соответствуют принципам геометрически неизменяемого соединения (при любом соотношении U и C_0), система геометрически изменяема (рисунок 4.5, в).

Здесь и в дальнейшем при изображении расчетных схем будем считать, что пересекающиеся стержни не соединены друг с другом, а «проскальзывают» один относительно другого.

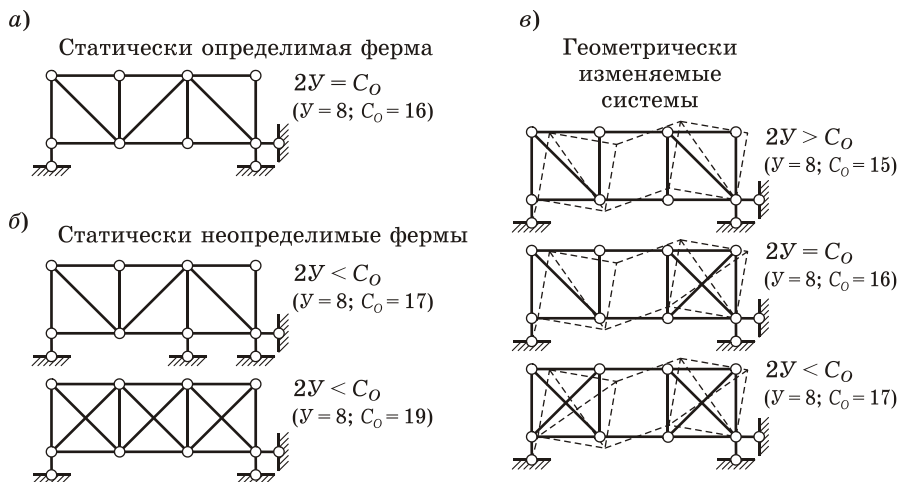


Рисунок 4.5

В сложных по конфигурации фермах для установления геометрической и мгновенной неизменяемости используют аналитические методы (см. подразд. 1.11).

4.2 Классификация плоских ферм

Фермы широко применяются в строительной практике: в качестве несущих конструкций пролетных строений мостов, каркасов промышленных и гражданских зданий, стропильные фермы; они используются как подкрановые конструкции, стрелы подъемных кранов, мачты линий электропередач и др.

Как и любые стержневые системы, фермы бывают плоскими и пространственными. Рассмотрим классификацию ферм, расчетные схемы которых представляют собой плоские шарнирно-стержневые системы.

4.2.1 Классификация по очертанию поясов. Различают (рисунок 4.6) фермы с параллельными поясами, треугольные, трапециевидальные и полигональные фермы (фермы с криволинейными поясами).

У полигональных ферм узлы одного или обоих поясов находятся на какой-либо кривой — параболе, окружности, эллипсе и др., однако сами стержни прямолинейны.

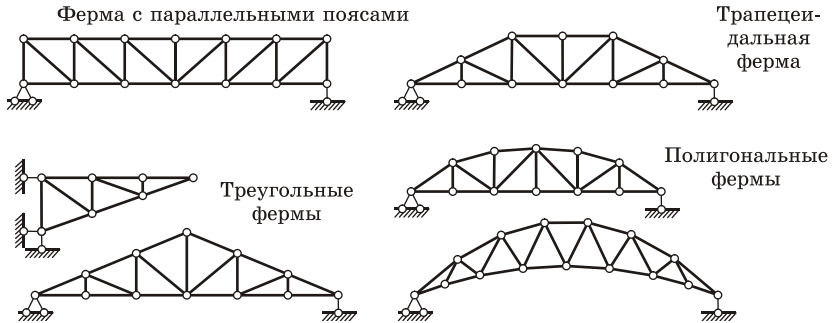


Рисунок 4.6

4.2.2 Классификация по системе решетки. Решетки плоских ферм подразделяются на простые, сложные и составные.

Простыми считаются (рисунок 4.7):

- *раскосная* решетка, представляющая собой непрерывный зиг-заг с попеременно чередующимися раскосами и стойками; при этом в каждой половине двухопорной фермы направления раскосов идентичны (например, все раскосы нисходящие);
- *треугольная* решетка, образованная раскосами с чередующимся направлением (нисходящими и восходящими). Треугольная решетка может быть дополнена стойками или подвесками;
- *полураскосная* решетка, имеющая в каждой панели два разных по направлению раскоса, идущих к середине стойки.

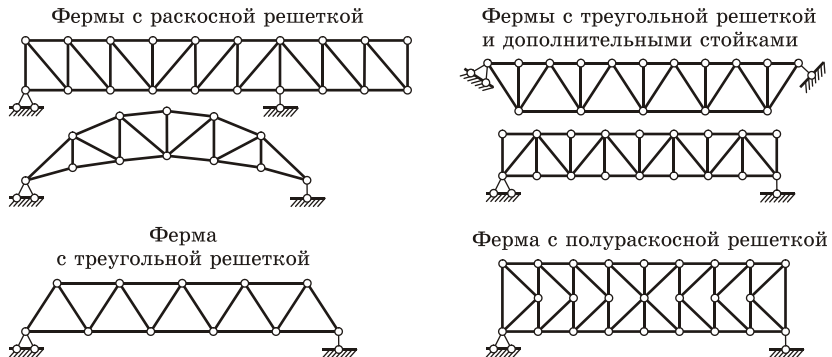


Рисунок 4.7

Сложные решетки получены наложением друг на друга двух и более простых раскосных или треугольных решеток. К фермам со сложными решетками относятся (рисунок 4.8):

- *двухраскосная* ферма, через каждую панель которой (кроме крайних) проходят два раскоса одинакового направления;
- ферма с *ромбической* решеткой;
- *двухрешетчатая* ферма;
- *крестовая* ферма (двухрешетчатая с дополнительными стойками);
- *многорешетчатая* ферма и т. д.

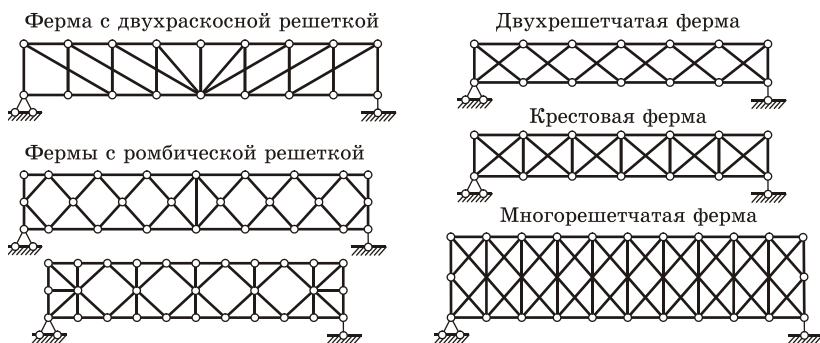


Рисунок 4.8

Ферменными конструкциями с составной решеткой являются *шпренгельные фермы* (рисунок 4.9). Они образованы из ферм с простой решеткой, у которых панели грузового пояса путем введения дополнительных стержней (на рисунке показаны штриховыми линиями) разделены на несколько частей.

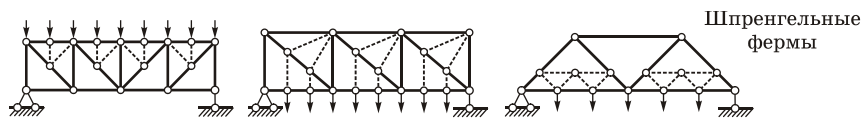


Рисунок 4.9

4.2.3 Классификация по условиям опирания. По расположению опор различают фермы на двух опорах (*балочные, балочно-консольные, арочные, рамные, комбинированные, висячие*) и консольные фермы (рисунок 4.10), а также многопролетные фермы, имеющие более двух опор.

По направлению опорных реакций двухопорные фермы делят на *безраспорные* и *распорные*. Под действием вертикальной на-

грузки в опорах безраспорных систем возникают только вертикальные реакции, в опорах распорных систем – и вертикальные, и горизонтальные составляющие. Балочные и консольно-балочные фермы являются безраспорными; арочные, рамные, висячие – как правило, распорные.

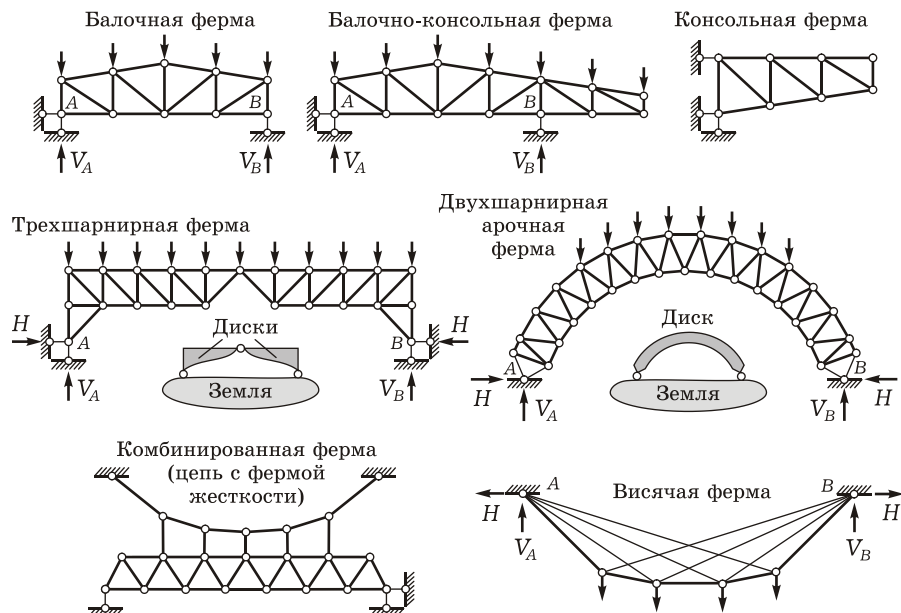


Рисунок 4.10

Рассмотренная здесь классификация не является исчерпывающей. В ней указаны наиболее типичные плоские фермы, которые применяются в практике строительства. В реальных сооружениях применяются и другие типы ферм, расчетные схемы которых выходят за рамки данной классификации.

4.3 Определение усилий в стержнях ферм при неподвижной нагрузке

4.3.1 Идея фермы. Вспомним работу на изгиб двутавровой балки (рисунок 4.11, а): наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в полках; стенка обеспечивает необходимую высоту балки, «разнося» полки как можно дальше друг от друга, и воспринимает напряжения сдвига. Чем больше длина пролета балки, тем выше должно быть сечение двутавра.

Для перекрытия значительных пролетов целесообразно применять фермы, высота которых может быть намного больше, чем у балок (рисунок 4.11, б). Здесь пояса работают аналогично полкам двутавра – воспринимают основные растягивающие и сжимающие напряжения, система раскосов и стоек работает как стенка балки.

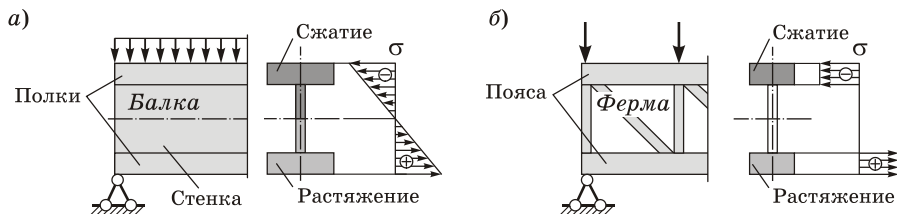


Рисунок 4.11

4.3.2 Методы расчета на неподвижную нагрузку. Расчет ферм заключается в определении продольных сил N в их стержнях. В настоящее время в основном используются аналитические методы¹⁾.

При расчетах с помощью компьютера применяются программно-вычислительные комплексы, основанные на решении общей системы уравнений равновесия фермы.

При расчетах ферм вручную удобен метод сечений, разновидностями которого являются способы вырезания узлов, проекций и моментной точки. Для ферм с простой решеткой эти способы, удачно дополняя друг друга, дают возможность избежать составления систем совместных уравнений с многими неизвестными. Указанные способы подробно изучаются в курсе теоретической механики, поэтому здесь лишь кратко напомним их суть.

Способ вырезания узлов. От фермы последовательно отделяется один узел за другим, и для каждого из них составляется два уравнения равновесия в виде суммы проекций на любые две непараллельные оси (рисунок 4.12). Начинать необходимо с узла, в котором сходятся два стержня. В каждом следующем узле должно быть не более двух неизвестных усилий. Уравнения равновесия для последнего вырезанного узла служат для проверки расчетов.

Способом вырезания узлов может быть произведен расчет любой статически определимой фермы. Он целесообразен, если требуется найти продольные силы во всех стержнях. Однако для

¹⁾ Продольные силы в стержнях ферм также можно найти графическим методом – с помощью диаграмм Максвелла–Кремоны.

сложных ферм этот способ приводит к большому числу совместных уравнений и применяется для них, главным образом, как вспомогательный.

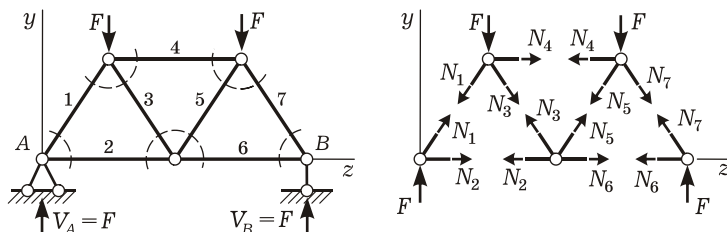


Рисунок 4.12

Недостаток способа вырезания узлов в том, что погрешности или ошибки при вычислении продольных сил в одних стержнях отражаются на определении сил в следующих стержнях.

Способ проекций. Ферма разделяется на две части рассечением не более трех стержней. Уравнения равновесия для нахождения продольных сил составляются в виде сумм проекций сил одной из частей на надлежащим образом выбранные оси. При этом по возможности каждое уравнение должно быть независимым, т. е. содержать одно неизвестное усилие. Например, для определения N_2 спроецируем все силы левой части на ось u (рисунок 4.13), так как при этом проекции двух попадающих в сечение сил N_1 и N_3 обращаются в нуль:

$$\sum U^{\text{лев.ч}} = 0;$$

$$F \cos \alpha - N_2 \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Отсюда

$$N_2 = F \cos \alpha / \cos(\beta - \alpha).$$

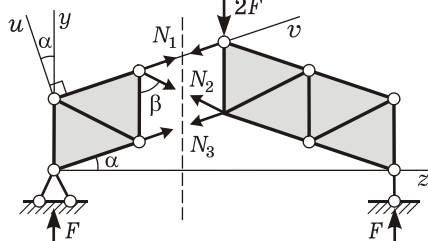


Рисунок 4.13

Способ моментной точки. Ферма также разделяется на две части рассечением не более трех стержней (рисунок 4.14). Уравнения равновесия составляются в виде сумм моментов относительно точки пересечения двух неизвестных сил. Например, для определения N_2 составим уравнение моментов правой части относительно точки A , в которой пересекаются не интересующие нас силы N_1 и N_3 :

$$\sum M_A^{\text{прав.ч}} = 0; \quad N_2 h + Fa = 0; \quad N_2 = -Fa / h.$$

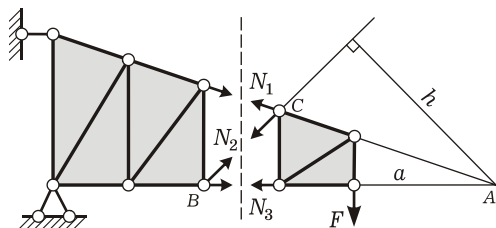


Рисунок 4.14

Например, в ферме, показанной на рисунке 4.15, для определения усилия N_1 необходимо расечь четыре стержня. Теперь сила N_1 легко определяется из условий равновесия любой из частей.

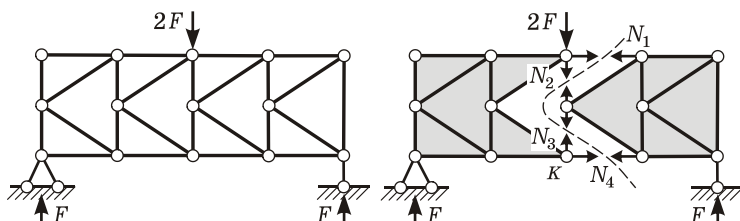


Рисунок 4.15

4.3.3 Анализ распределения усилий в фермах от вертикальной нагрузки. Во многих простых фермах без расчета можно представить качественную картину распределения продольных сил. Для этого ферму необходимо сравнить с балкой – системой, более простой по образованию, несущей такую же нагрузку.

Рассмотрим ферму с параллельными поясами и соответствующую ей простую балку (рисунок 4.16, а, б). Опорные реакции в этих двух системах одинаковые.

Определим продольную силу в стержне нижнего пояса N_{Π} . Составим уравнения равновесия левой части фермы и балки в виде суммы моментов относительно точки K , из которых получим:

$$\text{для фермы} \quad N_{\Pi} h = V_A \cdot 2d - (F/2) \cdot 2d - Fd ;$$

$$\text{для балки} \quad M^{\text{бал}} = V_A \cdot 2d - (F/2) \cdot 2d - Fd .$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые: $N_{\Pi} h = M^{\text{бал}}$. Отсюда

$$N_{\Pi} = M^{\text{бал}} / h ,$$

т. е. продольные силы в поясах фермы пропорциональны изгибающим моментам в сечениях соответствующей балки. Наибольшие значения усилий возникают в середине пролета, наименьшие – у опор (рисунок 4.16, в). С увеличением высоты h значения продольных сил уменьшаются, и наоборот. Имеются стержни, в которых $N = 0$ (нулевые стержни).

Найдем силу в нисходящем раскосе N_p (см. рисунок 4.16, а). Составим уравнения равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось, из которых получим:

$$\text{для фермы} \quad N_p \sin \alpha = V_A - 2,5F;$$

$$\text{для балки} \quad Q^{\text{бал}} = V_A - 2,5F.$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые: $N_p \sin \alpha = Q^{\text{бал}}$. Отсюда

$$N_p = Q^{\text{бал}} / \sin \alpha,$$

т. е. продольные силы в раскосах фермы пропорциональны поперечным силам в сечениях соответствующей балки. Наибольшие значения усилий в раскосах возникают у опор, наименьшие – в середине пролета (см. рисунок 4.16, в).

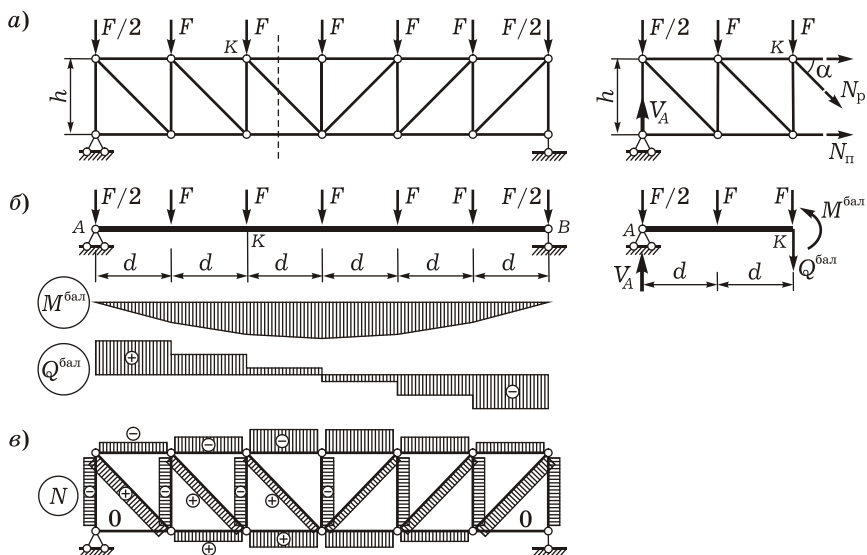


Рисунок 4.16

Для левой половины балки $Q^{\text{бал}} > 0$. Следовательно, в нисходящих раскосах продольные силы положительны, эти стержни растянуты. Аналогично можно показать, что восходящие раскосы и стойки сжаты (заметим, что не всегда, но в большинстве случаев).

4.3.4 Рекомендации по проектированию ферм. В фермах, работающих на неподвижную нагрузку, стремятся избегать больших изменений усилий в поясах, а значит, и больших изменений поперечных сечений поясов. Для этого высоту фермы делают переменной – пропорциональной ординатам балочной эпюры моментов. Тогда в одном из поясов продольная сила постоянна по длине всего пояса (рисунок 4.17) (в решетке усилия не показаны).

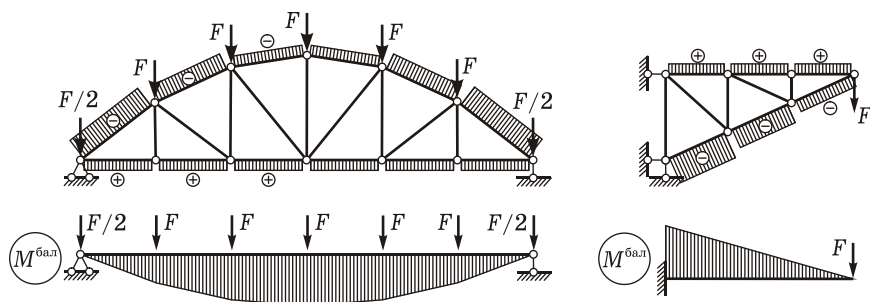


Рисунок 4.17

Чем больший пролет перекрывает ферма, тем большую высоту она должна иметь. По конструктивным соображениям нежелательно увеличивать высоту фермы без увеличения длин панелей: для удобного соединения стержней углы между поясами и раскосами не должны быть слишком малыми. Но удлинение панели приводит к появлению больших усилий в стержнях, а следовательно, к увеличению размеров поперечных сечений элементов. Чтобы этого избежать, проектируют полураскосные и шпренгельные фермы (см. рисунки 4.7 и 4.9).

4.4 Линии влияния продольных сил: статический метод

Фермы часто используются в пролетных строениях мостов, в качестве несущих конструкций эскалаторов в метро, как стрелы подъемных кранов, в связи с чем они испытывают действие подвижных нагрузок. Как и другие стержневые системы, фермы удобно рассчитывать на подвижную нагрузку при помощи линий влияния.

4.4.1 Порядок построения линий влияния N статическим методом. Подвижная нагрузка передается через вспомогательные конструкции на узлы фермы (рисунок 4.18, а). Подобную схему узловой передачи нагрузки обычно не вычерчивают, но учитывают при расчете фермы (рисунок 4.18, б).

Чтобы построить линию влияния продольной силы N статическим методом, необходимо:

- провести сечение, разделяющее ферму на две части и обнаруживающее искомую силу;
- составить уравнения равновесия в двух случаях – при нахождении груза $\bar{F}=1$ на одной и на другой частях фермы (левой и правой либо в узле и вне узла), исключая *рассеченный стержень грузового пояса* (р. с. г. п.);
- из уравнений равновесия найти выражения искомой силы, согласно которым построить линию влияния N на всех участках, кроме рассеченного стержня грузового пояса;
- под рассеченным стержнем грузового пояса провести передающую прямую, соединив найденные ранее ординаты под его узлами.

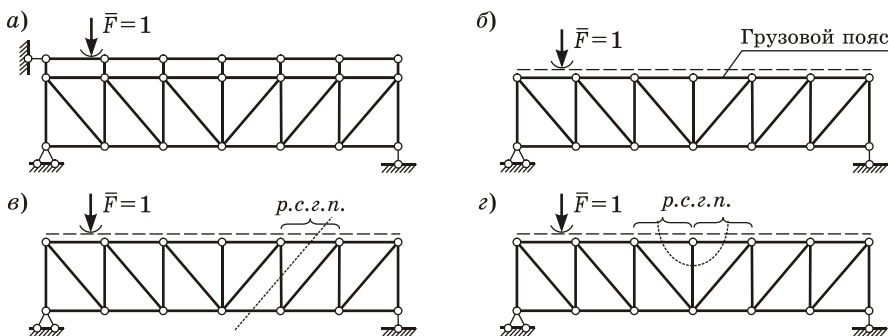


Рисунок 4.18

Общие указания при построении линий влияния следующие:

- стараются одновременно рассекать не более трех стержней;
- рассматривают обычно равновесие той части, к которой приложено меньше сил (включая опорные реакции). В зависимости от конкретной ситуации уравнения равновесия составляют в форме уравнений моментов или проекций на оси координат;
- для многих стержней междуопорной части фермы удобно использовать в качестве вспомогательных линии влияния опорных реакций, которые совпадают с линиями влияния реакций в соответствующей балке;

- линия влияния N имеет столько передаточных прямых, сколько стержней грузового пояса рассечено при определении этой силы.

Например, при определении усилий в стержнях фермы, разрезанных наклонным сечением (рисунок 4.18, *в*), удобно составлять уравнения для правой части, если груз движется по левой части, и наоборот. При этом рассечен один стержень грузового пояса, значит, линии влияния будут иметь по одной передаточной прямой. При расчете усилия в средней стойке удобно вырезать узел (рисунок 4.18, *з*) и рассмотреть его равновесие в двух случаях: когда груз находится в узле и вне узла. Линия влияния будет иметь две передаточные прямые, так как в грузовом поясе рассечено два стержня.

4.4.2 Примеры построения линий влияния в фермах.

Пример 4.1 Для фермы с верхним грузовым поясом, изображенной на рисунке 4.19, *а*, требуется построить линии влияния усилий в стержнях 2-3, 5-3, 5-6 и 2-5.

Линии влияния опорных реакций. Предварительно построим л. в. V_A и V_B . Составим уравнения моментов:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad \bar{F}(10d - z) - V_A \cdot 10d = 0; \\ \sum M_A = 0; \quad V_B \cdot 10d - \bar{F}z = 0,\end{aligned}$$

из которых получим

$$V_A = 1 - z/10d; \quad V_B = z/10d.$$

При $z=0$ значения $V_A=1$; $V_B=0$, при $z=10d$ $V_A=0$; $V_B=1$.

Мы доказали, что линии влияния опорных реакций в ферме (рисунок 4.19, *б*) такие же, как и в простой балке аналогичного пролета.

Линии влияния N_{2-3} , N_{5-3} , N_{5-6} . Проведем сечение I-I через три стержня (см. рисунок 4.19, *а*). Рассеченный стержень грузового пояса (р. с. г. п.) - 2-3, поэтому передаточная прямая для линий влияния в рассматриваемых трех стержнях будет именно на этом участке.

Продольную силу N_{2-3} определим из уравнения моментов относительно узла 5, где пересекаются оси стержней 5-3 и 5-6. Проецируя все силы на вертикальную ось y , найдем усилие N_{5-3} . Для стержня 5-6 составим уравнение моментов относительно точки 3. Усилия в стержнях будем выражать через опорные реакции V_A и V_B .

Рассмотрим правую часть фермы, если груз $\bar{F}=1$ находится слева от р.с.г.п., и наоборот (рисунок 4.20). Расчеты будем вести в таблице 4.1.

По результатам расчетов для каждого усилия строим левые и правые прямые линий влияния (рисунок 4.19, *в-д*). Ординаты под узлами 2 и 3 соединяем передаточными прямыми.

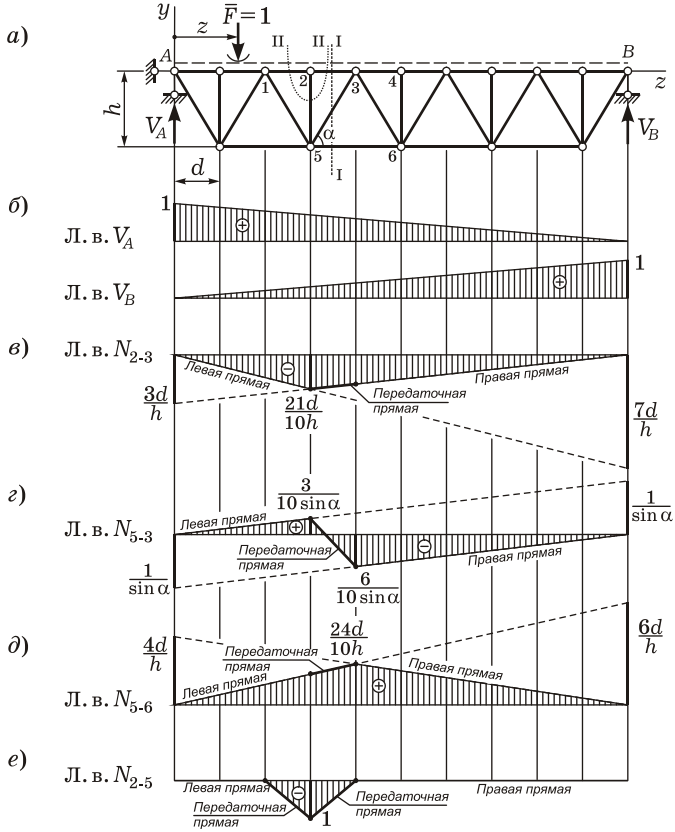


Рисунок 4.19

Таблица 4.1 – Расчет л. в. N_{2-3} , N_{5-3} , N_{5-6}

Груз $\bar{F} = 1$ левее р. с. г. п. 2-3 (на участке А-2)	Груз $\bar{F} = 1$ правее р. с. г. п. 2-3 (на участке 3-В)
$\sum M_5^{\text{прав}} = 0; N_{2-3} \cdot h + V_B \cdot 7d = 0;$ $N_{2-3} = -\frac{7d}{h} V_B$ (уравнение левой прямой л. в. N_{2-3})	$\sum M_5^{\text{лев}} = 0; -N_{2-3} \cdot h - V_A \cdot 3d = 0;$ $N_{2-3} = -\frac{3d}{h} V_A$ (уравнение правой прямой л. в. N_{2-3})
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; V_B - N_{5-3} \sin \alpha = 0;$ $N_{5-3} = \frac{1}{\sin \alpha} V_B$ (уравнение левой прямой л. в. N_{5-3})	$\sum Y^{\text{лев}} = 0; V_A + N_{5-3} \sin \alpha = 0;$ $N_{5-3} = -\frac{1}{\sin \alpha} V_A$ (уравнение правой прямой л. в. N_{5-3})

Окончание таблицы 4.1

Груз $\bar{F} = 1$ <i>левее</i> р. с. г. п. 2-3 (на участке А-2)	Груз $\bar{F} = 1$ <i>правее</i> р. с. г. п. 2-3 (на участке 3-В)
$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; V_B \cdot 6d - N_{5-6} \cdot h = 0;$ $N_{5-6} = -\frac{6d}{h} V_B$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{5-6})	$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; N_{5-6} \cdot h - V_A \cdot 4d = 0;$ $N_{5-6} = -\frac{4d}{h} V_A$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{5-6})

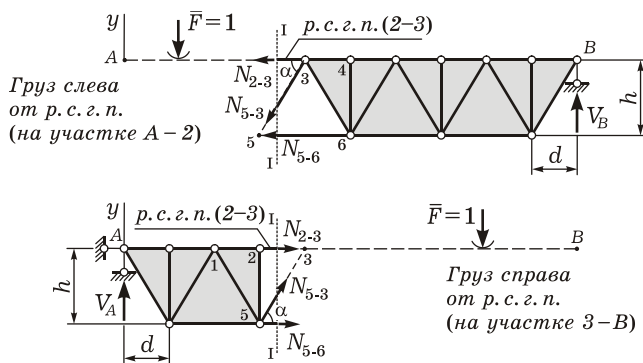


Рисунок 4.20

Линия влияния $N_{2.5}$. Проведем сечение II-II через три стержня (см. рисунок 4.19, а), вырезав узел 2. Рассечены два стержня грузового пояса – 1-2 и 2-3, поэтому линия влияния будет иметь две передаточные прямые.

Рассмотрим равновесие вырезанного узла, когда груз $\bar{F} = 1$ находится в узле 2 и вне его (рисунок 4.21). Расчеты будем вести в таблице 4.2.

Строим линию влияния N_{2-5} (рисунок 4.19, е). Ординаты под узлами 1, 2 и 3 соединяем двумя передаточными прямыми.

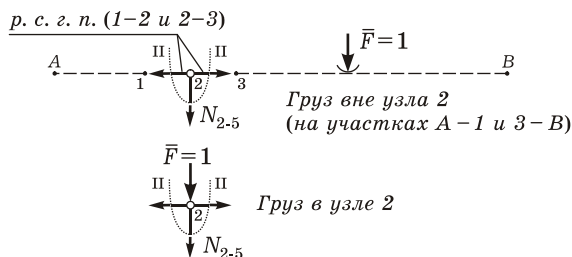


Рисунок 4.21

Таблица 4.2 – Расчет л. в. N_{2-5}

Груз $\bar{F} = 1$ вне узла 2 (на участках А-1 и 3-В)	Груз $\bar{F} = 1$ в узле 2
$\sum Y_{\text{узла}} = 0; N_{2-5} = 0;$ (уравнения левой и правой прямых л. в. N_{2-5})	$\sum Y_{\text{узла}} = 0; -\bar{F} - N_{2-5} = 0;$ $N_{2-5} = -\bar{F} = -1$ (ордината л. в. N_{2-5} в узле 2)

Пример 4.2 Для фермы с нижним грузовым поясом, изображенной на рисунке 4.22, а, требуется построить линии влияния усилий в стержнях 1-2, 2-3 и 3-4.

Проведем сечение I-I через три стержня (см. рисунок 4.22, а). Рассеченный стержень грузового пояса (р. с. г. п.) – 3-4, поэтому передаточная прямая для линий влияния в рассматриваемых трех стержнях будет именно на этом участке. Силу в каждом из трех стержней будем определять, составляя уравнение моментов относительно точки, в которой пересекаются оси двух других рассеченных стержней.

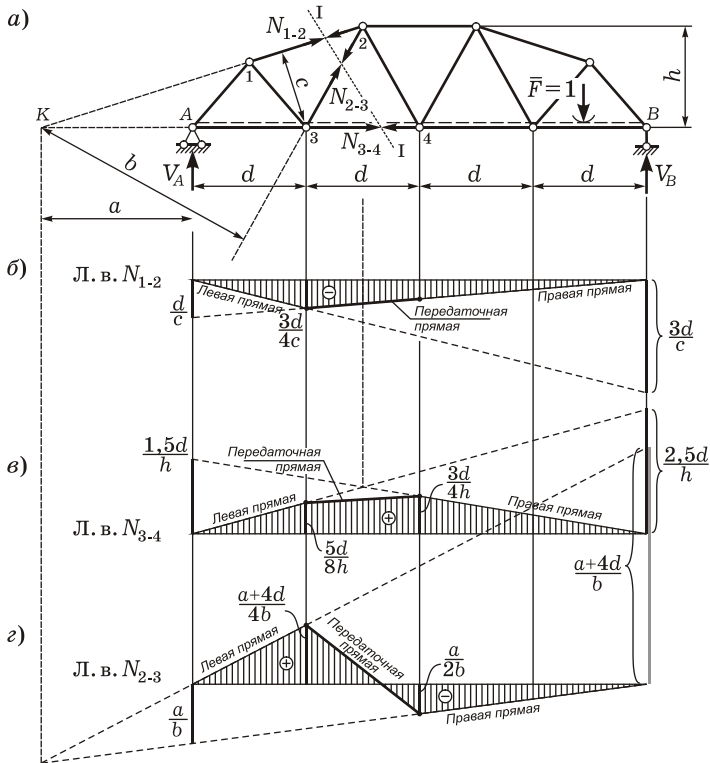


Рисунок 4.22

Рассмотрим правую часть фермы, если груз $\bar{F} = 1$ находится слева от р. с. г. п., и наоборот. Расчеты будем вести в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Расчет л. в. N_{1-2} , N_{3-4} , N_{2-3}

Груз $\bar{F} = 1$ <i>левее</i> р. с. г. п. 3-4 (на участке А-3)	Груз $\bar{F} = 1$ <i>правее</i> р. с. г. п. 3-4 (на участке 4-В)
$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; N_{1-2} \cdot c + V_B \cdot 3d = 0;$ $N_{1-2} = -\frac{3d}{c} V_B$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{1-2})	$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; -N_{1-2} \cdot c - V_A \cdot d = 0;$ $N_{1-2} = -\frac{d}{c} V_A$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{1-2})
$\sum M_2^{\text{прав}} = 0; V_B \cdot 2,5d - N_{3-4} \cdot h = 0;$ $N_{3-4} = \frac{2,5d}{h} V_B$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{3-4})	$\sum M_2^{\text{лев}} = 0; N_{3-4} \cdot h - V_A \cdot 1,5d = 0;$ $N_{3-4} = \frac{1,5d}{h} V_A$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{3-4})
$\sum M_K^{\text{прав}} = 0; V_B(a + 4d) - N_{2-3} \cdot b = 0;$ $N_{2-3} = \frac{a + 4d}{b} V_B$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{2-3})	$\sum M_K^{\text{лев}} = 0; N_{2-3} \cdot b + V_A \cdot a = 0;$ $N_{2-3} = -\frac{a}{b} V_A$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{2-3})

По результатам расчетов для каждого усилия строим левые и правые прямые линий влияния (рисунок 4.22, б-г). Ординаты под узлами 3 и 4 соединяем передаточными прямыми.

Пример 4.3 Для фермы с нижним грузовым поясом, изображенной на рисунке 4.23, а, требуется построить линии влияния усилий в отмеченных стержнях.

Линия влияния N_{3-3} . Проведем наклонное сечение I-I через три стержня (см. рисунок 4.23, а), при этом р. с. г. п. – 3-4. Рассмотрим равновесие отсеченной консоли – левой части фермы, когда груз слева от р. с. г. п. (рисунок 4.24, а) и справа от него. Силу N_{3-3} определим из уравнения моментов относительно узла 1, где пересекаются оси стержней 3-4 и 2'-3' (таблица 4.4).

Таблица 4.4 – Расчет л. в. N_{3-3}

Груз $\bar{F} = 1$ <i>левее</i> р. с. г. п. 3-4 (на участке 1-3)	Груз $\bar{F} = 1$ <i>правее</i> р. с. г. п. 3-4 (на участке 4-10)
$\sum M_1^{\text{лев}} = 0; N_{3-3'} \cdot 2d - 1 \cdot z = 0;$ $N_{3-3'} = z/(2d)$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{3-3}); при $z = 0$ (груз в узле 1) $N_{3-3'} = 0$; при $z = 2d$ (груз в узле 3) $N_{3-3'} = 1$	$\sum M_1^{\text{лев}} = 0;$ $N_{3-3'} = 0$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{3-3})

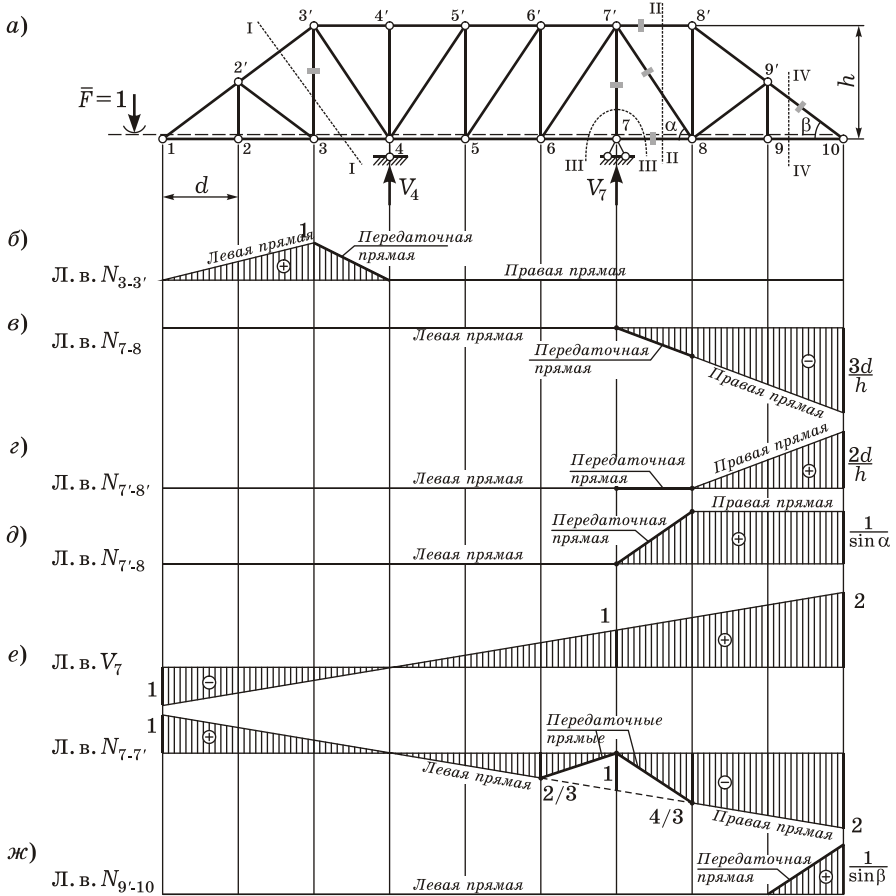


Рисунок 4.23

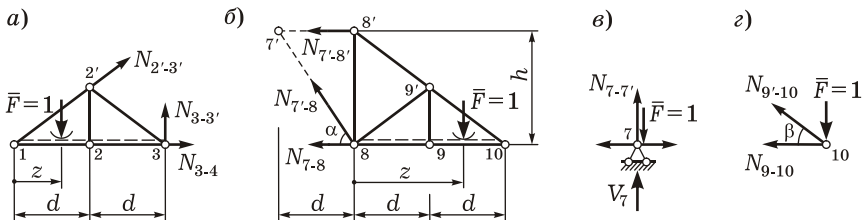


Рисунок 4.24

Линии влияния N_{7-8} , $N_{7'-8}$, $N_{7'-8}$. Проведем сечение II–II через рассматриваемые три стержня (см. рисунок 4.23, а). Р. с. г. п. – 7–8. Рассмотрим равновесие отсеченной правой консоли, когда груз слева от р.с.г.п. и справа от него (рисунок 4.24, б). Продольную силу N_{7-8} найдем из уравнения моментов относительно узла 7', где пересекаются оси стержней 7'–8' и 7'–8. Проецируя все силы на вертикальную ось y , найдем усилие N_{7-8} . Для стержня 7'–8' составим уравнение моментов относительно точки 8 (таблица 4.5).

Таблица 4.5 – Расчет л. в. N_{7-8} , $N_{7'-8}$, $N_{7'-8}$

Груз $\bar{F} = 1$ <i>левее</i> р. с. г. п. 7–8 (на участке 1–7)	Груз $\bar{F} = 1$ <i>правее</i> р. с. г. п. 7–8 (на участке 8–10)
$\sum M_7^{\text{прав}} = 0;$ $N_{7-8} = 0$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{7-8})	$\sum M_{7'}^{\text{прав}} = 0; \quad -N_{7-8} \cdot h - 1 \cdot (z + d) = 0;$ $N_{7-8} = -(z + d)/h$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{7-8}); при $z = 0$ (груз в узле 8) $N_{7-8} = -d/h$; при $z = 2d$ (груз в узле 10) $N_{7-8} = -3d/h$
$\sum M_8^{\text{прав}} = 0;$ $N_{7'-8'} = 0$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. $N_{7'-8}$)	$\sum M_8^{\text{прав}} = 0; \quad N_{7'-8'} \cdot h - 1 \cdot z = 0;$ $N_{7'-8'} = z/h$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. $N_{7'-8}$); при $z = 0$ (груз в узле 8) $N_{7'-8'} = 0$; при $z = 2d$ (груз в узле 10) $N_{7'-8'} = 2d/h$
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; \quad N_{7-8} = 0$ (уравнение <i>левой</i> прямой л. в. N_{7-8})	$\sum Y^{\text{прав}} = 0; \quad N_{7-8} \sin \alpha - 1 = 0;$ $N_{7-8} = 1/\sin \alpha$ (уравнение <i>правой</i> прямой л. в. N_{7-8})

По результатам расчетов выполняем построения (рисунок 4.23, б–д).

Линия влияния N_{7-7} . Вырежем опорный узел 7 сечением III–III (см. рисунок 4.23, а). Р. с. г. п. – 6–7 и 7–8. Составим уравнение проекций на вертикальную ось y всех сил узла, когда груз в узле (рисунок 4.24, в) и вне его (таблица 4.6). Выполняем построения, используя в качестве вспомогательной л. в. V_7 (рисунок 4.23, е).

Таблица 4.6 – Расчет л. в. N_{7-7}

Груз $\bar{F} = 1$ <i>вне</i> узла 7 (на участках 1–6 и 8–10)	Груз $\bar{F} = 1$ <i>в</i> узле 7
$\sum Y^{\text{узла}} = 0; \quad N_{7-7'} + V_7 = 0;$ $N_{7-7'} = -V_7$ (уравнение <i>левой</i> и <i>правой</i> прямых л. в. N_{7-7})	$\sum Y^{\text{узла}} = 0; \quad N_{7-7'} + V_7 - 1 = 0;$ $N_{7-7'} = 1 - V_7$ (в узле 7 ордината л. в. $V_7 = 1$, поэтому ордината л. в. $N_{7-7'} = 0$)

Линия влияния N_{9-10} . Проведем сечение IV–IV (см. рисунок 4.23, а). Р. с. г. п. – 9–10. Усилие N_{9-10} найдем, проецируя все силы отсеченной правой части на ось y (таблица 4.7).

Таблица 4.7 – Расчет л. в. N_{9-10}

Груз $\bar{F} = 1$ вне узла 10 (на участке 1–9)	Груз $\bar{F} = 1$ в узле 10
$\sum Y^{\text{узла}} = 0; N_{9-10} \sin\beta = 0;$ $N_{9-10} = 0$ (уравнение левой прямой л. в. N_{9-10})	$\sum Y^{\text{узла}} = 0; N_{9-10} \sin\beta - 1 = 0;$ $N_{9-10} = 1/\sin\beta$ (ордината л. в. N_{9-10} в узле 10)

По результатам расчетов строим л. в. N_{9-10} (рисунок 4.23, ж).

4.4.3 Проверка линий влияния. Анализируя построенные выше линии влияния (см. примеры 4.1–4.3), заметим следующие закономерности их очертания:

- если при расчете использовалось уравнение моментов, то левая и правая прямые линии влияния *пересекаются под моментной точкой*;
- если использовалось уравнение проекций на вертикальную ось, а усилие выражено через опорные реакции (например, для раскосов и стоек ферм с параллельными поясами), левая и правая прямые *параллельны*;
- для раскосов ферм с параллельными поясами передаточная прямая «пересекает» раскос (при мысленном совмещении фермы и линии влияния).

Эти закономерности служат для проверки линий влияния продольных сил в стержнях ферм.

4.5 Линии влияния продольных сил: кинематический метод

4.5.1 Последовательность построения линий влияния N кинематическим методом. Этот метод позволяет легко установить форму линии влияния, однако вычисление ординат достаточно трудоёмко.

Чтобы построить линию влияния продольной силы N кинематическим методом, необходимо:

- разрезать рассматриваемый стержень (отбросить связь, соответствующую искомой продольной силе), превратив ферму в механизм с одной степенью свободы;
- полученному механизму сообщить возможное перемещение $\delta = 1$ по направлению искомой силы (единичное сближение узлов разрезанного стержня);

- изобразить эпюру вертикальных перемещений узлов грузового пояса: она по форме будет совпадать с линией влияния рассматриваемого усилия.

Возможные перемещения узлов считаются бесконечно малыми. В соответствии с этим можно пренебречь горизонтальными перемещениями и принять, что узлы грузового пояса смещаются только по вертикали – вверх или вниз.

Для вычисления ординат линии влияния необходим детальный кинематический анализ механизма. Особенно сложно найти ординаты для ферм с непараллельными поясами, со сложной решеткой. Поэтому обычно линии влияния строят статическим методом, а кинематическим методом производят их качественную проверку (построение моделей без вычисления ординат).

4.5.2 Примеры построения моделей линий влияния.

Пример 4.4 В балочной ферме с параллельными поясами (рисунок 4.25, *а*) требуется построить модели линий влияния продольных сил в стержнях 3–4', 3–4, 4'–5', 4–4' и 7–7'.

Разрежем стержень 3–4' – получим механизм с одной степенью свободы (рисунок 4.25, *б*). В левой и правой частях фермы выделим неизменяемые части механизма – диски *I* и *II*. Стержни поясов 3–4 и 3'–4' образуют «ползун», допускающий сдвиг дисков *I* и *II*. Зададим возможное перемещение $\delta = 1$ в направлении продольной силы в отброшенном стержне (взаимное сближение узлов 3 и 4'). Диски поворачиваются относительно опор, оставаясь параллельными друг другу. Очертание грузового пояса по форме совпадают с линией влияния усилия в раскосе N_{3-4} .

Далее разрежем в заданной ферме стержень 3–4 верхнего пояса (рисунок 4.25, *в*) и зададим перемещение $\delta = 1$ как взаимное сближение узлов 3 и 4. Диски *I* и *II* соединены в узле 4', относительно которого и происходит их взаимный поворот. Очертание грузового пояса совпадает с очертанием линии влияния N_{3-4} .

Аналогично построим модель линии влияния продольной силы в стержне нижнего пояса 4'–5'. В результате взаимного сближения узлов 4' и 5' диски *I* и *II* поворачиваются относительно узла 5 (рисунок 4.25, *г*), этот узел поднимается вверх, что соответствует очертанию линии влияния силы $N_{4'-5}$.

Разрежем стойку 4–4' и зададим перемещение $\delta = 1$ как взаимное сближение узлов 4 и 4' (рисунок 4.25, *д*). Для полученного механизма с одной степенью свободы стержни 3–4 и 4–5 поворачиваются, узел 4 опускается вниз. Очертание верхнего (грузового) пояса по форме совпадает с линией влияния продольной силы в стойке $N_{4-4'}$.

Аналогично построим модель линии влияния силы в стойке 7–7'. Разрежем эту стойку и зададим перемещение $\delta = 1$ как взаимное сближение узлов 7 и 7' (рисунок 4.25, *е*). Левая неизменяемая часть полученного механизма поворачивается относительно левой опоры, опускаясь вниз. Грузовой верхний пояс показывает очертание линии влияния продольной силы $N_{7-7'}$.

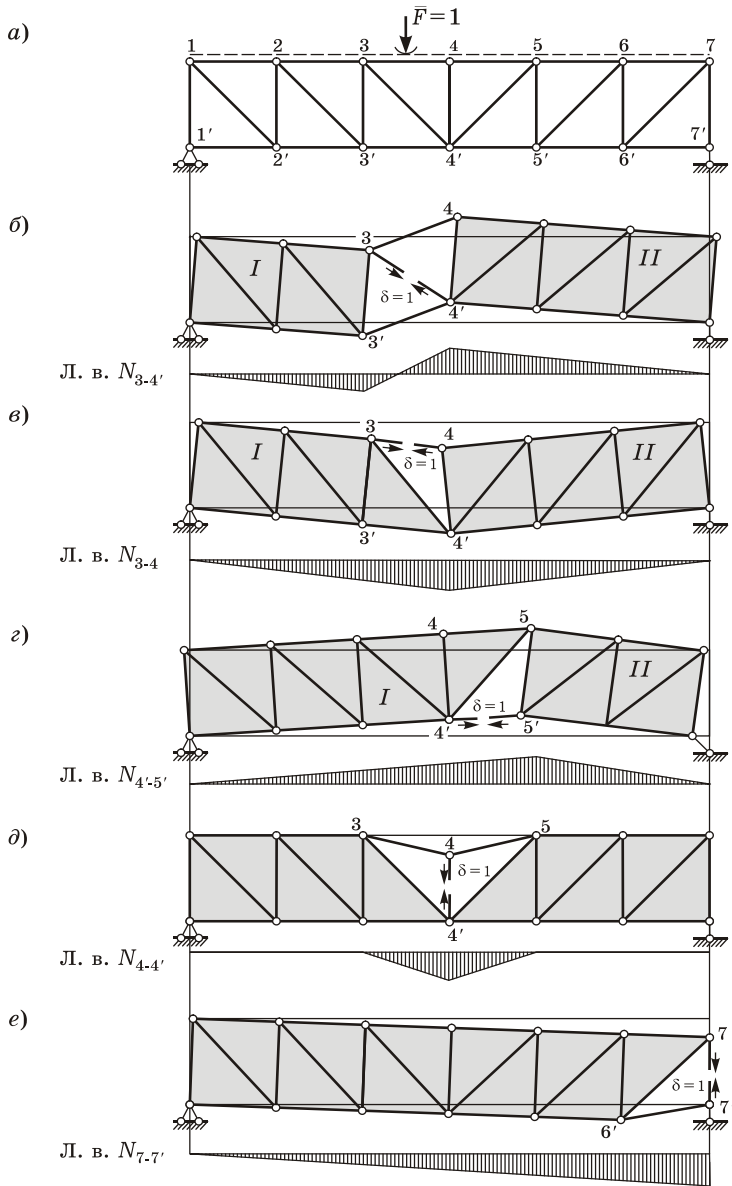


Рисунок 4.25

4.6 Шпренгельные фермы: расчет на неподвижную нагрузку

4.6.1 Назначение и типы шпренгелей. В фермах больших пролетов панели также имеют большие длины. Продольные балки, воспринимающие нагрузку и передающие ее на поперечные балки, а затем в узлы фермы, из-за большой длины получаются массивными.

Введем в ферму с простой решеткой (рисунок 4.26, а) дополнительные стойки так, чтобы в грузовом поясе образовались новые узлы. Кроме этого, чтобы исключить изгиб раскосов, добавим дополнительные наклонные стержни (рисунок 4.26, б). В результате появится возможность установить поперечные балки в большем количестве узлов и, следовательно, уменьшить длины и размеры сечений продольных балок. Также существенно повысится устойчивость сжатых стержней фермы.

Совокупность дополнительных стержней, введенных в каждую панель фермы для разделения ее на части, называется *шпренгелем*. Ферма, содержащая шпренгели, называется *шпренгельной фермой*. Ферма с простой решеткой, которая получена мысленным удалением шпренгелей, называется *основной фермой*.

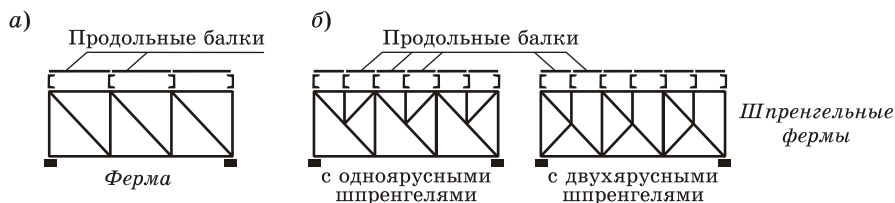


Рисунок 4.26

Шпренгели воспринимают лишь местную нагрузку и передают ее в узлы основной фермы. Если нагрузка на узел данного шпренгеля отсутствует, то усилия в его стержнях равны нулю.

Одноярусные шпренгели воспринимают и передают нагрузку в пределах одного пояса (верхнего или нижнего), *двухъярусные* – передают нагрузку, приложенную к одному поясу, на другой пояс (см. рисунок 4.26, б).

4.6.2 Расчетная схема шпренгельной фермы. Определение усилий от неподвижной нагрузки. Расчетная схема шпренгельной фермы допускает две трактовки: 1) все стержни «равноправны», в расчетной схеме они соединены полными шарнирами (рисунок 4.27, а); 2) система образована наложением основной фермы и шпренгелей, представленных в виде дополнительных малень-

ких фермочек, опирающихся на узлы основной фермы (рисунок 4.27, б).

Приняв расчетную схему шпренгельной фермы, в которой все стержни имеют одинаковый «статус», усилия определяют обычным образом, комбинируя способы проекций, моментной точки и вырезания узлов.

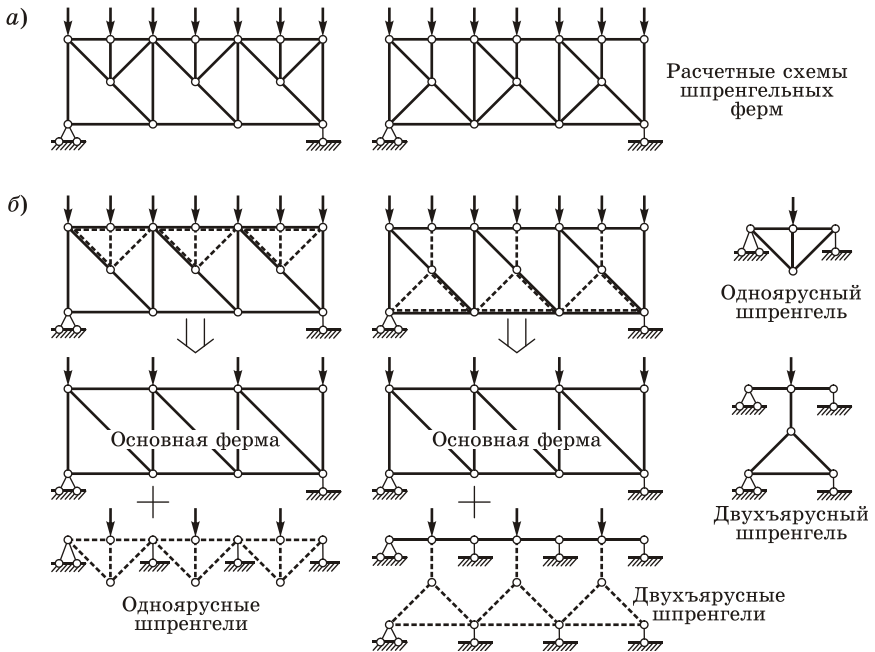


Рисунок 4.27

В расчетной схеме шпренгельной фермы, полученной наложением на основную ферму одноярусных шпренгелей, выделяют три типа стержней:

тип I – стержни, принадлежащие только основной ферме (сплошная линия на рисунке 4.27, б). Усилия в них вычисляют, рассматривая основную ферму без шпренгелей. При добавлении шпренгелей значения этих усилий не изменяются;

тип II – стержни, принадлежащие только шпренгелям (штриховая линия на рисунке 4.27, б). Силы в них находят, рассматривая каждый шпренгель как отдельную двухопорную фермочку;

тип III – стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю (двойная линия на рисунке 4.27, б). Усилие в каждом из них можно определить суммированием усилий, найденных для данного стержня как элемента основной фермы N^o и шпренгеля N^m :

$$N = N^o + N^m.$$

В стержнях третьего типа продольные силы могут изменяться на 10–15 % (в зависимости от величины и вида нагрузки) по сравнению с силами в аналогичной ферме, не содержащей шпренгелей.

Пример 4.5 Определить продольные силы в стержнях 3–4, 3–4', 4–4', 3'–5', 4'–5, 4'–5' шпренгельной фермы (рисунок 4.28, а) от равномерно распределенной нагрузки q .

Уберем вспомогательное строение и приведем заданную нагрузку к узловой (рисунок 4.28, б). Далее найдем опорные реакции. В силу симметрии фермы и нагрузки реакции левой и правой опор одинаковы и равны $4qa$.

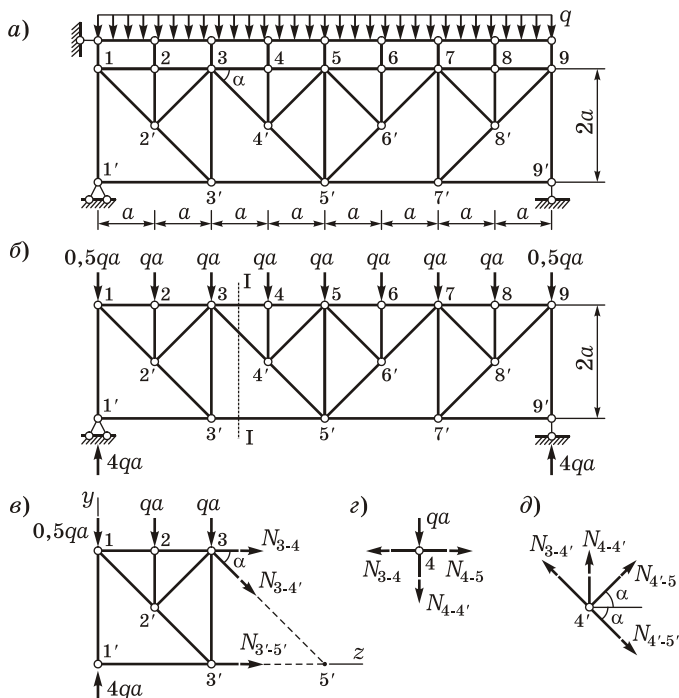


Рисунок 4.28

Угол между поясами и раскосами $\alpha = 45^\circ$, $\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2$.

Первый способ определения усилий. Будем считать все стержни фермы «равноправными», не разделяя их на элементы основной фермы и шпренгеля.

Разрежем конструкцию на две части сечением I–I и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 4.28, в).

$$\sum M_5^{\text{лев}} = 0; \quad -N_{3-4} \cdot 2a - 4qa \cdot 4a + 0,5qa \cdot 4a + qa \cdot 3a + qa \cdot 2a = 0,$$

отсюда $N_{3-4} = -4,5qa$.

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; \quad N_{3'-5'} \cdot 2a - 4qa \cdot 2a + 0,5qa \cdot 2a + qa \cdot a = 0,$$

отсюда $N_{3'-5'} = 3qa$.

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad -N_{3-4'} \sin \alpha + 4qa - 0,5qa - qa - qa = 0,$$

отсюда $N_{3-4'} = 1,5qa / \sin \alpha = 1,5\sqrt{2}qa$.

Вырежем узел 4 (рисунок 4.28, г) и составим уравнения проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси, из которых

$$N_{4-4'} = -qa, \quad N_{4-5} = N_{3-4} = -4,5qa.$$

Вырежем узел 4' (рисунок 4.28, д) и составим уравнения проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси:

$$\sum Y^{\text{узла}} = 0; \quad N_{3-4'} \sin \alpha + N_{4'-5} \sin \alpha - N_{4'-5'} \sin \alpha + N_{4-4'} = 0;$$

$$\sum Z^{\text{узла}} = 0; \quad -N_{3-4'} \cos \alpha + N_{4'-5} \cos \alpha + N_{4'-5'} \cos \alpha = 0,$$

из которых найдем, что $N_{4'-5} = \sqrt{2}qa$; $N_{4'-5'} = 0,5\sqrt{2}qa$.

Второй способ определения усилий. Воспользуемся принципом суперпозиции. Отделим шпренгели от основной фермы, рассчитаем усилия в стержнях этих систем отдельно, затем результаты сложим.

Расчет шпренгеля. Рассмотрим шпренгель как отдельную фермочку на двух опорах (рисунок 4.29, а). Опорные реакции ее равны по $0,5qa$.

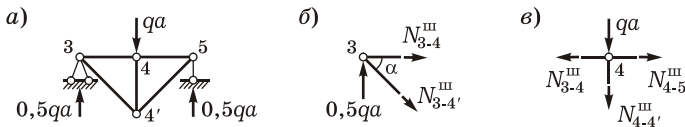


Рисунок 4.29

Вырежем узел 3 (рисунок 4.29, б) и составим уравнения проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси:

$$\sum Y^{\text{узла}} = 0; \quad -N_{3-4'}^{\text{III}} \sin \alpha + 0,5qa = 0;$$

$$\sum Z^{\text{узла}} = 0; \quad N_{3-4'}^{\text{III}} \cos \alpha + N_{3-4}^{\text{III}} = 0,$$

из которых найдем, что

$$N_{3-4}^{\text{III}} = 0,5\sqrt{2}qa; \quad N_{3-4}^{\text{IV}} = -0,5qa.$$

В силу симметрии шпренгеля

$$N_{4-5}^{\text{III}} = N_{3-4}^{\text{III}} = 0,5\sqrt{2}qa; \quad N_{4-5}^{\text{IV}} = N_{3-4}^{\text{IV}} = -0,5qa.$$

Вырезав узел 4 (рисунок 4.29, в), получим $N_{4-4}^{\text{III}} = -qa$.

Расчет основной фермы. Система шпренгелей передает нагрузку, приложенную к дополнительным узлам 2, 4, 6, 8, на узлы 1, 3, 5, 7, 9 основной фермы. Определим суммарные опорные реакции всех четырех шпренгелей (рисунок 4.30, а) и приложим их как «добавки» к нагрузке, действующей на узлы основной фермы (рисунок 4.30, б).

Опорные реакции одинаковы и равны $4qa$.

Разрежем основную ферму на две части сечением I-I и рассмотрим равновесие левой части (рисунок 4.30, в).

$$\sum M_5^{\text{лев}} = 0; \quad -N_{3-5}^{\circ} \cdot 2a - 4qa \cdot 4a + qa \cdot 4a + 2qa \cdot 2a = 0,$$

отсюда $N_{3-5}^{\circ} = -4qa$.

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; \quad N_{3-5'}^{\circ} \cdot 2a - 4qa \cdot 2a + qa \cdot 2a = 0,$$

отсюда $N_{3-5'}^{\circ} = 3qa$.

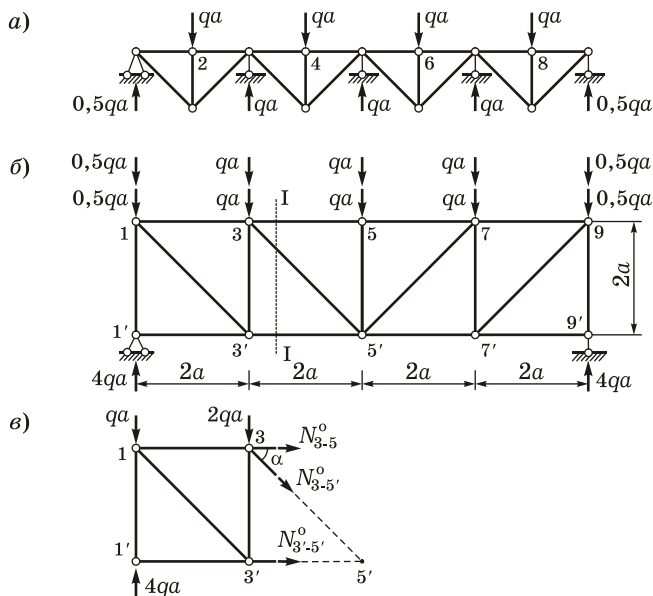


Рисунок 4.30

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad -N_{3-5}^{\circ} \sin \alpha + 4qa - 2qa - qa = 0,$$

отсюда $N_{3-5}^{\circ} = qa / \sin \alpha = \sqrt{2}qa$.

Суммирование усилий. Силы в стержнях заданной шпренгельной фермы определяем суммированием сил, найденных отдельно в шпренгеле и основной ферме.

Стержень 3'-5' (тип I) принадлежит только основной ферме. В нем

$$N_{3'-5'} = N_{3-5}^{\circ} = 3qa.$$

Стержни 4-4' и 4'-5 (тип II) относятся только к шпренгелю, поэтому

$$N_{4-4'} = N_{4-4'}^{\text{III}} = -qa; \quad N_{4'-5} = N_{4'-5}^{\text{III}} = 0,5\sqrt{2}qa.$$

Стержни 3-4, 4-5 и 3-4' (тип III) одновременно являются и элементами шпренгеля, и основной фермы, следовательно

$$N_{3-4} = N_{3-5}^{\circ} + N_{3-4}^{\text{III}} = -4qa - 0,5qa = -4,5qa;$$

$$N_{4-5} = N_{3-5}^{\circ} + N_{4-5}^{\text{III}} = -4qa - 0,5qa = -4,5qa;$$

$$N_{3-4'} = N_{3-5'}^{\circ} + N_{3-4'}^{\text{III}} = \sqrt{2}qa + 0,5\sqrt{2}qa = 1,5\sqrt{2}qa.$$

Сравнивая полученные данные со значениями, найденными первым способом, убеждаемся в их совпадении.

4.7 Шпренгельные фермы: расчет на подвижную нагрузку

4.7.1 Особенности построения линий влияния в шпренгельных фермах. Построение линий влияния, как и расчет на неподвижную нагрузку, можно выполнять двумя способами: 1) обычным образом (см. п. 4.4.1), не разделяя стержни шпренгельной фермы на типы; 2) суммированием линий влияния, построенных отдельно для основной фермы и шпренгелей.

Заметим, что первый способ не всегда удобен, так как в некоторых случаях приходится рассекать более трех стержней. При этом сила в каком-либо стержне будет выражаться не только через опорные реакции, но и через силу в другом стержне. Тогда в качестве вспомогательных необходимо будет одновременно использовать несколько линий влияния.

Второй способ предполагает, что расчетная схема шпренгельной фермы образована наложением фермочек-шпренгелей на основную ферму с простой решеткой (см. рисунок 4.27, б).

При этом в фермах с одноярусными шпренгелями различают: стержни, принадлежащие только основной ферме (*тип I* —), только шпренгелям (*тип II*), одновременно основной ферме и шпренгелям (*тип III* ----).

В фермах с двухъярусными шпренгелями, кроме элементов I–III типов, выделяют также стержни *типа IV* – стойки основной фермы, для которых линии влияния имеют различный вид при движении единичного груза по верхнему и нижнему поясам.

Порядок построения линий влияния продольных сил (л. в. N) в стержнях I–III типов:

- отделяют шпренгели от основной фермы;
- строят линии влияния отдельно для основной фермы (л. в. N^o) и шпренгелей как двухопорных фермочек (л. в. N^{III});
- для стержней I типа при наложении на основную ферму шпренгелей линии влияния не изменяются, т. е.

$$\text{л. в. } N = \text{л. в. } N^o ;$$

- для стержней II типа линии влияния будут локальными:

$$\text{л. в. } N = \text{л. в. } N^{III} ;$$

- для стержней III типа линии влияния находят суммированием линий влияния, построенных для данного стержня как элемента основной фермы (л. в. N^o) и шпренгеля (л. в. N^{III}):

$$\text{л. в. } N = \text{л. в. } N^o + \text{л. в. } N^{III} .$$

В фермах с двухъярусными шпренгелями (рисунок 4.31) построение линий влияния для некоторых стержней основной фермы (IV типа) несколько осложняется, так как шпренгели передают нагрузку из дополнительных узлов грузового пояса в узлы другого пояса. Здесь нельзя просто отделить шпренгели и выполнить построения без их учета, как в стержнях I типа.

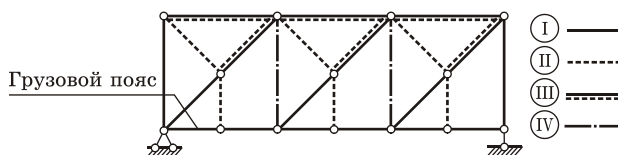


Рисунок 4.31

Чтобы получить линию влияния N в стержне IV типа, необходимо:

- предварительно построить две линии влияния в решетке основной фермы – при движении единичного груза по грузовому и по второму, негрузовому, поясам;

- последовательно устанавливая груз в узлы шпренгельной фермы, выбрать из узловых ординат те, которые отвечают реальной передаче нагрузки данными шпренгелями. Если груз в узле основной фермы, то справедлива ордината при движении по грузовому поясу; если груз в узле шпренгеля, то справедлива ордината при движении по негрузовому поясу;
- соединить выбранные ординаты прямыми линиями.

4.7.2 Примеры построения линий влияния в шпренгельных фермах.

Пример 4.6 Для фермы с одноярусными шпренгелями в нижнем грузовом поясе (рисунок 4.32, а) требуется построить линии влияния продольных сил в стержнях 5-6, 5-6', 5'-7', 6-7 и 6'-7.

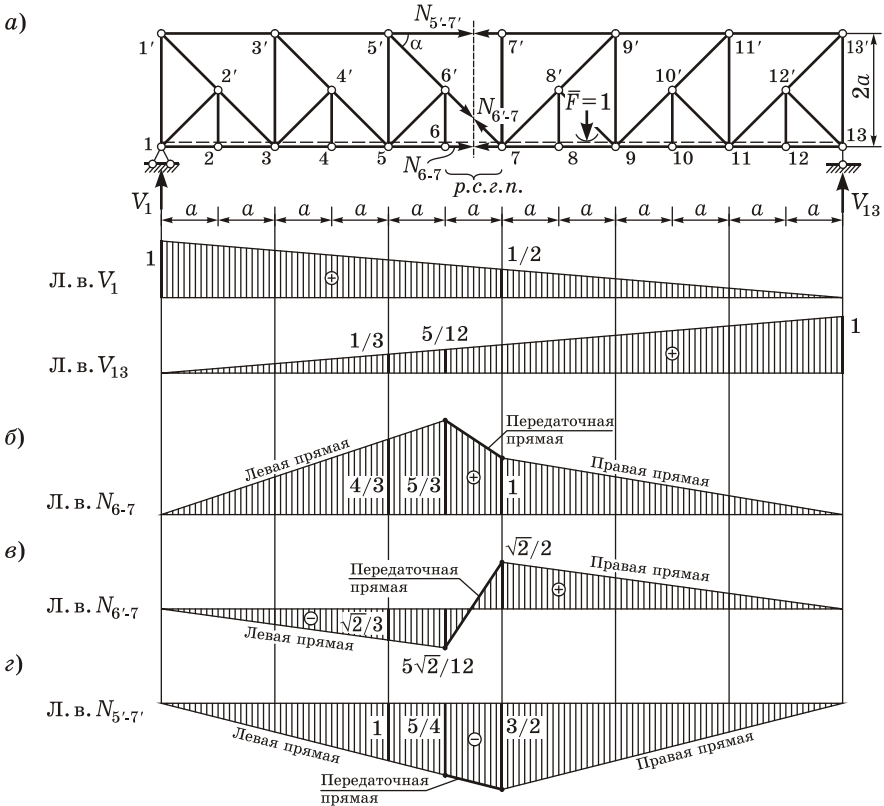


Рисунок 4.32

Предварительно построим линии влияния опорных реакций V_1 и V_{13} (см. рисунок 4.32, а), которые будем использовать в качестве вспомогательных.

Первый способ построения линий влияния. В стержнях 6–7, 6'–7, 5'–7' будем выполнять построения обычным образом (см. п. 4.4.1), рассекая ферму на две части и рассматривая равновесие этих частей.

Проведем вертикально сечение через три рассматриваемых стержня. Рассеченный стержень грузового пояса (р. с. г. п.) – 6–7, поэтому передаточная прямая для всех трех линий влияния будет именно на этом участке. Расчеты ведем в таблице 4.8.

Таблица 4.8 – Расчет л. в. N_{6-7} , $N_{6'-7}$, $N_{5'-7'}$

Груз $\bar{F} = 1$ левее р. с. г. п. 6–7 (на участке 1–6)	Груз $\bar{F} = 1$ правее р. с. г. п. 6–7 (на участке 7–13)
$\sum M_5^{\text{прав}} = 0; -N_{6-7} \cdot 2a + V_{13} \cdot 8a = 0;$ $N_{6-7} = 4V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. N_{6-7})	$\sum M_5^{\text{лев}} = 0; N_{6-7} \cdot 2a - V_1 \cdot 4a = 0;$ $N_{6-7} = 2V_1$ (уравнение правой прямой л. в. N_{6-7})
$\sum Y^{\text{прав}} = 0; N_{6'-7} \sin \alpha + V_{13} = 0;$ $N_{6'-7} = -V_{13} / \sin \alpha = -\sqrt{2}V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. $N_{6'-7}$)	$\sum Y^{\text{лев}} = 0; -N_{6'-7} \sin \alpha + V_1 = 0;$ $N_{6'-7} = V_1 / \sin \alpha = \sqrt{2}V_1$ (уравнение правой прямой л. в. $N_{6'-7}$)
$\sum M_7^{\text{прав}} = 0; N_{5'-7'} \cdot 2a + V_{13} \cdot 6a = 0;$ $N_{5'-7'} = -3V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. $N_{5'-7'}$)	$\sum M_7^{\text{лев}} = 0; -N_{5'-7'} \cdot 2a - V_1 \cdot 6a = 0;$ $N_{5'-7'} = -3V_1$ (уравнение правой прямой л. в. $N_{5'-7'}$)

По результатам расчетов для каждого усилия строим левые и правые прямые линий влияния (рисунок 4.32, б–г). Ординаты под узлами 6 и 7 соединяем передаточными прямыми.

Заметим, что для определения сил в элементах 5–6 и 5–6' данный способ не удобен, так как придется одновременно рассекать четыре стержня фермы. При этом искомые силы будут выражаться не только через опорные реакции, но и через силы в других стержнях. Следовательно, в качестве вспомогательных необходимо будет использовать и линии влияния опорных реакций, и сил для этих стержней.

Указанное неудобство можно «обойти», применив другой способ построения линий влияния, основанный на рассмотрении отдельно основной фермы и шпренгелей.

Второй способ построения линий влияния. Представим, что шпренгелевая ферма образована наложением основной фермы и шпренгелей – дополнительных маленьких фермочек (рисунок 4.33, а). В составе такой системы выделим стержни трех типов: *тип I* – принадлежащие только основной ферме (—), *тип II* – только шпренгелю (.....), *тип III* – и основной ферме, и шпренгелю (=====).

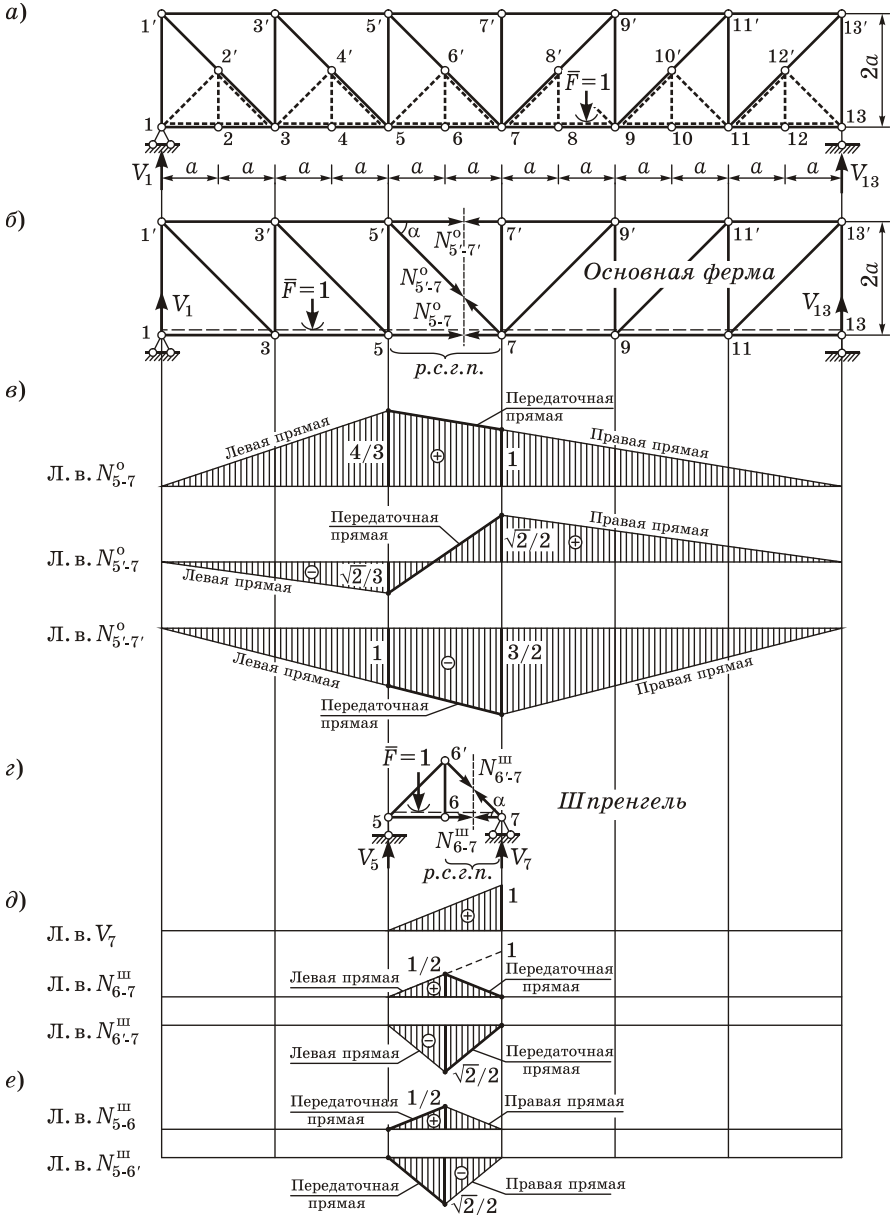


Рисунок 4.33

Линии влияния в основной ферме. Рассмотрим отдельно ферму без шпренгелей (рисунок 4.33, б). Проведем вертикально сечение через три стержня: 5-7, 5'-7 и 5'-7'. Рассеченный стержень грузового пояса (р. с. г. п.) – 5-7, поэтому передаточная прямая для всех трех линий влияния будет на этом участке. Расчеты ведем в таблице 4.9.

Таблица 4.9 – Расчет л. в. N_{5-7}^0 , $N_{5'-7}^0$, $N_{5'-7'}^0$.

Груз $\bar{F} = 1$ левее р. с. г. п. 5-7 (на участке 1-5)	Груз $\bar{F} = 1$ правее р. с. г. п. 5-7 (на участке 7-13)
$\sum M_5^{\text{прав}} = 0;$ $- N_{5-7}^0 \cdot 2a + V_{13} \cdot 8a = 0;$ $N_{5-7}^0 = 4V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. N_{5-7}^0)	$\sum M_5^{\text{лев}} = 0;$ $N_{5-7}^0 \cdot 2a - V_1 \cdot 4a = 0;$ $N_{5-7}^0 = 2V_1$ (уравнение правой прямой л. в. N_{5-7}^0)
$\sum Y^{\text{прав}} = 0;$ $N_{5-7}^0 \sin \alpha + V_{13} = 0;$ $N_{5-7}^0 = -V_{13} / \sin \alpha = -\sqrt{2}V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. N_{5-7}^0)	$\sum Y^{\text{лев}} = 0;$ $- N_{5-7}^0 \sin \alpha + V_1 = 0;$ $N_{5-7}^0 = V_1 / \sin \alpha = \sqrt{2}V_1$ (уравнение правой прямой л. в. N_{5-7}^0)
$\sum M_7^{\text{прав}} = 0;$ $N_{5-7}^0 \cdot 2a + V_{13} \cdot 6a = 0;$ $N_{5-7'}^0 = -3V_{13}$ (уравнение левой прямой л. в. $N_{5-7'}^0$)	$\sum M_7^{\text{лев}} = 0;$ $- N_{5-7}^0 \cdot 2a - V_1 \cdot 6a = 0;$ $N_{5-7'}^0 = -3V_1$ (уравнение правой прямой л. в. $N_{5-7'}^0$)

Линии влияния продольных сил для стержней 5-7, 5'-7 и 5'-7' показаны на рисунке 4.33, в. Заметим, что уравнения левых и правых прямых аналогичны уравнениям, полученным в таблице 4.8 для линий влияния в элементах 6-7, 6'-7 и 5'-7'. Изменились лишь границы этих прямых, так как р. с. г. п. – уже не 6-7, а 5-7.

Линии влияния в шпренгеле. Рассмотрим шпренгель на участке 5-7 как фермочку на двух опорах (рисунок 4.33, г). Построим как вспомогательную л. в. V_7 . Рассечем два стержня: 6-7 и 6'-7. Здесь $\alpha = 45^\circ$, $\sin \alpha = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Расчеты ведем в таблице 4.10.

Таблица 4.10 – Расчет л. в. N_{6-7}^{III} , $N_{6'-7}^{\text{III}}$

Груз $\bar{F} = 1$ левее р. с. г. п. 6-7 (на участке 5-6)	Груз $\bar{F} = 1$ правее р. с. г. п. 6-7 (в узле 7)
$\sum M_6^{\text{прав}} = 0;$ $V_7 \cdot a - N_{6-7}^{\text{III}} \cdot a = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} = V_7$ (уравнение левой прямой л. в. N_{6-7}^{III})	$\sum M_6^{\text{прав}} = 0;$ $V_7 \cdot a - \bar{F} \cdot a - N_{6-7}^{\text{III}} \cdot a = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} = V_7 - \bar{F} = V_7 - 1$ (в узле 7 ордината л. в. $V_7 = 1$, поэтому ордината л. в. $N_{6-7}^{\text{III}} = 0$)

Окончание таблицы 4.10

Груз $\bar{F} = 1$ левее р. с. г. п. 6-7 (на участке 5-6)	Груз $\bar{F} = 1$ правее р. с. г. п. 6-7 (в узле 7)
$\sum Y^{\text{прав}} = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} \sin \alpha + V_7 = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} = -V_7 / \sin \alpha = -\sqrt{2}V_7$ (уравнение левой прямой л. в. N_{6-7}^{III})	$\sum Y^{\text{прав}} = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} \sin \alpha + V_7 - \bar{F} = 0;$ $N_{6-7}^{\text{III}} = (\bar{F} - V_7) / \sin \alpha = \sqrt{2}(1 - V_7)$ (в узле 7 ордината л. в. $V_7 = 1$, поэтому ордината л. в. $N_{6-7}^{\text{III}} = 0$)

Рассеченный стержень грузового пояса (р. с. г. п.) – 6-7, поэтому передаточная прямая будет на этом участке.

Линии влияния продольных сил для стержней 6-7 и 6'-7 показаны на рисунке 4.33, *д*. Так как шпренгель симметричен, линии влияния сил в стержнях шпренгеля 5-6 и 5-6' аналогичны.

Суммирование линий влияния. Для стержня I типа 5'-7' при добавлении в основную ферму шпренгелей линия влияния не изменится:

$$\text{л. в. } N_{5'-7'} = \text{л. в. } N_{5'-7}^{\circ}.$$

Для стержня II типа (5-6') линия влияния будет локальной, расположенной только в пределах данного шпренгеля:

$$\text{л. в. } N_{5-6'} = \text{л. в. } N_{5-6'}^{\text{III}}.$$

Для стержней III типа (5-6, 6-7 и 6'-7) линии влияния определим суммированием линий влияния, построенных для данного стержня как элемента основной фермы и шпренгеля:

$$\text{л. в. } N_{5-6} = \text{л. в. } N_{5-7}^{\circ} + \text{л. в. } N_{5-6}^{\text{III}};$$

$$\text{л. в. } N_{6-7} = \text{л. в. } N_{5-7}^{\circ} + \text{л. в. } N_{6-7}^{\text{III}};$$

$$\text{л. в. } N_{6'-7} = \text{л. в. } N_{5'-7}^{\circ} + \text{л. в. } N_{6'-7}^{\text{III}}.$$

Линии влияния продольных сил для указанных стержней изображены на рисунке 4.34. Заметим, что л. в. N_{5-6} и N_{6-7} идентичны, так как усилия в стержнях 5-6 и 6-7 при любой нагрузке одинаковы.

Пример 4.7 Для фермы с двухъярусными шпренгелями в нижнем грузовом поясе (рисунок 4.35, *а*) требуется построить линию влияния продольной силы в стойке 5-5'.

Стойка 5-5' является стержнем IV типа. Предварительно строим две линии влияния в основной решетке $N_{5-5'}^{\circ}$ – при движении единичного груза по *верхнему* негрузовому поясу (рисунок 4.35, *б*) и по *нижнему* грузовому поясу (рисунок 4.35, *в*).

Последовательно устанавливаем груз в узлы 1-13.

Если груз *в узлах основной фермы* 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, то справедливы ординаты линии влияния $N_{5-5'}^{\circ}$ при движении по нижнему грузовому поясу (см. рисунок 4.35, *в*).

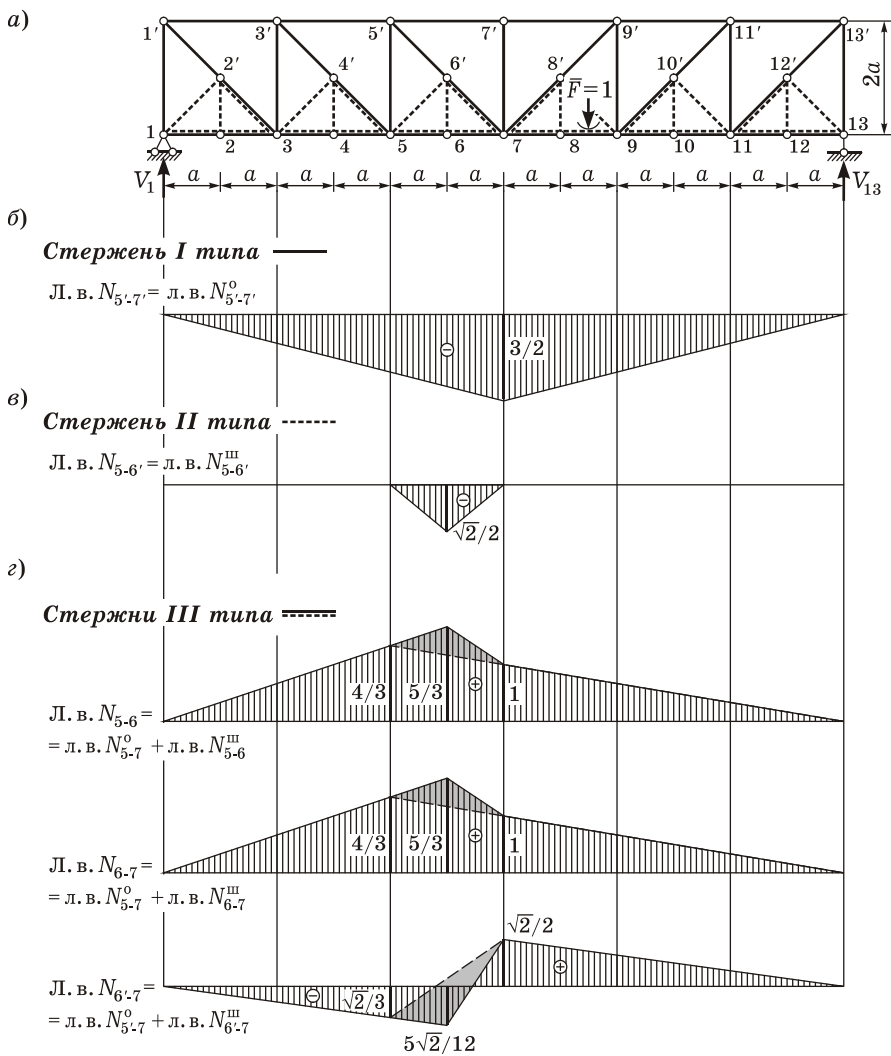


Рисунок 4.34

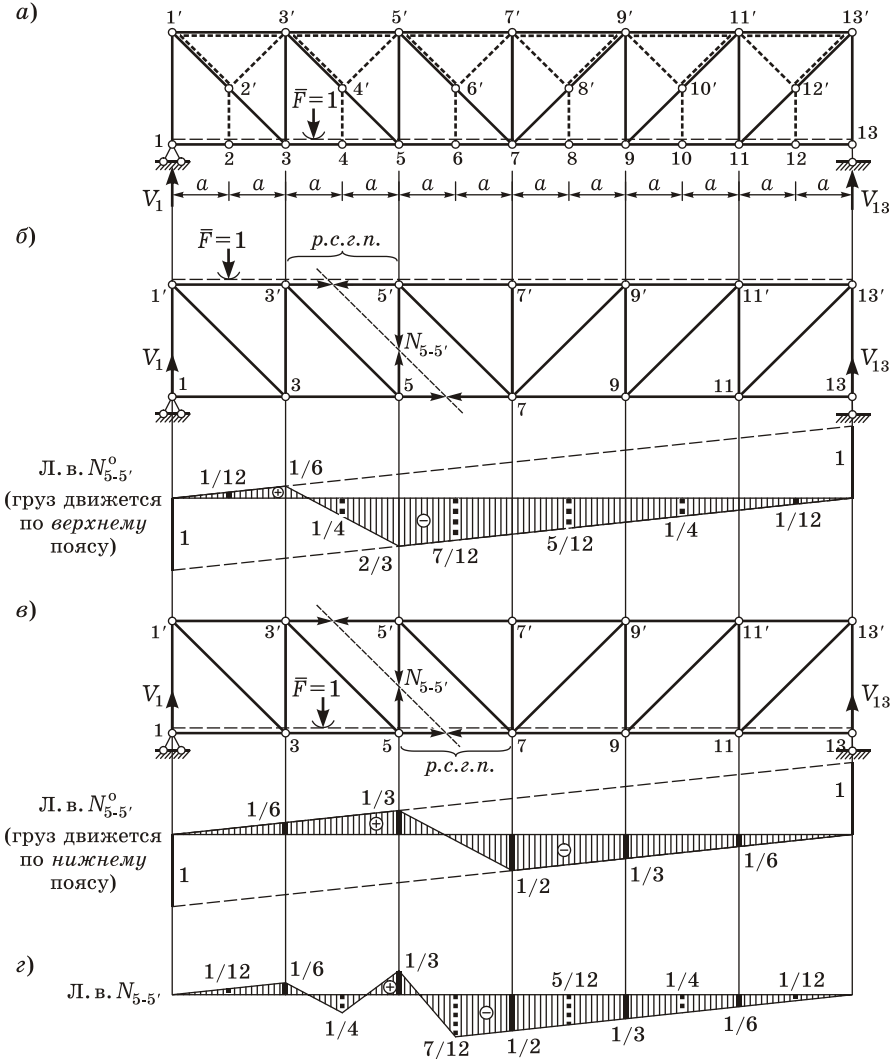


Рисунок 4.35

Если груз находится в узлах шпренгелей 2, 4, 6, 8, 10, 12, то он воспринимается узлами негрузового верхнего пояса; справедливы ординаты линии влияния $N_{5-5'}^0$ при движении по верхнему поясу (см. рисунок 4.35, б). Выбранные ординаты соединяем прямыми линиями. Получаем линию влияния $N_{5-5'}$ (рисунок 4.35, г).

5.1 Общие сведения о трехшарнирных системах

5.1.1 Основные параметры трехшарнирной системы. Система, состоящая из двух несущих дисков, соединенных между собой и с землей тремя шарнирами, называется *трехшарнирной* (рисунок 5.1). Опоры A и B принято называть *пятами*, шарнир C – *замком (ключом)*, расстояние между опорами по горизонтали – *длиной пролета (пролетом)* l , расстояние от прямой, соединяющей опоры, до замкового шарнира – *стрелой подъема* f (рисунок 5.1, a). В общем случае система может иметь опоры в разных уровнях (рисунок 5.1, b).

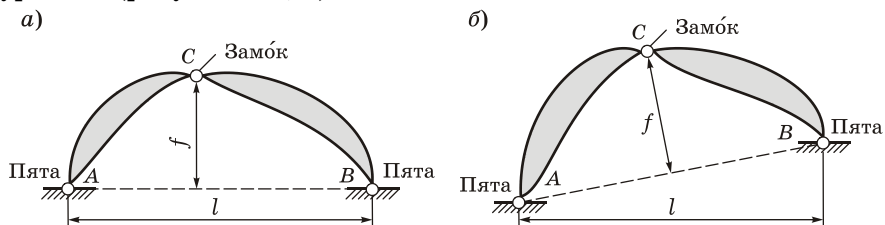


Рисунок 5.1

5.1.2 Опорные реакции. Если вертикальная нагрузка, действующая на систему, вызывает в ее опорах наклонные реакции, такая система называется *распорной*. Нагрузка стремится раздвинуть опоры, как бы «распирает» их, отсюда и произошло название – «распорные системы». Горизонтальная составляющая опорной реакции называется *распор*.

Докажем, что трехшарнирные системы являются распорными. Рассмотрим систему, нагруженную вертикальной силой F и находящуюся в равновесии (рисунок 5.2, a). Реакция R_A по свойству незагруженного левого диска направлена по прямой AC , которая пересекает линию действия силы F в точке D . Для равновесия системы необходимо, чтобы реакция R_B была направлена вдоль прямой BD , т. е. также была наклонной.

При выполнении расчетов в аналитической форме наклонные реакции удобно представить в виде вертикальных V_A, V_B и горизонтальных H_A, H_B составляющих (рисунок 5.2, b).

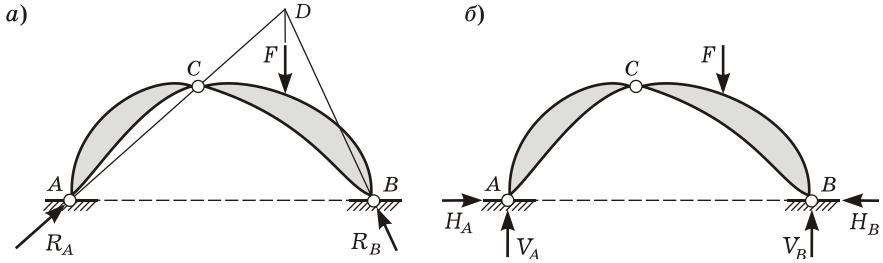


Рисунок 5.2

5.1.3 Типы трехшарнирных систем. В зависимости от конструкции несущих дисков различают трехшарнирные арки, рамы, фермы (рисунок 5.3), висячие системы.

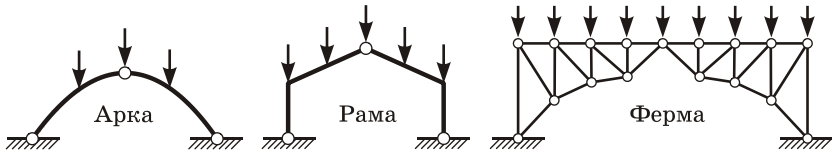


Рисунок 5.3

Трехшарнирная арка представляет собой распорную стержневую систему с криволинейной осью, выпуклость которой противоположна направлению действия нагрузки. Распор в такой системе направлен внутрь, конструкция в общем случае работает на внецентренное сжатие.

Трехшарнирная рама – распорная система с ломаной осью.

Трехшарнирная ферма образована из двух дисков, представляющих собой стержневые системы с жесткими узлами. Между собой и с основанием они соединены шарнирами. Однако при узловой нагрузке идеальные шарнирные соединения принимаются во всех узлах.

Особый тип представляют *висячие трехшарнирные системы*. В них выпуклость арки совпадает с направлением действия нагрузки, поэтому распор направлен наружу (рисунок 5.4).

В зависимости от кривизны будем различать следующие типы арок (ρ_0 – радиус кривизны центральной оси, h – высота сечения):

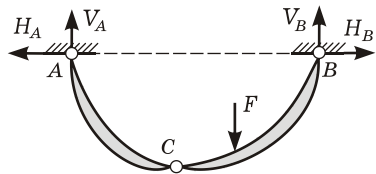


Рисунок 5.4

- большой кривизны ($h/\rho_0 > 0,2$);
- малой кривизны ($0,1 < h/\rho_0 \leq 0,2$);
- пологие арки ($h/\rho_0 \leq 0,1$).

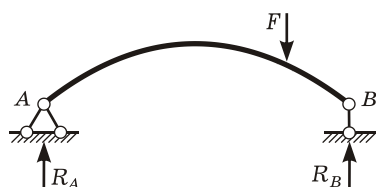


Рисунок 5.5

Заметим, что в строительной механике не всякая система с криволинейной осью считается аркой. На рисунке 5.5 изображен криволинейный брус, по очертанию аналогичный арке. Однако вертикальная нагрузка вызывает в его опорах только вертикальные опорные реакции.

Мостовые арки, воспринимающие действие подвижной нагрузки, обычно имеют вспомогательное *надарочное* (подарочное) строение (рисунок 5.6, а). Через него подвижная нагрузка передается на основную конструкцию в определенных точках – узлах. В расчетных схемах вспомогательное строение часто считают статически определимым (рисунок 5.6, б).

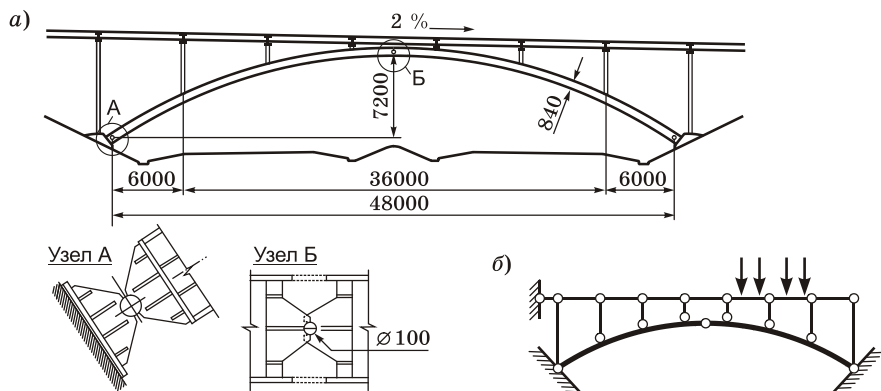


Рисунок 5.6

Трехшарнирные системы бывают *симметричными* или *несимметричными*. Опоры могут располагаться как на одном, так и на разных уровнях (см. рисунок 5.1, б).

5.1.4 Трехшарнирная арка с затяжкой. Распор трехшарнирной системы воспринимается опорными сооружениями (береговые устои моста и т. д.). Чем меньше стрела подъема f , тем ближе трехшарнирная арка к мгновенно изменяемой системе. Следовательно, тем большей величины достигает распор и тем более мощные опоры необходимы.

Когда опоры не способны воспринять распор, вводится дополнительный стержень (*затяжка*), соединяющий обе полуарки. Затяжка располагается на уровне опор арки (рисунок 5.7, а) или выше их (рисунок 5.7, б). Иногда затяжка выполняется ломаной и дополняется подвесками (рисунок 5.7, в).

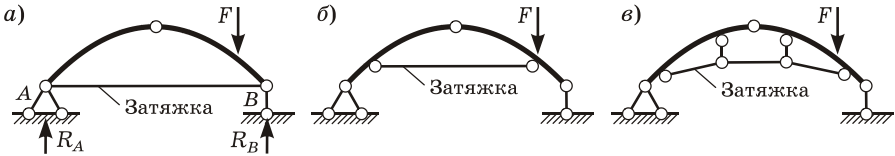


Рисунок 5.7

В расчетной схеме арки с затяжкой достаточно одной шарнирно-неподвижной опоры для обеспечения неподвижности системы в горизонтальном направлении; вторая опора может приниматься шарнирно-подвижной.

5.1.5 Очертание оси трехшарнирной системы. Примем начало координат на левой опоре трехшарнирной системы (рисунок 5.8). Очертание оси симметричной арки при заданных длине пролета l и стреле подъема f определяется по *уравнению оси*:

- для синусоидальной арки $y = f \sin \frac{\pi z}{l}$;
- для параболической второй степени арки $y = \frac{4f}{l^2} z(l - z)$;
- для круговой арки $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - z\right)^2} - R + f$, $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$;
- для эллипсоидальной (эллипсовоидной) арки $y = \sqrt{\frac{4f^2 z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)}$.

Симметричные арки с различным очертанием оси при одних и тех же значениях l и f показаны на рисунке 5.8.

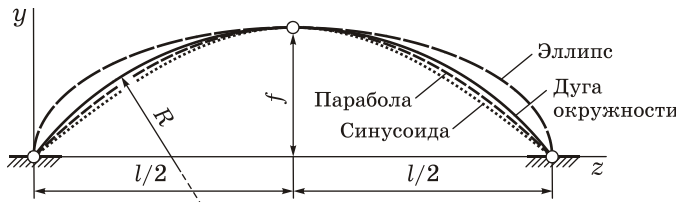


Рисунок 5.8

Кроме перечисленных выше, на практике применяются стрельчатые арки, состоящие из двух дуг окружности, и другие. В трехшарнирных рамах очертание оси задается взаимным расположением шарниров и жестких узлов.

Поперечное сечение может быть постоянным и переменным по длине оси системы. Выбор очертания оси и закона изменения размеров сечений определяется рядом требований: минимальный расход материалов, технологичность конструкций, эстетические качества и т. д.

5.2 Расчет трехшарнирной системы с опорами в одном уровне на вертикальную нагрузку

5.2.1 Опорные реакции. Рассмотрим трехшарнирную систему произвольного очертания с опорами в одном уровне. При вертикальной нагрузке в опорах возникают две наклонные реакции, которые можно разложить на вертикальные и горизонтальные

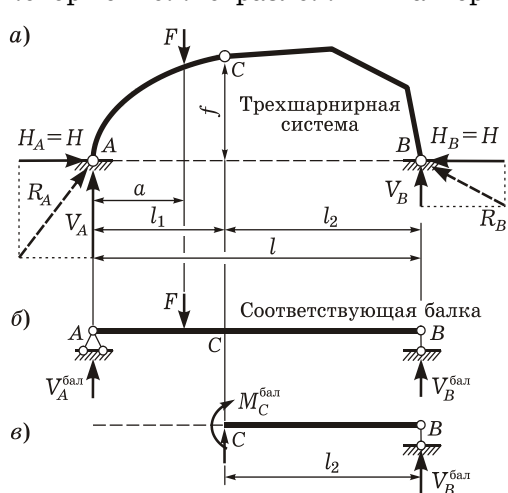


Рисунок 5.9

Далее рассмотрим простую балку (рисунок 5.9, б), имеющую тот же пролет и схему нагружения, что и трехшарнирная система. Эту балку будем называть *соответствующей (заменяющей) балкой*. Нетрудно заметить, что реакции $V_A^{\text{бал}}$ и $V_B^{\text{бал}}$ в опорах балки определяются аналогично:

$$\sum M_B = 0; \quad F(l-a) - V_A^{\text{бал}}l = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad V_B^{\text{бал}}l - Fa = 0,$$

составляющие: V_A , V_B , H_A , H_B (рисунок 5.9, а). Для их определения используем условия равновесия системы.

Вертикальные составляющие реакций определим из условий равенства нулю моментов всех сил относительно опор B и A :

$$\sum M_B = 0;$$

$$F(l-a) - V_A l = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_B l - Fa = 0,$$

отсюда

$$V_A = F(l-a)/l;$$

$$V_B = Fa/l.$$

отсюда

$$V_A^{\text{бал}} = F(l-a)/l; \quad V_B^{\text{бал}} = Fa/l.$$

Следовательно,

$$V_A = V_A^{\text{бал}}; \quad V_B = V_B^{\text{бал}}. \quad (5.1)$$

Горизонтальные составляющие реакций (распор) H_A и H_B равны между собой:

$$H_A = H_B = H.$$

Это следует из уравнения проекций всех действующих сил на горизонтальную ось $\sum z = 0$.

Составим уравнение моментов всех сил правой части трехшарнирной системы относительно шарнира C , из которого выразим распор:

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; \quad V_B l_2 - Hf = 0; \quad H = V_B l_2 / f = V_B^{\text{бал}} l_2 / f.$$

Учитывая, что произведение $V_B^{\text{бал}} l_2$ есть выражение изгибающего момента в сечении C соответствующей балки $M_C^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} l_2$ (рисунок 5.9, в), получаем

$$H = M_C^{\text{бал}} / f, \quad (5.2)$$

где $M_C^{\text{бал}}$ – изгибающий момент в сечении C соответствующей балки (под замком арки); f – стрела подъема.

Анализируя формулы (5.1) и (5.2), можно сделать *выводы*:

- опорные реакции в трехшарнирной системе не зависят от очертания оси, они определяются только взаимным расположением шарниров A, B, C , т. е. величинами l и f ;
- вертикальные реакции V_A, V_B не зависят также от стрелы подъема f и равны реакциям в соответствующей балке;
- распор H тем больше, чем меньше стрела подъема f .

Следует помнить, что формулы (5.1), (5.2) справедливы только в случае вертикальных нагрузок.

5.2.2 Внутренние усилия. Очертание оси трехшарнирной системы $y(z)$ будем считать заданным в принятой системе координат, начало которой совпадает с левой опорой A (рисунок 5.10, а). Опорные реакции известны.

При действии вертикальной нагрузки в сечениях конструкции возникают изгибающие моменты M , поперечные и продольные силы Q, N . Выразим их через внутренние усилия в соответствующей балке (рисунок 5.10, б).

Выберем на оси системы точку K и рассечем арку перпендикулярно к ее оси. Положение сечения характеризуется тремя

геометрическими параметрами: координатами z , y и углом наклона касательной, проведенной к оси арки в данном сечении, к горизонту – φ .

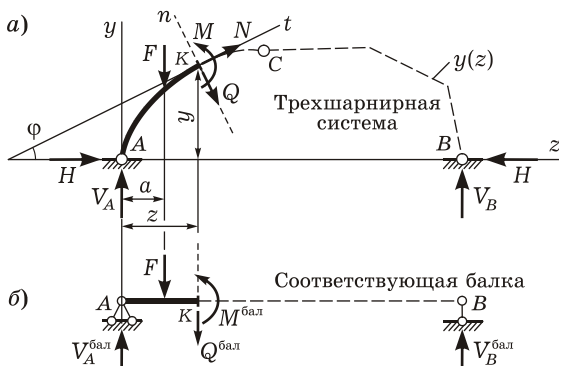


Рисунок 5.10

Для левой части конструкции (см. рисунок 5.10, а) составим три уравнения статического равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_K &= 0; & M - V_A z + F(z - a) + Hy &= 0; \\ \sum n &= 0; & -Q + V_A \cos \varphi - F \cos \varphi - H \sin \varphi &= 0; \\ \sum t &= 0; & N + V_A \sin \varphi - F \sin \varphi + H \cos \varphi &= 0, \end{aligned}$$

из которых выразим искомые усилия:

$$\begin{aligned} M &= V_A z - F(z - a) - Hy; & Q &= (V_A - F) \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N &= -(V_A - F) \sin \varphi - H \cos \varphi. \end{aligned}$$

Рассматривая соответствующую балку (см. рисунок 5.10, б) и учитывая, что $V_A^{\text{бал}} = V_A$; $V_B^{\text{бал}} = V_B$, получаем:

$$M^{\text{бал}} = V_A z - F(z - a); \quad Q^{\text{бал}} = V_A - F.$$

С учетом этих соотношений получаем формулы для расчета внутренних усилий M , Q , N в трехшарнирной системе:

$$\begin{aligned} M &= M^{\text{бал}} - Hy; \\ Q &= Q^{\text{бал}} \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N &= -(Q^{\text{бал}} \sin \varphi + H \cos \varphi), \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $M^{\text{бал}}$, $Q^{\text{бал}}$ – изгибающий момент и поперечная сила в точке соответствующей балки с той же абсциссой z , что и данное сече-

ние; H – распор; y – ордината данного сечения; φ – угол наклона касательной к оси трехшарнирной системы в данном сечении.

Из формул (5.3) следует, что:

- при одинаковой вертикальной нагрузке (направленной вниз) изгибающие моменты и поперечные силы в трехшарнирной системе всегда меньше, чем в балке того же пролета ($M < M^{\text{бал}}$), так как $M^{\text{бал}} > 0$ и $H y > 0$;
- продольные силы в сечениях трехшарнирной системы сжимающие ($N < 0$), так как $H \cos \varphi > 0$, а $|Q^{\text{бал}} \sin \varphi| < H \cos \varphi$.

5.2.3 Эпюры внутренних усилий в трехшарнирной системе.

Построение эпюр внутренних усилий M , Q , N удобно вести в следующем порядке:

- определить опорные реакции в соответствующей балке, а затем в арке V_A , V_B , H ;
- выбрать ряд сечений $k = 1, \dots, n$ в арке и в соответствующей балке (с теми же абсциссами). Желательно, чтобы число сечений n было не менее восьми (в том числе обязательно в шарнирах A , B , C и в местах приложения сосредоточенных сил и моментов);
- определить геометрические параметры оси арки в выбранных сечениях (абсциссы z_k , ординаты y_k , углы наклона сечений φ_k);
- рассчитать балочные внутренние усилия $M_k^{\text{бал}}$, $Q_k^{\text{бал}}$ в выбранных сечениях;
- рассчитать усилия M_k , Q_k , N_k в каждом сечении по формулам (5.3) и изобразить их в виде эпюр.

В арках эпюры внутренних усилий всегда *криволинейны*. Это следует из формул (5.3), в которые входят функции $y(z)$, $\sin \varphi(z)$ и $\cos \varphi(z)$, нелинейно изменяющиеся по длине пролета. В рамках возможны как прямолинейные, так и криволинейные эпюры.

Примерное очертание эпюр M , Q и N от одной вертикальной силы F показано на рисунке 5.11. Заметим, что в сечении под силой эпюра Q имеет «скачок» на $F \cos \varphi$, эпюра N – на $F \sin \varphi$, что обусловлено «скачком» балочной эпюры $Q^{\text{бал}}$ на величину F .

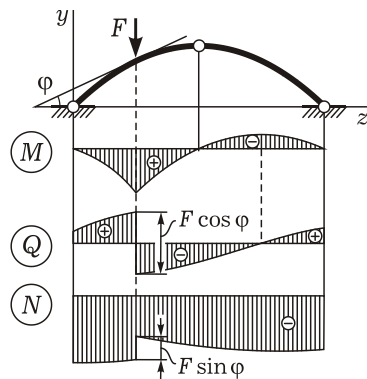


Рисунок 5.11

5.2.4 Расчет трехшарнирной системы с затяжкой. Рассмотрим трехшарнирную систему с затяжкой, расположенной на уровне опор (рисунок 5.12, а). Вертикальная нагрузка вызывает в ее опорах *только вертикальные реакции*, которые равны реакциям соответствующей балки (рисунок 5.12, б), т. е. для них справедливы формулы (5.1)

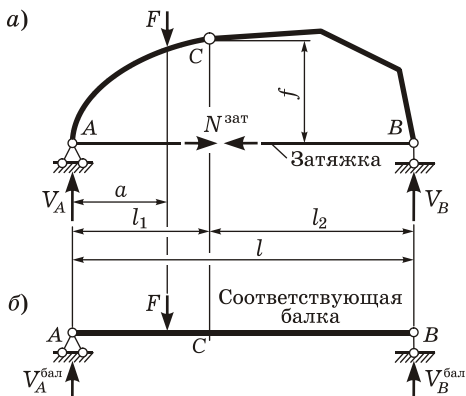


Рисунок 5.12

$$V_A = V_A^{\text{бал}}; \quad V_B = V_B^{\text{бал}}.$$

Затяжка работает на *центральное растяжение*, в ней возникает только продольная сила $N^{\text{зат}}$.

Составим уравнение моментов всех сил правой части конструкции относительно замкового шарнира

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0;$$

$$V_B l_2 - N^{\text{зат}} f = 0.$$

Из него, учитывая, что $V_B l_2 = V_B^{\text{бал}} l_2 = M_C^{\text{бал}}$, получаем

$$N^{\text{зат}} = M_C^{\text{бал}} / f, \quad (5.4)$$

где $M_C^{\text{бал}}$ — изгибающий момент в сечении C соответствующей балки; f — стрела подъема.

Сравнивая соотношения (5.4) и (5.2), убеждаемся, что продольная сила в затяжке $N^{\text{зат}}$ равна распору H в обычной трехшарнирной системе без затяжки:

$$N^{\text{зат}} = H.$$

Внутренние усилия в трехшарнирной системе с затяжкой (изгибающие моменты, поперечные и продольные силы M , Q , N) определяются по формулам, аналогичным (5.3). При этом усилие в затяжке $N^{\text{зат}}$ играет роль распора H .

Замечание. Из-за направлений своих реакций трехшарнирная система с затяжкой является внешне безраспорной системой. Распор в ней образуется и погашается внутри самого сооружения, *без передачи на опоры*. Внутренние усилия в трехшарнирной системе с затяжкой ничем не отличаются от усилий в аналогичной трехшарнирной конструкции без затяжки.

5.3 Общий случай расчета трехшарнирной системы

5.3.1 Опорные реакции. Рассмотрим несимметричную трехшарнирную систему с опорами в разных уровнях. Полагаем, что на нее действует произвольная нагрузка (рисунок 5.13). Для удобства отыскания реакций разделим их на вертикальные Y_A, Y_B и наклонные T_A, T_B составляющие (по линии, соединяющей центры опор).

Уравнения равновесия для вычисления реакций удобно записывать в такой последовательности:

$$\sum M_B = 0$$

(для определения Y_A);

$$\sum M_A = 0$$

(для определения Y_B);

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0$$

(для определения T_A);

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0$$

(для определения T_B);

$$\sum y = 0; \sum z = 0$$

(для проверки).

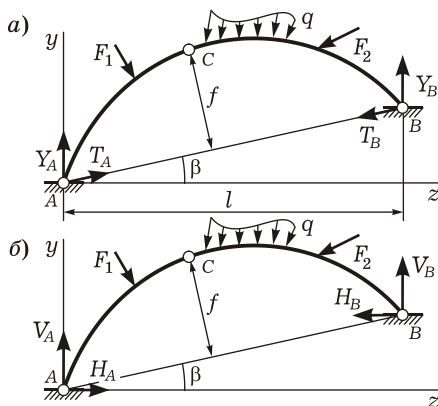


Рисунок 5.13

При вычислении внутренних сил в системе пользоваться наклонными составляющими неудобно. Поэтому после определения величин Y_A, Y_B и T_A, T_B лучше перейти к вертикальным V_A, V_B и горизонтальным H_A, H_B составляющим:

$$\begin{aligned} V_A &= Y_A + T_A \sin \beta; & V_B &= Y_B - T_B \sin \beta; \\ H_A &= T_A \cos \beta; & H_B &= T_B \cos \beta, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где β – угол между линией, соединяющей опоры, и горизонталью (см. рисунок 5.13).

5.3.2 Внутренние усилия. При действии произвольной наклонной нагрузки нельзя вывести готовые формулы типа (5.3) для расчета внутренних усилий. В каждом конкретном случае усилия M, Q и N определяются методом сечений в ряде заданных точек по длине арки.

5.3.3 Расчет на вертикальную нагрузку. Составив уравнения равновесия для трехшарнирной системы с опорами в разных уровнях и для соответствующей ей балки (рисунок 5.14), имеем:

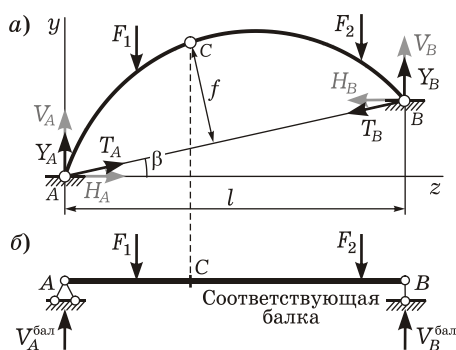


Рисунок 5.14

$$Y_A = V_A^{\text{бал}}; Y_B = V_B^{\text{бал}};$$

$$T_A = T_B = M_C^{\text{бал}} / f.$$

Учитывая, что распор $H_A = H_B = H$, по формулам (5.5) получим

$$H = M_C^{\text{бал}} \cos \beta / f;$$

$$V_A = V_A^{\text{бал}} + M_C^{\text{бал}} \sin \beta \cos \beta / f;$$

$$V_B = V_B^{\text{бал}} - M_C^{\text{бал}} \sin \beta \cos \beta / f.$$

Для расчета внутренних усилий справедливы соотношения (5.3).

5.4 Дифференциальные зависимости между усилиями в криволинейных стержнях

Рассмотрим арку, находящуюся под действием распределенной нагрузки q (рисунок 5.15, а). Двумя радиальными сечениями выделим бесконечно малый элемент ds и приложим к нему возникающие в сечениях усилия (рисунок 5.15, б). Положение некоторого произвольного сечения определяется полярным углом α . Длина элементарного участка арки $ds = \rho d\alpha$, где ρ – радиус кривизны ее оси, $d\alpha$ – элементарный полярный угол.

Используя условия равновесия элемента, найдем зависимости между усилиями M , Q , N и интенсивностью распределенной нагрузки.

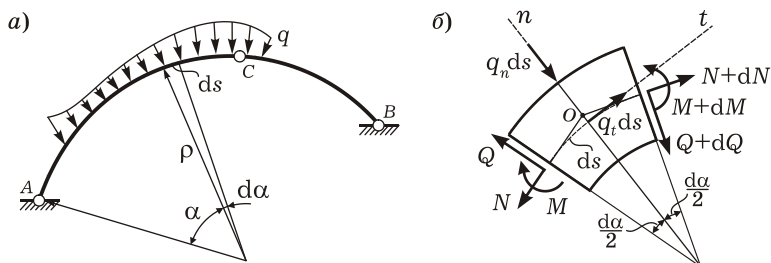


Рисунок 5.15

В пределах элемента ds нагрузку q будем считать равномерно распределенной. Разложим ее на составляющие: радиальную интенсивностью q_n и тангенциальную интенсивностью q_t , каждую из

которых заменим равнодействующей сосредоточенной силой $q_n ds$ и $q_t ds$ (см. рисунок 5.15, б).

5.4.1 Зависимость между изгибающими моментами и поперечными силами. Приравняем нулю сумму моментов всех сил, действующих на элемент ds , относительно точки пересечения касательных к оси $\sum M_O = 0$. Имеем

$$-M + (M + dM) - Qds/2 - (Q + dQ)ds/2 = 0.$$

Из этого уравнения, пренебрегая величиной второго порядка малости $dQ ds$, получим

$$Q = \frac{dM}{ds}. \quad (5.6)$$

Следовательно, *поперечная сила есть производная от изгибающего момента по длине оси арки.*

5.4.2 Зависимости между поперечными и продольными силами. Примем систему координат tn , направив ось t по касательной, а ось n — по нормали к оси арки (см. рисунок 5.15, б).

Приравняем к нулю сумму проекций на ось n всех сил, действующих на элемент:

$$-q_n ds + Q \cos \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \cos \frac{d\alpha}{2} - N \sin \frac{d\alpha}{2} - (N + dN) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Из-за малости $d\alpha$ положим $\cos(d\alpha/2) = 1$ и $\sin(d\alpha/2) = d\alpha/2$. Пренебрегая величиной второго порядка малости $dN \sin(d\alpha/2)$ и учитывая, что $\rho = ds/d\alpha$, получим

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{N}{\rho} - q_n, \quad (5.7)$$

т. е. *производная от поперечной силы по оси прямо пропорциональна продольной силе, деленной на радиус кривизны в данной точке сечения.*

Далее приравняем нулю сумму проекций на ось t всех сил, действующих на элемент:

$$q_t ds - N \cos \frac{d\alpha}{2} + (N + dN) \cos \frac{d\alpha}{2} - Q \sin \frac{d\alpha}{2} - (Q + dQ) \sin \frac{d\alpha}{2} = 0.$$

Пренебрегая величиной $dQ \sin(d\alpha/2)$, после соответствующих преобразований получим

$$\frac{dN}{ds} = \frac{Q}{\rho} - q_t, \quad (5.8)$$

т. е. *производная от продольной силы по длине оси прямо пропорциональна поперечной силе, деленной на радиус кривизны оси в данной точке сечения.*

Дифференциальные зависимости (5.6)–(5.8) могут быть использованы для контроля правильности построения эпюр внутренних усилий в арках так же, как это делается в теории изгиба балок.

5.5 Рациональная ось трехшарнирной системы

5.5.1 Уравнение рациональной оси трехшарнирной системы. Рациональной осью трехшарнирной системы называется ось такого очертания, при которой размеры поперечного сечения будут наименьшими. Так как нормальные напряжения изгиба обычно превосходят напряжения растяжения-сжатия, то рациональной осью будет такая, при которой *изгибающие моменты во всех сечениях арки будут равны нулю*.

При действии на арку только вертикальной нагрузки изгибающие моменты M в ее поперечных сечениях определяются по первой из формул (5.3). Приравнивая M к нулю

$$M = M^{\text{бал}} - Hy = 0$$

и выражая y , получим *уравнение рациональной оси*

$$y = M^{\text{бал}} / H. \quad (5.9)$$

При конкретной неподвижной нагрузке распор H является постоянной величиной. Следовательно, рациональная ось, определяемая по уравнению (5.7), по форме должна совпадать с очертанием эпюры изгибающих моментов $M^{\text{бал}}$ в соответствующей балке. Коэффициентом пропорциональности служит величина $1/H$, обратная распору.

Если найдено такое очертание оси трехшарнирной системы, при котором изгибающие моменты во всех сечениях равны нулю ($M = 0$), то на основании дифференциального соотношения (5.6) поперечные силы во всех сечениях также равны нулю ($Q = 0$). Следовательно, в сечениях системы возникают только продольные силы N , т. е. конструкция работает исключительно на сжатие. Это особенно выгодно для каменных и бетонных сооружений.

Далее рассмотрим некоторые частные случаи нагрузок.

5.5.2 Действие равномерно распределенной нагрузки. Пусть на трехшарнирную систему действует вертикальная равномерно распределенная по всему пролету нагрузка интенсивностью q (рисунки 5.16, а).

Рассмотрим соответствующую балку (рисунок 5.16, б). Опорные реакции

$$V_A^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} = ql / 2.$$

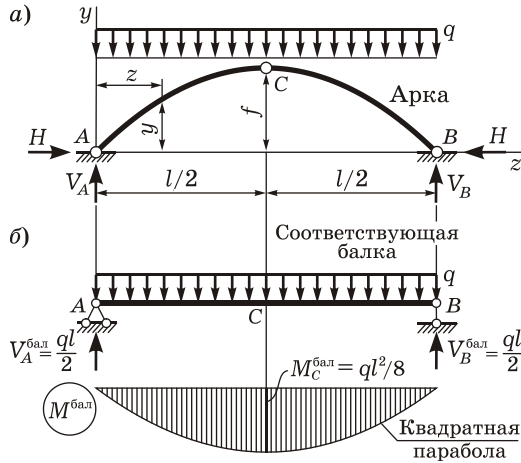


Рисунок 5.16

Найдем изгибающий момент в произвольном сечении балки с абсциссой z :

$$M^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} z - qz^2 / 2 = qz(l - z) / 2.$$

В середине пролета $M^{\text{бал}} \Big|_{z=l/2} = M_C^{\text{бал}} = ql^2 / 8$ (см. рисунок 5.16, б).

Следовательно, распор арки

$$H = M_C^{\text{бал}} / f = ql^2 / (8f).$$

Уравнение рациональной оси арки при равномерно распределенной вертикальной нагрузке согласно (5.9)

$$y = \frac{M^{\text{бал}}}{H} = \frac{qz(l - z)}{2} \frac{8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2} (lz - z^2). \quad (5.10)$$

Это значит, что рациональная ось трехшарнирной арки очерчена по квадратной параболе.

5.5.3 Действие сосредоточенных сил. Допустим, что заданы положения шарниров A, B, C и нагрузка из двух сосредоточенных сил в четвертях пролета (рисунок 5.17, а). Найдем опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов в соответствующей балке (рисунок 5.17, б). Эпюра $M^{\text{бал}}$ имеет форму трапеции, значит, рациональная ось трехшарнирной системы также должна быть очерчена по трапеции (рисунок 5.17, в).

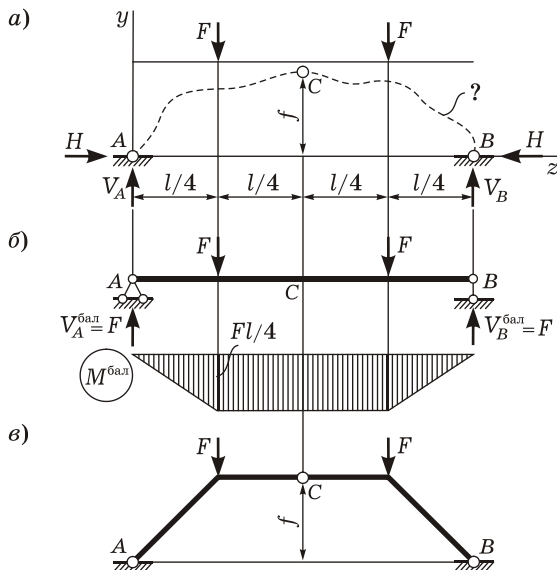


Рисунок 5.17

Аналогичные построения можно выполнить при действии любого количества сосредоточенных сил. Эюра $M^{\text{бал}}$, а следовательно, и рациональная ось трехшарнирной системы ломаная, с изломами в местах приложения сил.

5.5.4 Действие радиальной нагрузки (гидростатического давления). Рассмотрим действие на арку равномерно распределенной нагрузки, направленной по радиусу к центру кривизны (по нормали к оси) (рисунок 5.18, а). Часто такую нагрузку называют гидростатическим давлением, так как на нее рассчитывают арочные плотины.

Исследуем равновесие бесконечно малого элемента арки длиной ds (рисунок 5.18, б), нагруженного равномерной радиальной нагрузкой $q_n = \text{const}$; тангенциальная составляющая $q_t = 0$. Примем, что изгибающие моменты в его сечениях, а значит, и поперечные силы, равны нулю. Тогда на основании (5.7) и (5.8)

$$\rho = -\frac{N}{q_n}; \quad dN = 0.$$

То есть, чтобы изгибающие моменты в трехшарнирной арке отсутствовали, продольная сила, а также радиус кривизны оси должны быть постоянными ($N = \text{const}$, $\rho = \text{const}$). Следовательно,

рациональному очертанию оси системы соответствует *дуга окружности*, проходящая через три шарнира A, B, C .

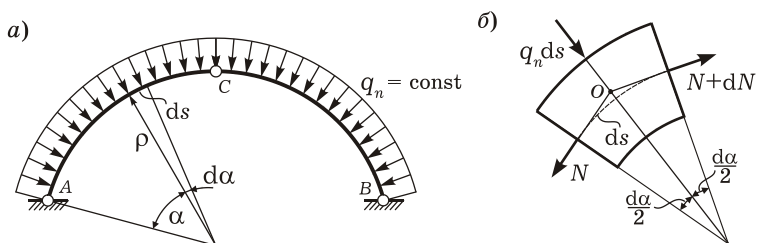


Рисунок 5.18

Замечания. Используемое понятие рациональной оси трехшарнирной системы имеет смысл лишь для заданной неподвижной нагрузки. Изменение типа и положения нагрузки влечет за собой и изменение рационального очертания. Практически всегда в процессе эксплуатации нагрузка на арку изменяется, следовательно, изгибающие моменты не будут нулевыми.

Нахождение рационального очертания оси арки ведется по недеформированной схеме. Это можно делать тогда, когда арка достаточно жестка, и при определении внутренних сил можно пренебречь ее деформациями. Например, в висячих арочных системах стержни (тросы) большой длины выполняются из высокопрочных сталей, имеют малые площади сечений A и сравнительно невысокие жесткости EA . Поэтому такие системы должны рассчитываться с учетом растяжимости и нелинейности стержней, с учетом деформируемости расчетной схемы.

5.6 Линии влияния усилий в трехшарнирной системе

Арки часто используются в качестве основных несущих конструкций мостов, поэтому их необходимо рассчитывать на подвижные нагрузки. В мостовых арках подвижные силы обычно прикладываются к вспомогательному надарочному строению, образуя узловую передачу нагрузки (см. рисунок 5.6).

Вначале рассмотрим способы построения линий влияния опорных реакций и внутренних усилий, предполагая, что груз $\bar{F} = 1$ движется непосредственно по трехшарнирной системе. Затем, используя выводы п. 2.9.3, перейдем к линиям влияния с учетом узловой передачи нагрузки.

5.6.1 Линии влияния опорных реакций. Ранее было доказано (см. п. 5.2.1), что вертикальные составляющие реакций V_A и V_B

равны реакциям в соответствующей балке $V_A^{\text{бал}}$ и $V_B^{\text{бал}}$. Следовательно, совпадают и их линии влияния:

$$\text{Л. в. } V_A = \text{Л. в. } V_A^{\text{бал}}; \quad \text{Л. в. } V_B = \text{Л. в. } V_B^{\text{бал}}.$$

Линию влияния распора H получим согласно (5.2), разделив все ординаты линии влияния изгибающего момента в сечении C соответствующей балки $M_C^{\text{бал}}$ на стрелу подъема f :

$$\text{Л. в. } H = (\text{Л. в. } M_C^{\text{бал}}) / f.$$

Линии влияния опорных реакций показаны на рисунке 5.19.

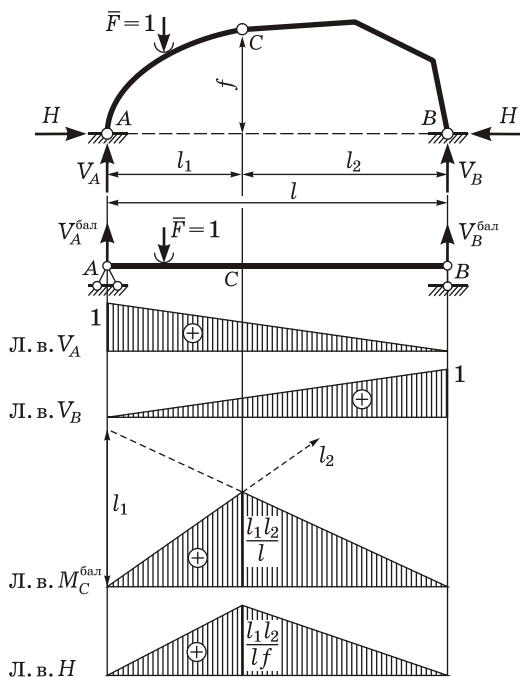


Рисунок 5.19

5.6.2 Линия влияния изгибающего момента: способ наложения. Для построения линии влияния изгибающего момента в некотором сечении K трехшарнирной системы воспользуемся первой из формул (5.3): $M_K = M_K^{\text{бал}} - H y_K$. Так как ордината данного сечения y_K – величина постоянная, из этой формулы следует, что

$$\text{л. в. } M_K = \text{л. в. } M_K^{\text{бал}} - (\text{л. в. } H) y_K, \quad (5.11)$$

где $M_K^{\text{бал}}$ – изгибающий момент в сечении K соответствующей балки; H – распор.

Таким образом, линия влияния M_K может быть получена путем алгебраического суммирования балочной линии влияния $M_K^{\text{бал}}$ и линии влияния распора, увеличенной в y_K раз. Подобный способ построения линий влияния называется *способом наложения*.

Порядок построения л. в. M_K способом наложения:

- 1) в одном масштабе строим л. в. $M_K^{\text{бал}}$ и л. в. $H \cdot y_K$;
- 2) находим их ординаты под сечением K и под шарниром C из подобия треугольников (рисунок 5.20);
- 3) совмещаем эти две линии влияния (по одну сторону оси – вверх), в соответствии с (5.11) суммируем их ординаты, определяя ординаты л. в. M_K :

$$m_1 = \frac{z_K(l - z_K)}{l} - \frac{l_2 z_K}{lf} y_K; \quad m_2 = \frac{z_K l_2}{l} - \frac{l_1 l_2}{lf} y_K; \quad (5.12)$$

- 4) полученные ординаты m_1 и m_2 с учетом знака откладываем от горизонтальной базы (см. рисунок 5.20).

Прямые, ограничивающие итоговую линию влияния M_K , носят названия: *левая прямая* – от опоры A до сечения K , *средняя прямая* – от сечения K до шарнира C , *правая прямая* – от шарнира C до опоры B .

Заметим, что под сечением, где суммируемые линии влияния пересекаются, итоговая линия влияния имеет нулевую ординату – так называемую *нулевую точку* с абсциссой z_0^M . Средняя прямая в ней пересекает ось.

5.6.3 Линия влияния изгибающего момента: способ нулевой точки. Рассмотрим, как найти абсциссу z_0^M нулевой точки и воспользоваться ею для построения линии влияния M_K .

Пусть вертикальная сила $\bar{F}=1$ приложена к трехшарнирной системе на участке между сечением K и шарниром C . Так как правая часть арки не нагружена, опорная реакция R_B проходит по прямой BC (рисунок 5.21). Если при этом реакция R_A направлена по прямой AK , то изгибающий момент в сечении K равен нулю. Прямые BC и AK пересекаются в точке O_M . Чтобы система находилась в равновесии, линия действия силы \bar{F} должна проходить через точку O_M .

Найдем абсциссу нулевой точки z_0^M . Рассмотрим пары подобных треугольников AKK_1 и $AO_M O_1$, BCC_1 и $BO_M O_1$.

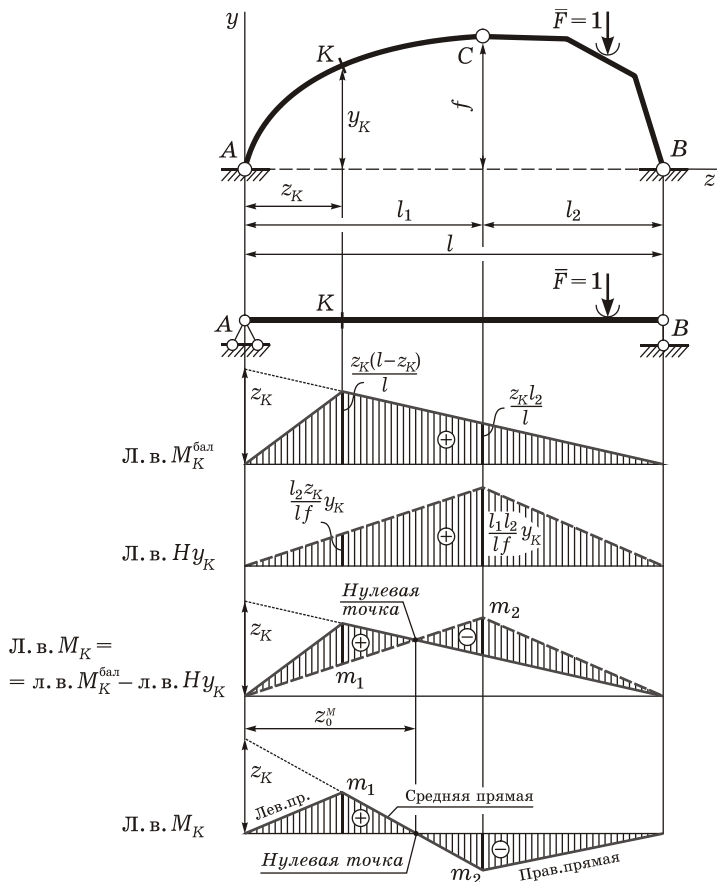


Рисунок 5.20

Составим пропорции

$$\frac{z_0^M}{O_M O_1} = \frac{z_K}{y_K}; \quad \frac{l - z_0^M}{O_M O_1} = \frac{l_2}{f}.$$

Выразим из первой пропорции длину отрезка $O_M O_1$ и подставим ее во вторую пропорцию. Отсюда

$$z_0^M = \frac{l f z_K}{f z_K + l_2 y_K}. \quad (5.13)$$

Выражение (5.13) дает возможность аналитически найти абсциссу нулевой точки линии влияния изгибающего момента в сечении K . Зная ее, можно сразу получить линию влияния M_K , минуя построение вспомогательных линий влияния.

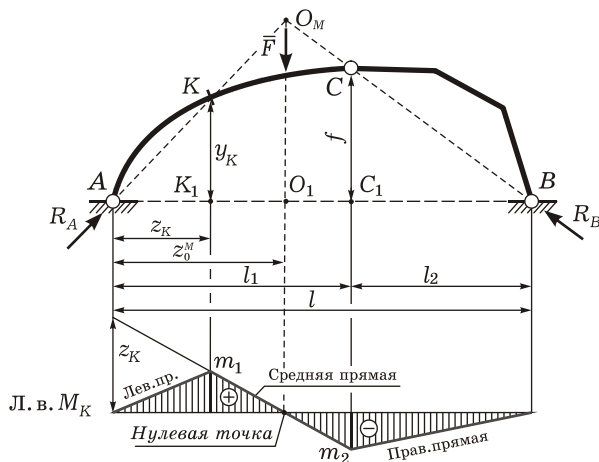


Рисунок 5.21

Порядок построения л. в. M_K способом нулевой точки:

- 1) находим z_0^M по формуле (5.13) или графически (как абсциссу точки O_M пересечения прямых AK и BC) и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;
- 2) под шарниром A откладываем ординату z_K ; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;
- 3) обозначаем ординаты средней прямой: m_1 – под сечением K , m_2 – под шарниром C ;
- 4) ординату m_1 соединяем с нулем под опорой A – получаем *левую прямую*;
- 5) ординату m_2 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты m_1 и m_2 из подобия треугольников:

$$m_1 = \frac{(z_0^M - z_K)z_K}{z_0^M}; \quad m_2 = \frac{(z_0^M - l_1)z_K}{z_0^M}. \quad (5.14)$$

Заметим, что из (5.14) легко получить соотношения (5.12), подставив выражение (5.13) для абсциссы нулевой точки z_0^M .

5.6.4 Линия влияния поперечной силы: способ наложения. Для построения линии влияния поперечной силы в некотором сечении K трехшарнирной системы воспользуемся второй из формул (5.3). Из нее следует, что

$$\text{л. в. } Q_K = (\text{л. в. } Q_K^{\text{бал}}) \cos \varphi_K - (\text{л. в. } H) \sin \varphi_K, \quad (5.15)$$

где $Q_K^{\text{бал}}$ – поперечная сила в сечении K соответствующей балки; H – распор; φ_K – угол наклона касательной к оси трехшарнирной системы в данном сечении.

То есть при движении груза будут меняться $Q_K^{\text{бал}}$ и H , а $\cos \varphi_K$ и $\sin \varphi_K$ – величины постоянные. Поэтому линия влияния Q_K может быть получена путем алгебраического суммирования балочной линии влияния $Q_K^{\text{бал}}$ и линии влияния H , умноженных соответственно на $\cos \varphi_K$ и $(-\sin \varphi_K)$.

Порядок построения л. в. Q_K способом наложения:

- 1) в одном масштабе строим л. в. $Q_K^{\text{бал}} \cos \varphi_K$ и л. в. $H \sin \varphi_K$;
- 2) находим их ординаты под сечением K и под шарниром C из подобия треугольников (рисунок 5.22);
- 3) совмещаем эти две линии влияния (по одну сторону оси – вверх), в соответствии с (5.15) суммируем их ординаты, определяя ординаты л. в. Q_K :

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{z_K}{l} \cos \varphi_K - \frac{l_2 z_K}{lf} \sin \varphi_K; & q_2 &= \frac{(l - z_K)}{l} \cos \varphi_K - \frac{l_2 z_K}{lf} \sin \varphi_K; \\ q_3 &= \frac{l_2}{l} \cos \varphi_K - \frac{l_1 l_2}{lf} \sin \varphi_K; \end{aligned} \quad (5.16)$$

- 4) полученные ординаты q_1 , q_2 и q_3 с учетом знака откладываются от горизонтальной базы (см. рисунок 5.22).

Линию влияния Q_K ограничивают: *левая прямая* – от опоры A до сечения K , *средняя прямая* – от сечения K до шарнира C , *правая прямая* – от шарнира C до опоры B .

Под сечением, где суммируемые линии влияния пересекаются, итоговая линия влияния имеет нулевую ординату – *нулевую точку* с абсциссой z_0^Q . Средняя прямая в ней пересекает ось.

5.6.5 Линия влияния поперечной силы: способ нулевой точки. Рассмотрим, как найти абсциссу z_0^Q нулевой точки и воспользоваться ею для построения линии влияния Q_K .

Пусть сила $\bar{F} = 1$ приложена к трехшарнирной системе на участке между сечением K и шарниром C . Правая часть не нагружена, поэтому реакция R_B проходит по прямой BC (рисунок 5.23).

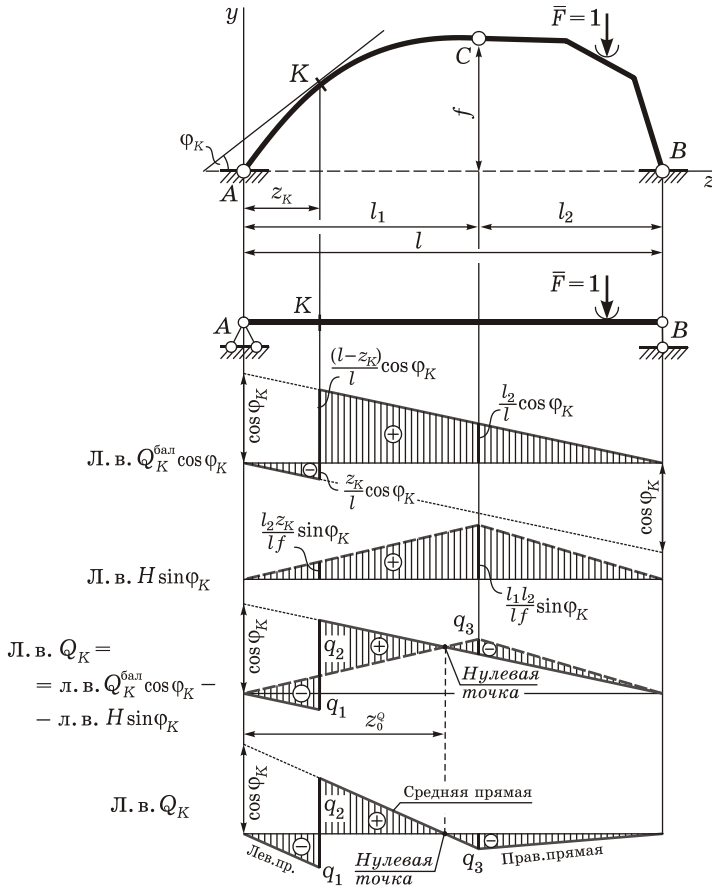


Рисунок 5.22

Если при этом реакция R_A направлена параллельно касательной к оси арки в сечении K, то поперечная сила в этом сечении обратится в нуль. Полученные прямые пересекаются в точке O_Q . Чтобы система находилась в равновесии, линия действия силы \bar{F} должна проходить через O_Q .

Найдем абсциссу нулевой точки z_0^Q . Для подобных треугольников BCC_1 и BO_QO_1 выполняется условие

$$\frac{l - z_0^Q}{O_Q O_1} = \frac{l_2}{f}.$$

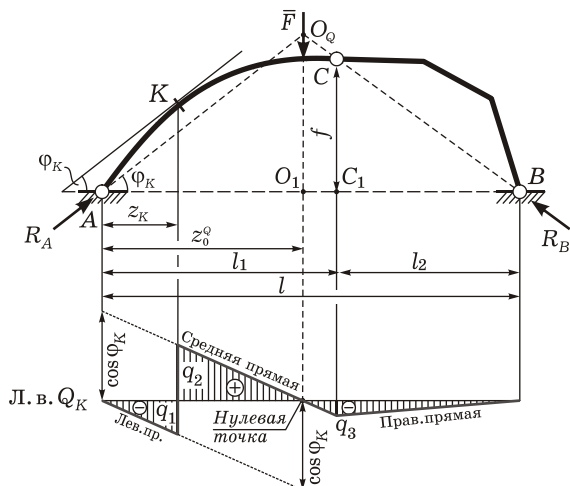


Рисунок 5.23

Также рассмотрим треугольник AO_QO_1 , у которого

$$\operatorname{tg} \varphi_K = O_QO_1 / z_0^Q.$$

Выразим из данной формулы неизвестную длину отрезка O_QO_1 и подставим ее в предыдущее условие. Найдем абсциссу z_0^Q :

$$z_0^Q = \frac{lf}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_K}. \quad (5.17)$$

Порядок построения л. в. Q_K способом нулевой точки:

- 1) находим z_0^Q по формуле (5.17) или графически (как абсциссу точки O_M пересечения прямой BC и прямой, проведенной из точки A параллельно касательной к оси арки в сечении K) и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;
- 2) под шарниром A откладываем ординату $\cos \varphi_K$; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;
- 3) обозначаем ординаты средней прямой: q_2 – под сечением K , q_3 – под шарниром C ;
- 4) из нуля под опорой A параллельно средней прямой проводим *левую прямую*, под сечением K обозначаем ординату q_1 ;
- 5) ординату q_3 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты q_1 , q_2 и q_3 из подобия треугольников:

$$q_1 = \frac{-z_K}{z_0^Q} \cos \varphi_K; \quad q_2 = \frac{z_0^Q - z_K}{z_0^Q} \cos \varphi_K; \quad q_3 = \frac{z_0^Q - l_1}{z_0^Q} \cos \varphi_K. \quad (5.18)$$

Из (5.18) легко получить соотношения (5.16), подставив выражение (5.17) для z_0^Q .

Заметим, что нулевая точка может быть *условной* (т. е. линия влияния не имеет нулевой ординаты в сечении с абсциссой z_0^Q).

Рассмотрим арку, изображенную на рисунке 5.24. Будем считать, что внешняя сила \bar{F} находится на участке $КС$. Чтобы поперечная сила в сечении K равнялась нулю и арка находилась в равновесии, реакции R_A и R_B должны иметь направление, указанное на рисунке 5.24, пересекаясь в точке O_Q . При этом сила \bar{F} должна проходить через точку O_Q , одновременно будучи приложенной к участку $КС$. Чтобы это условие соблюдалось, к данному участку необходимо прикрепить особую невесомую консоль, к которой и приложить силу.

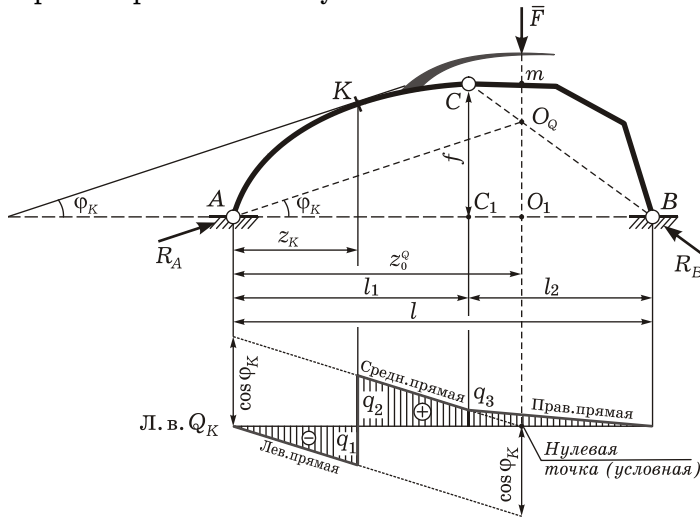


Рисунок 5.24

Средняя прямая л. в. Q_K , соответствующая движению груза \bar{F} по участку $КС$, пересекает ось под точкой O_Q , при этом ордината линии влияния здесь не нулевая. Следовательно, нулевая точка *условная*.

Если же силу \bar{F} приложить в точке t непосредственно к правой части арки, то направления опорных реакций изменятся и поперечная сила в сечении K уже не будет нулевой.

Заметим, что описанный выше порядок построения л. в. Q_K и формулы (5.18) для подсчета ее ординат одинаковы в случаях и реальной, и условной нулевой точки.

5.6.6 Линия влияния продольной силы: способ наложения. В соответствии с третьей из формул (5.3)

$$\text{л. в. } N_K = -(\text{л. в. } Q_K^{\text{бал}}) \sin \varphi_K - (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K, \quad (5.19)$$

где $Q_K^{\text{бал}}$ – поперечная сила в сечении K соответствующей балки; H – распор; φ_K – угол наклона касательной к оси трехшарнирной системы в данном сечении.

То есть линия влияния продольной силы в сечении K трехшарнирной системы N_K может быть получена путем алгебраического суммирования балочной линии влияния $Q_K^{\text{бал}}$ и линии влияния H , умноженных соответственно на $(-\sin \varphi_K)$ и $(-\cos \varphi_K)$.

Порядок построения л. в. N_K способом наложения:

- 1) в одном масштабе строим л. в. $Q_K^{\text{бал}} \sin \varphi_K$ и л. в. $H \cos \varphi_K$;
- 2) находим их ординаты под сечением K и под шарниром C из подобия треугольников (рисунок 5.25);
- 3) совмещаем эти две линии влияния на одной оси (*по разные стороны*), в соответствии с (5.19) суммируем их ординаты, определяя ординаты л. в. N_K :

$$n_1 = \frac{z_K}{l} \sin \varphi_K - \frac{l_2 z_K}{lf} \cos \varphi_K; \quad n_2 = \frac{z_K - l}{l} \sin \varphi_K - \frac{l_2 z_K}{lf} \cos \varphi_K;$$

$$n_3 = -\frac{l_2}{l} \sin \varphi_K - \frac{l_1 l_2}{lf} \cos \varphi_K; \quad (5.20)$$

- 4) полученные ординаты n_1 , n_2 и n_3 с учетом знака откладываем от горизонтальной базы (см. рисунок 5.25).

Линию влияния N_K ограничивают: *левая прямая* – от опоры A до сечения K , *средняя прямая* – от сечения K до шарнира C , *правая прямая* – от шарнира C до опоры B .

Если продлить до пересечения суммируемые линии влияния на участке KC (правую прямую линии влияния $Q_K^{\text{бал}} \sin \varphi_K$ и левую прямую линии влияния $H \cos \varphi_K$), получим *условную нулевую точку* с абсциссой z_0^N . В ней средняя прямая итоговой линии влияния N_K пересекает ось.

5.6.7 Линия влияния продольной силы: способ нулевой точки.

Рассмотрим, как найти абсциссу z_0^N нулевой точки и воспользоваться ею для построения линии влияния N_K .

Пусть вертикальная сила $\bar{F}=1$ приложена к трехшарнирной системе на участке между сечением K и шарниром C . Правая

часть арки не нагружена, поэтому опорная реакция R_B проходит по прямой BC (рисунок 5.26). Если при этом реакция R_A направлена перпендикулярно касательной к оси арки в сечении K , то продольная сила в этом сечении обратится в нуль. Полученные прямые пересекаются в точке O_N . Чтобы система находилась в равновесии, линия действия силы $\bar{F}=1$ должна проходить через точку O_N .

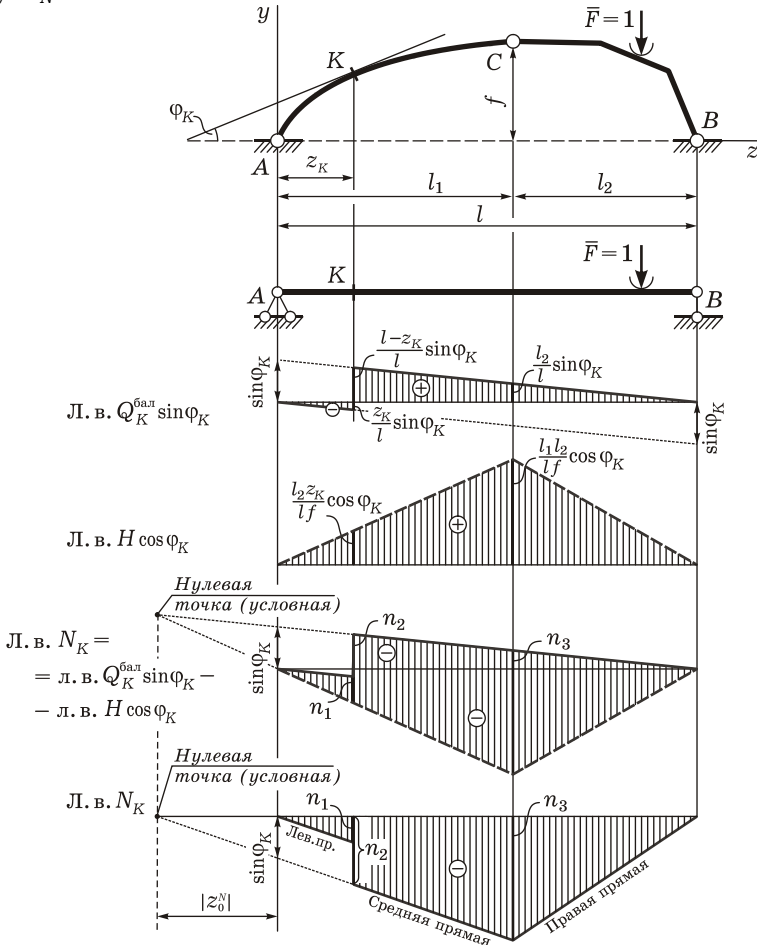


Рисунок 5.25

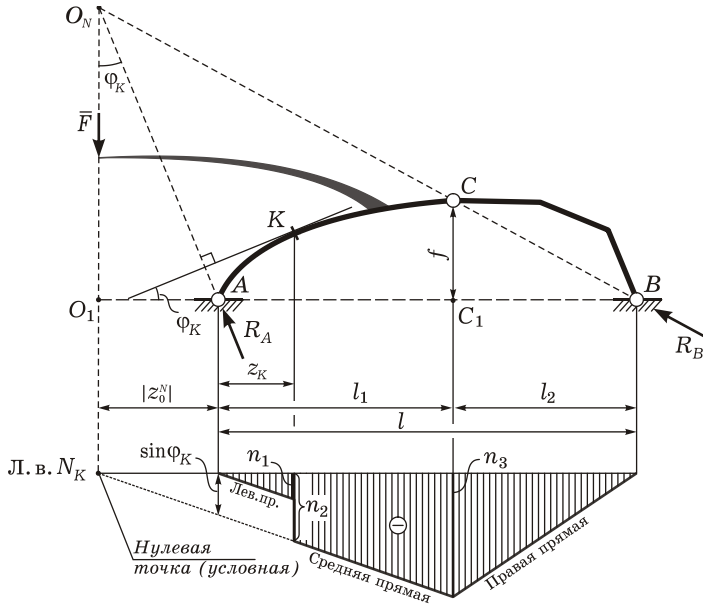


Рисунок 5.26

Найдем абсциссу нулевой точки z_0^N . Рассмотрим подобные треугольники BCC_1 и $BO_N O_1$, для которых

$$\frac{l + AO_1}{O_N O_1} = \frac{l_2}{f},$$

и треугольник $AO_N O_1$, для которого $\operatorname{tg} \varphi_K = AO_1 / O_N O_1$. Выразим отсюда длину отрезка $O_N O_1$ и подставим ее в составленную выше формулу. Далее найдем абсциссу z_0^N , учитывая, что $z_0^N = -AO_1$:

$$z_0^N = \frac{lf}{f - l_2 / \operatorname{tg} \varphi_K}. \quad (5.21)$$

Порядок построения л. в. N_K способом нулевой точки:

- 1) находим z_0^N по формуле (5.21) или графически (как абсциссу точки O_N пересечения прямой BC и прямой, проведенной из точки A перпендикулярно касательной к оси арки в сечении K) и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;
- 2) под шарниром A откладываем ординату $-\sin \varphi_K$; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;

- 3) обозначаем ординаты средней прямой: n_2 – под сечением K , n_3 – под шарниром C ;
- 4) из нуля под опорой A параллельно средней прямой проводим *левую прямую*, под сечением K обозначаем ординату n_1 ;
- 5) ординату n_3 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты n_1 , n_2 и n_3 из подобия треугольников:

$$n_1 = \frac{z_K}{z_0^N} \sin \varphi_K; \quad n_2 = \frac{z_K - z_0^N}{z_0^N} \sin \varphi_K; \quad n_3 = \frac{l_1 - z_0^N}{z_0^N} \sin \varphi_K. \quad (5.22)$$

Заметим, что из (5.22) легко получить соотношения (5.20), подставив выражение (5.21) для абсциссы нулевой точки z_0^N .

5.6.8 Учет узловой передачи нагрузки на арку. На мостовые арки нагрузка передается через систему вспомогательных элементов, образующих *надарочное строение* (см. рисунок 5.6).

Во многих случаях надарочное строение можно считать статически определимым и полагать, что оно образует *узловую передачу нагрузки*. При этом для получения линии влияния какого-либо фактора в сечении арки как основной несущей конструкции необходимо (см. п. 2.9.3):

- построить линию влияния искомого фактора без учета узловой передачи нагрузки (при движении груза $\bar{F} = 1$ непосредственно по основной конструкции);
- выделить ординаты построенной линии влияния под узлами;
- узловые ординаты соединить передаточными прямыми.

Для построения линий влияния без учета узловой передачи нагрузки используют приемы, рассмотренные в п. 5.6.1–5.6.6.

5.7 Определение напряжений в арках

Прочность материала арок, как правило, проверяется по нормальным напряжениям в крайних точках поперечных сечений, которые зависят от изгибающих моментов M и продольных сил N . Влияние поперечной силы Q чаще всего не учитывается, так как касательные напряжения сравнительно невелики.

Будем считать, что внутренние усилия M , Q , N действуют в одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения, а сечение симметрично относительно этой плоскости.

5.7.1 Определение напряжений в арках без учета кривизны. Применяемые в строительстве арки и своды в большинстве случаев пологие. Их допускается рассчитывать по приближенным формулам, т. е. считать, что напряженное состояние в сечении арки является таким же, как и в прямом, а не кривом стержне.

Нормальные напряжения в рассматриваемом сечении арки при наличии продольной силы N и изгибающего момента M (при *внецентренном сжатии*) определяются следующим образом:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{J} y,$$

где A – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения относительно главной оси инерции, перпендикулярной плоскости изгиба (как правило, оси x); y – координата точки, в которой находятся напряжения.

Нормальные напряжения в крайних точках поперечного сечения 1 и 2 (рисунок 5.27) можно вычислить по формулам

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_2}. \quad (5.23)$$

Здесь W_1, W_2 – моменты сопротивления для точек 1 и 2 относительно главной оси инерции сечения, перпендикулярной плоскости изгиба (оси x):

$$W_1 = J/h_1; \quad W_2 = J/h_2,$$

где h_1, h_2 – расстояния от центра тяжести поперечного сечения до верхних и нижних крайних волокон.

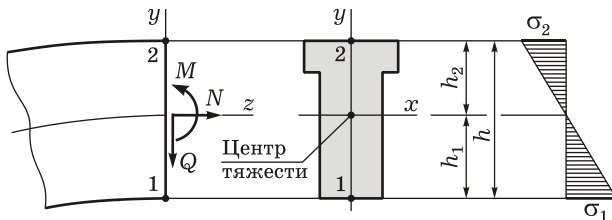


Рисунок 5.27

Для сечений, симметричных относительно двух главных осей x и y ,

$$h_1 = h_2 = h/2; \quad W_1 = W_2 = 2J/h,$$

где h – высота поперечного сечения.

Из формул (5.23) получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}, \quad (5.24)$$

где W – момент сопротивления площади поперечного сечения относительно оси x .

Для арок *прямоугольного сечения* более удобной для расчета является преобразованная формула (5.24). Перенесем внутренние усилия в сечении M , Q , N из центра тяжести сечения в точку, удаленную от него на расстояние $c = M/N$ (рисунок 5.28, а). Так мы избавимся от изгибающего момента M .

С учетом того, что площадь прямоугольного сечения $A = bh$, а момент сопротивления $W = bh^2/6 = Ah/6$, из (5.24) получим

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{Nc}{W} = \frac{N}{A} \left(1 \pm \frac{6c}{h} \right).$$

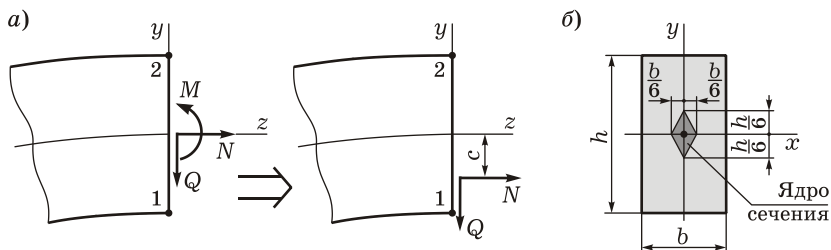


Рисунок 5.28

Как известно из сопротивления материалов [16], для сечения прямоугольной формы ядро сечения представляет собой ромб с размерами $h/3$ и $b/3$ (рисунок 5.28, б). Поэтому если $|c| > h/6$ (точка приложения внутренних сил Q , N лежит за пределами ядра сечения), то в арке будут возникать как сжимающие, так и растягивающие напряжения. Если же $|c| \leq h/6$ (точка приложения внутренних сил находится в ядре сечения), то будут возникать только сжимающие напряжения, что особенно выгодно для арок из хрупких материалов.

5.7.2 Определение напряжений с помощью ядровых моментов. Нормальные напряжения в крайних точках сечения арки можно найти, используя так называемые ядровые моменты.

Перенесем внутренние усилия M , Q , N из центра тяжести сечения в точку, удаленную от него на расстояние $c = M/N$ (рисунок 5.29). Так мы избавимся от изгибающего момента M . Далее перенесем усилия N , Q в точку k_1 , лежащую на границе ядра сечения. Получим новый момент, называемый *ядровым моментом* относительно точки k_1 ядра сечения,

$$M_{\text{ядр}}^{(1)} = N(c + c_1).$$

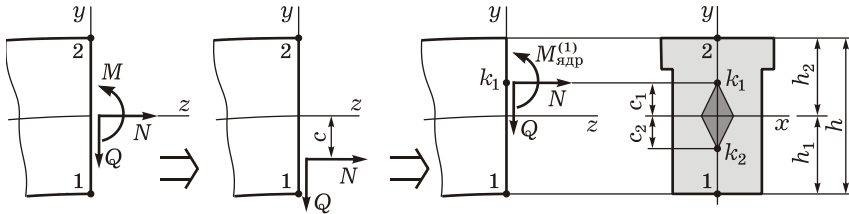


Рисунок 5.29

Преобразуем первую из формул (5.23). Воспользуемся для этого основным свойством ядра сечения: если продольная сила N приложена на границе ядра сечения (в точке k_1), то нормальные напряжения от этой силы на границе самого сечения (в точке 1) нулевые. Следовательно, первое слагаемое в формуле для σ_1 равно нулю. С учетом этого

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_1} = 0 + \frac{M_{\text{ядр}}^{(1)}}{W_1} = \frac{M_{\text{ядр}}^{(1)}}{W_1}. \quad (5.25)$$

Аналогично выразим нормальные напряжения в точке 2:

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2} = \frac{M_{\text{ядр}}^{(2)}}{W_2}, \quad (5.26)$$

где $M_{\text{ядр}}^{(2)} = N(c - c_2)$ – ядровый момент относительно точки k_2 .

Ядровые моменты связаны с изгибающим моментом $M = Nc$ относительно главной центральной оси x поперечного сечения следующими соотношениями:

$$M_{\text{ядр}}^{(1)} = M + Nc_1; \quad M_{\text{ядр}}^{(2)} = M - Nc_2.$$

Заметим, что формулы (5.25), (5.26) являются одночленными. Следовательно, они позволяют более просто решать задачи, связанные с отысканием наибольших напряжений в сечениях арки при подвижной нагрузке.

5.7.3 Определение напряжений в арках с учетом кривизны.

Арка представляет собой кривой стержень, поэтому при точном ее расчете надо учитывать кривизну. Пусть поперечное сечение симметрично относительно плоскости кривизны.

Будем использовать следующие обозначения (рисунок 5.30):

ρ_0, ρ – радиусы кривизны *центральной оси* (проходящей через центры тяжести поперечных сечений) соответственно в недеформированном и деформированном состояниях;

r_0, r – радиусы кривизны *нейтральной оси* (где $\sigma = 0$) соответственно в недеформированном и деформированном состояниях;

e – эксцентриситет, т. е. расстояние от нейтральной линии до центра тяжести сечения ($e = \rho_0 - r_0$);

y – ордината точки сечения, в которой будут определяться напряжения, отсчитываемая от нейтральной оси;

h – высота поперечного сечения.

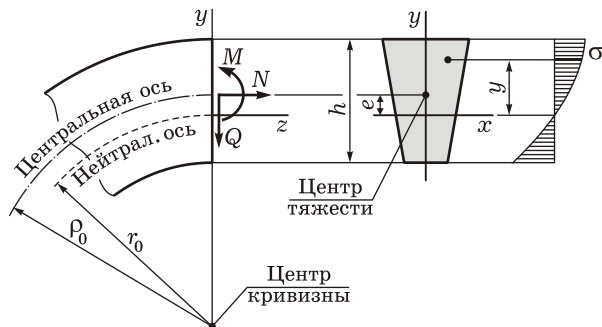


Рисунок 5.30

Приведем формулы [16], позволяющие рассчитать нормальные напряжения в сечениях стержня большой кривизны, для которых $h/\rho_0 > 0,2$:

- при чистом изгибе (только изгибающие моменты $M \neq 0$):

$$\sigma = \frac{M}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}; \quad (5.27)$$

- при внецентренном растяжении-сжатии ($M \neq 0, N \neq 0$):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ae} \frac{y}{r_0 + y}. \quad (5.28)$$

Из соотношений (5.27), (5.28) следует, что нормальные напряжения меняются по высоте сечения нелинейно.

Радиус кривизны нейтральной оси r_0 зависит от формы и размеров поперечного сечения. Его значения для часто встречающихся форм сечений, полученные в случае чистого изгиба стержня большой кривизны, обычно приведены в справочных таблицах. Например, для *прямоугольного* сечения высотой h

$$r_0 = \frac{h}{\ln[(\rho_0 + 0,5h)/(\rho_0 - 0,5h)]},$$

для круглого сечения диаметром d

$$r_0 = \rho_0 - 0,5 \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - d^2 / 4} \right).$$

Расчет нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня большой кривизны производится в следующем порядке:

- определяются продольная сила N в сечении и изгибающий момент M относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения;
- находится радиус кривизны нейтральной оси r_0 при $N = 0$;
- по формулам (5.27) или (5.28) вычисляются нормальные напряжения в различных точках поперечного сечения;
- устанавливается знак напряжений в зависимости от знака продольной силы и направления изгибающего момента.

5.8 Расчетное положение подвижной нагрузки на арке

Как было указано выше, прочность арок проверяется по нормальным напряжениям в крайних точках поперечных сечений, зависящих от изгибающих моментов M и продольных сил N . Будем рассматривать пологие строительные арки, напряжения в которых допускается определять без учета кривизны.

Возникает вопрос: как загрузить арку временной нагрузкой, чтобы получить наибольшие значения напряжений?

5.8.1 Раздельное использование линий влияния M и N . На оси арки выбирается ряд характерных сечений, для каждого из которых строятся линии влияния изгибающего момента M и продольной силы N . Далее исследуются несколько положений нагрузки на арке. Порядок расчета следующий:

- определяется опасное положение нагрузки по положительной части л. в. M : сосредоточенные силы располагаются над наибольшими ординатами, распределенные нагрузки – над положительным участком (см. подразд. 2.10); при этом вычисляются значение момента и соответствующее ему значение продольной силы;
- аналогично определяется опасное положение нагрузки по отрицательной части л. в. M ; вычисляются значение момента и соответствующее значение продольной силы;
- находится опасное положение нагрузки по л. в. N ; вычисляются значение продольной силы и соответствующее ему значение момента;
- при каждом из указанных трех положений определяются нормальные напряжения в крайних точках сечения и из них

выбираются численно наибольшие для каждого знака; соответствующее положение нагрузки и будет расчетным для данного сечения.

Такие расчеты выполняются для каждого из характерных сечений арки.

Заметим, что на значения напряжений наибольшее влияние оказывают изгибающие моменты, поэтому третье положение часто не рассматривается.

5.8.2 Использование линий влияния краевых напряжений. Формулы (5.23), (5.24) показывают, что нормальные напряжения линейно зависят от N и M , которые при расчете по недеформированной схеме линейно зависят от нагрузки. Таким образом, для напряжений σ_1 и σ_2 (см. рисунок 5.27) в крайних точках сечения арки справедлив принцип суперпозиции. Для σ_1 и σ_2 можно построить линии влияния и загружать их как линии влияния внутренних усилий. Это позволяет для каждого напряжения σ_1 , σ_2 найти соответствующее расчетное (невыгодное) нагружение.

Линии влияния σ_1 и σ_2 удобно строить методом наложения с учетом зависимостей, следующих из (5.23):

$$\text{л. в. } \sigma_1 = (\text{л. в. } N)/A + (\text{л. в. } M)/W_1;$$

$$\text{л. в. } \sigma_2 = (\text{л. в. } N)/A - (\text{л. в. } M)/W_2,$$

где A – площадь сечения; W_1 , W_2 – моменты сопротивления для точек 1 и 2 относительно главной оси инерции поперечного сечения, перпендикулярной плоскости изгиба.

Вторые слагаемые этих формул, как правило, во много раз превосходят первые и по форме л. в. σ_1 и σ_2 близки к л. в. M . Поэтому при приближенных расчетах арок расчетное положение нагрузки для каждого из характерных сечений допускается искать по линии влияния изгибающего момента.

5.8.3 Использование линий влияния ядровых моментов. В п. 5.7.2 были получены одночленные формулы (5.25), (5.26) для расчета краевых напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{M_{\text{ядр}}^{(1)}}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{M_{\text{ядр}}^{(2)}}{W_2},$$

где $M_{\text{ядр}}^{(1)}$, $M_{\text{ядр}}^{(2)}$ – ядровые моменты относительно точек k_1 и k_2 ядра сечения; W_1 и W_2 – моменты сопротивления.

Для заданного сечения W_1 и W_2 есть величины постоянные. Поэтому вместо линий влияния краевых напряжений σ_1 и σ_2 можно построить и исследовать линии влияния ядровых моментов $M_{\text{ядр}}^{(1)}$ и $M_{\text{ядр}}^{(2)}$.

Рассмотрим трехшарнирную арку (рисунок 5.31), в которой выберем некоторое характерное сечение K . Методом нулевой точки построим линии влияния изгибающего момента M_K и ядровых моментов $M_{\text{ядр}}^{(1)}$, $M_{\text{ядр}}^{(2)}$ в этом сечении.

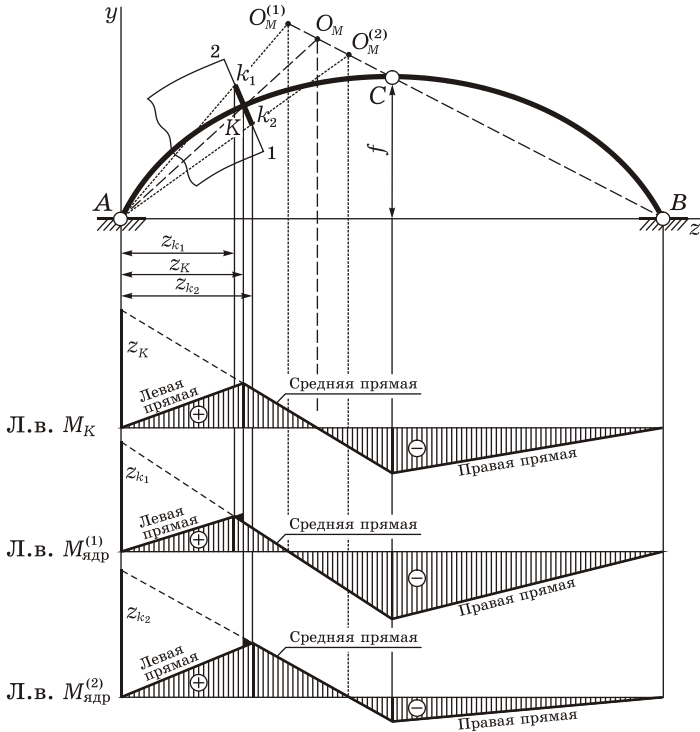


Рисунок 5.31

Линии влияния ядровых моментов $M_{\text{ядр}}^{(1)}$, $M_{\text{ядр}}^{(2)}$ строятся по тем же правилам, что и линия влияния центрального момента M_K , с той только разницей, что левая и средняя прямые теперь будут пересекаться под соответствующей ядровой точкой. Их пригодные части расположены до вертикали, проходящей через центральную точку сечения K .

Под центром тяжести сечения K линии влияния ядровых моментов имеют небольшие вертикальные скачки (уступы), образующие маленькие треугольники (на рисунке они залиты черным). Наличие скачков объясняется тем, что в этом месте линия влияния продольной силы N_K имеет разрыв.

Порядок нахождения расчетного положения нагрузки с помощью ядровых моментов следующий:

- нагрузка устанавливается в опасное положение по линии влияния $M_{\text{ядр}}^{(1)}$, определяются $+M_{\text{ядр}}^{(1)\text{max}}$ и $-M_{\text{ядр}}^{(1)\text{max}}$ и вычисляются соответствующие значения напряжения σ_1 ;
- нагрузка устанавливается в опасное положение по линии влияния $M_{\text{ядр}}^{(2)}$, определяются $+M_{\text{ядр}}^{(2)\text{max}}$ и $-M_{\text{ядр}}^{(2)\text{max}}$ и вычисляются соответствующие значения напряжения σ_2 ;
- выбираются численно наибольшие напряжения; соответствующее положение нагрузки и будет расчетным.

Заметим, что при решении практических задач площадями добавочных треугольников из-за их сравнительной малости обычно пренебрегают. Из-за сравнительной малости размеров сечения и ядра сечения линии влияния ядровых моментов $M_{\text{ядр}}^{(1)}$, $M_{\text{ядр}}^{(2)}$, как и линии влияния краевых напряжений σ_1 и σ_2 , по форме близки к л. в. M_K (см. рисунок 5.30). Поэтому часто при приближенных и учебных расчетах арок расчетное положение нагрузки для каждого из характерных сечений ищут по линии влияния изгибающего момента.

5.9 Примеры расчета трехшарнирных систем

Пример 5.1 Построение эпюр внутренних усилий от неподвижной вертикальной нагрузки в трехшарнирной арке.

Для арки (рисунок 5.32, а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (M , Q , N) и проверить прочность. Длина пролета $l = 40$ м, стрела подъема $f = 8$ м, очертание оси арки – дуга окружности, нагрузки: $q = 6$ кН/м, $P = 75$ кН; размеры поперечного сечения – высота $h = 0,75$ м, ширина $b = 0,25$ м; материал – сона с расчетным сопротивлением 9 МПа.

Геометрические параметры оси арки. Наметим на оси арки расчетные сечения $k = 0, \dots, 8$ (см. рисунок 5.32, а). Положение k -го сечения характеризуется тремя геометрическими параметрами: абсциссой z_k , ординатой y_k , углом φ_k между касательной к оси арки и осью z . Определяем эти параметры, а также $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ по формулам:

$$z_k = k \frac{l}{8}; \quad y_k = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - z_k\right)^2} - R + f; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

$$\sin \varphi_k = \frac{l - 2z_k}{2R}; \quad \cos \varphi_k = \frac{y_k + R - f}{R}.$$

Расчет геометрических параметров удобно выполнять с помощью компьютера (например, с помощью MathCad, Excel и т. п.). Результаты расчета приводим в таблице 5.1.

Усилия в соответствующей балке. Вначале рассматриваем соответствующую балку – простую статически определимую балку, имеющую тот же пролет и схему нагружения (рисунок 5.32, б). Определяем опорные реакции $V_A^{бал}$, $V_B^{бал}$ из уравнений моментов:

$$\sum M_B = P \cdot \frac{3l}{4} + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - V_A^{бал} l = 0; \quad \sum M_A = -P \cdot \frac{l}{4} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3l}{4} + V_B^{бал} l = 0;$$

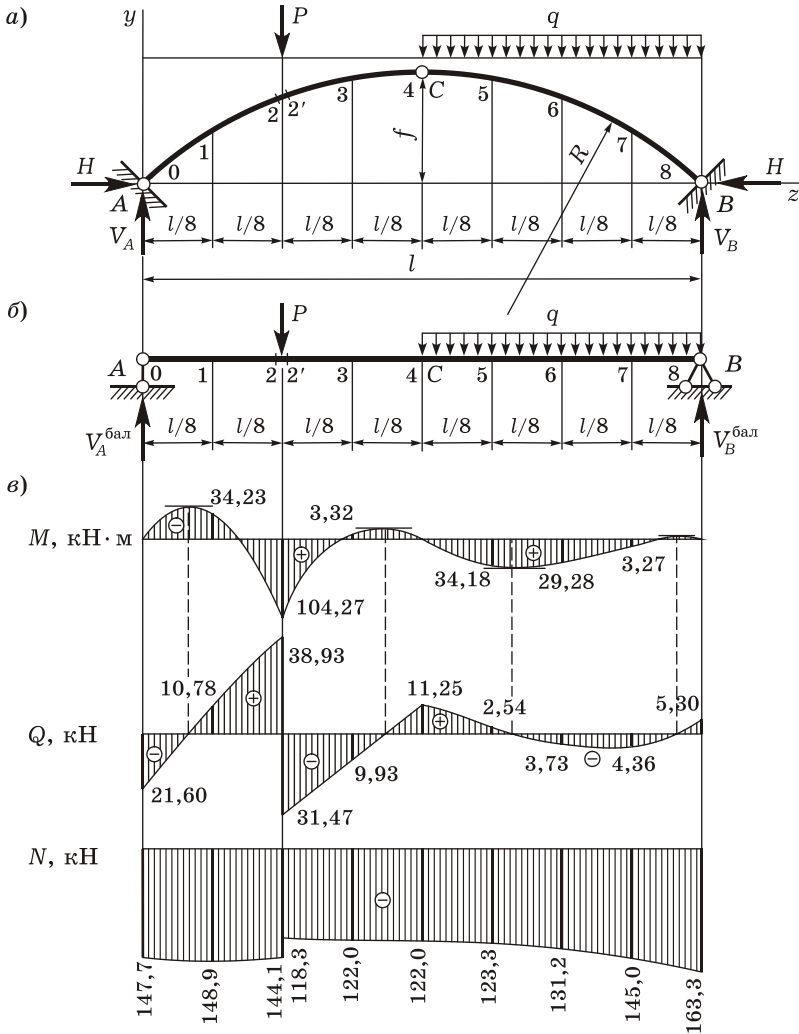


Рисунок 5.32

Таблица 5.1 – Расчет геометрических параметров и внутренних усилий в арке

Номер сечения k	z_k , М	y_k , М	φ_k	$\sin \varphi_k$	$\cos \varphi_k$	$M_k^{\text{бал}}$, кН · М	$Q_k^{\text{бал}}$, кН	$M_k = M_k^{\text{бал}} - H y_k$, кН · М	$Q_k = Q_k^{\text{бал}} \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k$, кН	$N_k = -(Q_k^{\text{бал}} \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k)$, кН
0 (А)	0	0	43,60°	0,690	0,724	0	86,25	0	-21,60	-147,74
1	5	3,819	31,15°	0,517	0,856	431,25	86,25	-34,23	10,78	-148,92
2, 2'	10	6,221	20,17°	0,345	0,939	862,50	$\frac{86,25}{11,25}$	104,28	$\frac{38,93}{-31,47}$	$\frac{-144,14}{-118,28}$
3	15	7,566	9,93°	0,172	0,985	918,75	11,25	-3,32	-9,93	-121,99
4 (С)	20	8,000	0,00°	0	1	975,00	11,25	0	11,25	-121,88
5	25	7,566	-9,93°	-0,172	0,985	956,25	-18,75	34,18	2,54	-123,28
6	30	6,221	-20,17°	-0,345	0,939	787,50	-48,75	29,28	-3,73	-131,21
7	35	3,819	-31,15°	-0,517	0,856	468,75	-78,75	3,37	-4,36	-145,04
8 (В)	40	0	-43,60°	-0,690	0,724	0	-108,75	0	5,30	-163,25

$$\text{отсюда } V_A^{\text{бал}} = \frac{3}{4}P + \frac{ql}{8} = \frac{3}{4} \cdot 75 + \frac{6 \cdot 40}{8} = 86,25 \text{ кН};$$

$$V_B^{\text{бал}} = \frac{P}{4} + \frac{3ql}{8} = \frac{75}{4} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 40}{8} = 108,75 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = V_A^{\text{бал}} + V_B^{\text{бал}} - ql/2 - P = 86,25 + 108,75 - 6 \cdot 40/2 - 75 = 0.$$

Намечаем на оси балки сечения $k = 0, \dots, 8$. Дополнительно обозначаем сечение 2' справа от силы P . Вычислим внутренние поперечные силы $Q_k^{\text{бал}}$ и изгибающие моменты $M_k^{\text{бал}}$ в расчетных сечениях:

$$Q_0^{\text{бал}} = Q_1^{\text{бал}} = Q_2^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} = 86,25 \text{ кН};$$

$$Q_2^{\text{бал}} = Q_3^{\text{бал}} = Q_4^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} - P = 86,25 - 75 = 11,25 \text{ кН};$$

$$Q_5^{\text{бал}} = q \frac{3l}{8} - V_B^{\text{бал}} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 40}{8} - 108,75 = -18,75 \text{ кН};$$

$$Q_6^{\text{бал}} = q \frac{l}{4} - V_B^{\text{бал}} = 6 \cdot \frac{40}{4} - 108,75 = -48,75 \text{ кН};$$

$$Q_7^{\text{бал}} = q \frac{l}{8} - V_B^{\text{бал}} = 6 \cdot \frac{40}{8} - 108,75 = -78,75 \text{ кН};$$

$$Q_8^{\text{бал}} = -V_B^{\text{бал}} = -108,75 \text{ кН};$$

$$M_0^{\text{бал}} = 0; \quad M_1^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} \frac{l}{8} = 86,25 \cdot \frac{40}{8} = 431,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} \frac{l}{4} = 86,25 \cdot \frac{40}{4} = 862,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} \frac{3l}{8} - P \frac{l}{8} = 86,25 \cdot \frac{3 \cdot 40}{8} - 75 \cdot \frac{40}{8} = 918,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} \frac{l}{2} - P \frac{l}{4} = 86,25 \cdot \frac{40}{2} - 75 \cdot \frac{40}{4} = 975 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} \frac{3l}{8} - q \frac{3l}{8} \frac{3l}{16} = 108,75 \cdot \frac{3 \cdot 40}{8} - 6 \cdot \frac{3 \cdot 40}{8} \cdot \frac{3 \cdot 40}{16} = 956,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} \frac{l}{4} - q \frac{l}{4} \frac{l}{8} = 108,75 \cdot \frac{40}{4} - 6 \cdot \frac{40}{4} \cdot \frac{40}{8} = 787,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} \frac{l}{8} - q \frac{l}{8} \frac{l}{16} = 108,75 \cdot \frac{40}{8} - 6 \cdot \frac{40}{8} \cdot \frac{40}{16} = 468,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8^{\text{бал}} = 0.$$

Усилия в арке. В опорах арки возникают наклонные опорные реакции, которые можно разложить на четыре составляющие (см. рисунок 5.32, а): вертикальные V_A и V_B , горизонтальные (распор) H .

Вертикальные составляющие в соответствии с (5.1) равны опорным реакциям соответствующей балки

$$V_A = V_A^{\text{бал}} = 86,25 \text{ кН}; \quad V_B = V_B^{\text{бал}} = 108,75 \text{ кН}.$$

Распор определим по формуле (5.2)

$$H = \frac{M_C^{\text{бал}}}{f} = \frac{975}{8} = 121,88 \text{ кН},$$

где $M_C^{\text{бал}}$ – изгибающий момент в сечении балки под шарниром C арки.

Внутренние усилия в арке. Усилия в характерных сечениях арки $k = 0, \dots, 8$ определим по формулам (5.3):

$$M_k = M_k^{\text{бал}} - Hy_k; \quad Q_k = Q_k^{\text{бал}} \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k; \quad N_k = -(Q_k^{\text{бал}} \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k).$$

Расчет внутренних усилий также удобно выполнять с помощью компьютера. Результаты расчета приведены в таблице 5.1.

По полученным данным строим эпюры M , Q , N (рисунок 5.32, в). Для удобства ординаты откладываем не от оси арки, а от горизонтальной базы. Напомним, что эпюра M строится на растянутых волокнах, т. е. отрицательные моменты откладываются сверху, положительные – снизу.

Заметим, что под сечением, в котором приложена сосредоточенная внешняя сила P , эпюры Q , N имеют скачок, а M – излом. Эпюра Q пересекает ось в четырех точках, следовательно, здесь эпюра M имеет экстремумы (на основании дифференциальной зависимости (5.6) между Q и M).

Напряжения в опасном сечении. Опасным является сечение 2, так как в нем изгибающий момент наибольший: $M_2 = 104,28 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (растянуты нижние волокна). Продольная сила в этом сечении $N_2 = -144,14 \text{ кН}$, угол наклона касательной $\varphi_2 = 20,2^\circ$ (см. таблицу 5.1).

Вводим локальную систему координат x', y', z' (рисунок 5.33). Находим площадь поперечного сечения A и момент сопротивления относительно главной центральной оси x' , перпендикулярной плоскости изгиба $W_{x'}$:

$$A = bh = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875 \text{ м}^2;$$

$$W_{x'} = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,25 \cdot 0,75^2}{6} = 23438 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

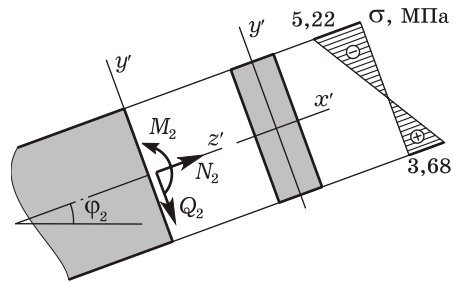


Рисунок 5.33

Определяем наибольшие и наименьшие нормальные напряжения в крайних верхних и нижних точках сечения:

$$\sigma_{\min} = \frac{N_2}{A} - \frac{M_2}{W_{x'}} = \frac{-14414 \cdot 10^3}{0,1875} - \frac{10428 \cdot 10^3}{23438 \cdot 10^{-6}} = -5,22 \cdot 10^6 \text{ Па} = -5,22 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A} + \frac{M_2}{W_{x'}} = \frac{-14414 \cdot 10^3}{0,1875} + \frac{10428 \cdot 10^3}{23438 \cdot 10^{-6}} = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,68 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении (см. рисунок 5.32). Проверяем выполнение условия прочности

$$\max(|\sigma_{\min}|, \sigma_{\max}) = |\sigma_{\min}| = 5,22 \text{ (МПа)} < 9 \text{ (МПа)}.$$

Условие прочности выполняется, следовательно, сечение арки достаточно.

Пример 5.2 Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий; определение усилий от постоянной нагрузки по линиям влияния.

Для арки, рассмотренной в предыдущем примере, требуется: построить линии влияния распора и внутренних усилий в сечении 1; определить эти усилия от заданной неподвижной нагрузки – силы $P = 75 \text{ кН}$ и равномерно распределенной нагрузки $q = 6 \text{ кН/м}$ (см. рисунок 5.32).

Линия влияния распора. Предполагаем, что по арке движется груз $\bar{F} = 1$, направленный вертикально вниз (рисунок 5.34). В качестве вспомогательной построим линию влияния балочного момента в сечении С. Под правой опорой откладываем ординату $l_2 = l/2$, соединяем с (0) под левой опорой – получаем левую прямую. Под левой опорой откладываем ординату $l_1 = l/2$, соединяем с (0) под правой опорой – получаем правую прямую. Их пересечение дает линию влияния $M_C^{\text{бал}}$.

На основании зависимости $H = M_C^{\text{бал}} / f$ делим все ординаты л. в. $M_C^{\text{бал}}$ на f и получаем л. в. H (см. рисунок 5.34). Ордината под шарниром С $l/(4f) = 40/(4 \cdot 8) = 1,25$.

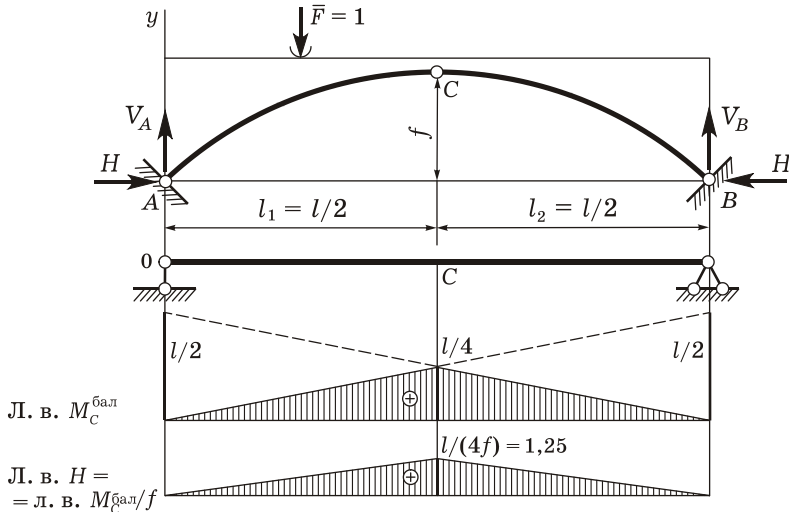


Рисунок 5.34

Геометрические параметры сечения 1. Заданное сечение арки имеет координаты $z_1 = 5$ м, $y_1 = 3,819$ м и угол наклона касательной $\varphi_1 = 31,15^\circ$ ($\sin \varphi_1 = 0,517$; $\cos \varphi_1 = 0,856$; $\text{tg} \varphi_1 = 0,604$).

Линии влияния внутренних усилий построим методом нулевой точки.

Линия влияния изгибающего момента M_1 . Найдем абсциссу нулевой точки по формуле (5.13), учитывая, что $l_2 = l/2 = 20$ м:

$$z_0^M = \frac{lfz_1}{fz_1 + l_2y_1} = \frac{40 \cdot 8 \cdot 5}{8 \cdot 5 + 20 \cdot 3,819} = 13,75 \text{ м.}$$

Положение нулевой точки можно найти графически. Проведем прямую через шарнир А и сечение 1, а также прямую через шарниры В и С. Абсцисса точки пересечения O_M полученных прямых будет равна z_0^M (рисунок 5.35).

Отметим нулевую точку на линии влияния. Под шарниром А отложим ординату z_1 , через полученную точку и нулевую точку проведем среднюю прямую (справедливую между сечением 1 и шарниром С). Далее ординату средней прямой под сечением 1 соединим с нулем под опорой А – получим левую прямую. Ординату средней прямой под шарниром С соединим с нулем под опорой В – получим правую прямую (см. рисунок 5.35).

Характерные ординаты найдем по формулам (5.14):

$$\text{под сечением 1: } m_1 = \frac{(z_0^M - z_1)z_1}{z_0^M} = \frac{(13,75 - 5) \cdot 5}{13,75} = 3,18 \text{ м;}$$

$$\text{под шарниром С: } m_2 = \frac{(z_0^M - l_1)z_1}{z_0^M} = \frac{(13,75 - 20) \cdot 5}{13,75} = -2,27 \text{ м.}$$

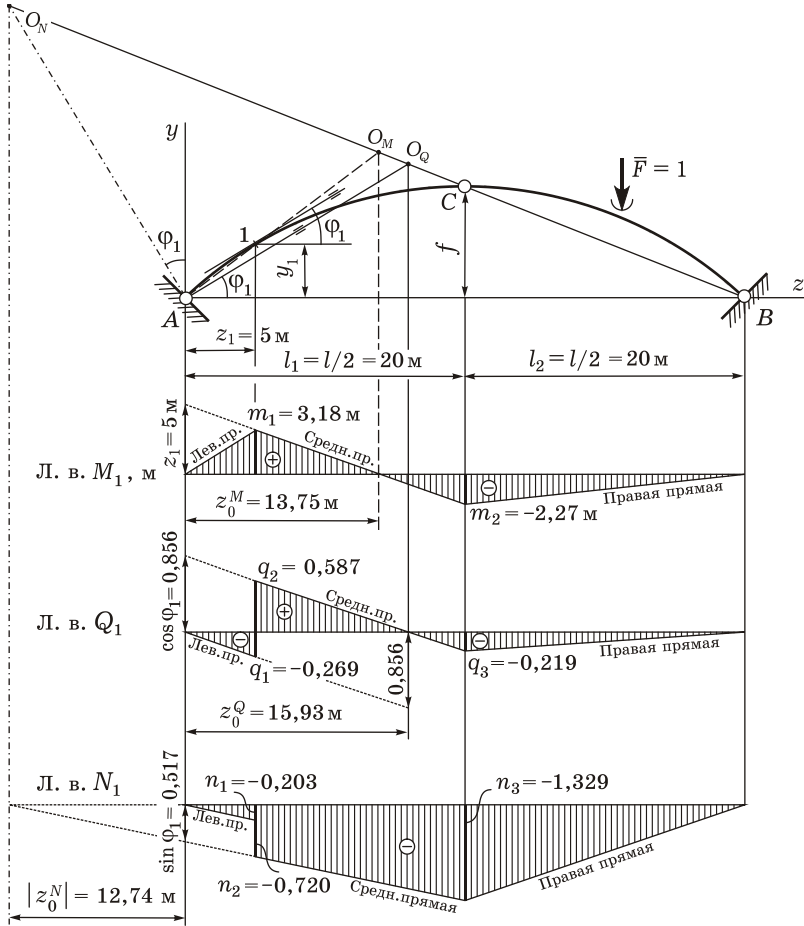


Рисунок 5.35

Линия влияния поперечной силы Q_1 . Найдем абсциссу нулевой точки по формуле (5.17):

$$z_0^Q = \frac{lf}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{40 \cdot 8}{8 + 20 \cdot 0,604} = 15,93 \text{ м.}$$

Положение нулевой точки можно найти графически. Проведем касательную к оси арки в сечении 1. Параллельно ей проведем прямую через шарнир А до пересечения с прямой ВС. Абсцисса точки пересечения O_Q полученных прямых будет равна z_0^Q (см. рисунок 5.35).

Отметим нулевую точку на линии влияния. Под шарниром A отложим ординату $\cos \varphi_1$, через полученную точку и нулевую точку проведем среднюю прямую (справедливую между сечением 1 и шарниром C). Параллельно средней прямой через шарнир A проведем левую прямую (справедливую между опорой A и сечением 1). Ординату средней прямой под шарниром C соединим с нулем под опорой B – получим правую прямую.

Характерные ординаты найдем по формулам (5.18):

$$\text{под сечением 1, слева: } q_1 = \frac{-z_1 \cos \varphi_1}{z_0^Q} = \frac{-5 \cdot 0,856}{15,93} = -0,269;$$

$$\text{справа: } q_2 = \frac{(z_0^Q - z_1) \cos \varphi_1}{z_0^Q} = \frac{(15,93 - 5) \cdot 0,856}{15,93} = 0,587;$$

$$\text{под шарниром } C: q_3 = \frac{(z_0^Q - l_1) \cos \varphi_1}{z_0^Q} = \frac{(15,93 - 20) \cdot 0,856}{15,93} = -0,219.$$

Проверка: под сечением 1 должен быть «скачок» на $\cos \varphi_1$. Так как ординаты с разных сторон оси, складываем их модули:

$$|q_1| + |q_2| = 0,269 + 0,587 = 0,856 = \cos \varphi_1.$$

Проверка выполняется.

Линия влияния продольной силы N_1 . Найдем положение нулевой точки по формуле (5.21):

$$z_0^N = \frac{l f}{f - l_2 / \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{40 \cdot 8}{8 - 20 / 0,604} = -12,74 \text{ м.}$$

Положение нулевой точки можно найти графически. Проведем касательную к оси арки в сечении 1. Перпендикулярно ей проведем прямую через шарнир A до пересечения с прямой BC . Абсцисса точки пересечения O_N этих прямых будет равна z_0^N .

Отметим нулевую точку на линии влияния. Под шарниром A отложим ординату $(-\sin \varphi_1)$, через полученную точку и нулевую точку проведем среднюю прямую (справедливую между сечением 1 и шарниром C). Параллельно средней прямой через шарнир A проведем левую прямую (справедливую между опорой A и сечением 1); ординату средней прямой под шарниром C соединим с нулем под опорой B – получим правую прямую (см. рисунок 5.35).

Характерные ординаты ищем по формулам (5.22):

$$\text{под сечением 1, слева: } n_1 = \frac{z_1 \sin \varphi_1}{z_0^N} = \frac{5 \cdot 0,517}{-12,74} = -0,203;$$

$$\text{справа: } n_2 = \frac{(z_1 - z_0^N) \sin \varphi_1}{z_0^N} = \frac{[5 - (-12,74)] \cdot 0,517}{-12,74} = -0,720;$$

$$\text{под шарниром } C: n_3 = \frac{(l_1 - z_0^N) \sin \varphi_1}{z_0^N} = \frac{[20 - (-12,74)] \cdot 0,517}{-12,74} = -1,329.$$

Проверка: под сечением 1 должен быть «скачок» на $\sin\varphi_1$. Так как ординаты с одной стороны оси, вычитаем их модули:

$$|n_2| - |n_1| = 0,720 - 0,203 = 0,517 = \sin\varphi_1.$$

Проверка выполняется.

Определение усилий от постоянной нагрузки по линиям влияния. Найдем распор, а также внутренние усилия M_1 , Q_1 , N_1 в сечении 1, пользуясь построенными линиями влияния. Для удобства изобразим все линии влияния под расчетной схемой арки (рисунок 5.36).

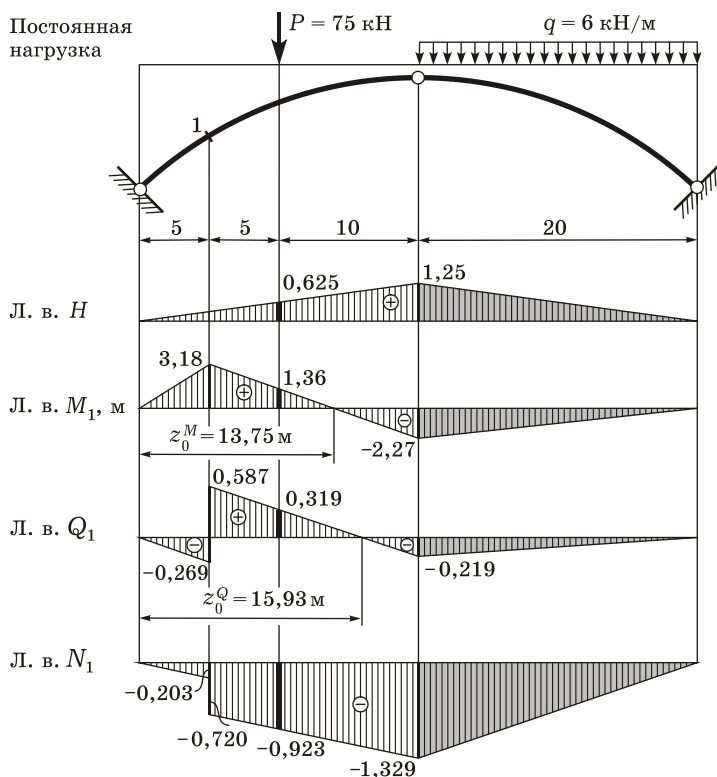


Рисунок 5.36

Умножим значение сосредоточенной силы $P = 75 \text{ кН}$ на ординаты соответствующих линий влияния под этой силой (на рисунке выделены черным), интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 6 \text{ кН/м}$ – на площади участков линий влияния под этой нагрузкой (на рисунке залиты серым); результаты сложим. Получим:

$$H = 75 \cdot 0,625 + 6 \cdot 1,25 \cdot 20/2 = 12188 \text{ кН};$$

$$M_1 = 75 \cdot 1,36 + 6 \cdot (-2,27 \cdot 20/2) = -34,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_1 = 75 \cdot 0,319 + 6 \cdot (-0,219 \cdot 20/2) = 10,79 \text{ кН};$$

$$N_1 = 75 \cdot (-0,923) + 6 \cdot (-1,329 \cdot 20/2) = -148,94 \text{ кН}.$$

Значения H , M_1 , Q_1 , N_1 совпадают со значениями, полученными в примере 5.1 при построении соответствующих эпюр (см. таблицу 5.1).

Пример 5.3 Определение расчетного положения временной нагрузки по линиям влияния.

Для арки, рассмотренной в двух предыдущих примерах, требуется: найти расчетное положение временной нагрузки для сечения 1, предполагая, что на арку может действовать одна сосредоточенная сила $F = 30 \text{ кН}$ и равномерно распределенная нагрузка произвольной протяженности $p = 3 \text{ кН/м}$. Материал арки – сосна.

Первый способ: использование линий влияния M и N . Под расчетной схемой арки изобразим линии влияния M_1 и N_1 , построенные для сечения 1 в примере 5.2 (рисунок 5.37). Далее исследуем два положения заданной временной нагрузки на арке.

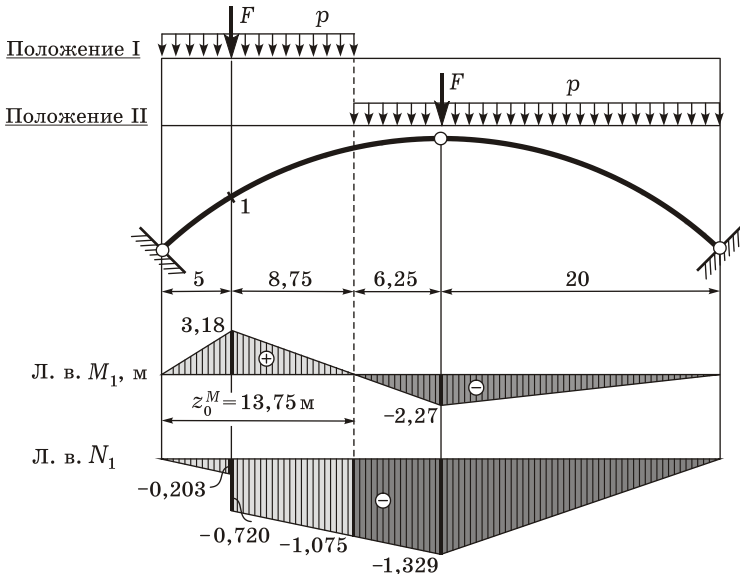


Рисунок 5.37

Положение I. Определяем опасное положение нагрузки по положительной части л. в. M_1 : сосредоточенную силу F располагаем над наи-

большей ординатой 3,18 м, распределенную нагрузку p – над положительным участком л. в. M_1 .

Вычисляем значение момента M_1^I и соответствующее ему значение продольной силы N_1^I , умножая силу F на ординату под ней, p – на площадь участка линии влияния под этой нагрузкой:

$$M_1^I = F \cdot 3,18 + p \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,18 \cdot 13,75 = 30 \cdot 3,18 + 3 \cdot 21,86 = 160,99 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N_1^I = F \cdot (-0,720) + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-0,203) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-0,720 - 1,075) \cdot 8,75 \right] = \\ = 30 \cdot (-0,720) + 3 \cdot (-8,36) = -46,68 \text{ кН}.$$

Вычисляем нормальные напряжения в крайних точках сечения:

$$\sigma_{1,2}^I = \frac{N_1^I}{A} \pm \frac{M_1^I}{W} = \frac{-46,68}{0,1875} \pm \frac{160,99}{23438 \cdot 10^{-6}} = (-0,25 \pm 6,87) \cdot 10^3 \text{ кПа} = \\ = (-0,25 \pm 6,87) \text{ МПа}; \quad \sigma_1^I = 6,62 \text{ МПа}; \quad \sigma_2^I = -7,12 \text{ МПа}.$$

Положение II. Определяем опасное положение нагрузки по отрицательной части л. в. M_1 : сосредоточенную силу F располагаем над наибольшей отрицательной ординатой (-2,27 м), распределенную нагрузку p – над отрицательным участком л. в. M_1 .

Вычисляем значение момента M_1^II и соответствующее ему значение продольной силы N_1^II , умножая силу F на ординату под ней, p – на площадь участка линии влияния под этой нагрузкой:

$$M_1^II = F \cdot (-2,27) + p \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2,27) \cdot 26,25 = 30 \cdot (-2,27) + 3 \cdot 29,79 = -157,48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N_1^II = F \cdot (-1,329) + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-1,329) \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (-1,329 - 1,075) \cdot 6,25 \right] = \\ = 30 \cdot (-1,329) + 3 \cdot (-20,80) = -102,28 \text{ кН}.$$

Вычисляем нормальные напряжения в крайних точках сечения:

$$\sigma_{1,2}^II = \frac{N_1^II}{A} \pm \frac{M_1^II}{W} = \frac{-102,28}{0,1875} \pm \frac{-157,48}{23438 \cdot 10^{-6}} = [-0,55 \pm (-6,72)] \cdot 10^3 \text{ кПа} = \\ = [-0,55 \pm (-6,72)] \text{ МПа}; \quad \sigma_1^II = -7,27 \text{ МПа}; \quad \sigma_2^II = 6,17 \text{ МПа}.$$

Наибольшие положительные напряжения ($\sigma_1^I = 6,62 \text{ МПа}$) возникают при положении I внешней нагрузки, наибольшие отрицательные напряжения ($\sigma_1^II = -7,27 \text{ МПа}$) – при положении II.

Так как материал арки (сосна) одинаково хорошо сопротивляется и растяжению, и сжатию, наиболее опасными являются максимальные по модулю (в данном случае отрицательные) напряжения 7,27 МПа. Следовательно, расчетным является положение II временной нагрузки.

Второй способ: использование линий влияния крайних напряжений. Построим линии влияния крайних напряжений σ_1 и σ_2 в сечении 1 с учетом зависимостей:

$$\text{л. в. } \sigma_1 = \text{л. в. } N_1/A + \text{л. в. } M_1/W;$$

$$\text{л. в. } \sigma_2 = \text{л. в. } N_1/A - \text{л. в. } M_1/W.$$

Разделим ординаты линий влияния M_1 и N_1 (см. рисунок 5.35) на значения момента сопротивления $W = 23438 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ и площади сечения $A = 0,1875 \text{ м}^2$, взятые из примера 5.1. Получим линии влияния M_1/W и N_1/A (рисунок 5.38, а). Прибавив первую ко второй, получим л. в. σ_1 , вычтя первую из второй – л. в. σ_2 (рисунок 5.38, б, в).

Будем загружать линии влияния σ_1 и σ_2 как линии влияния внутренних усилий. Это позволит для каждого напряжения σ_1 , σ_2 найти соответствующее опасное (невыгоднейшее) загрузеение.

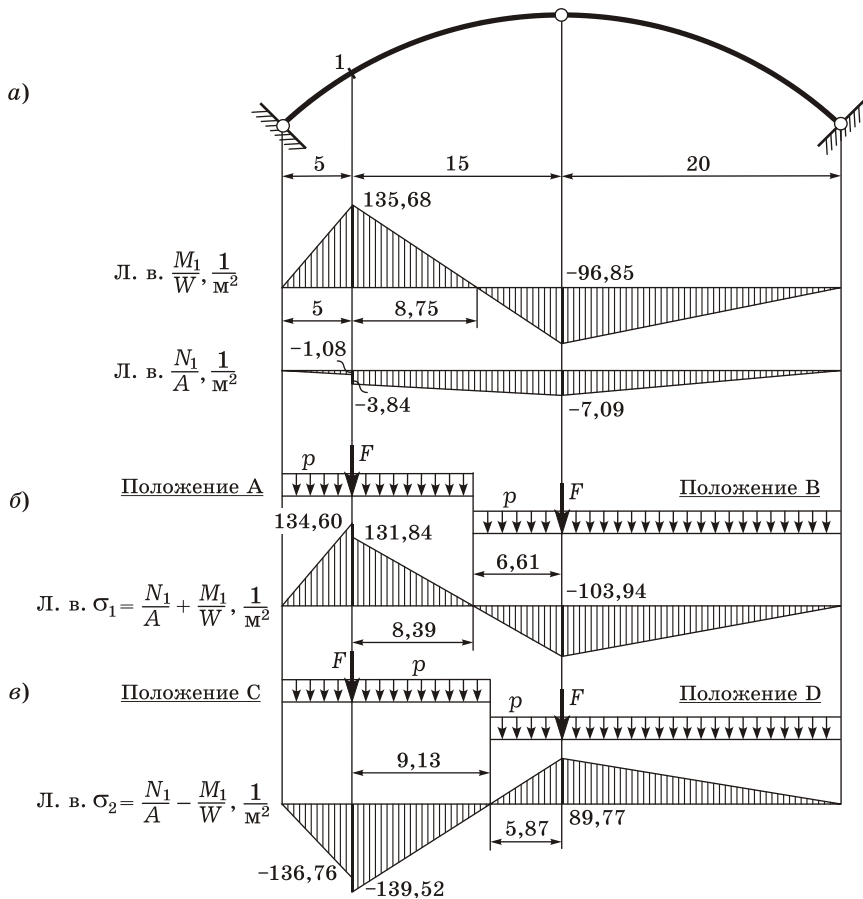


Рисунок 5.38

Положение А. Располагаем распределенную нагрузку p над положительным участком линии влияния σ_1 , а сосредоточенную силу F – над максимальной ординатой этого участка (см. рисунок 5.38, б). Вычисляем значение напряжения σ_1^A , умножая силу F на ординату под ней, p – на площадь положительного участка л. в. σ_1 :

$$\begin{aligned}\sigma_1^A &= F \cdot 13460 + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 13460 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 13184 \cdot 8,39 \right] = \\ &= 30 \cdot 13460 + 3 \cdot 88957 = 6,71 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 6,71 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

Положение В. Выполняем аналогичные действия по отрицательному участку линии влияния σ_1 и вычисляем значение напряжения σ_1^B :

$$\begin{aligned}\sigma_1^B &= F \cdot (-10394) + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-10394) \cdot 26,61 \right] = \\ &= 30 \cdot (-10394) + 3 \cdot (-13829) = -7,27 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -7,27 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

Положение С. Располагаем распределенную нагрузку p над положительным участком линии влияния σ_2 , а сосредоточенную силу F – над максимальной ординатой этого участка (см. рисунок 5.38, в). Вычисляем значение напряжения σ_2^C , умножая силу F на ординату под ней, p – на площадь положительного участка л. в. σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_2^C &= F \cdot (-13952) + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (-13676) \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-13952) \cdot 9,13 \right] = \\ &= 30 \cdot (-13952) + 3 \cdot (-97881) = -7,12 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -7,12 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

Положение D. Выполняем аналогичные действия по отрицательному участку линии влияния σ_1 и вычисляем значение напряжения σ_2^D :

$$\begin{aligned}\sigma_2^D &= F \cdot 89,77 + p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 89,77 \cdot 25,87 \right] = \\ &= 30 \cdot 89,77 + 3 \cdot 11612 = 6,18 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 6,18 \text{ МПа} .\end{aligned}$$

Наибольшие положительные напряжения ($\sigma_1^A = 6,71 \text{ МПа}$) возникают при положении А внешней нагрузки, наибольшие отрицательные напряжения ($\sigma_1^B = -7,27 \text{ МПа}$) – при положении В.

Так как материал арки (сосна) одинаково хорошо сопротивляется и растяжению, и сжатию, наиболее опасными являются наибольшие по модулю (отрицательные) напряжения 7,27 МПа. Следовательно, расчетным является положение В временной нагрузки.

Заметим, что найденные двумя способами расчетные положения нагрузки (II и В) различны, так как положение нулевых точек л. в. M_1 и л. в. σ_1 различно. Однако наибольшие напряжения, соответствующие этим положениям, одинаковы. Следовательно, оба из рассмотренных приближенных способов определения расчетного положения нагрузки приемлемы в инженерных расчетах.

6.1 Вводные замечания

6.1.1 Цель определения перемещений. *Перемещением* данной точки сооружения называется изменение ее координаты (координат), вызванное деформацией системы. Перемещения могут быть *линейными* (например, прогибы, удлинения элементов) и *угловыми* (углы поворота, углы закручивания сечений).

Инженерные сооружения должны проектироваться не только прочными, но и достаточно жесткими. Это значит, что перемещения различных точек конструкций должны быть достаточно малы. Например, прогибы мостовой фермы при прохождении

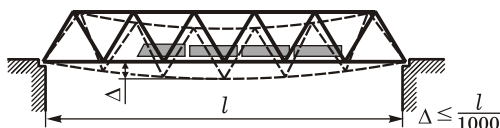


Рисунок 6.1

поезда не должны превышать $1/1000 \dots 1/500$ длины пролета (рисунок 6.1). В противном случае резко ухудшаются условия эксплуатации моста и подвижного состава.

Чтобы контролировать сооружения после постройки и длительной эксплуатации и не допускать возникновения предельных состояний, периодически измеряют характерные перемещения точек конструкций и сравнивают с расчетными значениями.

Задача нахождения перемещений возникает не только при оценке жесткости сооружения. При определении внутренних усилий в статически неопределимых системах, а также в задачах динамики сооружений перемещения вычисляют на промежуточном этапе расчета.

6.1.2 Методы определения перемещений в стержневых системах. В сопротивлении материалов [16] изучаются методы вычисления перемещений при простых видах деформирования. Например, при растяжении-сжатии и кручении были предложены формулы для удлинений стержней и углов закручивания их сечений. При изгибе прогибы и углы поворота сечений балок можно найти непосредственным интегрированием дифференциального уравнения упругой линии или методом начальных параметров.

Наиболее общим и универсальным методом вычисления перемещений в стержневых системах является *метод Мора*. Он по-

зволяет находить любые типы перемещений (удлинения стержней, прогибы, углы поворота и т. п.) от произвольных нагрузок и воздействий (например, температурных или кинематических).

Существуют также и другие способы вычисления перемещений в стержневых системах, например, комбинированное применение метода Мора и метода начальных параметров [14].

6.1.3 Обобщенные силы и обобщенные перемещения. Как известно, работа силы постоянной величины определяется как произведение этой силы на перемещение точки приложения силы по ее направлению. Понятие сосредоточенной силы, фигурирующее в данном определении, является лишь частным случаем воздействия на сооружение. Расширим и обобщим понятие «сила».

Обобщенной силой будем считать любое внешнее силовое воздействие на систему, т. е. не только одну сосредоточенную силу, но и момент, распределенную нагрузку, группу сил, группу моментов и любые их комбинации.

Обобщенным перемещением будем называть тот вид перемещения, на котором данная обобщенная сила совершает работу. Сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение по ее направлению, моменту – угловое, равномерно распределенной нагрузке – площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

Следует отметить, что обобщенные силы и перемещения могут быть введены для любой системы сил. Использование этих понятий позволяет распространить выводы, полученные при изучении действия одной силы, на случай действия нескольких внешних силовых нагрузок. В дальнейшем, оперируя понятиями «сила» и «перемещение», не будем делать различий между одиночными и обобщенными силами и перемещениями.

6.1.4 Особенности применения принципа возможных перемещений к деформируемым системам. Напомним, как с помощью указанного принципа находят усилия в статически определимых системах (см. п. 2.2.2). Система превращается в механизм отбрасыванием той связи, реакция в которой определяется; механизму задаются возможные перемещения; составляется уравнение возможных работ, из которого выражается искомое усилие. При этом деформации элементов не учитываются (расчет ведется по недеформированной схеме), поэтому возможная работа внутренних сил равна нулю: $A^{(i)} = 0$. Однако по этой методике можно определять не только опорные реакции, но и внутренние силы: их предварительно необходимо перевести в разряд внешних, представив как реакции в одиночных стерженьках, скрепляющих две части конструкции (см. п. 2.1.1).

При определении перемещений от заданного внешнего воздействия деформации системы учитывать необходимо (т. е. вести расчет по деформированной схеме). Принцип возможных перемещений Лагранжа в этом случае формально записывается в виде (2.1):

$$A^{(e)} + A^{(i)} = 0,$$

где $A^{(e)}$ – возможная работа внешних сил; $A^{(i)}$ – возможная работа внутренних сил.

Рассмотрим, в чем заключаются особенности применения принципа возможных перемещений к деформируемым системам.

1) При положительных направлениях внутренних сил, соответствующих положительным деформациям, работа внутренних сил *отрицательна*, так как направления внутренних сил и деформаций, вызванных внешними силами, противоположны.

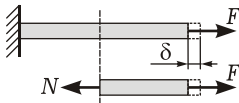


Рисунок 6.2

Иллюстрацией этого положения является работа сил, приложенных к растянутому стержню (рисунок 6.2). Внешняя сила F производит положительную работу на возможном перемещении δ по ее направлению. Внутренние силы $N = F$ стремятся вернуть стержень в исходное недеформированное состояние, направлены противоположно внешним и совершают отрицательную работу.

2) Принцип Лагранжа, сформулированный для бесконечно малых возможных перемещений, можно распространить и на *малые конечные перемещения*, удовлетворяющие связям. В случае физически или геометрически нелинейной системы результат получится приближенным, для линейно деформируемой системы – точным (подробнее об этом будет сказано далее).

6.2 Общая формула для определения перемещений от произвольных внешних воздействий

6.2.1 Плоские системы, состоящие из прямолинейных стержней.

Вывод соответствующей формулы вначале проведем для плоской стержневой системы, а затем перейдем к общему пространственному случаю.

Рассмотрим систему, состоящую из прямолинейных стержней (рисунок 6.3, а). Обозначим через S длину оси системы, s – координату, отсчитываемую вдоль оси.

Пусть по какой-либо причине система деформировалась, в результате чего ее точки получили малые перемещения. Произвольный бесконечно малый элемент системы длиной ds с координ-

натой s испытывает деформации удлинения, сдвига и изгиба. Его левое сечение условно будем считать неподвижным.

Обозначим: Δs – удлинение элемента, Δy – полный сдвиг сечений, $\Delta\theta$ – угол поворота сечений при изгибе (рисунок 6.3, б).

Допустим, требуется определить вертикальное перемещение Δ точки K . Для этого сформируем вспомогательное «единичное» состояние той же системы: по направлению искомого перемещения приложим единичную силу $\bar{P} = 1$ (рисунок 6.3, в) и определим возникающие от нее внутренние усилия $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ (рисунок 6.3, г). Приращениями $d\bar{N}, d\bar{Q}, d\bar{M}$ будем пренебрегать.

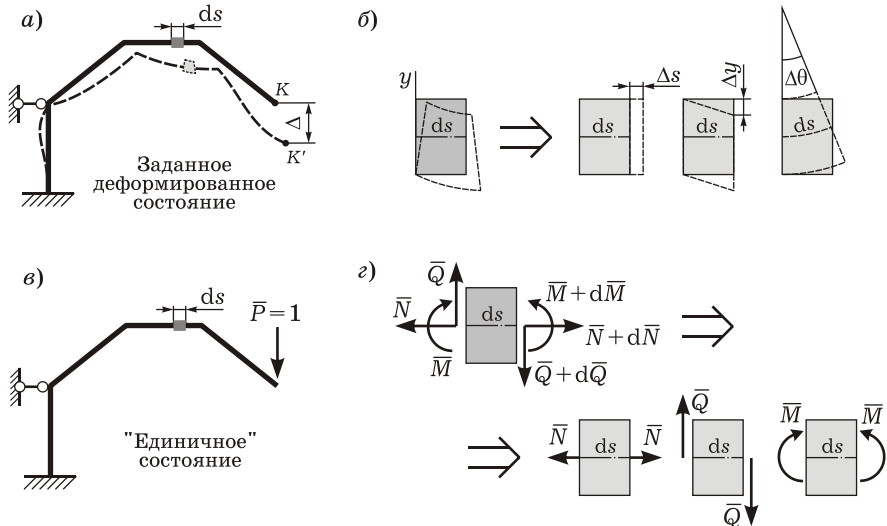


Рисунок 6.3

«Единичное» состояние является состоянием равновесия. Тогда, согласно принципу возможных перемещений (см. п. 2.2.1), сумма возможных работ сил этого состояния на любых возможных перемещениях должна быть равна нулю.

В качестве возможных примем перемещения заданного деформированного состояния, указанные на рисунке 6.3, а, б. Они хотя и конечны, но весьма малы по сравнению с размерами элементов и удовлетворяют связям.

Внешняя сила $\bar{P} = 1$ «единичного» состояния совершает на перемещении Δ заданного деформированного состояния возможную работу

$$A^{(e)} = \bar{P}\Delta = \Delta. \quad (6.1)$$

Внутренние усилия $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ «единичного» состояния совершают на элементарных перемещениях $\Delta s, \Delta y, \Delta \theta$ заданного состояния элементарную возможную работу

$$dA^{(i)} = -(\bar{N}\Delta s + \bar{Q}\Delta y + \bar{M}\Delta \theta).$$

Очень важно, что каждому из трех силовых факторов соответствуют такие перемещения, на которых ни один из остальных двух не совершает работы. Например, продольное перемещение (удлинение) возникает в результате действия продольной силы, и только эта сила совершает работу на этом перемещении. Такое разделение возможно только при определенном выборе осей координат. Оси x, y , связанные с поперечным сечением, должны быть главными центральными.

Следовательно, элементарная работа $dA^{(i)}$ может рассматриваться как сумма независимых работ продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента на соответствующих перемещениях за счет растяжения, сдвига и изгиба элемента ds .

Просуммируем работы внутренних сил для всех элементов системы, т. е. проинтегрируем выражение элементарной работы $dA^{(i)}$ по длине оси системы S . В результате получим возможную работу внутренних сил «единичного» состояния на перемещениях заданного деформированного состояния для всей системы:

$$A^{(i)} = -\int_S (\bar{N}\Delta s + \bar{Q}\Delta y + \bar{M}\Delta \theta). \quad (6.2)$$

Подставив соотношения (6.1) и (6.2) в уравнение возможных работ $A^{(e)} + A^{(i)} = 0$, получим формулу для искомого перемещения:

$$\Delta = \int_S (\bar{N}\Delta s + \bar{Q}\Delta y + \bar{M}\Delta \theta). \quad (6.3)$$

Здесь выражения элементарных перемещений $\Delta s, \Delta y, \Delta \theta$ содержат величину ds .

6.2.2 Общий случай пространственной системы. Рассмотрим пространственную конструкцию, состоящую из прямолинейных стержней (рисунок 6.4, *a*) с длиной оси S . Пусть за счет деформаций системы ее точки получили малые перемещения.

Произвольный бесконечно малый элемент системы длиной ds с координатой s испытывает деформации удлинения, кручения, сдвига и изгиба в двух плоскостях. Его левое сечение условно будем считать неподвижным. Обозначим: Δs – удлинение элемента; $\Delta y, \Delta x$ – полные сдвиги сечений вдоль осей y и x ; $\Delta \varphi$ – угол за-

кручения сечений элемента; $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y$ – углы поворота сечений при изгибе (рисунок 6.4, б).

Пусть требуется найти перемещение Δ точки K по заданному направлению. Сформируем «единичное» состояние системы: по направлению искомого перемещения приложим единичную силу $\bar{P} = 1$ (рисунок 6.4, в) и определим от нее внутренние усилия $\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_x, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ – продольную и две поперечные силы, крутящий¹⁾ и два изгибающих момента (рисунок 6.4, г).

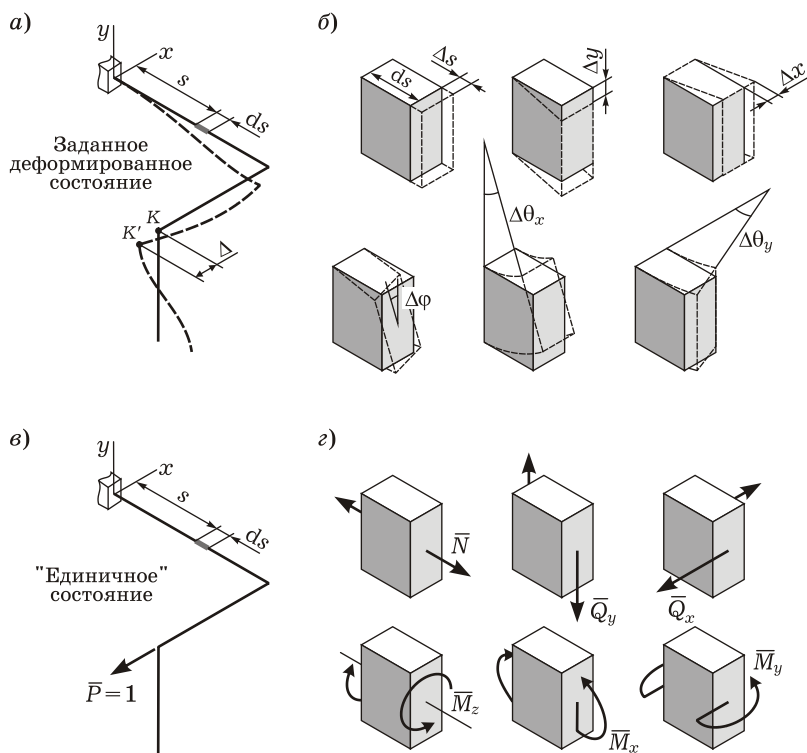


Рисунок 6.4

¹⁾ Крутящий момент в принятой системе координат x, y, s логично было бы обозначить M_s . Однако в практических задачах для каждого из прямолинейных участков системы удобно вводить свою продольную ось z , относительно которой крутящий момент имеет такое же обозначение, как и в сопротивлении материалов – M_z .

В качестве возможных примем перемещения заданного деформированного состояния, указанные на рисунке 6.4, а, б.

Внешняя сила $\bar{P} = 1$ «единичного» состояния совершает на перемещении Δ заданного состояния возможную работу $A^{(e)} = P\Delta = \Delta$. Внутренние усилия «единичного» состояния совершают на элементарных перемещениях заданного состояния элементарную возможную работу

$$dA^{(i)} = -(\bar{N}\Delta s + \bar{Q}_y\Delta y + \bar{Q}_x\Delta x + \bar{M}_z\Delta\varphi + \bar{M}_x\Delta\theta_x + \bar{M}_y\Delta\theta_y).$$

Проинтегрировав выражение $dA^{(i)}$ по длине оси системы S , получим возможную работу внутренних сил «единичного» состояния на перемещениях заданного деформированного состояния:

$$A^{(i)} = -\int_S (\bar{N}\Delta s + \bar{Q}_y\Delta y + \bar{Q}_x\Delta x + \bar{M}_z\Delta\varphi + \bar{M}_x\Delta\theta_x + \bar{M}_y\Delta\theta_y).$$

Подставив выражения $A^{(e)}$ и $A^{(i)}$ в уравнение возможных работ $A^{(e)} + A^{(i)} = 0$, получим формулу для искомого перемещения:

$$\Delta = \int_S (\bar{N}\Delta s + \bar{Q}_y\Delta y + \bar{Q}_x\Delta x + \bar{M}_z\Delta\varphi + \bar{M}_x\Delta\theta_x + \bar{M}_y\Delta\theta_y). \quad (6.4)$$

Формулы (6.3), (6.4) позволяют найти любые обобщенные перемещения в любой системе, состоящей из прямолинейных стержней. При их выводе вспомогательная нагрузка $\bar{P} = 1$ подбиралась так, чтобы работа этой нагрузки на искомом перемещении Δ численно равнялась значению Δ .

Чтобы определить, например, угол поворота θ какого-либо узла или сечения (рисунок 6.5), вспомогательную нагрузку нужно

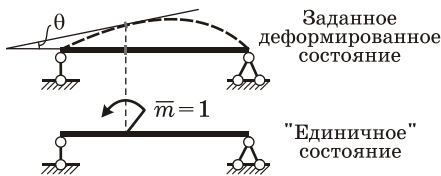


Рисунок 6.5

принять в виде внешнего момента $\bar{m} = 1$, примененного в этом узле (или к этому сечению). Тогда возможная работа внешних сил $A^{(e)} = \bar{m}\theta = \theta$. Дальнейший расчет аналогичен расчету при вычислении Δ .

6.2.3 Замечания. 1) При использовании формул (6.3), (6.4) несущественно, от чего возникли деформации элементов системы. Они могли быть вызваны нагрузкой (причем, система не обязательно является физически или геометрически линейной), изменением температуры, ползучестью материала и т. п. Важно лишь то, что деформации должны быть известны.

Отметим, что стержневая система может быть как статически определимой (не содержать лишних связей), так и статически неопределимой. В последнем случае расчет будет, естественно, сложнее. 2) Перемещения и деформации системы, которые мы приняли за возможные, малы, но не бесконечно малы. Строго говоря, их нельзя принимать за возможные. Поэтому в общем случае формулы (6.3), (6.4) являются приближенными: они позволяют определить не полное перемещение Δ , а его дифференциал¹⁾.

Поясним сказанное. Пусть зависимость перемещения Δ от действующей силы P для некоторой геометрически нелинейной системы представлена графиком, изображенным на рисунке 6.6. Из графика ясно, что чем меньше сила, тем ближе дифференциал к искомому перемещению и тем точнее формулы (6.3), (6.4).

Для линейно деформируемой системы зависимость $\Delta(P)$ изображается прямой линией. Следовательно, формулы (6.3), (6.4) позволяют получить точное значение перемещения.

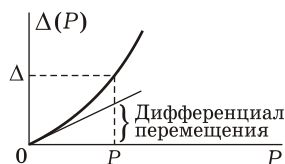


Рисунок 6.6

3) Формулы (6.3), (6.4) допустимо использовать для стержней малой кривизны. Для стержней большой кривизны в них необходимо внести некоторые коррективы.

6.3 Формула Мора

6.3.1 Формула Мора для плоской системы, состоящей из прямолинейных стержней. Практически наиболее важна задача определения перемещений от заданной неподвижной нагрузки. В этом случае заданное деформированное состояние конструкции называют «грузовым» (рисунок 6.7, а).

Взаимные перемещения сечений элемента ds в «грузовом» состоянии (рисунок 6.7, б) выражаются через внутренние усилия этого состояния N_p, Q_p, M_p и жесткости EA, GA и EJ . Здесь E – модуль Юнга, G – модуль сдвига, A – площадь сечения, J – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгиба.

Если зависимость деформаций от напряжений нелинейна, то перемещения должны определяться с учетом этой физической

¹⁾ Замена искомых малых величин их дифференциалами является широко распространенным упрощением расчетов. Вопрос о применимости такой замены решается в каждом конкретном случае теоретическими или экспериментальными исследованиями.

нелинейности. Для линейно деформируемой системы можно воспользоваться известными формулами сопротивления материалов.

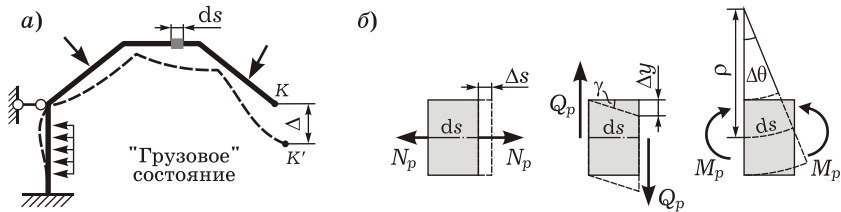


Рисунок 6.7

Удлинение элемента ds по аналогии с удлинением стержня $\Delta l = Nl/(EA)$ будет следующим:

$$\Delta s = \frac{N_p ds}{EA}. \quad (6.5)$$

Обозначим γ – угол сдвига. Тогда взаимный сдвиг сечений

$$\Delta y = \gamma ds.$$

Поперечная сила в сечении является статическим эквивалентом касательных напряжений τ . Если бы они были распределены равномерно по площади сечения A , как при чистом сдвиге, то вычислялись бы так: $\tau = Q_p/A$. Но при изгибе значение τ меняется по высоте сечения, поэтому примем $\tau = \eta Q_p/A$, где η – безразмерный коэффициент, который учитывает неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе. По закону Гука при сдвиге ($\tau = G\gamma$)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\eta Q_p}{GA},$$

следовательно,

$$\Delta y = \frac{\eta Q_p ds}{GA}. \quad (6.6)$$

Коэффициент η зависит только от формы сечения. Например, для прямоугольника $\eta = 1,2$; для круга $\eta = 32/27$; для прокатных двутавров $\eta \approx A/A_w$, где A – полная площадь сечения двутавра; A_w – площадь вертикальной стенки. В общем случае этот коэффициент можно вычислить по формуле, которая дается в курсе сопротивления материалов [16].

При изгибе сечения элемента ds поворачиваются, а ось искривляется. Обозначим радиус кривизны оси ρ . Используя известную зависимость $1/\rho = M/(EJ)$, получим

$$\Delta\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{M_p ds}{EJ}. \quad (6.7)$$

Подставив выражения (6.5)–(6.7) в формулу (6.3) и представив интеграл в виде суммы трех интегралов, получим

$$\Delta = \int_s \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds + \int_s \frac{\eta Q_p \bar{Q}}{GA} ds + \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds, \quad (6.8)$$

где N_p, Q_p, M_p – внутренние усилия в «грузовом» состоянии; $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – внутренние усилия в «единичном» состоянии; EA, GA, EJ – жесткости поперечного сечения при растяжении–сжатии, сдвиге и изгибе; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений при изгибе по сечению.

Соотношение (6.8) называют *формулой Мора*¹⁾ или *интегралом Мора* для плоской стержневой системы.

6.3.2 Формула Мора для пространственной системы, состоящей из прямолинейных стержней. Для пространственной стержневой конструкции формула Мора будет содержать шесть внутренних силовых факторов (крутящий и два изгибающих момента, продольную и две поперечные силы).

Пусть заданное деформированное состояние системы вызвано действием некоторой неподвижной нагрузки (рисунок 6.8, а). Назовем его «грузовым» состоянием.

Взаимные перемещения сечений элемента ds в «грузовом» состоянии (рисунок 6.8, б) выражаются через внутренние усилия этого состояния $N_p, Q_{xp}, Q_{yp}, M_{zp}, M_{xp}, M_{yp}$ и жесткости:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{N_p ds}{EA}; & \Delta y &= \frac{\eta_y Q_{yp} ds}{GA}; & \Delta x &= \frac{\eta_x Q_{xp} ds}{GA}; \\ \Delta \varphi &= \frac{M_{zp} ds}{GJ_p}; & \Delta \theta_x &= \frac{M_{xp} ds}{EJ_x}; & \Delta \theta_y &= \frac{M_{yp} ds}{EJ_y}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где EA, GA, GJ_p, EJ_x, EJ_y – жесткости при растяжении–сжатии, сдвиге, кручении и изгибе; E – модуль Юнга, G – модуль сдвига,

¹⁾ В наиболее общей форме эта формула была получена Отто Мором в 1874 г. на основании принципа возможных перемещений. Впервые подобная формула для ферм, учитывающая только продольные силы, была выведена Дж. Максвеллом в 1864 г. из геометрических соображений. В связи с этим соотношение (6.10) часто называют *интегралом Максвелла–Мора* для плоской стержневой системы.

A – площадь сечения, J_p – полярный момент инерции сечения, J_x, J_y – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей; η_x, η_y – коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по сечению вдоль осей x и y .

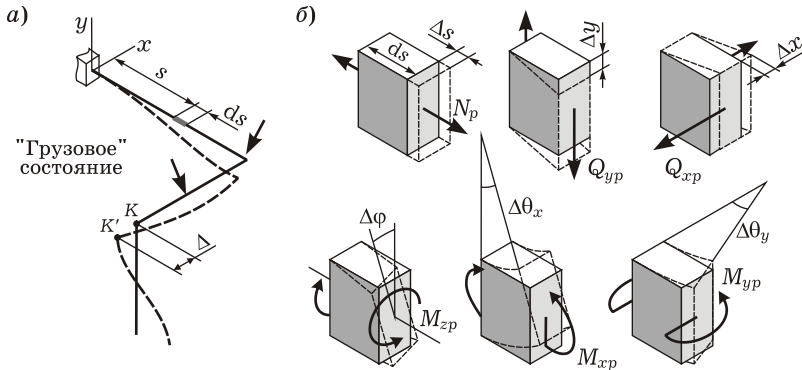


Рисунок 6.8

Подставив выражения (6.9) в формулу (6.4) и представив интеграл в виде суммы шести интегралов, получим

$$\Delta = \int_s \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds + \int_s \frac{\eta_x Q_{xp} \bar{Q}_x}{GA} ds + \int_s \frac{\eta_y Q_{yp} \bar{Q}_y}{GA} ds + \\ + \int_s \frac{M_{zp} \bar{M}_z}{GJ_p} ds + \int_s \frac{M_{xp} \bar{M}_x}{EJ_x} ds + \int_s \frac{M_{yp} \bar{M}_y}{EJ_y} ds, \quad (6.10)$$

где $N_p, Q_{xp}, Q_{yp}, M_{zp}, M_{xp}, M_{yp}$ – внутренние усилия в «грузовом» состоянии; $\bar{N}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ – внутренние усилия в «единичном» состоянии.

Соотношение (6.10) называют *формулой Мора* или *интегралом Мора* для пространственной стержневой системы.

Таким образом, формулы Мора (6.8) и (6.10) позволяют по известным внутренним усилиям от заданной нагрузки и единичного воздействия определить перемещение любого вида. Геометрическая задача (вычисление перемещений по деформациям элементов системы) сводится к статической задаче (определение усилий от заданного и единичного воздействий).

6.3.3 Порядок определения перемещений с помощью формулы Мора. Чтобы определить перемещение по заданному направлению, необходимо:

- найти аналитические выражения внутренних усилий на отдельных участках системы от заданной нагрузки (в «грузовом» состоянии);
- по направлению искомого перемещения приложить единичное усилие (для линейных перемещений – сосредоточенную силу, для угловых – момент) и найти аналитические выражения внутренних усилий в полученном «единичном» состоянии;
- подставив найденные выражения усилий в формулу Мора, определить искомое перемещение интегрированием по отдельным участкам системы и суммированием результатов.

Границами участков системы, как правило, служат точки приложения сосредоточенных сил и моментов или изломы оси (в рамах). Участками являются также отдельные стержни фермы.

Если найденное перемещение положительно, то его направление совпадает с направлением приложенной единичной силы, если отрицательно – противоположно ему.

6.4 Частные случаи применения формулы Мора

Влияние каждого из слагаемых в формулах (6.8) и (6.10) на результат неодинаково. Для многих конструкций «вклад» некоторых внутренних усилий не превышает 1–3 %, поэтому в инженерных расчетах их допускается не учитывать.

6.4.1 Балки, испытывающие плоский изгиб. В сечениях балок возникают поперечные силы и изгибающие моменты, продольные силы отсутствуют. Обозначим: l – длина балки, h – высота поперечного сечения. Если $l/h > 8$, то в формуле Мора допускается учитывать только изгибающие моменты:

$$\Delta = \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds. \quad (6.11)$$

Если $5 \leq l/h \leq 8$, то необходимо учесть еще и поперечные силы:

$$\Delta = \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds + \int_s \frac{\eta Q_p \bar{Q}}{GA} ds. \quad (6.12)$$

Если $l/h < 5$, то конструкция не является стержневой системой, и формула Мора дает большие погрешности в расчетах, поэтому перемещения следует определять методами теории упругости.



Рисунок 6.9

6.4.2 Плоские рамы. Если соотношения размеров элементов рам лежат в тех же пределах, что и для балок, то при определении перемещений пользуются теми же формулами (6.11), (6.12). В ряде случаев необходимо учитывать и влияние продольных сил N , когда в сечениях рам при сравнительно небольших изгибающих моментах возникают значительные продольные силы (рисунок 6.9).

Пример 6.1 Рассмотрим консольную балку длиной l прямоугольного поперечного сечения с размерами $b \times h$, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рисунок 6.10). Определим прогиб конца консоли Δ , а также оценим влияние соотношения l/h на «вклад» поперечной силы в найденное значение перемещения.

Найдем выражения внутренних усилий в «грузовом» состоянии:

$$M_p = -qz^2 / 2; \quad Q_p = -qz.$$

Далее сформируем «единичное» состояние, приложив по направлению искомого перемещения единичную силу $\bar{P} = 1$. Найдем выражения внутренних усилий в этом состоянии:

$$\bar{M} = -\bar{P}z = -z; \quad \bar{Q} = -\bar{P} = -1.$$

Так как сечение балки постоянно, жесткости EJ , GA и коэффициент η не меняются по ее длине. По формуле (6.12)

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds + \int_s \frac{\eta Q_p \bar{Q}}{GA} ds = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^l M_p \bar{M} dz + \frac{\eta}{GA} \int_0^l Q_p \bar{Q} dz = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} \right) (-z) dz + \frac{\eta}{GA} \int_0^l (-qz)(-1) dz = \\ &= \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{\eta ql^2}{2GA}. \end{aligned}$$

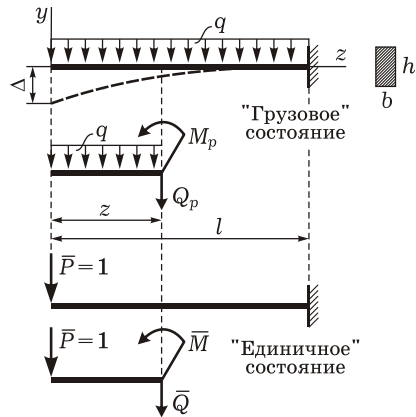


Рисунок 6.10

Здесь ds заменено на dz , так как рассматривается прямая балка. Первое слагаемое дает значение прогиба вследствие изгиба, второе – вследствие сдвигов. Подставляя в полученную формулу $J = bh^3 / 12$; $A = bh$; $\eta = 1,2$; $G = E / (2(1 + \nu))$ (ν – коэффициент Пуассона), получаем:

$$\Delta = \frac{ql^4}{8EJ} \left(1 + \frac{4(1+\nu)}{5} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (6.13)$$

Второе слагаемое в скобке формулы (6.13) составляет обычно несколько процентов от первого. Его величину в зависимости от соотношения l/h оценим, построив график (рисунок 6.11). Здесь коэффициент Пуассона принят $\nu = 0,3$. То есть при $l/h > 8$ «вклад» поперечной силы в значение прогиба составляет менее 2 %.

Тогда для рассматриваемой балки можно считать, что прогиб

$$\Delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_p \overline{M} dz = \frac{ql^4}{8EJ}. \quad (6.14)$$

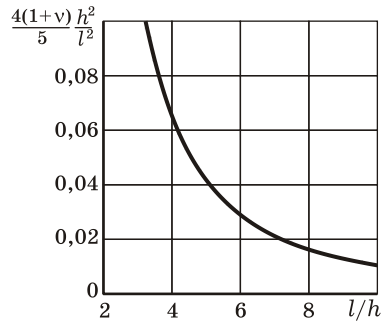


Рисунок 6.11

К аналогичным выводам можно прийти, рассматривая другие балки и рамы. Поэтому в расчетах балок и рам сплошного поперечного сечения обычно пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил, учитывая в формуле Мора только изгибающие моменты.

6.4.3 Арки и криволинейные стержни. Как правило, строительные арки являются пологими с отношением $\rho/h > 10$ (ρ – радиус кривизны оси арки, h – высота поперечного сечения). Для них с достаточной степенью точности можно пользоваться формулой Мора (6.8), полученной для прямолинейных элементов.

Влияние поперечных и продольных сил на перемещения в арках, как правило, больше, чем в рамах. Оно может быть оценено только по результатам расчета. При прочих равных условиях влияние N и Q для бесшарнирных арок обычно больше, чем для двухшарнирных. Поскольку арка во многих случаях представляет собой основную часть дорогого и ответственного сооружения, то не следует игнорировать влияние отдельных внутренних сил при определении перемещений.

В учебных и предварительных расчетах арок допускается пренебрегать влиянием поперечных сил на перемещения, учитывая только изгибающие моменты и продольные силы:

$$\Delta = \int_s \frac{M_p \overline{M}}{EJ} ds + \int_s \frac{N_p \overline{N}}{EA} ds.$$

Следует отметить, что сравнительное влияние продольных сил в арках зависит не только от размеров арки, но и от нагрузки.

Для стержней большой кривизны формулу Мора необходимо уточнить [9].

6.4.4 Фермы. Для идеальных шарнирных ферм отличны от нуля только продольные силы в стержнях, которые, как и жесткости, постоянны по длине каждого отдельного стержня. Формула Мора принимает вид

$$\Delta = \int_S \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds.$$

Вдоль каждого i -го стержня фермы введем свою ось z_i . Интеграл по длине оси системы заменим суммой интегралов по длине каждого i -го стержня. Постоянные силы и жесткости вынесем за знак каждого интеграла; интеграл от dz_i даст длину l_i :

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_S \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{N_p^{(i)} \bar{N}^{(i)}}{EA_i} dz_i = \\ &= \sum_i \frac{N_p^{(i)} \bar{N}^{(i)} l_i}{EA_i} = \sum_i \frac{N_p^{(i)} \bar{N}^{(i)}}{EA_i} l_i, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $N_p^{(i)}, \bar{N}^{(i)}$ – продольная сила в i -м стержне соответственно в «грузовом» и «единичном» состояниях; l_i, EA_i – длина и жесткость i -го стержня; z_i – координата, отсчитываемая вдоль оси i -го стержня. Знак суммы распространяется на все стержни фермы.

6.4.5 Пространственные стержни, испытывающие сложное сопротивление. При пространственной деформации необходимо учитывать перемещения, возникающие в основном из-за изгиба и кручения. Поперечными, а часто и продольными силами пренебрегают, и в формуле Мора (6.10) остается четыре или три слагаемых.

6.5 Техника вычисления интегралов Мора

Основным недостатком определения перемещений по формуле Мора является необходимость составления аналитических выражений подинтегральных функций. Это особенно сложно при большом количестве участков системы.

Во многих случаях интегралы Мора удобно искать не через первообразные функции, а численными способами с использованием эпюр внутренних усилий. В связи с этим подобные способы называют способами «перемножения эпюр». Применимы они к *любому* из шести интегралов формулы Мора.

6.5.1 Способ (правило) Верещагина¹⁾. Рассмотрим прямолинейный участок длиной l (рисунок 6.12). Допустим, на этом участке необходимо вычислить интеграл от произведения двух функций $f_1(z) \cdot f_2(z)$

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz$$

при условии, что хотя бы одна из этих функций линейная.

Для наглядности графики функций изображим в виде эпюр (см. рисунок 6.12).

Пусть линейна вторая функция. Представим ее в виде $f_2(z) = b + kz$ ($b = \text{const}$; $k = \text{const}$). Тогда искомым интеграл

$$I = b \int_0^l f_1 dz + k \int_0^l f_1 z dz .$$

Первый из интегралов в правой части представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$, или иначе – площадь эпюры $f_1(z)$:

$$\int_0^l f_1 dz = \Omega .$$

Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси ординат, т. е.

$$\int_0^l f_1 z dz = \Omega z_C ,$$

где z_C – координата центра тяжести первой эпюры.

Теперь получаем, что

$$I = \Omega(b + kz_C) .$$

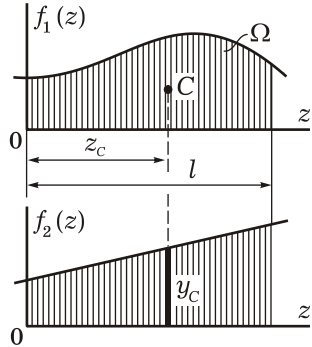


Рисунок 6.12

¹⁾ *Верещагин* Андрей Константинович (1896–1959) – отечественный ученый и изобретатель, который внес большой вклад в развитие военной техники и считается основоположником отечественной школы минной электротехники. Его имя широко известно главным образом в связи с наглядным способом вычисления интегралов – «перемножением эпюр», который Верещагин предложил в 1925 г., будучи студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта.

Но $b + kz_C = f_2(z_C) = y_C$. Следовательно,

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz = \Omega y_C. \quad (6.16)$$

Таким образом, операция интегрирования заменяется перемножением *площади* первой эпюры на *ординату* второй эпюры, взятую под центром тяжести первой. Следует помнить, что ордината y_C должна быть обязательно взята из *прямолинейной* эпюры. Результат положителен, если центр тяжести первой эпюры и ордината y_C расположены по одну сторону от оси стержня.

Если линейны обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, то операция перемножения эпюр по правилу Верещагина обладает свойством *коммутативности*. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

Большинство эпюр, встречающихся в практике инженерных расчетов, могут быть разбиты на простейшие по форме фигуры: прямоугольник, треугольник, трапеция, квадратная парабола (рисунок 6.13).

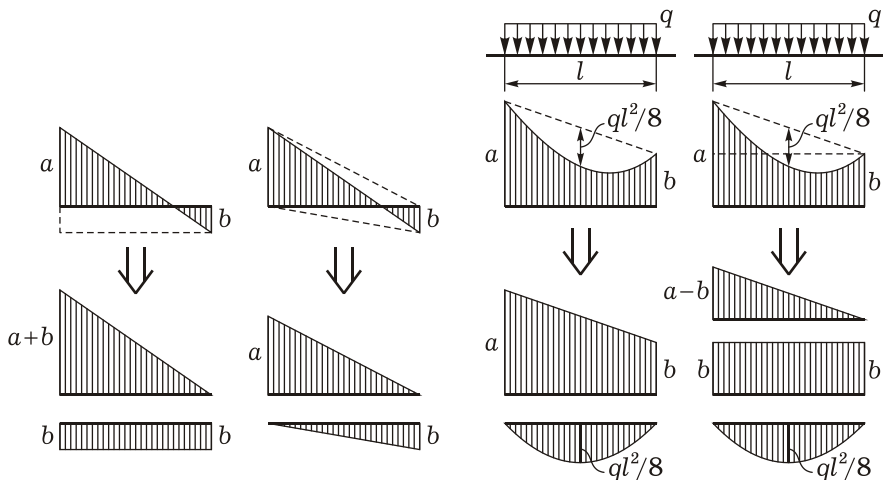


Рисунок 6.13

Для таких фигур величина площади Ω и положение центра тяжести S известны (рисунок 6.14).

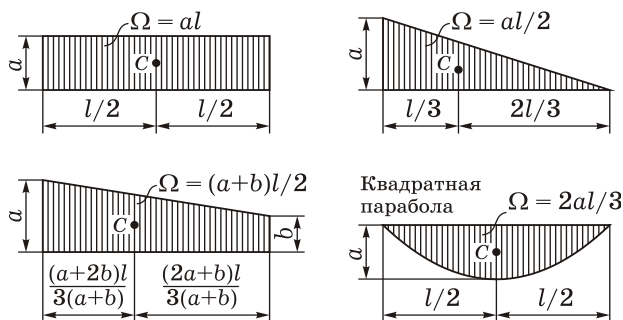


Рисунок 6.14

6.5.2 Использование формулы Симпсона. Напомним, что определенный интеграл от функции $f(z)$ на отрезке $[z_1, z_3]$ можно вычислить следующим образом [12]:

$$\int_{z_1}^{z_3} f(z) dz \approx \frac{h}{6} [f(z_1) + 4f(z_2) + f(z_3)], \quad (6.17)$$

где $h = z_3 - z_1$ — длина отрезка, или шаг (рисунок 6.15).

Приближенное равенство (6.17) называется *формулой Симпсона*¹⁾ (*формулой парабол*) на *частичном отрезке*. Оно основано на замене подынтегральной функции $f(z)$ квадратной параболой, проходящей через крайние $f(z_1)$, $f(z_3)$ и среднюю $f(z_2)$ ординаты данного отрезка.

Формула Симпсона является точной, если $f(z)$ — многочлен не выше третьей степени. В остальных случаях она приближенная и имеет погрешность порядка $O(h^5)$.

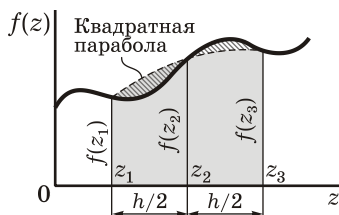


Рисунок 6.15

Пусть подынтегральная функция $f(z)$ представлена в виде произведения $f(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$. Изобразим графики функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в виде эпюр (рисунок 6.16). Допустим, на участке длиной l необходимо вычислить следующий интеграл:

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz.$$

¹⁾ Эта формула была выведена в 1668 г. шотландским математиком и астрономом Джеймсом Грегори (James Gregory) (1638–1675). Она вновь была получена в 1743 г. английским математиком Томасом Симпсоном (Thomas Simpson) (1710–1761) и названа его именем.

Обозначим через a, b, e ординаты эпюры $f_1(z)$ в крайних и средней точках участка, через c, d, g – аналогичные ординаты эпюры $f_2(z)$ (см. рисунок 6.15). Тогда согласно (6.17)

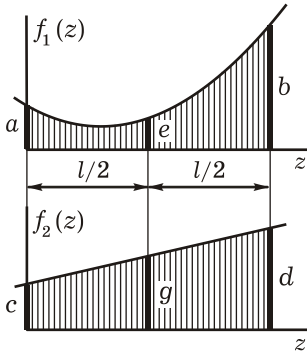


Рисунок 6.16

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz = \frac{l}{6}(ac + 4eg + bd). \quad (6.18)$$

Формула Симпсона (6.18) дает *точный* результат, если обе функции $f_1(z), f_2(z)$ *линейные* или одна из них *линейная*, а вторая – *квадратичная*. При этом длина участка l может быть достаточно большой.

Поясним сказанное. Если обе функции линейные, их произведение дает квадратичную функцию, и интерполирующая парабола совпадает с подынтегральной функцией. Если же одна функция квадратичная, вторая – линейная, то их произведение является полиномом третьей степени, а график – кубической параболой. В этом случае площади, заштрихованные на рисунке 6.15, компенсируют друг друга: их сумма равна нулю.

Заметим, что если перемножаемые ординаты находятся по разные стороны от оси, их произведение отрицательно.

6.5.3 Правило перемножения прямолинейных эпюр (трапеций). В частном случае, когда обе перемножаемые эпюры $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейные (рисунок 6.17), их средние ординаты выражаются через крайние следующим образом:

$$e = \frac{a+b}{2}; \quad g = \frac{c+d}{2}.$$

Подставив эти выражения в (6.18), получим:

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \quad (6.19)$$

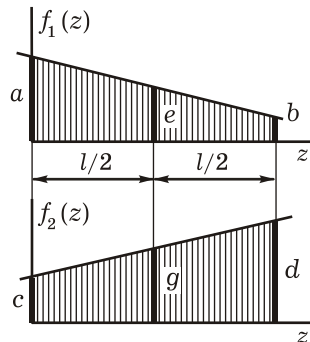


Рисунок 6.17

6.5.4 Способ Мюллера-Бреслау. Исторически первый способ вычисления интегралов Мора предложил Г. Ф. Мюллер-Бреслау

в 1886 г. [1]. Он основан на представлении одной из эпюр в виде фиктивной распределенной нагрузки.

Рассмотрим прямолинейный участок стержня длиной l постоянной жесткости. Допустим, на этом участке необходимо вычислить интеграл от произведения двух функций $f_1(z) \cdot f_2(z)$

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz$$

при условии, что функция f_2 линейная (рисунок 6.18).

По Мюллеру-Бреслау, этот интеграл

$$I = \int_0^l f_1 f_2 dz = R_a^\Phi c + R_b^\Phi d, \quad (6.20)$$

где R_a^Φ , R_b^Φ – фиктивные реакции от эпюры f_1 , рассматриваемой как фиктивная распределенная нагрузка на данном участке; c , d – крайние ординаты эпюры f_2 (обязательно прямолинейной).

Рассмотренный способ удобен, если первая эпюра достаточно простая, например, прямоугольная или треугольная. При более сложных эпюрах он становится громоздким.

В частном случае, если обе перемножаемые эпюры представляют собой трапеции (рисунок 6.19), то из формулы (6.20) после некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l f_1 f_2 dz = R_a^\Phi c + R_b^\Phi d = \\ &= \frac{l}{6} (2a + b)c + \frac{l}{6} (a + 2b)d = \\ &= \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае перемножения двух прямолинейных эпюр способ Мюллера-Бреслау приводит к зависимости (6.19), полученной ранее.

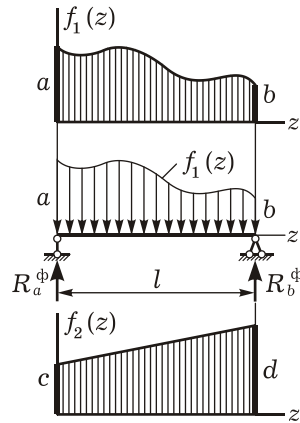


Рисунок 6.18

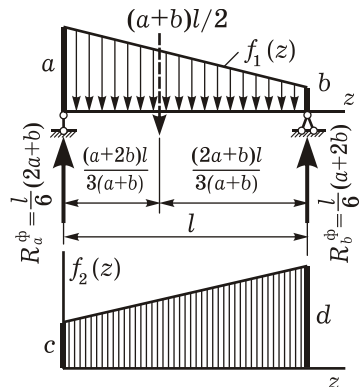


Рисунок 6.19

6.5.5 Применимость способов «перемножения эпюр». Рассмотренные способы «перемножения эпюр» применимы к любому интегралу, для которого подынтегральная функция может быть представлена в виде произведения двух функций f_1 и f_2 , в том числе к любому из интегралов Мора.

Для прямолинейных участков постоянной жесткости под функциями f_1 и f_2 могут пониматься изгибающие моменты в «грузовом» и «единичном» состояниях M_p, \bar{M} , продольные силы N_p, \bar{N} , поперечные силы Q_p, \bar{Q} и т. п. Постоянная жесткость (EJ, EA, GA и т. д.) выносится за знак каждого интеграла Мора, а затем произведение эпюр делится на нее.

Сложные эпюры обычно разбиваются на участки, в пределах которых они перемножаются по одной из формул (6.16), (6.18), (6.19), а затем результаты суммируются. Для разных участков можно использовать как один и тот же, так и разные способы.

Для прямолинейных участков, жесткость которых по длине оси непрерывно изменяется, переменная жесткость может быть включена, например, в функцию f_1 . Тогда под f_1 понимается нелинейная функция $M_p(s)/EJ(s)$, $N_p(s)/EA(s)$ и т. д. Вторая функция f_2 , под которой понимаются единичные усилия \bar{M}, \bar{N} и т. д., как правило, линейна.

В этом случае удобно использовать способ Симпсона, который даст приближенный результат. Для проверки правильности полученных данных вычисления производят два раза: при заранее назначенных длинах участков и длинах, в два раза меньших. Если результаты совпадают с требуемой точностью, их считают приемлемыми.

В случае криволинейности оси конструкции, непостоянства жесткости обе функции f_1 и f_2 нелинейны. Для вычисления интегралов Мора удобнее всего использовать одну из известных квадратурных формул [12], например, формулу прямоугольников, трапеций или Симпсона.

В отличие от рассмотренного ранее варианта использования формулы Симпсона (см. п. 6.5.2), где участок разбивался пополам и вычислялись только крайние и средние значения, здесь участок необходимо разбить на достаточно большое количество частей.

6.6 Примеры вычисления перемещений в стержневых системах от различных нагрузок

Пример 6.2 Для балки постоянной жесткости, рассмотренной в примере 6.1, найти прогиб конца консоли, учитывая только изгибающие моменты. Для вычисления интеграла Мора воспользоваться способом «перемножения эпюр».

Построим эпюру моментов M_p в «грузовом» состоянии. Далее сформируем «единичное» состояние, приложив по направлению искомого перемещения единичную силу $\bar{P} = 1$, и построим эпюру \bar{M} (рисунок 6.20).

Перемещение найдем по формуле (6.11), вынеся постоянную жесткость EJ за знак интеграла:

$$\Delta = \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \int_l M_p \bar{M} ds.$$

Для вычисления интеграла Мора используем формулу Симпсона (6.17):

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EJ} \int_s M_p \bar{M} ds = \\ &= \frac{l}{6EJ} (ac + 4eg + bd) = \\ &= \frac{l}{6EJ} \left(0 \cdot 0 + 4 \frac{ql^2}{8} \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2} l \right) = \frac{ql^4}{8EJ}, \end{aligned}$$

где a , b , c , d , e , g – крайние и средние ординаты перемножаемых эпюр.

Значение перемещения Δ совпало со значением (6.14), полученным в примере 6.1.

Пример 6.3 Определить вертикальное и горизонтальное перемещения Δ_1, Δ_2 конца консоли, а также угол поворота Δ_3 жесткого узла рамы, показанной на рисунке 6.21, а. Жесткости участков различны ($EJ, 2EJ$).

В формуле Мора будем учитывать только изгибающие моменты. Построим эпюру M_p от заданной нагрузки. Далее по направлению перемещения Δ_1 (вертикально вверх) приложим единичную силу и построим эпюру \bar{M}_1 (рисунок 6.21, б).

Перемещение Δ_1 равно результату перемножения эпюр M_p и \bar{M}_1 . На двух горизонтальных участках используем формулу (6.18), на вертикальном – способ Верещагина (6.16):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \int_s \frac{M_p \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{a}{6EJ} \cdot 2 \cdot Pa(-a) + \\ &+ \frac{a}{6EJ} [2 \cdot Pa \cdot 2a + 2 \cdot Pa(-a) + 2 \cdot Pa \cdot a + Pa(-2a)] + \frac{1}{2EJ} \Omega \cdot y_{c1} = \\ &= -\frac{Pa^3}{6EJ} + \frac{1}{2EJ} Pa \cdot 2a \cdot 2a = \frac{11Pa^3}{6EJ}. \end{aligned}$$

Приложим единичную силу по направлению горизонтального перемещения Δ_2 (влево) и построим эпюру \bar{M}_2 (рисунок 6.21, в). Искомое перемещение равно результату перемножения эпюр M_p и \bar{M}_2 :

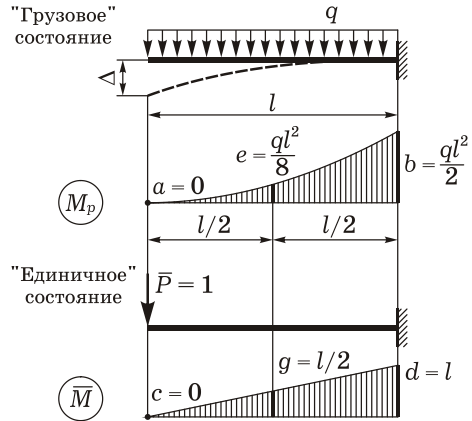


Рисунок 6.20

$$\Delta_2 = \int_s \frac{M_p \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \Omega \cdot y_{C_2} = \frac{1}{2EJ} Pa \cdot 2a \cdot a = \frac{Pa^3}{EJ}.$$

Приложим единичный момент к жесткому узлу рамы – по направлению перемещения Δ_3 и построим эпюру \bar{M}_3 (рисунок 6.21, з). Угол поворота узла найдем, перемножив эпюры M_p и \bar{M}_3 :

$$\Delta_3 = \int_s \frac{M_p \bar{M}_3}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \Omega \cdot y_{C_2} = \frac{1}{2EJ} Pa \cdot 2a \cdot 1 = \frac{Pa^2}{EJ}.$$

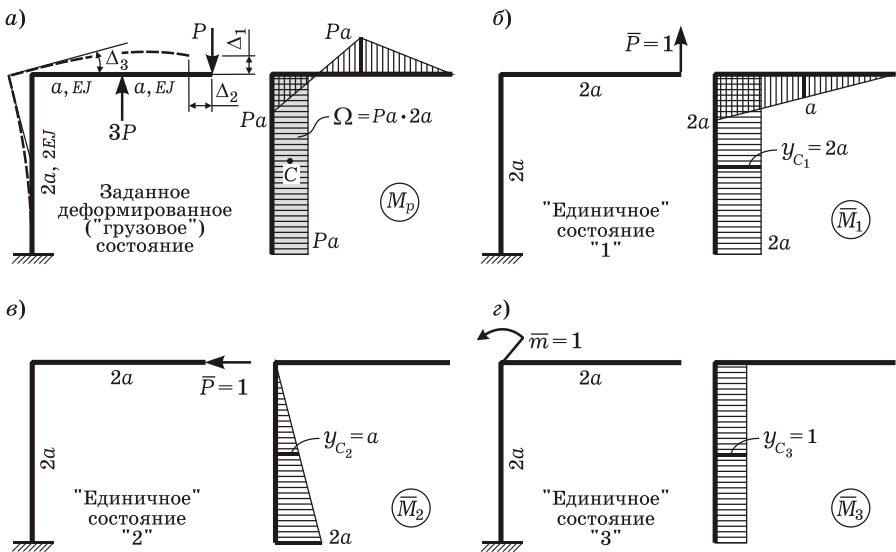


Рисунок 6.21

Все перемещения положительны, следовательно, их направления на расчетной схеме (см. рисунок 6.21, а) показаны верно. Они совпадают с направлениями вспомогательных единичных силовых факторов.

Пример 6.4 Определить горизонтальное перемещение Δ конца консоли пространственного бруса (рисунок 6.22). Средний элемент имеет прямоугольное поперечное сечение с размерами $h, b = h/2$, крайние – круглое диаметром h . Система координат, связанная с сечением каждого отдельного стержня, показана на рисунке 6.22, а. Брус выполнен из стали с $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 0,769 \cdot 10^{11}$ Па. Перемещение найти в общем виде, а также при $q = 3$ кН/м; $a = 1$ м; $h = 0,1$ м.

Будем пренебрегать поперечными и продольными силами, учитывая в формуле (6.10) только изгибающие M_x, M_y и крутящие M_z моменты. Построим соответствующие эпюры в заданном деформированном («грузо-

вом») состоянии (см. рисунок 6.22, а), а также в «единичном» состоянии, приложив по направлению искомого перемещения силу $\bar{P}=1$ (рисунок 6.22, б).

Перемножение эпюр будем выполнять способом Симпсона. Для участка I результат перемножения нулевой, так как грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов расположены в разных плоскостях, а кротящие моменты отсутствуют.

Для участка II ненулевой результат дают только эпюры M_{xp}, \bar{M}_x в вертикальной плоскости (серая заливка), так как изгибающий момент в горизонтальной плоскости $\bar{M}_y = 0$, а также крутящий момент $\bar{M}_z = 0$.

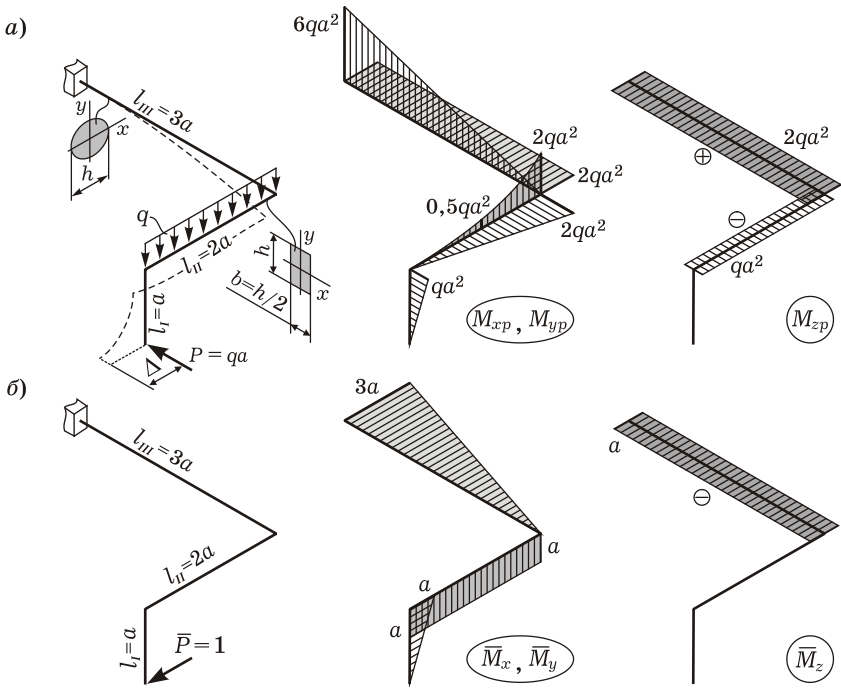


Рисунок 6.22

На участке III одновременно имеются эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости M_{yp}, \bar{M}_y и крутящих моментов M_{zp}, \bar{M}_z (серая заливка). В вертикальной плоскости момент $\bar{M}_x = 0$.

С учетом этого

$$\Delta = \int_s \frac{M_{xp} \bar{M}_x}{EJ_x} ds + \int_s \frac{M_{yp} \bar{M}_y}{EJ_y} ds + \int_s \frac{M_{zp} \bar{M}_z}{GJ_p} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{l_{II}}{6EJ_x^{II}} [0 \cdot (-a) + 4 \cdot 0,5qa^2 \cdot (-a) + 2qa^2 \cdot (-a)] + \\
&\quad + \frac{l_{III}}{6EJ_y^{III}} [2qa^2 \cdot 0 + 4 \cdot 2qa^2 \cdot 1,5a + 2qa^2 \cdot 3a] + \\
&\quad + \frac{l_{III}}{6GJ_p^{III}} [2qa^2 \cdot (-a) + 4 \cdot 2qa^2 \cdot (-a) + 2qa^2 \cdot (-a)] = \\
&= -\frac{l_{II}}{6EJ_x^{II}} (-4qa^3) + \frac{l_{III}}{6EJ_y^{III}} 18qa^3 + \frac{l_{III}}{6GJ_p^{III}} (-12qa^3) = \\
&= -\frac{2a \cdot 24}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} h^4} (-4qa^3) + \frac{3a \cdot 64}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \pi h^4} \cdot 18qa^3 + \\
&\quad + \frac{3a \cdot 32}{6 \cdot 0,769 \cdot 10^{11} \pi h^4} (-12qa^3) = -\frac{3,80qa^4}{10^{11} h^4} \left(\frac{1}{\Pi a} \right),
\end{aligned}$$

где длины участков $l_{II} = 2a$; $l_{III} = 3a$, моменты инерции

$$J_x^{II} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(h/2)h^3}{12} = \frac{h^4}{24}; \quad J_y^{III} = \frac{\pi h^4}{64}; \quad J_p^{III} = \frac{\pi h^4}{32}.$$

При $q = 3$ кН/м; $a = 1$ м; $h = 0,1$ м искомое перемещение

$$\Delta = -\frac{3,80qa^4}{10^{11} h^4} = -\frac{3,80 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 1^4}{10^{11} \cdot 0,1^4} = -1,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Знак «минус» обозначает, что направление перемещения в действительности противоположно направлению единичной силы, т. е. конец консоли смещается не влево, а вправо (см. рисунок 6.22, а).

Пример 6.5 Определить полное удлинение стержня постоянного поперечного сечения (жесткость $EA = \text{const}$) (рисунок 6.23).

Стержень работает на растяжение-сжатие, в его сечениях возникают только продольные силы. Построим эпюру N_p в «грузовом» состоянии, а также эпюру \bar{N} в «единичном» состоянии, приложив к концу стержня силу $\bar{P} = 1$ (см. рисунок 6.23).

Перемещение найдем по формуле Мора (6.8), в которой ненулевым будет только первое слагаемое. Постоянную жесткость вынесем за знак интеграла. Перемножение эпюр выполняем способом Симпсона на двух участках длиной $2a$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{EA} \int_S N_p \bar{N} ds = \frac{2a}{6EA} [-pa \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + pa \cdot 1] + \\
&\quad + \frac{2a}{6EA} [pa \cdot 1 + 4 \cdot pa \cdot 1 + pa \cdot 1] = \frac{2pa^2}{EA}.
\end{aligned}$$

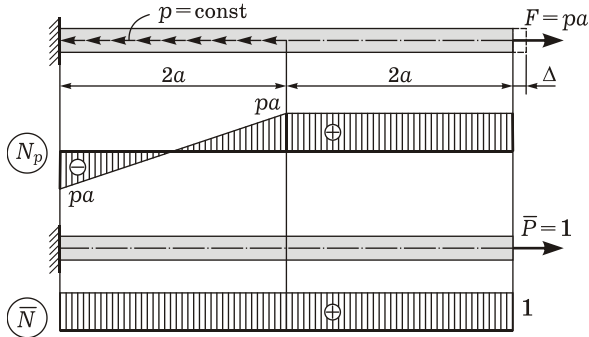


Рисунок 6.23

Полученное перемещение положительно, значит, стержень действительно удлиняется, а не укорачивается.

Пример 6.6 Определить полное удлинение стержня переменного поперечного сечения (рисунок 6.24).

Построим эпюры N_p и \bar{N} в «грузовом» и «единичном» состояниях (см. рисунок 6.24), которые совпадают с аналогичными эпюрами стержня постоянного сечения из предыдущего примера. Далее построим эпюру N_p/EA , разделив значения N_p в поперечных сечениях на их жесткости.

Перемножение эпюр выполняем способом Симпсона на двух участках длиной $2a$:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_s \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds = \int_s \left(\frac{N_p}{EA} \right) \bar{N} ds = \frac{2a}{6} \left[\frac{-pa}{3EA} \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + \frac{pa}{2EA} \cdot 1 \right] + \\ &+ \frac{2a}{6} \left[\frac{pa}{2EA} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{2pa}{3EA} \cdot 1 + \frac{pa}{EA} \cdot 1 \right] = \frac{13pa^2}{9EA} = 1,4444 \frac{pa^2}{EA}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция N_p/EA – не квадратичная, поэтому результат получился приближенным. Проверим его, в два раза уменьшив участки, на которых применяется способ Симпсона. Для этого найдем средние ординаты каждого из участков длиной a (рисунок 6.25).

Перемножаем эпюры N_p/EA и \bar{N} способом Симпсона на четырех участках длиной a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_s \left(\frac{N_p}{EA} \right) \bar{N} ds = \frac{a}{6} \left[\frac{-pa}{3EA} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{-10pa}{55EA} \cdot 1 + 0 \cdot 1 \right] + \\ &+ \frac{a}{6} \left[0 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{10pa}{45EA} \cdot 1 + \frac{pa}{2EA} \cdot 1 \right] + \frac{a}{6} \left[\frac{pa}{2EA} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{100pa}{175EA} \cdot 1 + \frac{2pa}{3EA} \cdot 1 \right] + \\ &+ \frac{a}{6} \left[\frac{2pa}{3EA} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{100pa}{125EA} \cdot 1 + \frac{pa}{EA} \cdot 1 \right] = 1,4412 \frac{pa^2}{EA}. \end{aligned}$$

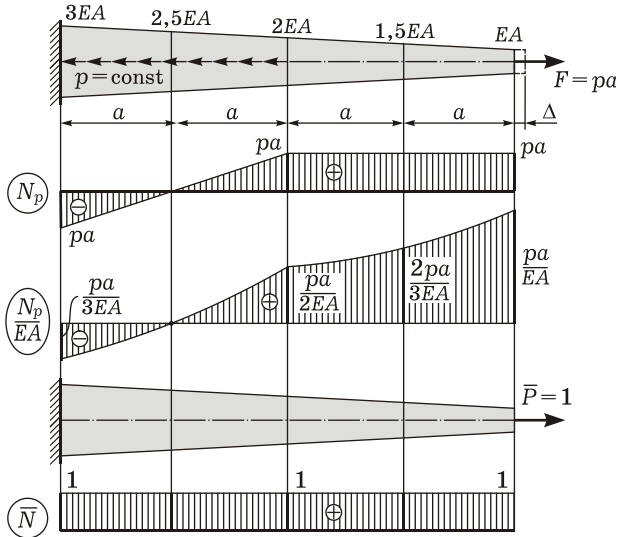


Рисунок 6.24

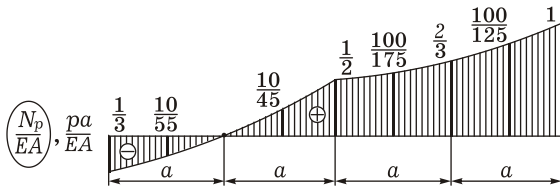


Рисунок 6.25

Результат практически совпал с ранее полученным.

Определим точное значение искомого перемещения. На участке I (с распределенной нагрузкой)

$$N_p^I = -pa + pz; \quad \bar{N}^I = 1; \quad EA^I(z) = EA[-z/(2a) + 3];$$

$$\Delta^I = \int_0^{2a} \frac{2a N_p^I \bar{N}^I}{EA^I} dz = \int_0^{2a} \frac{p(z-a) \cdot 1}{EA[-z/(2a) + 3]} dz = -\frac{2pa^2}{EA} \left(10 \ln 2 + 2 - 5 \ln \frac{2}{3} \right).$$

На участке II (без распределенной нагрузки)

$$N_p^{II} = pa; \quad \bar{N}^{II} = 1; \quad EA^{II}(z) = EA[-z/(2a) + 2];$$

$$\Delta^{II} = \int_0^{2a} \frac{2a N_p^{II} \bar{N}^{II}}{EA^{II}} dz = \int_0^{2a} \frac{pa \cdot 1}{EA[-z/(2a) + 2]} dz = \frac{2pa^2}{EA} \ln 2.$$

Суммируя, получаем

$$\Delta = \Delta^I + \Delta^{II} = \frac{2pa^2}{EA} \left(\ln 2 - 10 \ln 2 - 2 + 5 \ln \frac{2}{3} \right) = 1,440945 \frac{pa^2}{EA}.$$

Сравнивая точное значение с приближенными, делаем вывод, что применение способа Симпсона дает результат достаточной точности.

Пример 6.7 Требуется определить прогибы верхнего и нижнего поясов фермы Δ_1 и Δ_2 (рисунок 6.26, а). Жесткости поясов и раскосов – EA , стоек – $2EA$.

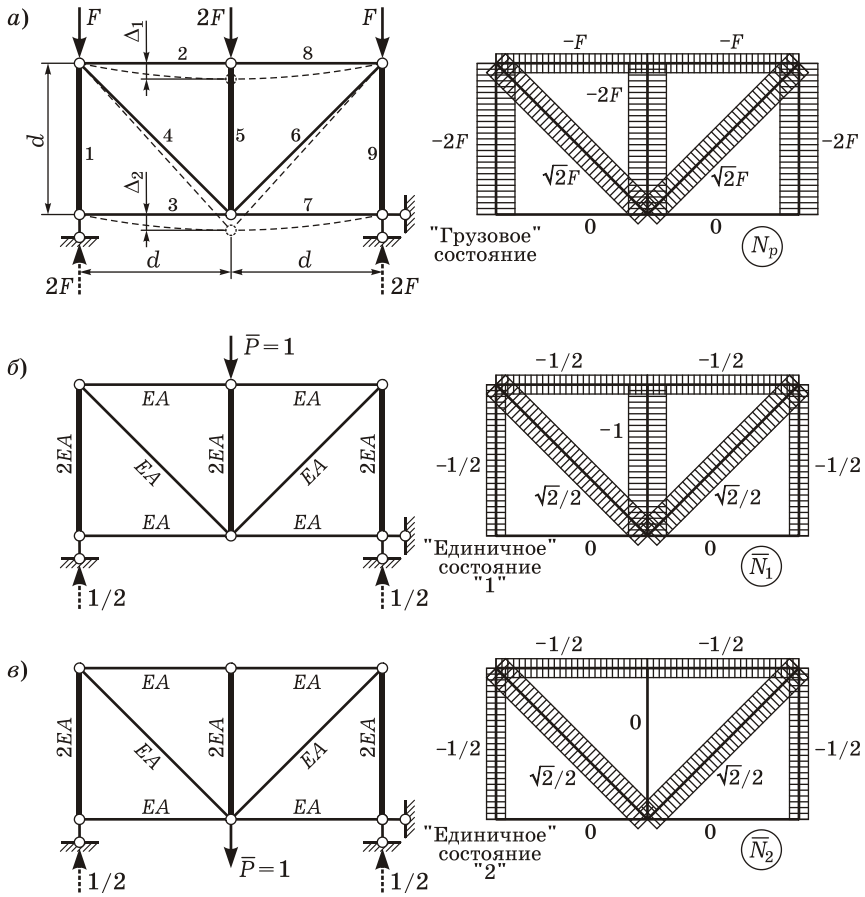


Рисунок 6.26

Найдем продольные силы в стержнях $N_p^{(i)}$ в заданном «грузовом» состоянии ($i = 1, \dots, 9$ – номер стержня), вырезав узлы (рисунок 6.27, а):

$$N_p^{(1)} = -2F; \quad N_p^{(3)} = 0;$$

$$N_p^{(4)} = (-N_p^{(1)} - F) / \sin 45^\circ = (2F - F) / (\sqrt{2} / 2) = \sqrt{2}F;$$

$$N_p^{(2)} = -N_p^{(4)} \sin 45^\circ = -\sqrt{2}F(\sqrt{2} / 2) = -F; \quad N_p^{(5)} = -2F;$$

из условий симметрии фермы

$$N_p^{(6)} = N_p^{(4)} = \sqrt{2}F; \quad N_p^{(7)} = N_p^{(3)} = 0;$$

$$N_p^{(8)} = N_p^{(2)} = -F; \quad N_p^{(9)} = N_p^{(1)} = -2F.$$

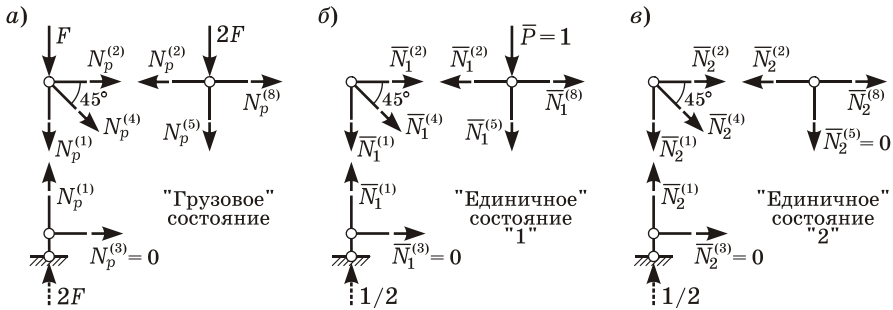


Рисунок 6.27

Для определения прогиба Δ_1 сформируем «единичное» состояние «1»: к среднему узлу верхнего пояса приложим единичную силу (рисунок 6.26, б) и найдем продольные силы в стержнях фермы $\bar{N}_1^{(i)}$, вырезав узлы (рисунок 6.27, б):

$$\bar{N}_1^{(1)} = -1/2; \quad \bar{N}_1^{(3)} = 0; \quad \bar{N}_1^{(4)} = -\bar{N}_1^{(1)} / \sin 45^\circ = (-1/2) / (\sqrt{2} / 2) = -\sqrt{2} / 2;$$

$$\bar{N}_1^{(2)} = -\bar{N}_1^{(4)} \sin 45^\circ = (\sqrt{2} / 2)(\sqrt{2} / 2) = 1/2; \quad \bar{N}_1^{(5)} = -1;$$

из условий симметрии

$$\bar{N}_1^{(6)} = \bar{N}_1^{(4)} = -\sqrt{2} / 2; \quad \bar{N}_1^{(7)} = \bar{N}_1^{(3)} = 0;$$

$$\bar{N}_1^{(8)} = \bar{N}_1^{(2)} = 1/2; \quad \bar{N}_1^{(9)} = \bar{N}_1^{(1)} = -1/2.$$

Длины и жесткости стержней

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_5 = l_7 = l_8 = l_9 = d; \quad l_6 = l_6 = \sqrt{2}d;$$

$$EA_1 = EA_5 = EA_9 = 2EA; \quad EA_2 = EA_3 = EA_4 = EA_6 = EA_7 = EA_8 = EA.$$

Используя формулу (6.15), найдем прогиб Δ_1 :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum_{i=1}^9 \frac{N_p^{(i)} \bar{N}_1^{(i)}}{EA_i} l_i = \frac{(-2F)(-1/2)}{2EA} d + \frac{(-F)1/2}{EA} d + \frac{0 \cdot 0}{EA} d + \frac{\sqrt{2F}\sqrt{2}/2}{EA} \sqrt{2}d + \\ &+ \frac{(-2F)(-1)}{2EA} d + \frac{\sqrt{2F}\sqrt{2}/2}{EA} \sqrt{2}d + \frac{0 \cdot 0}{EA} d + \frac{(-F)1/2}{EA} d + \frac{(-2F)(-1/2)}{2EA} d = \\ &= (3 + 2\sqrt{2}) \frac{Fd}{EA}.\end{aligned}$$

Для определения прогиба Δ_2 сформируем «единичное» состояние «2»: к среднему узлу нижнего пояса приложим единичную силу (рисунок 6.26, в) и найдем продольные силы в стержнях фермы $\bar{N}_2^{(i)}$, вырезав узлы (рисунок 6.27, в):

$$\begin{aligned}\bar{N}_2^{(1)} &= -1/2; \quad \bar{N}_2^{(3)} = 0; \quad \bar{N}_2^{(4)} = -\bar{N}_2^{(1)} / \sin 45^\circ = (-1/2) / (\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}/2; \\ \bar{N}_2^{(2)} &= -\bar{N}_2^{(4)} \sin 45^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2) = 1/2; \quad \bar{N}_2^{(5)} = 0;\end{aligned}$$

из условий симметрии

$$\begin{aligned}\bar{N}_2^{(6)} &= \bar{N}_2^{(4)} = -\sqrt{2}/2; \quad \bar{N}_2^{(7)} = \bar{N}_2^{(3)} = 0; \\ \bar{N}_2^{(8)} &= \bar{N}_2^{(2)} = 1/2; \quad \bar{N}_2^{(9)} = \bar{N}_2^{(1)} = -1/2.\end{aligned}$$

Используя формулу (6.15), найдем прогиб Δ_2 :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \sum_{i=1}^9 \frac{N_p^{(i)} \bar{N}_2^{(i)}}{EA_i} l_i = \frac{(-2F)(-1/2)}{2EA} d + \frac{(-F) \cdot 1/2}{EA} d + \frac{0 \cdot 0}{EA} d + \frac{\sqrt{2F} \cdot \sqrt{2}/2}{EA} \sqrt{2}d + \\ &+ \frac{(-2F) \cdot 0}{2EA} d + \frac{\sqrt{2F} \cdot \sqrt{2}/2}{EA} \sqrt{2}d + \frac{0 \cdot 0}{EA} d + \frac{(-F) \cdot 1/2}{EA} d + \frac{(-2F)(-1/2)}{2EA} d = \\ &= (2 + 2\sqrt{2}) \frac{Fd}{EA}.\end{aligned}$$

Заметим, что прогибы поясов Δ_2 и Δ_1 отличаются на $-Fd/(EA)$ – величину укорочения средней стойки, которую также можно найти по формуле сопротивления материалов

$$\Delta l_5 = \frac{N_p^{(5)} l_5}{EA_5} = \frac{-2F \cdot d}{2EA} = -\frac{Fd}{EA}.$$

6.7 Перемещения, вызванные изменением температуры

В статически определимых системах тепловое воздействие вызывает удлинение или укорочение элементов и их искривление, но внутренние усилия при этом отсутствуют. В статически неопределимых системах от изменения температуры возникают внутренние усилия.

6.7.1 Формула для перемещений в плоской статически определимой системе от температурного воздействия. Допустим, стержни некоторой плоской статически определимой системы нагреваются неравномерно по высоте поперечного сечения, в результате чего система деформируется (рисунок 6.28, а). Внутренние усилия при этом не возникают.

Из формулы (6.3) получим соотношение, позволяющее найти перемещение Δ , вызванное изменением температуры.

Вырежем из системы малый элемент ds , левое сечение которого условно примем за неподвижное (рисунок 6.28, б).

Обозначим: t_1 , t_2 – приращение температуры крайних волокон (по отношению к некоторой начальной температуре), причем $t_1 > t_2$. Будем считать, что поток тепла через элемент ds установился неизменным во времени и температура изменяется линейно по высоте сечения (рисунок 6.28, в). Тогда удлинения волокон элемента ds также изменяются линейно, и поперечные сечения остаются плоскими, перемещаясь поступательно и поворачиваясь друг относительно друга.

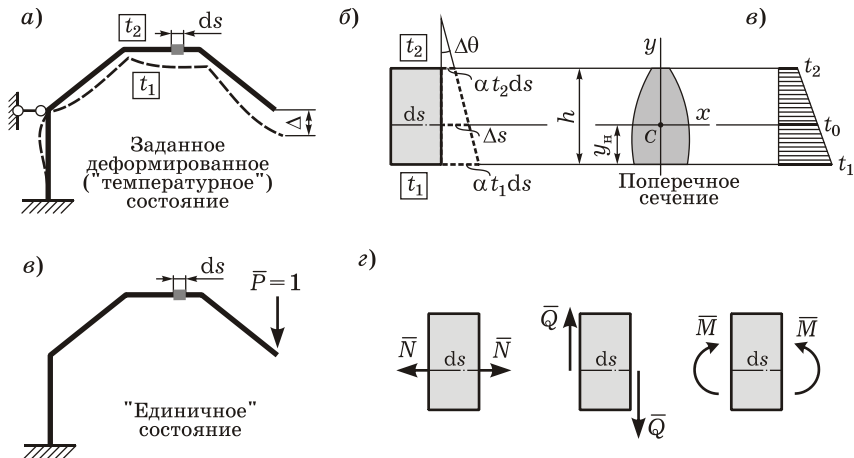


Рисунок 6.28

Известно [16], что температурное удлинение стержня длиной l

$$\Delta l = \alpha t_0 l,$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения материала; t_0 – приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения.

По аналогии, удлинение элемента ds

$$\Delta s = \alpha t_0 ds.$$

Крайние волокна удлиняются соответственно на $\alpha t_1 ds$ и $\alpha t_2 ds$ (см. рисунок 6.28, б). Угол взаимного поворота сечений θ выражается через разность приращений температур крайних волокон:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha t_1 ds - \alpha t_2 ds}{h} = \frac{\alpha(t_1 - t_2) ds}{h} = \frac{\alpha \Delta t ds}{h},$$

где $\Delta t = t_1 - t_2$; h – высота поперечного сечения.

Взаимный сдвиг сечений элемента ds при изменении температуры не возникает: $\Delta y = 0$.

Подставляя найденные значения в формулу (6.3), получим:

$$\Delta = \int_S (\bar{N}\Delta s + \bar{Q}\Delta y + \bar{M}\Delta\theta) = \int_S \alpha t_0 \bar{N} ds + \int_S \frac{\alpha \Delta t}{h} \bar{M} ds, \quad (6.21)$$

где \bar{N} , \bar{M} – внутренние усилия в «единичном» состоянии – от единичной силы $\bar{P} = 1$, приложенной в направлении искомого перемещения Δ (рисунок 6.28, з, д).

Формула (6.21) позволяет определить перемещения точек стержневой системы, вызванные изменением ее температуры. В общем случае по длине оси S могут изменяться приращения температуры t_1 , t_2 , высота сечения h , а также коэффициент α .

Приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения t_0 (см. рисунок 6.28) выражается через t_1 и t_2 следующим образом:

$$t_0 = t_2 + \frac{t_1 - t_2}{h} y_n, \quad (6.22)$$

где y_n – расстояние от центра тяжести до нижних волокон.

6.7.2 Частные случаи. Если система состоит из прямолинейных участков постоянного поперечного сечения ($h = \text{const}$), выполненных из одного материала ($\alpha = \text{const}$), а приращения температуры t_1 , t_2 постоянны по длине каждого участка, то из (6.21) следует:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_i \alpha_i t_0^{(i)} \int_{S_i} \bar{N} ds_i + \sum_i \frac{\alpha_i \Delta t^{(i)}}{h_i} \int_{S_i} \bar{M} ds_i = \\ &= \sum_i \alpha_i t_0^{(i)} \Omega_{\bar{N}}^{(i)} + \sum_i \frac{\alpha_i \Delta t^{(i)}}{h_i} \Omega_{\bar{M}}^{(i)}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где α_i – коэффициент линейного теплового расширения материала i -го участка; h_i – высота поперечного сечения стержня на i -м участке; $t_0^{(i)}, \Delta t^{(i)}$ – приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения и разность приращений температур i -го участка; $\Omega_{\bar{N}}^{(i)}, \Omega_{\bar{M}}^{(i)}$ – площади единичных эпюр \bar{N} и \bar{M} на i -м участке (с учетом знака):

$$\Omega_{\bar{N}}^{(i)} = \int_{S_i} \bar{N} ds_i ; \quad \Omega_{\bar{M}}^{(i)} = \int_{S_i} \bar{M} ds_i .$$

Суммирование производится по всем участкам системы.

При определении температурных перемещений по формулам (6.21) и (6.23) используем следующее *правило знаков*:

- первое слагаемое (учитывающее N) положительно, если на участке $t_0 > 0$, и продольная сила $\bar{N} > 0$;
- второе слагаемое (учитывающее M) положительно, если эпюра \bar{M} , построенная на растянутых волокнах, находится со стороны большей температуры.

То есть, если деформации участка от изменения температуры и от единичного усилия $P=1$ аналогичны, то соответствующее слагаемое будет положительным и наоборот.

Для сечений, симметричных относительно двух осей x и y , (например, прямоугольное, круглое сечения), расстояние от центра тяжести до нижних волокон $y_n = h/2$. Тогда формула (6.22) упрощается:

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} . \quad (6.24)$$

Заметим, что при определении температурных перемещений в балках и рамах *нельзя пренебрегать первым слагаемым* формул (6.21) и (6.23), учитывающим продольную силу, так как его «вклад» в перемещение составляет порядка 10 % от общего значения.

6.7.3 Примеры вычисления перемещений от температурных воздействий в статически определимых системах.

Пример 6.8 Для рамы (рисунок 6.29, а) найти вертикальное и горизонтальное перемещения Δ_1 и Δ_2 , вызванные изменением начальной температуры внутреннего контура на 20 °С, а наружного – сверху на 10 °С, справа – на 30 °С. Нумерация участков 1, 2, 3 показана на рисунке. Сечение всех элементов прямоугольное, высота сечения вертикальных стержней $h_1 = h_3 = 0,2a$, горизонтального $h_2 = 0,1a$. Коэффициент линейного теплового расширения материала α для всей рамы постоянный.

Обозначим $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – соответственно большее и меньшее приращение температур i -го участка ($i = 1, 2, 3$) (рисунок 6.29, б). Вычислим для каждого участка $t_0^{(i)} = (t_1^{(i)} + t_2^{(i)})/2$ по формуле (6.24) и $\Delta t^{(i)} = t_1^{(i)} - t_2^{(i)}$:

$$t_0^{(1)} = \frac{t_1^{(1)} + t_2^{(1)}}{2} = \frac{20 + 0}{2} = 10 \text{ }^\circ\text{C}; \quad \Delta t^{(1)} = t_1^{(1)} - t_2^{(1)} = 20 - 0 = 20 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_0^{(2)} = \frac{t_1^{(2)} + t_2^{(2)}}{2} = \frac{20 + 10}{2} = 15 \text{ }^\circ\text{C}; \quad \Delta t^{(2)} = t_1^{(2)} - t_2^{(2)} = 20 - 10 = 10 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_0^{(3)} = \frac{t_1^{(3)} + t_2^{(3)}}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25 \text{ }^\circ\text{C}; \quad \Delta t^{(3)} = t_1^{(3)} - t_2^{(3)} = 30 - 20 = 10 \text{ }^\circ\text{C}.$$

По направлению искомого перемещения Δ_1 приложим единичную силу и построим от нее единичные эпюры \bar{N}_1 и \bar{M}_1 (рисунок 6.29, в). Найдем площади единичных эпюр на участках:

$$\Omega_{\bar{N}_1}^{(1)} = -1 \cdot 2a = -2a; \quad \Omega_{\bar{N}_1}^{(2)} = 0; \quad \Omega_{\bar{N}_1}^{(3)} = 1 \cdot 2a = 2a;$$

$$\Omega_{\bar{M}_1}^{(1)} = 0; \quad \Omega_{\bar{M}_1}^{(2)} = 3a \cdot 3a / 2 = 4,5a^2; \quad \Omega_{\bar{M}_1}^{(3)} = 3a \cdot 2a = 6a^2.$$

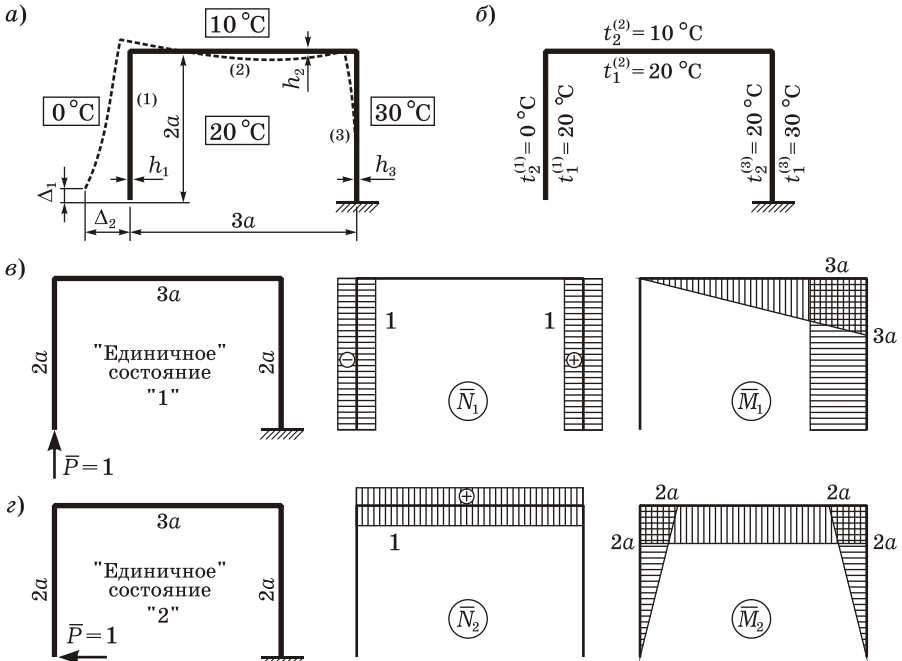


Рисунок 6.29

По формуле (6.23), вынося постоянный коэффициент a за знак каждой суммы, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \alpha \sum_{i=1}^3 t_0^{(i)} \Omega_{N_1}^{(i)} + \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta t^{(i)}}{h_i} \Omega_{M_1}^{(i)} = \\ &= \alpha [10(-2a) + 15 \cdot 0 + 25 \cdot 2a] + \alpha \left[\frac{20}{0,2a} \cdot 0 + \frac{10}{0,1a} \cdot 4,5a^2 - \frac{10}{0,2a} \cdot 6a^2 \right] = \\ &= 180\alpha \text{ (}^\circ\text{C)}. \end{aligned}$$

Заметим, что знаки «минус» у слагаемых появляются тогда, когда деформации участка от изменения температуры и от единичной силы противоположны. На первом участке продольная сила отрицательная (сжимающая), а $t_0^{(1)}$ положительно (вызывает растяжение), поэтому первое слагаемое в первой скобке отрицательно. На третьем участке растянуты левые волокна (эпюра моментов слева), а большее приращение температуры (30°C) – справа, поэтому третье слагаемое во второй скобке отрицательно.

По направлению перемещения Δ_2 приложим единичную силу и построим от нее единичные эпюры N_2 и M_2 (рисунок 6.29, з). Найдем площади единичных эпюр на участках:

$$\begin{aligned} \Omega_{N_2}^{(1)} &= 0; & \Omega_{N_2}^{(2)} &= 1 \cdot 3a = 3a; & \Omega_{N_2}^{(3)} &= 0; \\ \Omega_{M_2}^{(1)} &= \Omega_{M_2}^{(3)} = 2a \cdot 2a / 2 = 2a^2; & \Omega_{M_2}^{(2)} &= 2a \cdot 3a = 6a^2. \end{aligned}$$

По формуле (6.23) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \alpha \sum_{i=1}^3 t_0^{(i)} \Omega_{N_2}^{(i)} + \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta t^{(i)}}{h_i} \Omega_{M_2}^{(i)} = \\ &= \alpha [10 \cdot 0 + 15 \cdot 3a + 25 \cdot 0] + \alpha \left[\frac{20}{0,2a} \cdot 2a^2 + \frac{10}{0,1a} \cdot 6a^2 - \frac{10}{0,2a} \cdot 2a^2 \right] = \\ &= 745\alpha \text{ (}^\circ\text{C)}. \end{aligned}$$

Заметим, что на третьем участке растянуты левые волокна (эпюра моментов слева), а большее приращение температуры (30°C) справа, поэтому третье слагаемое во второй скобке отрицательно.

Оба перемещения положительны, следовательно, их направления совпадают с направлениями приложенных единичных сил. На расчетной схеме (см. рисунок 6.29, а) они показаны верно.

Пример 6.9 Для рамы (рисунок 6.30, а) найти перемещение Δ , вызванное повышением начальной температуры внутреннего контура на 10°C , а наружного – понижением на 20°C . Сечения стержней 1, 2 симметричны относительно двух осей, высота сечения одинакова $h = 0,1l$, коэффициент линейного теплового расширения материала α для всей рамы постоянный.

Обозначим $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ – соответственно большее и меньшее приращения температур i -го участка ($i = 1, 2$) (рисунок 6.30, б). Для обеих стержней эти приращения одинаковы. Вычислим температурные множители:

$$t_0 = t_0^{(1,2)} = \frac{t_1^{(1,2)} + t_2^{(1,2)}}{2} = \frac{10 + (-20)}{2} = -5 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$\Delta t = \Delta t^{(1,2)} = t_1^{(1,2)} - t_2^{(1,2)} = 10 - (-20) = 30 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

По направлению перемещения Δ приложим единичную силу \bar{P} , определим опорные реакции и построим единичные эпюры \bar{N} и \bar{M} (рисунок 6.30, в). Найдем площади единичных эпюр на участках:

$$\Omega_{\bar{N}}^{(1)} = (1/2) \cdot l = l/2; \quad \Omega_{\bar{N}}^{(2)} = 1 \cdot 2l = 2l;$$

$$\Omega_{\bar{M}}^{(1)} = l \cdot l/2 = l^2/2; \quad \Omega_{\bar{M}}^{(2)} = l \cdot 2l/2 = l^2.$$

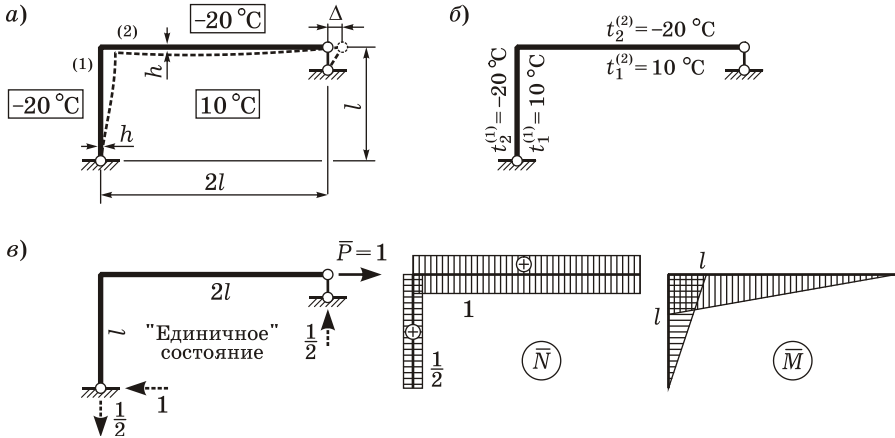


Рисунок 6.30

По формуле (6.23) получаем:

$$\Delta = \sum_{i=1}^2 \alpha_i t_0^{(i)} \Omega_{\bar{N}}^{(i)} + \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i \Delta t^{(i)}}{h_i} \Omega_{\bar{M}}^{(i)} = \alpha t_0 (\Omega_{\bar{N}}^{(1)} + \Omega_{\bar{N}}^{(2)}) + \frac{\alpha \Delta t}{h} (\Omega_{\bar{M}}^{(1)} + \Omega_{\bar{M}}^{(2)}) =$$

$$= \alpha(-5)(l/2 + 2l) + \frac{\alpha \cdot 30}{0,1l} (l^2/2 + l^2) =$$

$$= \alpha l (-12,5 + 450) = 437,5 \alpha l \text{ } (^\circ\text{C}).$$

Первое слагаемое отрицательно, так как $t_0 < 0$, а эпюра \bar{N} положительна на обоих участках, т. е. изменение температуры вызывает укорочение стержней, а действие единичной силы – их удлинение. Второе

слагаемое положительно, так как эпюра \bar{M} находится на более теплых внутренних волокнах: и температурное воздействие, и единичная сила вызывают удлинение этих волокон.

6.7.4 Перемещения в плоской статически неопределимой системе от температурного воздействия. В статически неопределимых системах изменение температуры вызывает внутренние усилия. По аналогии с «грузовыми» усилиями в плоской системе N_p, Q_p, M_p будем их называть «температурными» и обозначать N_t, Q_t, M_t .

В упругих линейно деформируемых системах справедлив принцип суперпозиции. Тогда перемещения можно найти как сумму двух составляющих, из которых одно вызвано «температурными» усилиями и находится по формуле, аналогичной (6.8), а другое – по формуле (6.21):

$$\Delta = \int_S \frac{N_t \bar{N}}{EA} ds + \int_S \frac{Q_t \bar{Q}}{GA} ds + \int_S \frac{M_t \bar{M}}{EJ} ds + \int_S \alpha t_0 \bar{N} ds + \int_S \frac{\alpha \Delta t}{h} \bar{M} ds. \quad (6.25)$$

Методы определения «температурных» усилий в статически неопределимых стержневых системах будут рассмотрены далее.

6.8 Перемещения, вызванные смещением опор

Осадки опор сооружения могут быть вызваны просадкой грунта, размывом, оползнем и другими причинами, даже при отсутствии внешней нагрузки (случайные осадки опор), они также могут возникать под действием нагрузки в результате податливости основания. Иначе смещение опор сооружения называют *кинематическим воздействием* на систему.

6.8.1 Перемещения в статически определимых системах при случайной осадке опор. В статически определимых системах от осадок опор внутренние усилия не возникают, так как перемещения точек конструкции происходят без деформации элементов. Для простых систем новое положение точек можно определить из геометрии системы (рисунок 6.31). В более сложных случаях необходимо использовать метод Мора.

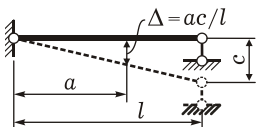


Рисунок 6.31

Пусть требуется найти перемещение Δ в статически определимой раме, у которой одна опора получила малые перемещения c_1 и c_2 (рисунок 6.32, а).

Согласно методу Мора сформируем вспомогательное «единичное» состояние: приложим по направлению искомого перемещения единичную силу $\bar{P}=1$. Обозначим возникающие опорные реакции R_1, R_2, R_3, R_4 (рисунок 6.32, б).

«Единичное» состояние является состоянием равновесия. Тогда, согласно принципу возможных перемещений (см. п. 2.2.1), сумма возможных работ сил этого состояния на любых возможных перемещениях должна быть равна нулю. В качестве возможных примем перемещения заданного состояния, указанные на рисунке 6.32, а. Они хотя и конечны, но малы по сравнению с размерами элементов и удовлетворяют связям.

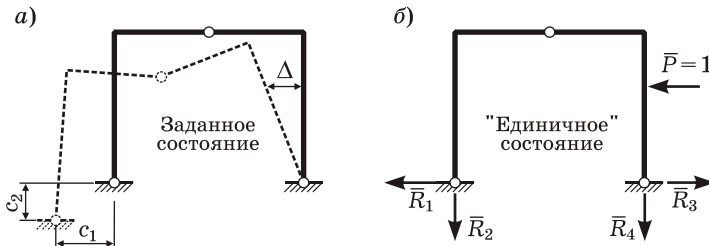


Рисунок 6.32

Внешние силы «единичного» состояния ($\bar{P}=1$ и опорные реакции) совершают на перемещениях заданного состояния возможную работу

$$A^{(e)} = \bar{P}\Delta + \bar{R}_1c_1 + \bar{R}_2c_2 = \Delta + \bar{R}_1c_1 + \bar{R}_2c_2.$$

Работа реакций \bar{R}_1 и \bar{R}_2 положительна, так как их направления совпадают с направлениями смещений c_1 и c_2 . Реакции \bar{R}_3 и \bar{R}_4 работу не совершают, так перемещения по их направлениям в заданном состоянии отсутствуют. Работа внутренних усилий $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ «единичного» состояния $A^{(i)} = 0$, так как в заданном состоянии система не деформируется.

Подставив соотношения для $A^{(e)}$ и $A^{(i)}$ в уравнение возможных работ $A^{(e)} + A^{(i)} = 0$, получим формулу для перемещения Δ :

$$\Delta = -\bar{R}_1c_1 - \bar{R}_2c_2.$$

В общем случае перемещение, вызванное осадкой опор,

$$\Delta = -\sum_i (\pm \bar{R}_i c_i), \quad (6.26)$$

где \bar{R}_i – реакция i -й опорной связи в «единичном» состоянии; c_i – заданное смещение i -й связи.

Правило знаков: в формуле (6.26) произведения $(\pm \bar{R}_i c_i)$ положительны, если направления реакций смещающихся опор в «единичном» состоянии совпадают с направлениями их смещений.

6.8.2 Перемещения в статически определимых системах при действии нагрузки, вызывающей осадки опор. На практике осадки опор чаще всего возникают под действием нагрузки, если грунтовое основание, на котором расположены опоры, обладает податливостью. В этом случае перемещения точек конструкции вызваны двумя причинами: и заданной внешней нагрузкой, и осадкой опор.

Для упругих линейно деформируемых систем можно использовать принцип суперпозиции. Тогда перемещения удобно находить как сумму двух составляющих, из которых одно вызвано внешней нагрузкой и определяется по формуле (6.8), а другое – по формуле (6.26):

$$\Delta = \int_s \frac{N_p \bar{N}}{EA} ds + \int_s \frac{\eta Q_p \bar{Q}}{GA} ds + \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds - \sum_i (\bar{R}_i c_i), \quad (6.27)$$

где N_p, Q_p, M_p – внутренние усилия в заданном деформированном состоянии (рисунок 6.33, а); $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – внутренние усилия в «единичном» состоянии (рисунок 6.33, б); EA, GA, EJ – жесткости при растяжении–сжатии, сдвиге и изгибе; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений при изгибе по сечению; \bar{R}_i – реакция i -й опорной связи в «единичном» состоянии; c_i – смещение i -й связи.

Правило знаков для произведений $\bar{R}_i c_i$ в соотношении (6.27) то же, что и в формуле (6.26).

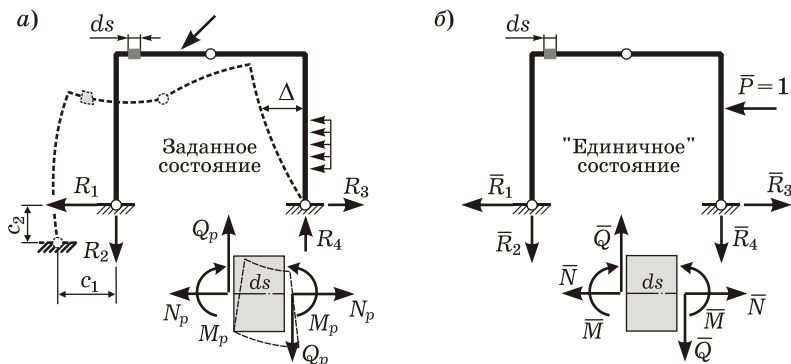


Рисунок 6.33

Если известен коэффициент податливости основания k , то осадки опор c_i часто выражаются через соответствующие опорные реакции R_i заданного состояния (см. рисунок 6.33, а):

$$c_i = kR_i.$$

Для балок и рам, работающих на изгиб, в формуле (6.27) допускается учитывать только изгибающие моменты.

6.8.3 Перемещения в статически неопределимых системах при случайной осадке опор. В статически неопределимых системах случайные осадки опор вызывают искривление стержней, при этом появляются внутренние усилия N_p, Q_p, M_p . Для расчета перемещений справедлива формула (6.27).

6.9 Теоремы о взаимности в строительной механике

6.9.1 Обозначения перемещений и работ. Рассмотрим два состояния линейно деформируемой системы, находящейся в равновесии (рисунок 6.34). В состоянии « i » действует сила P_i , в состоянии « k » – сила P_k .

Перемещения точек тела удобно обозначать символом Δ с двумя индексами. Первый индекс указывает место и направление перемещения, второй индекс – причину, вызвавшую это перемещение. Например, Δ_{ii} – перемещение точки i по направлению силы P_i от действия этой же силы; Δ_{ki} – перемещение точки k по направлению силы P_k от действия силы P_i .



Рисунок 6.34

Действительную работу совершают силы на перемещениях, вызванных этими же силами, возможную работу – силы на возможных перемещениях¹⁾. При возрастании от нуля до конечного значения сила P_i совершает на перемещении Δ_{ii} действительную работу $A_{ii} = \frac{1}{2}P_i \Delta_{ii}$ [15]. Сила P_i состояния « i » на перемещении Δ_{ik} состояния « k » совершает возможную работу $A_{ik} = P_i \Delta_{ik}$.

Под силами будем понимать обобщенные силы, которым соответствуют обобщенные перемещения (см. п. 6.1.3).

¹⁾ Упругие перемещения хотя и не бесконечно малы, но достаточно малы и удовлетворяют связям, поэтому их можно принять за возможные (см. п. 6.2.3).

6.9.2 Теорема о взаимности работ (Бетти). Эта теорема вытекает из принципа независимости действия сил и применима ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

Рассмотрим линейно деформируемую стержневую систему. Пусть сначала она нагружается силой P_i (рисунок 6.35, а). Эта сила совершит при своем возрастании от нуля до конечного значения работу $A_{ii} = \frac{1}{2}P_i\Delta_{ii}$. Далее приложим силу P_k . Она совершит работу $A_{kk} = \frac{1}{2}P_k\Delta_{kk}$. Но по мере роста этой силы точка i также получит перемещение Δ_{ik} , на котором сила P_i произведет работу $A_{ik} = P_i\Delta_{ik}$. Всего в результате суммарного нагружения силы P_i и P_k совершат работу

$$A_{ii} + A_{kk} + A_{ik} = \frac{1}{2}P_i\Delta_{ii} + \frac{1}{2}P_k\Delta_{kk} + P_i\Delta_{ik}, \quad (6.28)$$

которая накопится в виде потенциальной энергии деформации.

Изменим порядок нагружения, т. е. приложим сначала силу P_k , а потом P_i (рисунок 6.35, б). Тогда они произведут работу

$$A_{kk} + A_{ii} + A_{ki} = \frac{1}{2}P_k\Delta_{kk} + \frac{1}{2}P_i\Delta_{ii} + P_k\Delta_{ki}, \quad (6.29)$$

которая также перейдет в потенциальную энергию деформации.

Так как при упругой деформации конечное напряженно-деформированное состояние не зависит от порядка приложения нагрузок, то два выражения (6.28) и (6.29) должны быть равны. Сравнивая их, видим, что

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad (6.30)$$

т. е. работа силы P_i на перемещении точки ее приложения, вызванном действием силы P_k , равна работе силы P_k на перемещении точки ее приложения под действием силы P_i .

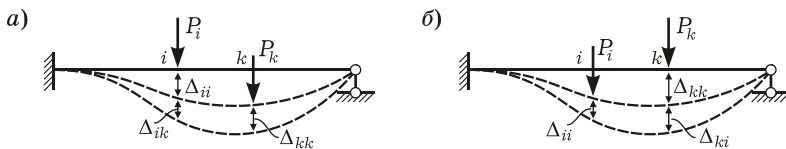


Рисунок 6.35

В общем случае можно сделать вывод, что *работа сил состояния «i» на перемещениях состояния «k» равна работе сил состояния «k» на перемещениях состояния «i».*

Это утверждение составляет содержание теоремы взаимности работ. Она носит имя итальянского ученого Энрико Бетти¹⁾ (1823–1892) и справедлива для работ как внешних, так и внутренних сил.

Из теоремы Бетти, как частный случай, вытекают другие теоремы взаимности строительной механики, широко используемые в расчетах сооружений.

6.9.3 Теорема о взаимности единичных перемещений (Максвелла). На основании теоремы о взаимности работ (6.30) работы $A_{ik} = P_i \Delta_{ik}$ и $A_{ki} = P_k \Delta_{ki}$ равны между собой:

$$P_i \Delta_{ik} = P_k \Delta_{ki}. \quad (6.31)$$

Перемещение Δ_{ik} можно представить как произведение вызвавшей его силы P_k на перемещение той же точки (i) от единичной силы, приложенной в направлении P_k : $\Delta_{ik} = P_k \delta_{ik}$. Аналогично $\Delta_{ki} = P_i \delta_{ki}$. С учетом этого, разделив обе части равенства (6.31) на произведение сил $P_i P_k$, получим

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (6.32)$$

т. е. перемещение по направлению силы P_i , вызванное единичной силой, приложенной в направлении P_k , равно перемещению по направлению силы P_k , вызванному единичной силой, приложенной в направлении P_i .

Это утверждение известно как теорема о взаимности единичных перемещений английского физика и механика Джеймса Максвелла (1831–1879). Она широко применяется в расчетах статически неопределимых систем методом сил, при построении линий влияния перемещений в стержневых сооружениях.

6.9.4 Теорема о взаимности единичных реакций в статически неопределимых системах (первая теорема Рэлея). Рассмотрим два состояния статически неопределимой стержневой системы. В каждом из них активные внешние силы отсутствуют, но заданы единичные перемещения i -й и k -й связей (рисунок 6.36), вызывающие деформацию системы. Возникнут реакции связей, которые будем рассматривать как внешние силы.

Работа сил состояния « i » на перемещениях состояния « k »

$$A_{ik} = r_{ki} \cdot 1 = r_{ki},$$

где r_{ki} – реакция связи k от единичного перемещения связи i .

¹⁾ Эта теорема была доказана Дж. Максвеллом в 1864 г. Но работа Максвелла осталась незамеченной, и Э. Бетти в 1872 г. сформулировал теорему взаимности работ независимо.

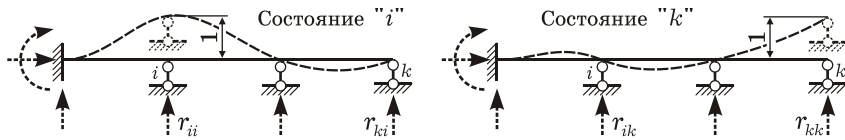


Рисунок 6.36

Другие реакции состояния « i » работу не совершают, так как из-за наличия связей по их направлениям в состоянии « k » перемещений нет.

Аналогично работа сил состояния « k » на перемещениях состояния « i »

$$A_{ki} = r_{ik} \cdot 1 = r_{ik},$$

где r_{ik} – реакция связи i от единичного перемещения связи k .

По теореме Бетти (6.30) $A_{ik} = A_{ki}$, следовательно,

$$r_{ki} = r_{ik}. \quad (6.33)$$

т. е., реакция k -й связи от единичного перемещения i -й связи равна реакции i -й связи от единичного перемещения k -й связи.

Так формулируется теорема о взаимности единичных реакций в статически неопределимых системах, известная как первая теорема английского физика Джона Рэля (1842–1919). Она широко применяется в расчетах статически неопределимых систем методом перемещений.

6.9.5 Теорема о взаимности единичных реакций и перемещений в статически неопределимых системах (вторая теорема Рэля). Рассмотрим два состояния упругой системы. В первом задано единичное перемещение связи i , а во втором – только одна внешняя сила $\bar{P}_k = 1$ (рисунок 6.37). Эти воздействия вызовут деформацию системы. Возникнут реакции связей, которые будем также рассматривать как внешние силы.

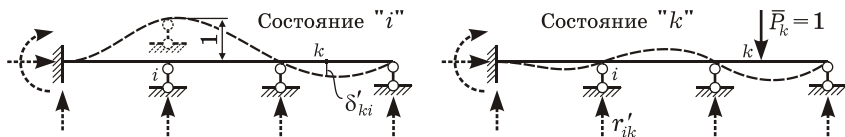


Рисунок 6.37

Работа сил состояния « i » на перемещениях состояния « k » $A_{ik} = 0$, так как в состоянии « i » силами являются только реакции, а по их направлениям в состоянии « k » перемещений нет из-за наличия связей (опор).

Работа сил состояния « k » на перемещениях состояния « i »

$$A_{ki} = r'_{ik} \cdot 1 + \bar{P}_k \delta'_{ki} = r'_{ik} + \delta'_{ki},$$

где r'_{ik} – реакция связи i , вызванная действием силы $\bar{P}_k = 1$; δ'_{ki} – перемещение по направлению силы \bar{P}_k , вызванное единичным смещением связи i .

Штрих в обозначениях имеет следующий смысл: r'_{ik} – это «реакция от силы», а не «реакция от перемещения», как r_{ik} ; δ'_{ki} – это «перемещение от перемещения», а не «перемещение от силы», как δ_{ki} .

По теореме Бетти (6.30) $A_{ik} = A_{ki}$, следовательно,

$$r'_{ik} + \delta'_{ki} = 0.$$

Отсюда

$$r'_{ik} = -\delta'_{ki}, \quad (6.34)$$

т. е. *единичная реакция связи i , вызванная силой $\bar{P}_k = 1$, равна единичному перемещению по направлению силы \bar{P}_k , вызванному единичным смещением связи i , взятому с обратным знаком.*

Так формулируется вторая теорема Рэлея о взаимности единичных реакций и перемещений. Она применяется в расчетах статически неопределимых систем смешанным методом.

7.1 Статически неопределимые системы и их свойства

7.1.1 Степень статической неопределимости. Напомним, что *статически неопределимыми* называются системы, в которых не все усилия (реакции опорных и внутренних связей) могут быть найдены из уравнений статического равновесия, так как количество неизвестных превышает количество независимых уравнений статики (см. п. 1.4.3).

Статически неопределимые системы содержат больше связей, чем необходимо для их геометрической неизменяемости. Напомним, что *избыточными*, или *лишними*, называются связи, которые можно удалить из конструкции без нарушения ее геометрической неизменяемости; *абсолютно необходимыми* – связи, удаление которых ведет к изменяемости системы (см. п. 1.8.2).

Пусть конструкция, имеющая лишние связи, находится под действием некоторой нагрузки. Удалим лишние связи так, чтобы система стала статически определимой. Реакциям отброшенных связей дадим какие угодно значения. Эти реакции можно рассматривать как внешние силы, которые вместе с заданной нагрузкой образуют полную нагрузку полученного статически определимого сооружения. Очевидно, что, каковы бы ни были значения этих сил, система останется в равновесии. Иначе говоря, определить реакции лишних связей, исходя лишь из условий равновесия, невозможно. Следовательно, система с лишними связями статически неопределима. В дальнейшем не будем делать различий между системами с лишними связями и статически неопределимыми системами.

Однако не следует думать, что в статически неопределимых системах все усилия обязательно являются статически неопределимыми. Доказана следующая теорема [9]: *усилия в абсолютно необходимых связях всегда статически определимы.*

Степень статической неопределимости системы n_c называется разность между количеством неизвестных усилий и количеством независимых уравнений равновесия. Она равна общему количеству лишних связей, устранение которых делает конструкцию статически определимой.

Если лишними являются опорные связи, система называется *внешне* статически неопределимой. Если лишними являются свя-

зи, соединяющие части самой конструкции (внутренние связи), то система является *внутренне* статически неопределимой.

Пример 7.1 Рассмотрим балку (рисунок 7.1, а). В ее опорах возникают *четыре* реакции, знание которых позволит найти внутренние усилия во всех сечениях. Однако для определения реакций можно составить только *три* независимых уравнения статического равновесия. Следовательно, $n_c = 4 - 3 = 1$, т. е. балка один раз статически неопределима.

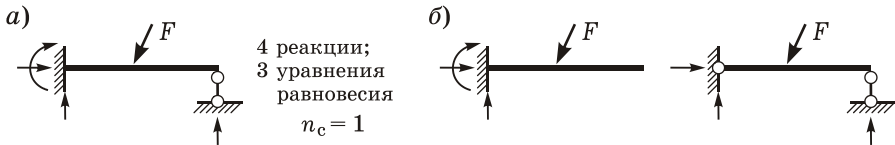


Рисунок 7.1

Степень статической неопределимости n_c можно найти иначе. Известно, что для неизменяемого присоединения балки к земле достаточно лишь жесткой заделки, или шарнира и стержня (рисунок 7.1, б). Отбрасывание *одной* лишней связи (удаление вертикального стержня либо замена заделки шарниром) превращает систему в статически определимую, содержащую минимально необходимое для неизменяемости количество связей. Поэтому $n_c = 1$.

7.1.2 Формулы для вычисления степени статической неопределимости. В практических расчетах не всегда удобно рассчитывать, сколько усилий подлежит определению, и сколько уравнений равновесия можно составить, или сколько связей надо отбросить для превращения системы в статически определимую. Удобнее для вычисления степени статической неопределимости n_c пользоваться аналитическими выражениями.

1) *Произвольные плоские стержневые системы.* Степень статической неопределимости n_c плоской стержневой системы численно равна степени изменяемости (числу степеней свободы), взятой с обратным знаком:

$$n_c = -W.$$

Выделяются диски, анализируется их соединение друг с другом и с основанием. Из формулы Чебышева (1.2) следует

$$n_c = 2Ш + C_0 - 3Д, \quad (7.1)$$

где $Ш$ – количество шарниров с учетом кратности; C_0 – количество одиночных связей (стержней); $Д$ – количество дисков.

Заметим, что формула (7.1) справедлива только в случаях, когда каждый диск является внутренне статически определимой системой (не содержит лишних связей). Если имеются жесткие

соединения дисков между собой или с основанием, то их необходимо представлять в виде трех одиночных стержней или использовать соотношение, полученное из формулы (1.3):

$$n_c = 3Ж + 2Ш + C_o - 3Д,$$

где $Ж$ – количество жестких соединений дисков или заделок.

2) *Рамы, содержащие замкнутые контуры.* Рассмотрим раму, имеющую бесшарнирный замкнутый контур (рисунок 7.2, а). Она внешне статически определима: три опорные реакции можно определить из трех уравнений равновесия.

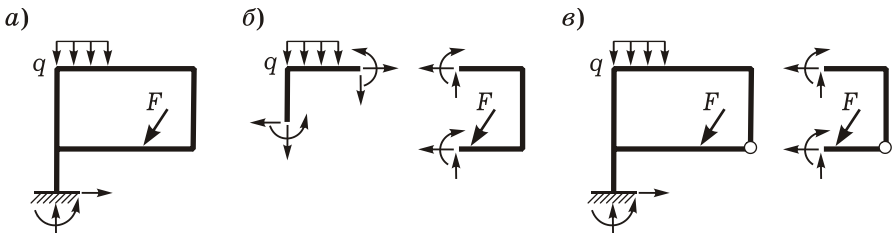


Рисунок 7.2

Однако данная рама внутренне статически неопределима, так как внутренние силы и моменты в замкнутом контуре из уравнений равновесия невозможно найти. В сечениях любого элемента, вырезанного из контура, возникают *шесть* неизвестных усилий (рисунок 7.2, б), для определения которых *трех* уравнений статики недостаточно. Следовательно, $n_c = 6 - 3 = 3$.

Введем простой шарнир в замкнутый контур (рисунок 7.2, в). Этим мы устраним одну связь, препятствующую взаимному повороту частей системы, и увеличим количество независимых уравнений равновесия на единицу (кроме трех уравнений статики для вырезанного элемента добавляется уравнение моментов его левой или правой части относительно шарнира).

Если в системе присутствует K бесшарнирных замкнутых контуров, то лишних связей будет $3K$. Так, переходя от рамы, имеющей три бесшарнирных замкнутых контура (рисунок 7.3, а), к статически определимой системе (рисунок 7.3, б), устанавливаем, что рама девять раз статически неопределима.

Таким образом, каждый бесшарнирный замкнутый контур, независимо от его формы и расположения в системе, имеет три лишние связи – *трижды статически неопределим*. Введение одного простого шарнира уменьшает степень статической неопределимости на единицу. С учетом этого

$$n_c = 3K - III, \quad (7.2)$$

где K – количество замкнутых контуров; III – количество шарниров с учетом кратности.

Формулой (7.2) можно пользоваться не только для рам, но и для любых стержневых систем: балок, арок и т. п. Замкнутые контуры могут образовываться элементами системы вместе с опорными стержнями. В этом случае шарниры, принадлежащие опорным стержням, с учетом их кратности включаются в количество III .

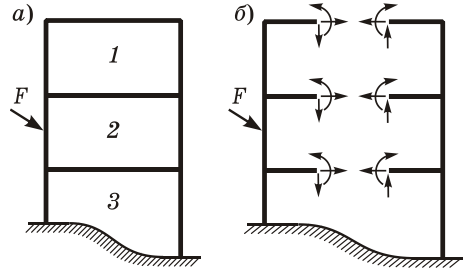


Рисунок 7.3

3) Шарнирно-стержневые системы (фермы). Для них удобно использовать зависимость, полученную из формулы (1.4):

$$n_c = C_o - 2Y = C_\phi + C_{оп} - 2Y, \quad (7.3)$$

где C_o – количество одиночных связей (стержней фермы C_ϕ и опорных стержней $C_{оп}$); Y – количество узлов, не связанных с землей.

7.1.3 Свойства статически неопределимых систем. Отметим, не приводя доказательств, основные свойства этих конструкций.

■ Статически неопределимые системы более жесткие, чем аналогичные статически определимые. При одной и той же нагрузке перемещения и деформации, а значит, внутренние усилия и напряжения в них меньше. Сравните, например, значения изгибающих моментов в балках, изображенных на рисунке 7.4.

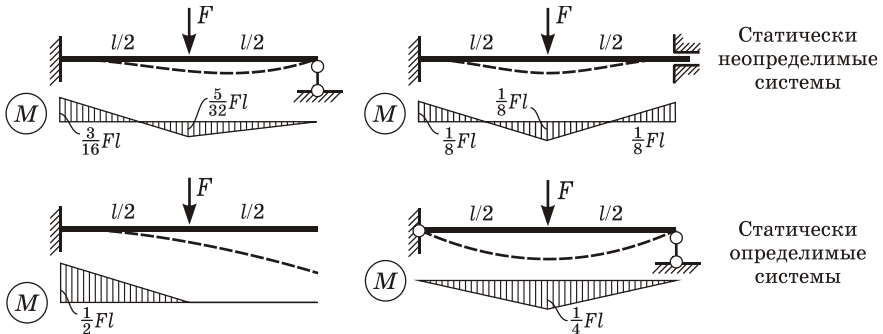


Рисунок 7.4

▪ Система, содержащая лишние связи, сохраняет свою геометрическую неизменяемость и после потери этих связей. В то же время удаление хотя бы одной связи в статически определимой системе приводит к ее изменяемости.

▪ Изменение температуры, осадка опор (кинематическое воздействие) (рисунок 7.5), неточность изготовления и сборки элементов вызывают в статически неопределимых системах появление дополнительных внутренних усилий. В статически определимых системах указанные факторы вызывают только перемещения сечений, силы и моменты при этом не возникают.

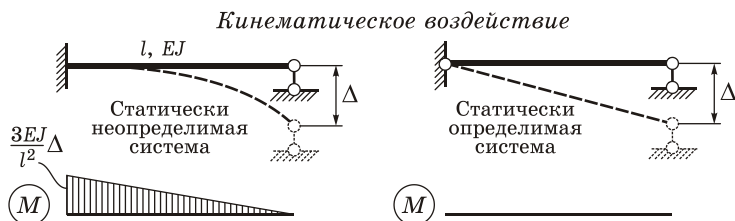


Рисунок 7.5

▪ Усилия в статически неопределимых системах, возникающие от внешней нагрузки, зависят от соотношений жесткостей отдельных элементов, а усилия, вызванные температурным и кинематическим воздействиями, – от самих значений жесткостей стержней.

7.1.4 Особенности расчета статически неопределимых систем.

Задача расчета любого сооружения состоит в следующем: заданы расчетная схема, нагрузки и воздействия; требуется найти внутренние усилия, а затем такие размеры поперечных сечений элементов, чтобы были обеспечены условия прочности и жесткости, а также некоторые другие требования (например, экономичность конструкции). В общей постановке эта задача для статически неопределимой системы решения не имеет. Все дело в том, что на промежуточном этапе расчета определяются *перемещения*, значения которых зависят от *жесткостей* элементов (EA , EJ и т. д.), определяемых по размерам сечений.

Поэтому в расчетной практике ставится более узкая задача: заданы расчетная схема, нагрузки (воздействия) и предварительные размеры сечений элементов; требуется найти внутренние усилия и перемещения, сравнить с допускаемыми величинами (выполнить поверочный расчет). Если условия прочности или жесткости не выполняются или, наоборот, запас прочности слишком велик, расчет повторяют, уточнив размеры сечений элементов.

В учебных задачах расчета статически неопределимых систем жесткости элементов обычно заданы в исходных данных. В курсе строительной механики студенты изучают методы определения внутренних усилий (построения эпюр) в этих системах от различных внешних воздействий. Дальнейшие расчеты (вычисление напряжений, сравнение их с расчетными сопротивлениями, уточнение размеров сечений и жесткостей, а также при необходимости повторение расчета) они могут выполнить сами на базе знаний, полученных в курсе сопротивления материалов.

В статически неопределимых системах внутренние усилия (M , Q , N) и перемещения зависят не только от внешней нагрузки, но и от геометрических характеристик поперечных сечений (площадей A и моментов инерции J). Поэтому *задача расчета статически неопределимой системы* обычно решается следующим образом:

- назначают материал, очертание оси, форму и размеры поперечных сечений – интуитивно, а также пользуясь результатами расчета аналогичных сооружений;
- находят внутренние усилия и перемещения;
- проверяют прочность и жесткость системы;
- если условия прочности или жесткости не выполняются или, наоборот, запас прочности слишком велик, расчет повторяют, уточнив размеры сечений.

7.2 Основная система и основные неизвестные метода сил

7.2.1 Идея метода сил. Исторически расчету статически неопределимых систем предшествовало достаточно глубокое изучение методов расчета статически определимых систем. Поэтому, естественно, возникла идея о сведении заданной статически неопределимой конструкции к статически определимой.

Суть метода сил: заданная статически неопределимая система освобождается от лишних связей, превращаясь в статически определимую; действие лишних связей заменяется реакциями – силами и моментами. Величины этих реакций подбираются так, чтобы перемещения точек новой системы были такими же, как и перемещения в заданной системе. Далее статически определимая система с помощью уравнений равновесия рассчитывается на совместное действие заданной нагрузки и дополнительных сил – известных реакций лишних связей.

Все последующее изложение метода сил будет производиться в *канонической форме*, т. е. все этапы расчета будут выполняться по строго определенным правилам – «канонам».

7.2.2 Основная система. *Основная система метода сил* образуется из заданной статически неопределимой конструкции отбрасыванием лишних связей и заменой их неизвестными усилиями (реакциями лишних связей).

В большинстве случаев основная система метода сил статически определима¹⁾: она получается устранением *всех* лишних связей, количество которых равно степени статической неопределимости n_c . В рамках данного пособия будут рассматриваться только такие основные системы.

При образовании основной системы могут использоваться следующие приемы:

- устранение опорных связей;
- введение шарниров в жесткие узлы и сечения конструкции;
- рассечение элементов.

Для каждой статически неопределимой заданной системы можно подобрать различные основные системы; теоретически существует бесконечное множество вариантов. Однако их должно объединять следующее условие: основная система должна быть *геометрически и мгновенно неизменяемой*. То есть при формировании основной системы необходимо следить, чтобы отброшены были именно лишние, а не абсолютно необходимые связи.

Так как все дальнейшие вычисления в методе сил связаны с основной системой, удачный ее выбор может существенно снизить трудоемкость расчета. Некоторые рекомендации по выбору основной системы даны в подразд. 7.9.

7.2.3 Основные неизвестные метода сил. Силы и моменты, заменяющие действие отброшенных связей (реакции лишних связей), называются *основными неизвестными* метода сил. Для основной системы, полученной удалением n лишних связей, неизвестные обозначаются X_1, X_2, \dots, X_n . Их направления выбирают произвольно. Если реакции получатся положительными, то принятые направления истинны. Если в процессе расчета выяснится, что реакции отрицательны, то их направления противоположны первоначально выбранным.

Пример 7.2 Для простейшей статически определимой балки с одной лишней связью (рисунок 7.6, *а*) основную систему можно образовать одним из способов, показанных на рисунке 7.6, *б*. Первый вариант получен отбрасыванием опорного стержня и заменой его вертикальной си-

¹⁾ Иногда для расчета применяют и статически неопределимые основные системы, отбрасывая не все лишние связи. Такой прием требует предварительных вычислений для включенных в основную систему статически неопределимых фрагментов [6].

лой X_1 . Во втором варианте жесткая заделка заменена шарнирно неподвижной опорой (шарниром); здесь X_1 представляет собой реактивный момент в заделке. Третий вариант образован введением простого шарнира в одно из сечений балки; в качестве неизвестного X_1 выступает внутренний изгибающий момент (при составлении уравнений равновесия всей системы его суммарный момент будет равен нулю).

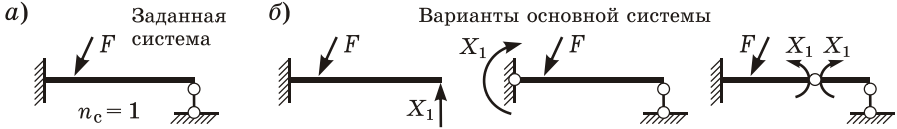


Рисунок 7.6

Пример 7.3 Рассмотрим раму, прикрепленную к основанию заделкой и двумя опорными стержнями (рисунок 7.7, а). Она содержит два замкнутых контура и четыре простых шарнира. Так как два опорных стержня эквивалентны простому шарниру, расчетную схему рамы можно изобразить так, как показано на рисунке 7.7, б. Такая система содержит один контур и один шарнир. По формуле (7.2) и в одном, и в другом случае получаем $n_c = 2$, т. е. рама дважды статически неопределима.

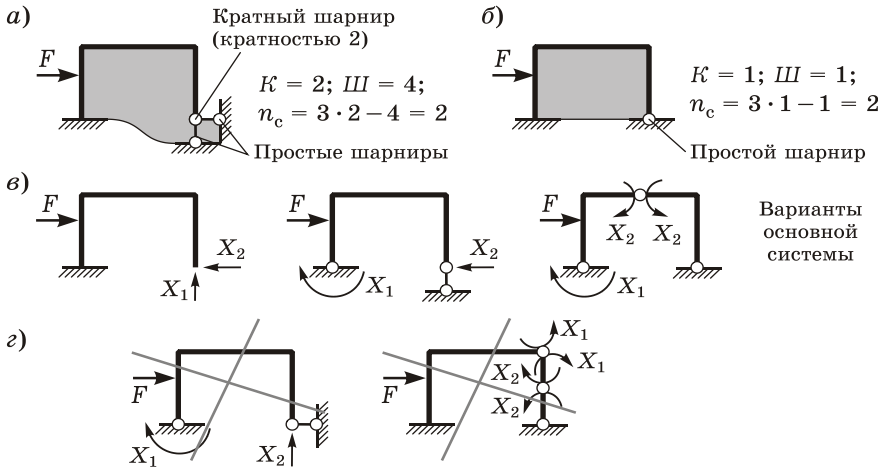


Рисунок 7.7

Отбросим две лишние связи и заменим их действие неизвестными усилиями X_1 , X_2 (реакциями отброшенных связей). Получим статически определимую основную систему метода сил. Можно предложить несколько ее вариантов (рисунок 7.7, в); все они статически определимы и геометрически неизменяемы. Системы, показанные на рисунке 7.7, г, не могут быть выбраны в качестве основных, так как являются мгновенно изменяемыми.

Пример 7.4 Рама, изображенная на рисунке 7.8, шесть раз статически неопределима.

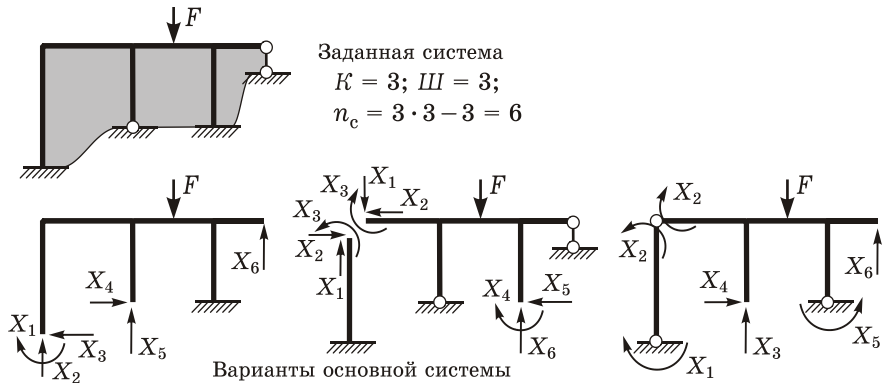


Рисунок 7.8

Различные варианты основной системы для нее получены отбрасыванием шести лишних связей с использованием всех трех указанных выше приемов: удаления опорных связей, введения шарниров вместо жестких соединений, рассечения элементов.

7.3 Канонические уравнения метода сил

7.3.1 Вывод канонических уравнений. Чтобы найти значения n основных неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n , необходимо составить и решить n уравнений, учитывающих особенности деформирования конструкции с учетом ее физической модели. Будем рассматривать линейно-деформируемые стержневые системы, для которых справедлив закон Гука и применим принцип суперпозиции.

Независимо от вида рассчитываемой стержневой системы указанные уравнения удобно записывать по строго определенному правилу – «канону», поэтому они называются *каноническими уравнениями*.

Методику составления канонических уравнений рассмотрим на конкретном примере. Для дважды статически неопределимой рамы (рисунок 7.9, а) образуем основную систему, отбросив две связи и заменив их реакциями X_1 и X_2 (рисунок 7.9, б).

Казалось бы, в основной системе перемещения Δ_1 и Δ_2 по направлениям усилий X_1 и X_2 возможны (рисунок 7.9, в). Однако заданная рама их не допускает (см. рисунок 7.9, а). Следовательно, для эквивалентности заданной и основной систем необходимо,

чтобы перемещения по направлениям отброшенных связей отсутствовали:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0. \quad (7.4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции представим перемещения (7.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p} = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где Δ_{ki} ($k, i = 1, 2$) – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k , вызванное действием усилия X_i ; Δ_{kp} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k , вызванное действием внешней нагрузки.

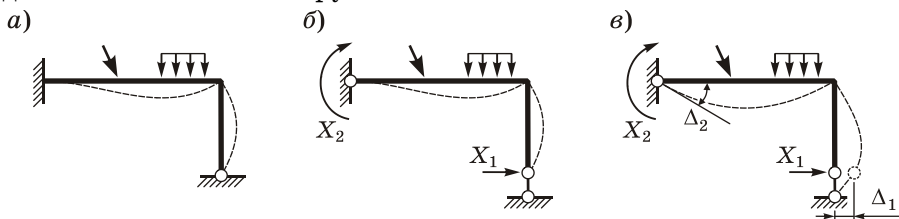


Рисунок 7.9

Как известно (см. п. 1.7.4), для линейно деформируемой системы любое перемещение, вызванное действием какой-либо силы, можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение того же вида и в том же направлении от действия соответствующей единичной силы, т. е.

$$\Delta_{ki} = \delta_{ki} X_i, \quad (7.6)$$

где δ_{ki} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k , вызванное действием единичного усилия, приложенного в направлении X_i .

Часто для краткости δ_{ki} называют перемещением по направлению усилия X_k , вызванным усилием $\bar{X}_i = 1$. Усилие $\bar{X}_i = 1$ приложено в той же точке и в том же направлении, что и X_i .

В дальнейшем перемещения от единичных нагрузок будем обозначать малой буквой δ и называть *единичными перемещениями*, перемещения от произвольных сил и моментов – обозначать Δ и называть *грузовыми перемещениями*. Состояние основной системы, в котором на нее действует $\bar{X}_i = 1$, будем называть *единичным состоянием «i»*; при действии внешней нагрузки – *грузовым состоянием «р»*.

С учетом (7.6) уравнения (7.5) записываются так:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Уравнения (7.7) называются *каноническими уравнениями метода сил* (для дважды статически неопределимой системы). Смысл входящих в них перемещений δ_{11} , δ_{12} , Δ_{1p} и δ_{21} , δ_{22} , Δ_{2p} ясен из рисунка 7.10.

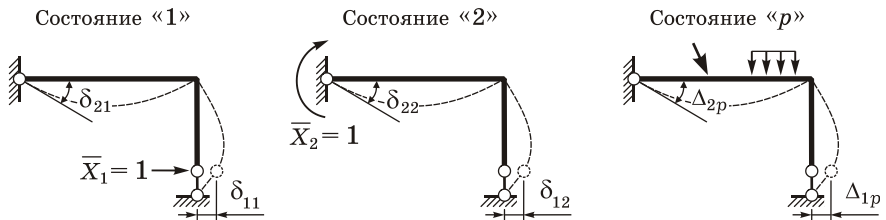


Рисунок 7.10

Канонические уравнения для n раз статически неопределимой конструкции:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{ki}X_i + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} &= 0; \quad (7.8) \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0.\end{aligned}$$

Уравнения (7.8) образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных усилий X_1, X_2, \dots, X_n . Здесь единичные перемещения δ_{ki} ($k, i = 1, 2, \dots, n$) представляют собой коэффициенты этой системы. Коэффициенты с одинаковыми индексами ($\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$), расположенные на главной диагонали, называются *главными*, остальные – *побочными*. Грузовые перемещения Δ_{kp} являются свободными членами СЛАУ.

Канонические уравнения имеют ясный физический смысл; по сути, это уравнения совместности деформаций. Произвольное k -е уравнение обозначает, что перемещение в основной системе по направлению k -й отброшенной связи от действия неизвестных усилий и внешней нагрузки равно нулю.

7.3.2 Матричная запись канонических уравнений. Систему (7.8) удобно записывать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \vec{X} + \vec{\Delta}_p = 0, \quad (7.9)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1i} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2i} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_k \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_p = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \dots \\ \Delta_{kp} \\ \dots \\ \Delta_{np} \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} является *матрицей податливости* основной системы, которую часто называют матрицей единичных перемещений; \vec{X} – вектор основных неизвестных; $\vec{\Delta}_p$ – вектор грузовых перемещений. По теореме о взаимности единичных перемещений (6.32) $\delta_{ki} = \delta_{ik}$, т. е. матрица податливости всегда является симметричной.

Предположим, что заданная система не испытывает никаких воздействий. Тогда перемещения в основной системе должны быть нулевыми ($\vec{\Delta}_p = 0$), и система канонических уравнений (7.9) становится однородной:

$$\mathbf{A} \vec{X} = 0.$$

Для того, чтобы однородная система имела одно единственное решение $\vec{X} = 0$ (при отсутствии воздействий усилия в лишних связях нулевые), необходимо, чтобы $\det \mathbf{A} \neq 0$. Если же этот определитель окажется равным нулю, то либо неверно выбрана основная система (принята геометрически или мгновенно изменяемая система), либо неверно вычислены единичные перемещения.

7.4 Вычисление и проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Весьма существенно отметить, что в проделанном в п. 7.3.1 выводе совершенно не обуславливается то, каким образом возникают единичные и грузовые перемещения δ_{ki} , Δ_{kp} . Хотя мы и рассматривали раму, работающую на изгиб, все сказанное может быть отнесено к *любой стержневой системе*, работающей на растяжение–сжатие, кручение и изгиб или на то, другое и третье совместно.

7.4.1 Определение единичных и грузовых перемещений для различных стержневых систем. Для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений в произвольной плоской стержневой системе используют формулу Мора (6.8) в следующих модификациях:

$$\begin{aligned} \delta_{ki} &= \int_S \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i}{EJ} ds + \int_S \frac{\eta \overline{Q}_k \overline{Q}_i}{GA} ds + \int_S \frac{\overline{N}_k \overline{N}_i}{EA} ds ; \\ \Delta_{kp} &= \int_S \frac{\overline{M}_k M_p}{EJ} ds + \int_S \frac{\eta \overline{Q}_k Q_p}{GA} ds + \int_S \frac{\overline{N}_k N_p}{EA} ds , \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $\overline{M}_k, \overline{Q}_k, \overline{N}_k$ – внутренние усилия в основной системе в единичном состоянии « k » (от единичного усилия, приложенного в направлении X_k); M_p, Q_p, N_p – внутренние усилия в основной системе в грузовом состоянии (от заданной нагрузки); EJ, GA, EA – жесткости при работе на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие соответственно; η – коэффициент, зависящий от формы сечения и учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению при изгибе; индексы $k, i = 1, 2, \dots, n$. Интегрирование производится по длине оси S стержневой системы.

В плоских рамах и балках, работающих преимущественно на изгиб, как отмечалось в п. 6.4.1, 6.4.2, при вычислении перемещений достаточно учитывать только изгибающие моменты. Поэтому вместо (7.10) используют более простые формулы

$$\delta_{ki} = \int_S \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i}{EJ} ds ; \quad \Delta_{kp} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_p}{EJ} ds . \quad (7.11)$$

Каждый из интегралов в формулах (7.10), (7.11) может быть вычислен одним из способов «перемножения эпюр» (Верещагина, Симпсона, перемножения трапеций), рассмотренных в подразд. 6.5 (естественно, если это допускает сама стержневая система, с учетом пределов применимости указанных способов).

В шарнирно-стержневых системах (фермах) возникают лишь продольные силы, которые, как и жесткости EA , постоянны по длине каждого стержня (см. п. 6.4.4). Поэтому

$$\delta_{ki} = \sum_{j=1}^m \frac{\overline{N}_k^{(j)} \overline{N}_i^{(j)}}{EA_j} l_j ; \quad \Delta_{kp} = \sum_{j=1}^m \frac{\overline{N}_k^{(j)} N_p^{(j)}}{EA_j} l_j , \quad (7.12)$$

где $\overline{N}_k^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне основной системы от действия силы $\overline{X}_k = 1$; $N_p^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне основной системы от заданной внешней нагрузки; l_j, EA_j – длина и жесткость j -го стержня; m – количество стержней фермы.

В общем случае пространственной стержневой системы необходимо учитывать шесть видов внутренних усилий (см. п. 6.3.2) в каждом единичном и грузовом состояниях основной системы.

Проанализировав первые из формул (7.10)–(7.12), еще раз отметим взаимность единичных перемещений $\delta_{ki} = \delta_{ik}$. Кроме этого, из формул (7.10)–(7.12) следует, что главные коэффициенты δ_{kk} всегда положительны, а побочные коэффициенты δ_{ki} ($k \neq i$) и свободные члены Δ_{kp} могут иметь любой знак; в частности, они могут оказаться нулевыми.

Заметим, что при удачном выборе основной системы многие (а иногда и все) побочные коэффициенты обращаются в нуль, что значительно упрощает решение канонических уравнений.

7.4.2 Проверка правильности вычисления перемещений. Процедура вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений по формулам (7.10)–(7.12) является достаточно трудоемким процессом, в котором возможно появление ошибок, особенно при «ручном счете». Поэтому перед решением уравнений необходимо произвести проверку их правильности.

Имеются три проверки: построчная, универсальная и постолбцовая. Рассмотрим сначала, как выполняется каждая из них для плоских рам и балок, в которых при расчете перемещений учитывались только изгибающие моменты.

Предварительно необходимо построить *суммарную единичную эпюру* моментов в основной системе, представляющую собой алгебраическую сумму построенных ранее единичных эпюр:

$$\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_k + \dots + \bar{M}_n = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k. \quad (7.13)$$

Универсальная проверка. Результат умножения суммарной единичной эпюры (7.13) самой на себя должен быть равен алгебраической сумме всех единичных перемещений. Докажем это:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_\Sigma^2}{EJ} ds &= \int_s \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)^2}{EJ} ds = \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds + \int_s \frac{\bar{M}_2^2}{EJ} ds + \dots + \\ &+ \int_s \frac{\bar{M}_n^2}{EJ} ds + \int_s \frac{2\bar{M}_1\bar{M}_2}{EJ} ds + \dots + \int_s \frac{2\bar{M}_{n-1}\bar{M}_n}{EJ} ds = \\ &= \delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{nn} + 2\delta_{12} + \dots + 2\delta_{(n-1)n} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ki}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Построчная проверка. Если универсальная проверка не сходится, то для выявления ошибки может делаться построчная

проверка. Перемножая суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ на единичную эпюру \bar{M}_k , проверяют правильность вычисления коэффициентов k -го канонического уравнения:

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_k}{EJ} ds = \int_S \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \bar{M}_k}{EJ} ds = \int_S \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_k}{EJ} ds + \int_S \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_k}{EJ} ds + \dots + \int_S \frac{\bar{M}_n \bar{M}_k}{EJ} ds = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kn} = \sum_{i=1}^n \delta_{ki}. \quad (7.15)$$

Постолбцовая проверка. Правильность определения свободных членов канонических уравнений – грузовых перемещений – проверяют, умножая эпюру \bar{M}_Σ на грузовую эпюру моментов в основной системе M_p :

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma M_p}{EJ} ds = \int_S \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) M_p}{EJ} ds = \int_S \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} ds + \int_S \frac{\bar{M}_2 M_p}{EJ} ds + \dots + \int_S \frac{\bar{M}_n M_p}{EJ} ds = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \sum_{k=1}^n \Delta_{kp}. \quad (7.16)$$

Для стержневых систем, предполагающих при расчете перемещений учет не только изгибающих моментов, но и других силовых факторов (поперечных, продольных сил, крутящих моментов), соответствующие факторы учитываются и в проверках. Например, для произвольной плоской стержневой системы формулы *универсальной и постолбцовой проверки* имеют вид

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma^2}{EJ} ds + \int_S \frac{\eta \bar{Q}_\Sigma^2}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_\Sigma^2}{EA} ds = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ki};$$

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma M_p}{EJ} ds + \int_S \frac{\bar{Q}_\Sigma Q_p}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_\Sigma N_p}{EA} ds = \sum_{k=1}^n \Delta_{kp}, \quad (7.17)$$

где $\bar{Q}_\Sigma, \bar{N}_\Sigma$ – суммарные единичные эпюры поперечных и продольных сил в основной системе, представляющие собой алгебраическую сумму соответствующих единичных эпюр:

$$\bar{Q}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k; \quad \bar{N}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k. \quad (7.18)$$

Соотношения (7.17) легко обобщить на случай пространственной системы. Заметим, что проверки (7.14)–(7.17) служат лишь подтверждением правильности произведенных вычислений, но никак не удостоверяют правильность построения единичных и грузовых эпюр в основной системе.

7.5 Определение внутренних усилий в заданной статически неопределимой системе

7.5.1 Способы определения внутренних усилий в заданной системе. Заключительным этапом расчета статически неопределимой системы является определение внутренних сил и моментов и построение эпюр. Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Найденные из канонических уравнений усилия X_1, X_2, \dots, X_n прикладываются как дополнительная внешняя нагрузка к статически определимой основной системе, и эта система рассчитывается с помощью уравнений равновесия (методами, известными из курса сопротивления материалов). Этот способ применяется в основном для простейших статически неопределимых балок и рам.

Способ 2. Нам уже приходилось рассчитывать эквивалентную заданной основную систему на отдельные частные воздействия – единичные усилия, приложенные по направлениям каждого из X_1, X_2, \dots, X_n , и заданную нагрузку. Поэтому нет необходимости заново вычислять в ней внутренние усилия. Достаточно на основании принципа суперпозиции «собрать» результаты отдельных частных расчетов.

Таким образом, в плоской стержневой системе значения внутренних усилий M, Q, N могут быть найдены по зависимостям:

$$M = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k X_k + M_p; \quad Q = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k X_k + Q_p; \quad N = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k X_k + N_p, \quad (7.19)$$

где $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ – внутренние усилия в основной системе от единичного силового фактора, приложенного в направлении X_k (от $\bar{X}_k = 1$); M_p, Q_p, N_p – внутренние усилия в основной системе от внешней нагрузки.

Внутренние силы и моменты в заданной системе, вычисленные по формулам (7.19), часто называют *окончательными*. В отличие от них все усилия, найденные ранее в основной системе и использованные при определении M, Q, N , считаются промежуточными или вспомогательными.

Единичные эпюры, умноженные на соответствующие значения X_1, X_2, \dots, X_n , иногда называют «исправленными» эпюрами.

7.5.2 Особенности определения Q и N в плоских рамах и балках. Заметим, что при расчете плоских рам и балок поперечные и продольные силы неудобно находить по зависимостям (7.19), так как в каждом единичном и грузовом состояниях не определялись усилия \bar{Q}_k, \bar{N}_k и Q_p, N_p . Для этих конструкций удобно использовать следующие приемы:

1 Поперечные силы Q могут быть найдены по значениям изгибающих моментов M . Если эпюра M на участке стержневой системы прямолинейна, удобно пользоваться дифференциальной зависимостью при изгибе

$$Q = \frac{dM}{dz}.$$

По этой зависимости поперечная сила равна тангенсу угла наклона прямолинейной эпюры моментов. Правило знаков следующее: сила Q считается положительной, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось необходимо вращать по часовой стрелке (рисунок 7.11).

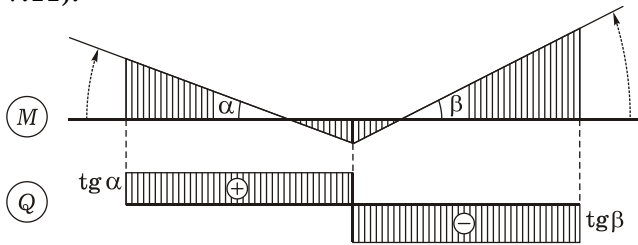
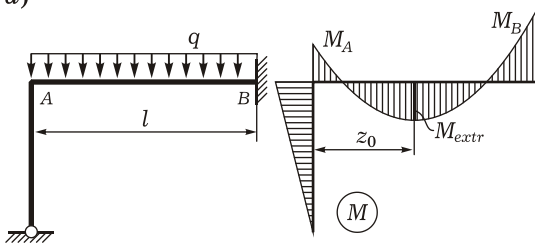


Рисунок 7.11

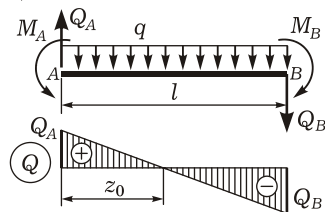
Если эпюра M на участке непрямолинейна, поперечную силу удобно находить, вырезая участок и составляя для него уравнения равновесия.

Пусть, например, для рамы построена эпюра изгибающих моментов (рисунок 7.12, а). Чтобы найти поперечные силы на участке AB , вырежем его и приложим к сечениям известные моменты и пока неизвестные силы (рисунок 7.12, б).

а)



б)



в)

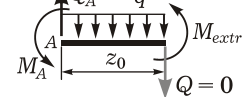


Рисунок 7.12

Моменты направляем так, как следует из эпюры изгибающих моментов M : эпюра построена на растянутых волокнах, значит, в сечениях A и B растянуты верхние волокна. Поперечные силы считаем положительными, т. е. они вращают рассматриваемый участок по часовой стрелке. Составим уравнения моментов относительно точек A и B :

$$\sum M_B = M_A - M_B + ql^2 / 2 - Q_A l = 0;$$

$$\sum M_A = M_A - M_B - ql^2 / 2 - Q_B l = 0,$$

из которых

$$Q_A = \frac{M_A - M_B}{l} + \frac{ql}{2}; \quad Q_B = \frac{M_A - M_B}{l} - \frac{ql}{2}.$$

По полученным значениям строим эпюру Q (см. рисунок 7.12, б). В сечении с абсциссой, где $Q = 0$, изгибающий момент экстремален. Чтобы его найти, вырезаем участок длиной z_0 (рисунок 7.12, в), из уравнения проекций на вертикальную ось $Q_A - qz_0 = 0$ определяем $z_0 = Q_A / q$. Экстремальный момент находим из уравнения

$$\sum M_A = 0; \quad M_{extr} = -M_A + qz_0^2 / 2.$$

2 Продольные силы N могут быть найдены по значениям поперечных сил Q . Для этого необходимо отсечь отдельные стержни или вырезать узлы рамы, составить уравнения проекций на оси координат, из которых выразить искомые усилия.

7.6 Проверка правильности определения внутренних усилий.

Порядок расчета рам методом сил

7.6.1 Кинематическая (деформационная) проверка правильности определения внутренних усилий. Рассмотрим основные способы проверки внутренних усилий M , Q , N , найденных в различных стержневых системах методом сил.

Если расчет был произведен с учетом влияния на перемещения только изгибающих моментов (в плоских рамах и балках), то эпюру M необходимо проверить до построения по ней эпюры поперечных сил. Умножим ее на одну из единичных эпюр, например \bar{M}_k . С учетом первого из соотношений (7.19) получим:

$$\int_s \frac{M \bar{M}_k}{EJ} ds = \int_s \frac{(\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p) \bar{M}_k}{EJ} ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= X_1 \int_S \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_k}{EJ} ds + X_2 \int_S \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_k}{EJ} ds + \dots + X_n \int_S \frac{\overline{M}_n \overline{M}_k}{EJ} ds + \int_S \frac{M_p \overline{M}_k}{EJ} ds = \\
 &= \delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kp}.
 \end{aligned}$$

Мы получили левую часть k -го канонического уравнения, которая должна равняться нулю. Значит, и результат перемножения эпюр M и \overline{M}_k должен быть нулевым:

$$\int_S \frac{M \overline{M}_k}{EJ} ds = 0. \quad (7.20)$$

Формула (7.20) выражает условие отсутствия перемещения по направлению k -й отброшенной связи.

Тот же результат будет, если умножить эпюру M на суммарную единичную эпюру \overline{M}_Σ :

$$\int_S \frac{M \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = 0. \quad (7.21)$$

Смысл соотношения (7.21) – отсутствие перемещений по направлениям всех отброшенных лишних связей, т. е. эквивалентность деформированного состояния заданной и основной систем. В связи с этим данная проверка называется *кинематической* или *деформационной*.

Расчет статически неопределимой системы может быть произведен с использованием любой основной системы. Поэтому, чтобы выявить возможные ошибки суммарной эпюры \overline{M}_Σ и, следовательно, окончательной M , кинематическую проверку желательно проводить на *другом варианте* основной системы:

$$\int_S \frac{M \overline{M}_\Sigma^*}{EJ} ds = 0, \quad (7.22)$$

где \overline{M}_Σ^* – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, построенная для другого варианта основной системы (чем тот, который был использован в расчете).

В произвольных плоских стержневых системах, если расчет был проведен с учетом влияния M , Q , N на перемещения, то в формулы вариантов кинематической проверки вводятся все эти силовые факторы:

$$\int_S \frac{N \overline{N}_k}{EA} ds + \int_S \frac{\eta Q \overline{Q}_k}{GA} ds + \int_S \frac{M \overline{M}_k}{EJ} ds = 0; \quad (7.23)$$

$$\int_s \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds + \int_s \frac{\eta Q\bar{Q}_\Sigma}{GA} ds + \int_s \frac{N\bar{N}_\Sigma}{EA} ds = 0 ; \quad (7.24)$$

$$\int_s \frac{M\bar{M}_\Sigma^*}{EJ} ds + \int_s \frac{\eta Q\bar{Q}_\Sigma^*}{GA} ds + \int_s \frac{N\bar{N}_\Sigma^*}{EA} ds = 0 , \quad (7.25)$$

где $\bar{M}_\Sigma, \bar{Q}_\Sigma, \bar{N}_\Sigma$ – суммарные внутренние усилия в основной системе, найденные по формулам (7.13) и (7.18); $M_\Sigma^*, Q_\Sigma^*, N_\Sigma^*$ – суммарные внутренние усилия в другом варианте основной системы.

Заметим, что именно кинематической (деформационной) проверкой устанавливается правильность найденных неизвестных усилий X_i , поэтому в методе сил она является основной. Для рам и балок она является необходимой и достаточной проверкой правильности эпюры M , так как формулы (7.20)–(7.22) учитывают только моменты, для произвольных стержневых систем – необходимой и достаточной проверкой правильности эпюр M, Q, N , так как в формулы (7.23)–(7.25) входят все эти усилия.

Соотношения (7.23)–(7.25) легко обобщить на случай пространственной системы.

7.6.2 Статическая проверка правильности определения внутренних усилий. Вырезаются узлы и произвольные части конструкции, в местах разрезов к ним прикладываются внутренние усилия, взятые из построенных эпюр M, Q, N , и составляются уравнения равновесия.

Рассмотрим основные разновидности статических проверок, которые выполняются при расчете плоских рам и балок.

Статическая проверка эпюры изгибающих моментов. Вырезаются жесткие узлы конструкции, которые должны находиться в равновесии под действием приложенных изгибающих моментов; для них суммы моментов должны равняться нулю:

$$\sum M^{\text{узла}} = 0 .$$

Заметим, что в отличие от кинематической статическая проверка эпюры M является необходимой, но не достаточной.

Статическая проверка эпюр поперечных и продольных сил. Заданная система отсекается от всех опорных закреплений, в местах разрезов к ней прикладываются внутренние усилия, взятые из эпюр M, Q, N . Под воздействием этих усилий и внешней нагрузки заданная система должна находиться в равновесии, т. е. суммы проекций всех сил на любые две взаимно перпендикулярные оси y, z , а также сумма моментов относительно любой точки (обозначенной, например, K) должны быть равны нулю:

$$\sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \quad \sum M_K = 0.$$

При выборе моментной точки стараются, чтобы в уравнение моментов вошло как можно больше подлежащих проверке внутренних усилий.

7.6.3 Порядок расчета рам методом сил. Расчет статически неопределимых рам, а также балок, работающих на изгиб, удобно вести в следующем порядке:

- 1) вычисление степени статической неопределимости n_c ;
- 2) анализ вариантов и выбор основной системы;
- 3) составление системы канонических уравнений;
- 4) построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов в основной системе;
- 5) вычисление единичных и грузовых перемещений;
- 6) проверка правильности вычисления перемещений;
- 7) решение системы канонических уравнений;
- 8) построение окончательной эпюры изгибающих моментов M ;
- 9) проверки эпюры M (статическая и кинематическая);
- 10) построение эпюры поперечных сил Q (по готовой эпюре M);
- 11) построение эпюры продольных сил N (по готовой эпюре Q);
- 12) статическая проверка равновесия рамы в целом.

Для простых рам и балок некоторые проверки расчета допускается не делать.

7.7 Примеры расчетов статически неопределимых рам на различные виды нагрузок

Пример 7.5 Для рамы (рисунок 7.13, а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив необходимые проверки. Жесткость стержней рамы EJ постоянна.

Степень статической неопределимости. Мысленно соединив опоры рамы (рисунок 7.13, б), получим один замкнутый контур ($K = 1$), содержащий два шарнира ($\Pi = 2$). По формуле (7.2) $n_c = 3K - \Pi = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

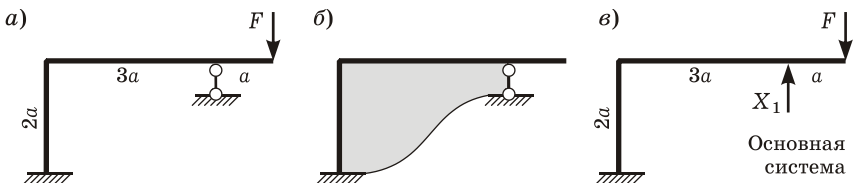


Рисунок 7.13

Основная система. Отбрасываем вертикальный опорный стержень и заменяем его реакцией X_1 (рисунок 7.13, в).

Каноническое уравнение. Так как рама один раз статически неопределима, составляем одно каноническое уравнение

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

где δ_{11}, Δ_{1p} – единичное и грузовое перемещения в основной системе.

Единичная и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояние «1» основной системы, прикладывая к ней единичную силу по направлению X_1 . Строим единичную эпюру \overline{M}_1 (рисунок 7.14, а). Далее формируем состояние «р» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку. Строим грузовую эпюру M_p (рисунок 7.14, б).

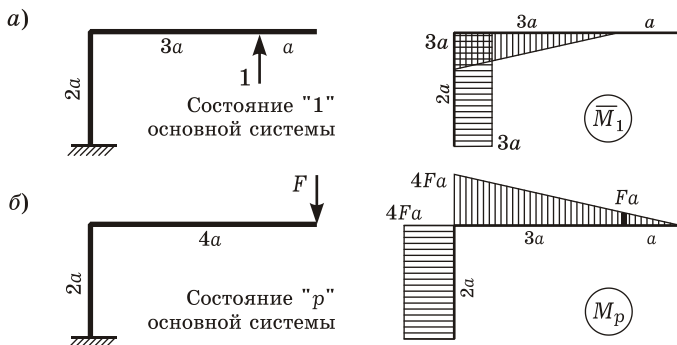


Рисунок 7.14

Вычисление единичного и грузового перемещений. При определении перемещений учитываем только изгибающие моменты. В соответствии с формулами (7.11)

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{3a}{6EJ} \cdot 2 \cdot 3a \cdot 3a + \\ &+ \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 3a \cdot 3a + 2 \cdot 3a \cdot 3a + 3a \cdot 3a + 3a \cdot 3a) = \frac{27a^3}{EJ}; \\ \Delta_{1p} &= \int_s \frac{\overline{M}_1 M_p}{EJ} ds = -\frac{3a}{6EJ} (2 \cdot 3a \cdot 4Fa + 3a \cdot Fa) - \\ &- \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 3a \cdot 4Fa + 2 \cdot 3a \cdot 4Fa + 3a \cdot 4Fa + 3a \cdot 4Fa) = -\frac{75Fa^3}{2EJ}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов был использован способ перемножения прямолинейных эпюр (6.19).

Решение канонического уравнения. Из канонического уравнения выражаем неизвестную силу:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\left(-\frac{75Fa^3}{2EJ}\right) \cdot \frac{EJ}{27a^3} = 1,389F.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M . На основании принципа суперпозиции по формуле (7.19)

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p.$$

Строим эпюру $\bar{M}_1 X_1$, умножая ординаты эпюры \bar{M}_1 на $X_1 = 1,389F$, и складываем ее с M_p . Получаем эпюру изгибающих моментов M в заданной системе (рисунок 7.15).

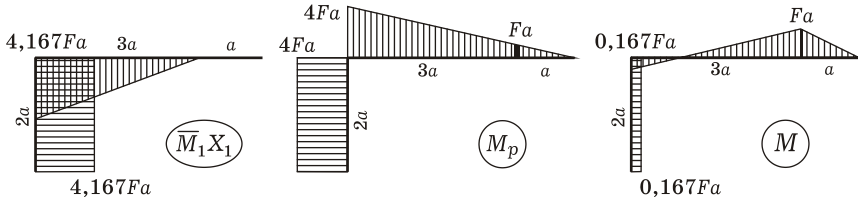


Рисунок 7.15

Проверка эпюры M . Выполняем кинематическую проверку, умножая в соответствии с формулой (7.20) эпюру M на единичную эпюру \bar{M}_1 :

$$\int_s \frac{M\bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{3a}{6EJ} (2 \cdot 0,167Fa \cdot 3a - Fa \cdot 3a) + \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0,167Fa \cdot 3a + 2 \cdot 0,167Fa \cdot 3a + 0,167Fa \cdot 3a + 0,167Fa \cdot 3a) = 0,003Fa^3/EJ \approx 0.$$

Проверка выполняется.

Построение эпюр Q, N . Выполняем построения в статически определимой основной системе, приложив к ней известную силу $X_1 = 1,389F$ (рисунок 7.16).

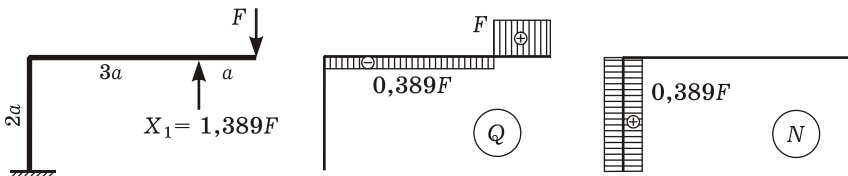


Рисунок 7.16

Расчеты поперечной и продольной сил Q, N не приводим из-за простоты и очевидности.

Пример 7.6 Для рамы (рисунок 7.17, а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив необходимые проверки. Исходные данные: нагрузки $F = 16$ кН, $q = 22$ кН/м; длины стержней $l = 5$ м, $a = 2$ м, коэффициент $k = 1,1$.

Степень статической неопределимости. Правую шарнирно-неподвижную опору рамы изобразим в виде шарнира (рисунок 7.17, б). Вычислим степень статической неопределимости по формуле (7.2):

$$n_c = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

где $K = 1$ – число замкнутых контуров, $\text{III} = 1$ – количество шарниров.

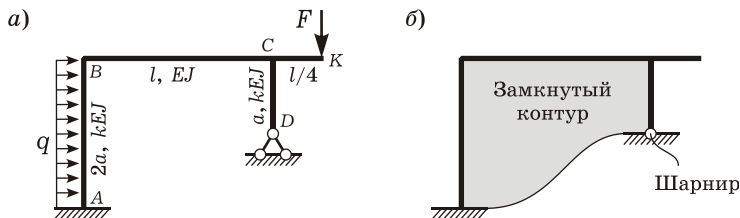


Рисунок 7.17

Выбор основной системы. Система содержит две избыточные (лишние) связи. Отбросив эти связи и заменив их действие неизвестными усилиями X_1 , X_2 , получим основную систему метода сил. Приведем три ее варианта (рисунок 7.18); все они статически определимы и геометрически неизменяемы.

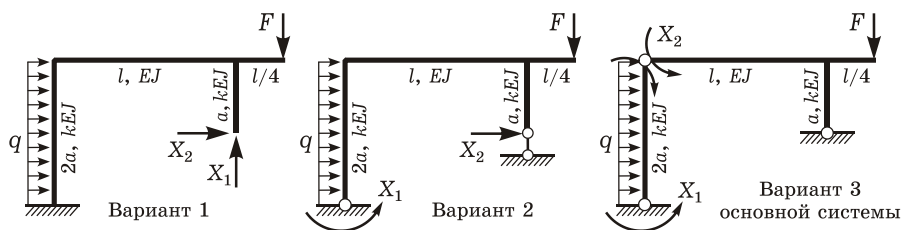


Рисунок 7.18

Для расчета выбираем третий вариант – эпюры изгибающих моментов для него получатся наиболее простыми. Следовательно, при их перемножении количество подсчетов будет наименьшим.

Система канонических уравнений. Рама два раза статически неопределима, следовательно, канонические уравнения представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Здесь X_1 , X_2 – неизвестные изгибающие моменты; δ_{ki} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k от действия единичного усилия, приложенного по направлению X_i ; Δ_{kp} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k от внешней нагрузки ($k, i = 1, 2$).

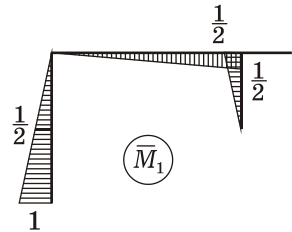
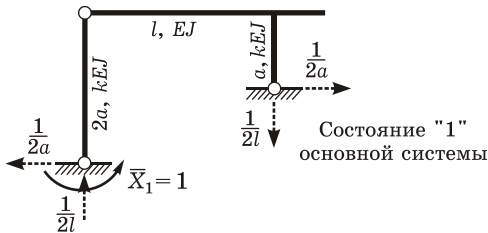
Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов

Эпюра M_1 . Формируем состояние «1» основной системы: прикладываем к ней только $X_1 = 1$ (единичный момент по направлению X_1) (рисунок 7.19, а). Определяем опорные реакции и строим эпюру M_1 .

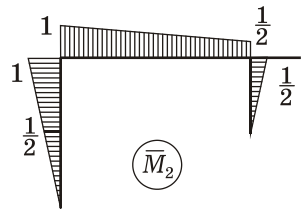
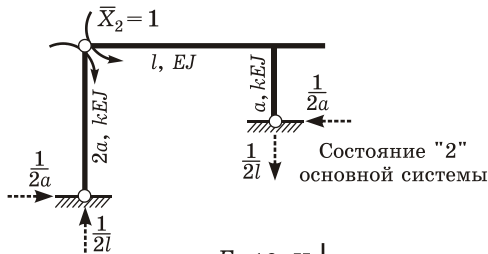
Эпюра \bar{M}_2 . Формируем состояние «2» основной системы: прикладываем к ней только $X_2 = 1$ (единичный момент по направлению X_2) (рисунок 7.19, б). Находим опорные реакции и строим эпюру M_2 . Заметим, что эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 безразмерные, так как построены от воздействия единичных изгибающих моментов.

Эпюра M_p . К основной системе прикладываем только внешнюю нагрузку: формируем грузовое состояние «р» (рисунок 7.19, в). Определяем опорные реакции и строим эпюру M_p .

а)



б)



в)

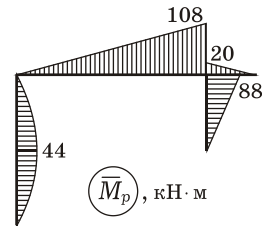
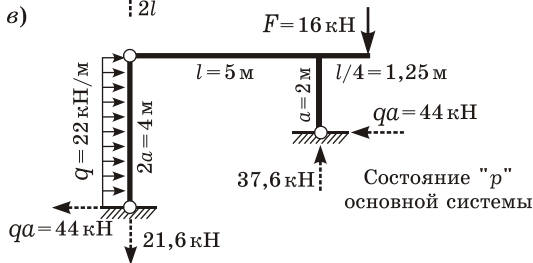


Рисунок 7.19

Вычисление единичных и грузовых перемещений. При определении перемещений учитываем только изгибающие моменты. В соответствии с формулами (7.11)

$$\delta_{ki} = \int_S \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} ds; \quad \Delta_{kp} = \int_S \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} ds \quad (k, i = 1, 2).$$

Все стержни рамы прямолинейны, их жесткость постоянна. Воспользуемся способом Симпсона (6.18) и правилом перемножения прямолинейных эпюр (6.19):

$$\delta_{11} = \frac{2a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$\delta_{22} = \frac{2a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \left(2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2a}{6kJEJ} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{a}{6kJEJ} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right);$$

$$\Delta_{1p} = \frac{2a}{6kJEJ} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-44) + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-108) + \frac{a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-88);$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2a}{6kJEJ} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-44) + \frac{l}{6EJ} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 108 + 1 \cdot 108 \right) + \frac{a}{6kJEJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 88;$$

Подставляя значения a , l , k , получаем:

$$\delta_{11} = \frac{1,780}{EJ} \text{ (м)}; \quad \delta_{22} = \frac{4,280}{EJ} \text{ (м)}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-0,379}{EJ} \text{ (м)};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{-170}{EJ} \text{ (кН} \cdot \text{м}^2); \quad \Delta_{2p} = \frac{153,33}{EJ} \text{ (кН} \cdot \text{м}^2).$$

Проверка правильности вычисления перемещений. Строим суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ , складывая эпюры M_1 и \bar{M}_2 (рисунок 7.20). Результат умножения эпюры \bar{M}_Σ самой на себя должен быть равен сумме всех единичных перемещений (универсальная проверка), а \bar{M}_Σ на M_p – сумме грузовых перемещений (постолбцовая проверка):

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma^2}{EJ} ds = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}; \quad \int_S \frac{\bar{M}_\Sigma M_p}{EJ} ds = \Delta_{1p} + \Delta_{2p}.$$

С одной стороны,

$$\int_S \frac{\bar{M}_\Sigma^2}{EJ} ds = \frac{2a}{6kJEJ} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{6 \cdot 1,1EJ} \cdot 6 + \frac{5}{6EJ} \cdot 2 = \frac{5,302}{EJ},$$

с другой –

$$\begin{aligned} & \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \\ & = \frac{1,780}{EJ} - \frac{0,379}{EJ} - \frac{0,379}{EJ} + \frac{4,280}{EJ} = \frac{5,302}{EJ}. \end{aligned}$$

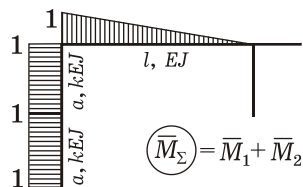


Рисунок 7.20

Результаты совпали, значит, единичные перемещения вычислены верно.

С одной стороны,

$$\int_s \frac{\bar{M}_\Sigma M_p}{EJ} ds = \frac{2a}{6kJ} \cdot 4 \cdot 1 \cdot (-44) + \frac{l}{6EJ} \cdot 1 \cdot 108 = \frac{4 \cdot (-176)}{6 \cdot 1,1EJ} + \frac{5 \cdot 108}{6EJ} = \frac{-16667}{EJ},$$

с другой –

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{-17000}{EJ} + \frac{15333}{EJ} = \frac{-1667}{EJ}.$$

Результаты совпали, значит, грузовые перемещения найдены верно.

Решение системы канонических уравнений. Найденные значения единичных и грузовых перемещений подставляем в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1,780}{EJ} X_1 - \frac{0,379}{EJ} X_2 - \frac{17000}{EJ} = 0; \\ -\frac{0,379}{EJ} X_1 + \frac{4,280}{EJ} X_2 + \frac{15333}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, определяем моменты X_1 , X_2 :

$$X_1 = 89,55 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_2 = -27,90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эпюры изгибающих моментов в заданной системе. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов M определяем по формуле, следующей из (7.19):

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p.$$

Умножаем ординаты эпюры \bar{M}_1 на значение X_1 , \bar{M}_2 – на X_2 (рисунок 7.21, а). Полученные эпюры складываем с грузовой эпюрой M_p . По полученным ординатам строим эпюру M (рисунок 7.21, б). Экстремальное значение момента в левой стойке M_{extr} определим позже, после построения эпюры поперечных сил.

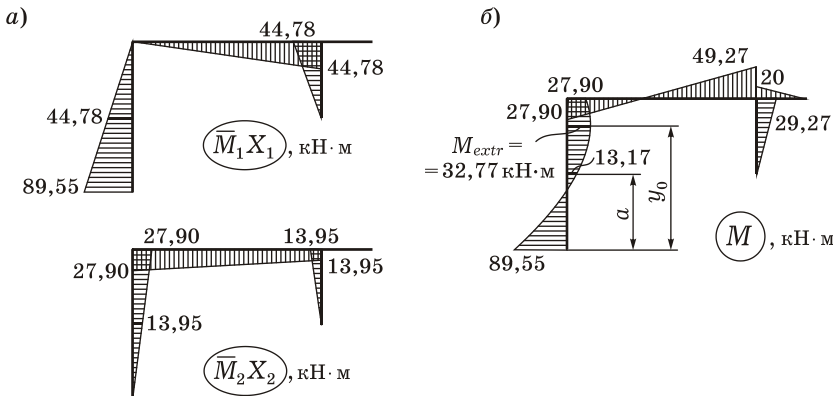


Рисунок 7.21

Статическая проверка эюры M . Вырежем жесткий Т-образный узел (рисунок 7.22) и выясним, находится ли он в равновесии. Составим уравнение моментов

$$\sum M = 49,27 - 29,27 - 20 = 0.$$

Узел находится в равновесии.

Кинематическая проверка эюры M . Для проверки выберем другую основную систему – вариант 1 (см. рисунок 7.18). Сформируем единичное состояние этой системы, приложив к ней единичные силы по направлениям X_1 , X_2 , и построим суммарную единичную эюру \bar{M}_Σ^* (рисунок 7.23).

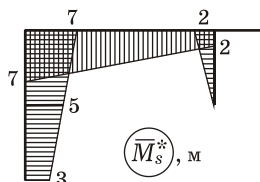
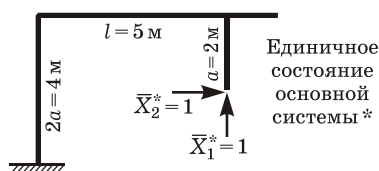


Рисунок 7.23

Согласно формуле (7.22) результат перемножения эюр M и \bar{M}_Σ^* должен получиться нулевым. Проверим это:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{M\bar{M}_\Sigma^*}{EJ} ds &= \frac{2a}{6kJ} (-89,55 \cdot 3 + 4 \cdot 13,17 \cdot 5 + 27,9 \cdot 7) + \\ &+ \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 27,9 \cdot 7 - 2 \cdot 49,27 \cdot 2 + 27,9 \cdot 2 - 49,27 \cdot 7) + \frac{a}{6kJ} (-2 \cdot 29,27 \cdot 2) = \\ &= \frac{4 \cdot 190,05}{6 \cdot 1,1EJ} + \frac{5 \cdot (-95,57)}{6EJ} + \frac{2 \cdot (-117,08)}{6 \cdot 1,1EJ} = \frac{0,061}{EJ} \approx 0, \end{aligned}$$

т. е. вертикальное и горизонтальное перемещения правого опорного сечения по направлениям приложенных единичных сил отсутствуют. Это соответствует заданной схеме конструкции. Значит, эюра моментов построена верно.

Построение эюры поперечных сил Q . Эюру поперечных сил построим по готовой эюре изгибающих моментов M .

Вырежем участок AB (см. рисунок 7.17, a), на котором эюра M ограничена параболой, т. е. действует равномерно распределенная нагрузка. Приложим к сечениям A , B известные моменты и пока неизвестные поперечные силы (рисунок 7.24, a). Моменты направляем так, как следует из эюры изгибающих моментов M (см. рисунок 7.21, b): эюра построена на растянутых волокнах, значит, в точке A растянуты левые волокна, а в точке B – правые. Поперечные силы считаем положительными, т. е. они вращают рассматриваемый участок по часовой стрелке.

Из уравнений равновесия $\sum M_B = 0$; $\sum M_A = 0$ получаем

$$Q_A = \frac{M_A + M_B}{2a} + qa = \frac{89,55 + 27,90}{2 \cdot 2} + 22 \cdot 2 = 73,36 \text{ кН};$$

$$Q_B = \frac{M_A + M_B}{2a} - qa = \frac{89,55 + 27,90}{2 \cdot 2} - 22 \cdot 2 = -14,64 \text{ кН}.$$

На участках рамы, где эпюра M прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. Q положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. В соответствии с этим

$$Q_{BC} = -\frac{27,90 + 49,27}{l} = -\frac{27,90 + 49,27}{5} = 15,43 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = \frac{29,27}{a} = \frac{29,27}{2} = 14,64 \text{ кН}; \quad Q_{CK} = \frac{20}{l/4} = \frac{20}{5/4} = 16 \text{ кН}.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру Q (рисунок 7.25).

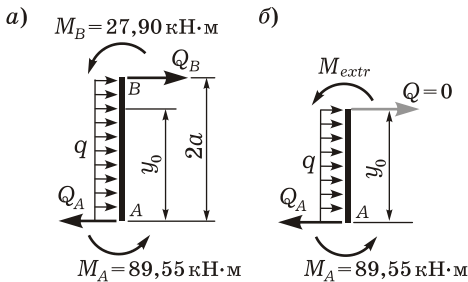


Рисунок 7.24

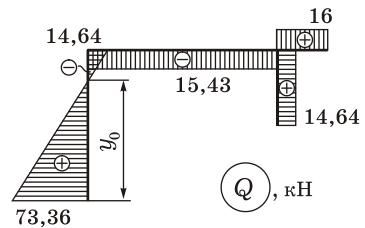


Рисунок 7.25

Определение экстремального момента на участке AB. Проведем сечение на расстоянии y_0 от начала участка (рисунок 7.24, б). Поперечная сила в нем равна нулю, а момент экстремален (M_{extr}). Составим уравнение проекций на горизонтальную ось: $Q_A - qy_0 = 0$, из которого

$$y_0 = Q_A / q = 73,36 / 22 = 3,335 \text{ м}.$$

Экстремальный изгибающий момент

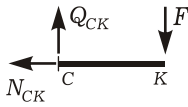
$$M_{extr} = -M_A + qy_0^2 / 2 = -89,55 + 22 \cdot 3,335^2 / 2 = 32,77 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Отмечаем полученное значение на эпюре M (см. рисунок 7.21, б).

Построение эпюры продольных сил. Эпюру продольных сил N строим по готовой эпюре Q . Отсечем консоль и рассмотрим ее равновесие (рисунок 7.26, а). Очевидно, что на всей консоли $N_{CK} = 0$.

Вырежем жесткие узлы рамы. В сечениях приложим поперечные и продольные силы (рисунок 7.26, б). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке, отрицательные – против часовой стрелки. Все продольные силы N считаем положительными – растягивающими.

а)



б)

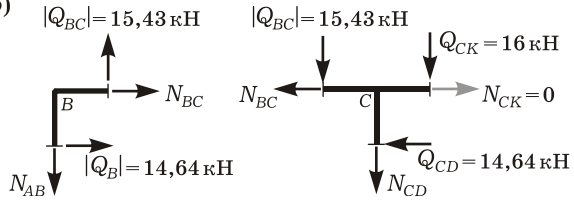


Рисунок 7.26

Из уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси найдем неизвестные продольные силы. Для Г-образного узла

$$N_{BC} = -|Q_B| = -14,64 \text{ кН};$$

$$N_{AB} = |Q_{BC}| = 15,43 \text{ кН}.$$

Для Т-образного узла

$$N_{CD} = -|Q_{BC}| - Q_{CK} = -15,43 - 16 = -31,43 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержни BC и CD сжаты. По полученным данным строим эпюру N (рисунок 7.27).

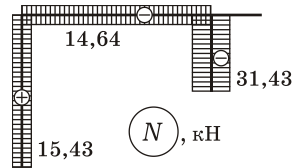


Рисунок 7.27

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор (рисунок 7.28) и приложим в местах сечений внутренние усилия, взятые из эпюр M , Q , N . При этом силы Q и N показываем с их реальными направлениями, т. е. с учетом знака.

Сумма проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси

$$\sum Z = -73,36 - 14,64 + q \cdot 2a = -88 + 22 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum Y = -F - 15,43 + 31,43 = -16 - 15,43 + 31,43 = 0.$$

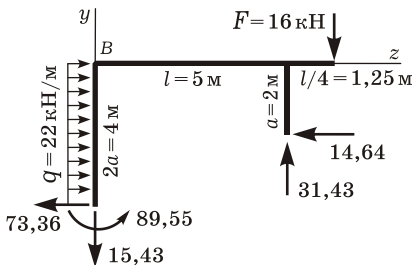


Рисунок 7.28

Подсчитаем сумму моментов всех сил относительно точки B (при выборе точки стараемся, чтобы в уравнение вошло как можно больше сил и моментов):

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 89,55 + 31,43 \cdot l + q(2a)^2 / 2 - \\ &- 73,36 \cdot 2a - 14,64 \cdot a - F(l + l/4) = \\ &= 89,55 + 31,43 \cdot 5 + 22 \cdot 4^2 / 2 - \\ &- 73,36 \cdot 4 - 14,64 \cdot 2 - 16 \cdot (5 + 5/4) = 0. \end{aligned}$$

Рама находится в равновесии, следовательно, внутренние усилия найдены верно.

7.8 Расчет статически неопределимых систем на температурное и кинематическое воздействия

7.8.1 Канонические уравнения метода сил при температурном и кинематическом воздействиях. С формальной точки зрения канонические уравнения будут отличаться от системы (7.8) лишь свободными членами.

Для n раз статически неопределимой конструкции канонические уравнения при температурном воздействии имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1i} X_i + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1t} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2i} X_i + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2t} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{ki} X_i + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kt} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{ni} X_i + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.26)$$

при кинематическом воздействии (осадке опор)

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1i} X_i + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1c} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2i} X_i + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2c} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{ki} X_i + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kc} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{ni} X_i + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nc} &= 0, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где Δ_{kt} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_{kc} , вызванное изменением температуры; Δ_{kc} – перемещение в основной системе по направлению X_k , вызванное смещением опор.

«Температурные» и «кинематические» перемещения Δ_{kt} , Δ_{kc} определяются по формулам, следующим из (6.21), (6.23) и (6.26).

В общем случае для плоской системы

$$\Delta_{kt} = \int_S \alpha t_0 \bar{N}_k ds + \int_S \frac{\alpha \Delta t}{h} \bar{M}_k ds, \quad (7.28)$$

где α – коэффициент линейного теплового расширения материала; h – высота поперечного сечения; t_0 – приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения; Δt – разность приращений температур крайних волокон; \bar{N}_k , \bar{M}_k – внутренние усилия в основной системе в единичном состоянии « k » – от единичной силы, приложенной в направлении X_k .

Если система состоит из прямолинейных участков постоянно-го поперечного сечения ($h = \text{const}$), выполненных из одного материала ($\alpha = \text{const}$), а приращения температуры t_1, t_2 постоянны по длине каждого участка, то из (7.28) следует:

$$\Delta_{kt} = \sum_j \alpha_j t_0^{(j)} \Omega_{\bar{N}_k}^{(j)} + \sum_j \frac{\alpha_j \Delta t^{(j)}}{h_j} \Omega_{\bar{M}_k}^{(j)}, \quad (7.29)$$

где α_j – коэффициент линейного теплового расширения материала j -го участка; h_j – высота поперечного сечения стержня на j -м участке; $t_0^{(j)}, \Delta t^{(j)}$ – приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения и разность приращений температур j -го участка; $\Omega_{\bar{N}_k}^{(j)}, \Omega_{\bar{M}_k}^{(j)}$ – площади единичных эпюр \bar{N}_k и \bar{M}_k на j -м участке.

Перемещение в основной системе, вызванное случайным смещением опор (при отсутствии внешней нагрузки), можно вычислить по формуле

$$\Delta_{kc} = -\sum_j (\pm \bar{R}_{jk} c_j), \quad (7.30)$$

где c_j – заданное смещение в основной системе; \bar{R}_{jk} – сила (реакция связи) в единичном состоянии « k », действующая вдоль смещения c_j .

Правило знаков: в формуле (7.30) произведения $(\pm \bar{R}_{jk} c_j)$ положительны, если направления сил в единичном состоянии совпадают с направлениями соответствующих смещений.

В некоторых случаях можно выбрать основную систему так, чтобы избежать расчетов по формуле (7.30). Например, у трижды статически неопределимой системы правая опора получила линейные смещения c_1, c_2 и повернулась на угол c_3 (рисунок 7.29, а). Основную систему выберем, отбросив правую заделку и приложив неизвестные силы X_1, X_2 и момент X_3 вдоль заданных смещений опор (рисунок 7.29, б).

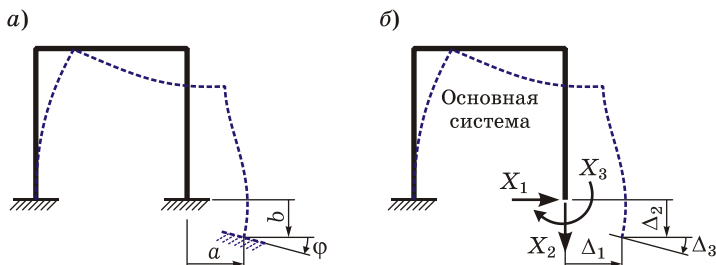


Рисунок 7.29

Для эквивалентности основной и заданной систем необходимо, чтобы перемещения в основной системе $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ по направлениям неизвестных X_1, X_2, X_3 были равны:

$$\Delta_1 = a; \quad \Delta_2 = b; \quad \Delta_3 = \varphi.$$

В соответствии с принципом суперпозиции представим их в следующем виде:

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = a;$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = b;$$

$$\Delta_3 = \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = \varphi.$$

Получили систему канонических уравнений метода сил, в которой свободные члены – перемещения от смещений опор – находятся в правой части. Записав ее в стандартной форме

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1c} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2c} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3c} = 0,$$

легко выписать значения «кинематических» перемещений:

$$\Delta_{1c} = -a; \quad \Delta_{2c} = -b; \quad \Delta_{3c} = -\varphi.$$

Далее, в примере 7.8, рассмотрен расчет рамы на смещение опор, при этом использованы оба способа определения свободных членов канонических уравнений.

В матричной форме системы уравнений (7.26) и (7.27) записываются следующим образом:

$$\mathbf{A} \vec{X} + \vec{\Delta}_t = 0; \quad \mathbf{A} \vec{X} + \vec{\Delta}_c = 0,$$

где \mathbf{A} – матрица податливости основной системы (матрица единичных перемещений); \vec{X} – вектор основных неизвестных; $\vec{\Delta}_t$ и $\vec{\Delta}_c$ – векторы температурных и кинематических перемещений:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1i} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2i} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_k \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_t = \begin{bmatrix} \Delta_{1t} \\ \Delta_{2t} \\ \dots \\ \Delta_{kt} \\ \dots \\ \Delta_{nt} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta}_c = \begin{bmatrix} \Delta_{1c} \\ \Delta_{2c} \\ \dots \\ \Delta_{kc} \\ \dots \\ \Delta_{nc} \end{bmatrix}.$$

7.8.2 Определение внутренних усилий. Отметим еще одно отличие, характерное для расчета статически неопределимых систем на действие температуры и осадки опор методом сил.

Известно, что в любой статически определимой системе, в том числе и в основной системе метода сил, температурное и кинематическое воздействия не вызывают внутренних усилий. Поэтому определение окончательных усилий в основной системе – усилий в заданной системе – производится путем алгебраического суммирования «исправленных» эпюр:

$$M = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k X_k; \quad Q = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_k X_k; \quad N = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k X_k, \quad (7.31)$$

где $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ – внутренние усилия в основной системе от единичного усилия, приложенного в направлении X_k (от $\bar{X}_k = 1$).

Заметим, что при расчете плоских рам и балок поперечные силы Q удобно находить по значениям изгибающих моментов M , а продольные силы N – по значениям поперечных сил.

7.8.3 Проверки расчета. Как и при расчете на действие нагрузок, выполняются статические и кинематическая (деформационная) проверки. Однако в формулу кинематической проверки должны быть внесены соответствующие коррективы.

При температурном воздействии кинематическая проверка будет состоять в выполнении условия

$$\int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds + \sum_{k=1}^n \Delta_{kt} = 0; \quad (7.32)$$

при осадке опор

$$\int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds + \sum_{k=1}^n \Delta_{kc} = 0, \quad (7.33)$$

где \bar{M}_Σ – суммарная единичная эпюра моментов в основной системе, в соответствии с (7.13) представляющая собой алгебраическую сумму единичных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_k, \dots, \bar{M}_n$.

Заметим, что кинематическая проверка в соответствии с формулами (7.32), (7.33) всегда выполняется на том же варианте основной системы, который использовался в расчете.

7.8.4 Примеры расчета рам на температурное и кинематическое воздействия.

Пример 7.7 Внутри рамы (рисунок 7.30, а) температура повысилась на 20 °С, снаружи – на 10 °С. Требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив необходимые проверки. Длины стержней $l = 5$ м, $a = 2$ м, коэффициент $k = 1,1$. Высота сечения всех стержней одинакова $h = 0,25$ м, причем сечение имеет две

оси симметрии; постоянный для всей системы коэффициент линейного теплового расширения α известен.

Степень статической неопределимости. В раме один замкнутый контур ($K = 1$) и один шарнир ($Ш = 1$). По формуле (7.2)

$$n_c = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Основная система. Отбросим две связи – врежем шарниры в левое опорное сечение A и в жесткий узел C и приложим два неизвестных момента X_1, X_2 . Получим основную систему метода сил (рисунок 7.30, б).

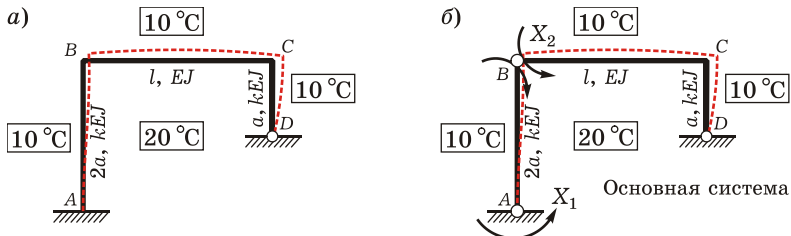


Рисунок 7.30

Система канонических уравнений. Рама два раза статически неопределима, следовательно, канонические уравнения представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1t} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

Здесь X_1, X_2 – неизвестные моменты; δ_{ki} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k от действия единичного усилия, приложенного по направлению X_i ; Δ_{kt} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_k от изменения температуры ($k, i = 1, 2$).

Построение единичных эпюр изгибающих моментов и продольных сил в основной системе. Формируем состояние «1» основной системы: прикладываем к ней $\bar{X}_1 = 1$ (единичный момент по направлению X_1) (рисунок 7.31, а). Определяем опорные реакции и строим эпюры N_1 и M_1 .

Формируем состояние «2» основной системы: прикладываем к ней $\bar{X}_2 = 1$ (единичный момент по направлению X_2) (рисунок 7.31, б). Находим опорные реакции и строим эпюры N_2 и M_2 .

Вычисление единичных и температурных перемещений. При определении единичных перемещений учитываем только изгибающие моменты. В соответствии с формулами (7.11)

$$\delta_{ki} = \int_S \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} ds \quad (k, i = 1, 2).$$

Все стержни рамы прямолинейны, их жесткость постоянна. Воспользуемся правилом перемножения прямолинейных эпюр (6.19):

$$\delta_{11} = \frac{2a}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{a}{6kJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$\delta_{22} = \frac{2a}{6kJ} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \left(2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{a}{6kJ} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2a}{6kJ} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l}{6EJ} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{a}{6kJ} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right).$$

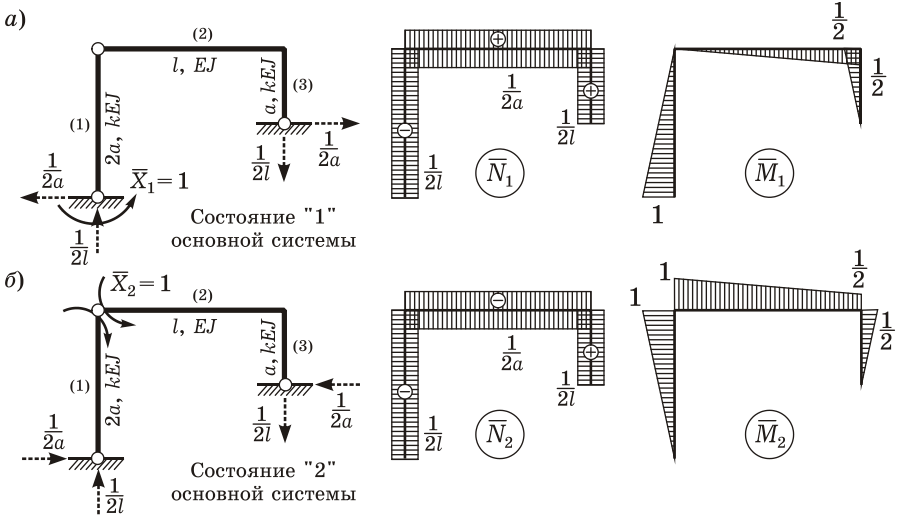


Рисунок 7.31

Подставляя значения a, l, k , получаем:

$$\delta_{11} = \frac{1,780}{EJ} \text{ (м)}; \quad \delta_{22} = \frac{4,280}{EJ} \text{ (м)}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-0,379}{EJ} \text{ (м)}.$$

Температурные перемещения найдем по формуле (7.29), вынося постоянные для всей системы $\alpha, t_0, \Delta t$ и h за знаки сумм:

$$\Delta_{1t} = \alpha t_0 \sum_{j=1}^3 \Omega_{N_1}^{(j)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \sum_{j=1}^3 \Omega_{M_1}^{(j)} = \alpha t_0 \left(-\frac{a}{l} + \frac{l}{2a} + \frac{a}{2l} \right) + \alpha \frac{\Delta t}{h} \left(-a + \frac{l}{4} + \frac{a}{4} \right);$$

$$\Delta_{2t} = \alpha t_0 \sum_{j=1}^3 \Omega_{N_2}^{(j)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \sum_{j=1}^3 \Omega_{M_2}^{(j)} = \alpha t_0 \left(-\frac{a}{l} - \frac{l}{2a} + \frac{a}{2l} \right) + \alpha \frac{\Delta t}{h} \left(-a - \frac{3l}{4} - \frac{a}{4} \right).$$

Здесь $\Omega_{N_1}^{(j)}, \Omega_{M_1}^{(j)}, \Omega_{N_2}^{(j)}, \Omega_{M_2}^{(j)}$ – площади единичных эпюр $\bar{N}_1, \bar{M}_1, \bar{N}_2, \bar{M}_2$ на j -м участке ($j = 1, 2, 3$) (номера участков обозначены на рисунке 7.30); t_0 – приращение температуры на уровне центра тяжести поперечного сечения; Δt – разность приращений температур;

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{20 + 10}{2} = 15 \text{ }^\circ\text{C}; \quad \Delta t = t_1 - t_2 = 20 - 10 = 10 \text{ }^\circ\text{C},$$

где $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_2 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ – большее и меньшее приращение температур наружных и внутренних волокон.

Подставляя значения a , l , h , t_0 , Δt в формулы для Δ_{1t} , Δ_{2t} , получаем:

$$\Delta_{1t} = 5,75\alpha; \quad \Delta_{2t} = -271,75\alpha \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Решение системы канонических уравнений. Найденные значения единичных и грузовых перемещений подставляем в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1,780}{EJ} X_1 - \frac{0,379}{EJ} X_2 + 5,75\alpha = 0; \\ -\frac{0,379}{EJ} X_1 + \frac{4,280}{EJ} X_2 - 271,75\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая систему, определяем моменты X_1 , X_2 :

$$X_1 = 10,476\alpha EJ; \quad X_2 = 64,416\alpha EJ.$$

Построение эпюр продольных сил и изгибающих моментов в заданной системе. Ординаты окончательных эпюр продольных сил N и изгибающих моментов M определяем по формулам (7.31):

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2; \quad M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Умножаем ординаты эпюр \bar{N}_1 и \bar{M}_1 на значение X_1 , эпюр \bar{N}_2 и \bar{M}_2 – на X_2 (рисунок 7.32, а), складываем соответствующие эпюры и получаем N и M (рисунок 7.32, б).

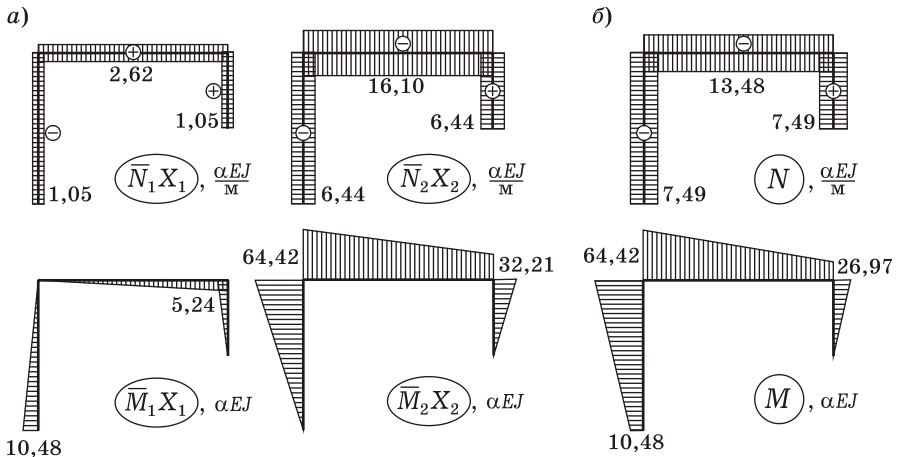


Рисунок 7.32

Кинематическая проверка эпюры M . Строим суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ (рисунок 7.33).

Согласно формуле (7.32), перемножив эпюры M , \bar{M}_Σ и сложив их с температурными перемещениями, мы должны получить нуль. Проверим это:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds + \Delta_{1t} + \Delta_{2t} &= \\ &= -\frac{2a}{6kJ} (2 \cdot 10,48 \cdot 1 + 2 \cdot 64,42 \cdot 1 + 10,48 \cdot 1 + 64,42 \cdot 1) \alpha EJ + \\ &+ \frac{l}{6EJ} (2 \cdot 64,42 \cdot 1 + 26,97 \cdot 1) \alpha EJ + 5,75\alpha - 271,75\alpha = \\ &= \frac{4 \cdot 224,7\alpha}{6 \cdot 1,1} + \frac{5 \cdot 155,81\alpha}{6} - 266\alpha = 0,02\alpha \approx 0. \end{aligned}$$

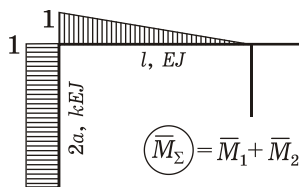


Рисунок 7.33

Проверка выполняется, значит, эпюра моментов правильная.

Построение эпюры поперечных сил Q . Эпюру поперечных сил построим по готовой эпюре изгибающих моментов M .

На участках рамы, где эпюра M прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. Q положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. В соответствии с этим

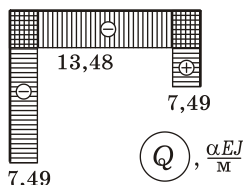


Рисунок 7.34

$$Q_{AB} = -\frac{64,42 - 10,48}{2a} = -\frac{53,94}{4} = -13,49 \text{ кН};$$

$$Q_{BC} = \frac{64,42 - 26,97}{l} = \frac{37,45}{5} = 7,49 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = \frac{26,97}{a} = \frac{26,97}{2} = 13,49 \text{ кН}.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру Q (рисунок 7.34).

Заметим, что по готовой эпюре Q может быть построена эпюра N так же, как в примере 7.6.

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор (рисунок 7.35) и приложим в местах сечений внутренние усилия, взятые из эпюр M , Q , N .

Сумма проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\sum Z = 13,49 - 13,49 = 0;$$

$$\sum Y = 7,49 - 7,49 = 0.$$

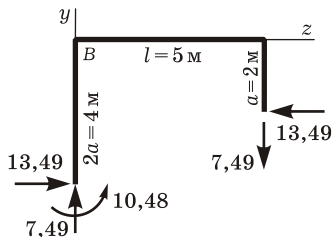


Рисунок 7.35

Сумма моментов всех сил относительно точки B :

$$\sum M_B = 10,48 + 13,49 \cdot 4 - 13,49 \cdot 2 - 7,49 \cdot 5 = 0,01 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рама находится в равновесии, следовательно, внутренние усилия найдены верно.

Пример 7.8 Правая опора рамы сместилась вниз на $c_1 = 0,1$ м и вправо на $c_2 = 0,2$ м (рисунок 7.36, а). Требуется построить эпюру изгибающих моментов. Длины $l = 5$ м, $a = 2$ м, коэффициент $k = 1,1$.

Схема рамы такая же, как в предыдущем примере, поэтому некоторые результаты можно будет взять из него.

Степень статической неопределимости рамы $n_c = 2$.

Основная система. Врежем два шарнира и приложим два момента X_1, X_2 . Получим основную систему метода сил (рисунок 7.36, б).

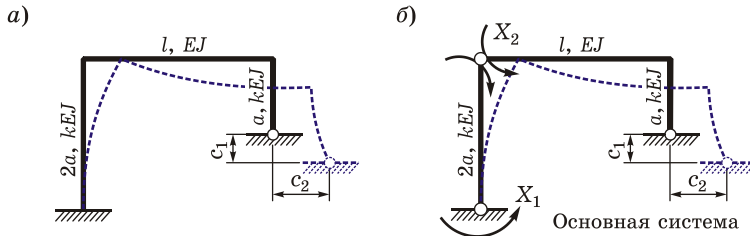


Рисунок 7.36

Система канонических уравнений для данной рамы имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1c} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2c} = 0, \end{cases}$$

где Δ_{ic} – перемещение в основной системе по направлению усилия X_i , вызванное смещением опор ($k = 1, 2$).

Построение единичных эпюр изгибающих моментов в основной системе. Формируем состояние «1» основной системы: прикладываем к ней момент $\bar{X}_1 = 1$ (рисунок 7.37, а). Находим реакции и строим эпюру \bar{M}_1 .

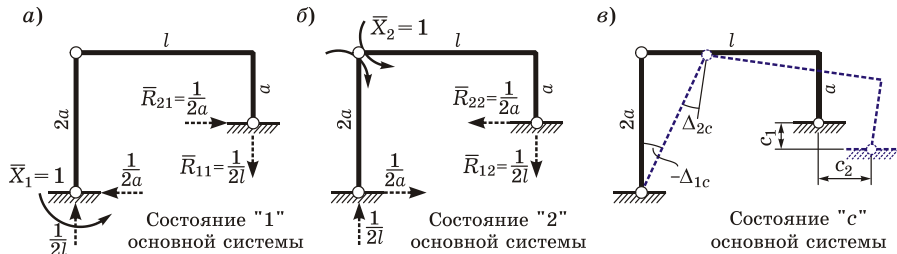


Рисунок 7.37

Формируем состояние «2» основной системы: прикладываем к ней момент $\bar{X}_2 = 1$ (рисунок 7.37, б). Определяем опорные реакции и строим эпюру \bar{M}_2 .

Вычисление перемещений. При определении единичных перемещений учитываем только изгибающие моменты. Берем их из примера 7.7:

$$\delta_{11} = \frac{1,780}{EJ} (\text{м}); \quad \delta_{22} = \frac{4,280}{EJ} (\text{м}); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-0,379}{EJ} (\text{м}).$$

Перемещения в основной системе, вызванные смещением опор, найдем по формуле (7.30):

$$\Delta_{ic} = -(\pm \bar{R}_{1k} c_1) - (\pm \bar{R}_{2k} c_2),$$

где c_j – заданное смещение в основной системе; \bar{R}_{jk} – сила в единичном состоянии «k», действующая вдоль смещения c_j . Произведения $(\pm \bar{R}_{jk} c_j)$ положительны, если направления сил в единичном состоянии совпадают с направлениями соответствующих смещений:

$$\Delta_{1c} = -\bar{R}_{11} c_1 - \bar{R}_{21} c_2 = -\frac{1}{2l} c_1 - \frac{1}{2a} c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 5} 0,01 - \frac{1}{2 \cdot 2} 0,02 = -0,06;$$

$$\Delta_{2c} = -\bar{R}_{12} c_1 - (-\bar{R}_{22} c_2) = -\frac{1}{2l} c_1 + \frac{1}{2a} c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 5} 0,01 + \frac{1}{2 \cdot 2} 0,02 = 0,04.$$

Смысл этих перемещений ясен из рисунка 7.37, в. Знак «минус» у величины Δ_{1c} показывает, что направления Δ_{1c} и X_1 противоположны.

Решение системы канонических уравнений. Значения единичных и грузовых перемещений подставляем в систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1,780}{EJ} X_1 - \frac{0,379}{EJ} X_2 - 0,06 = 0; \\ -\frac{0,379}{EJ} X_1 + \frac{4,280}{EJ} X_2 + 0,04 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, определяем моменты X_1, X_2 :

$$X_1 = 0,032322EJ; \quad X_2 = -0,006485EJ \quad (1/\text{м}).$$

Построение эпюры изгибающих моментов в заданной системе. Ординаты окончательной эпюры M определяем по формуле (7.31):

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

Умножаем ординаты \bar{M}_1 на значение X_1 , \bar{M}_2 – на X_2 (рисунок 7.38, а), складываем соответствующие эпюры и получаем M (рисунок 7.38, б).

Кинематическая проверка эпюры M . Строим суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ (см. рисунок 7.32).

Согласно формуле (7.33), перемножив эпюры M, \bar{M}_Σ и сложив их с перемещениями от смещения опор, мы должны получить нуль. Проверим это:

$$\int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds + \Delta_{1c} + \Delta_{2c} = \frac{2a}{6kJ} (2 \cdot 0,032322 \cdot 1 - 2 \cdot 0,006485 \cdot 1 + 0,032322 \cdot 1 - 0,006485 \cdot 1) EJ + \frac{l}{6EJ} (-2 \cdot 0,006485 \cdot 1 - 0,019404 \cdot 1) EJ - 0,06 + 0,04 = \frac{4 \cdot 0,077511}{6 \cdot 1,1} + \frac{5 \cdot (-0,032374)}{6} - 0,02 = 0.$$

Проверка выполняется, значит, эпюра моментов правильная.

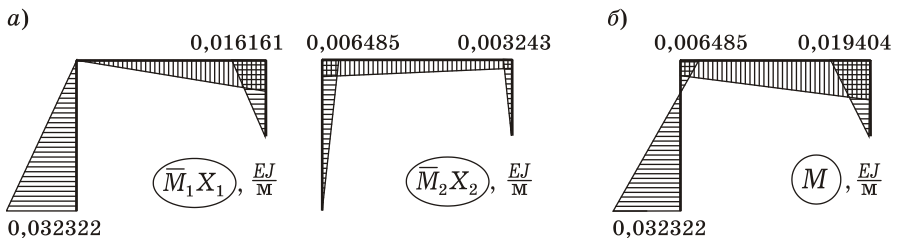


Рисунок 7.38

Если в расчете использовать другой вариант основной системы (рисунок 7.39, а), то для определения свободных членов канонических уравнений не надо использовать какие-либо формулы.

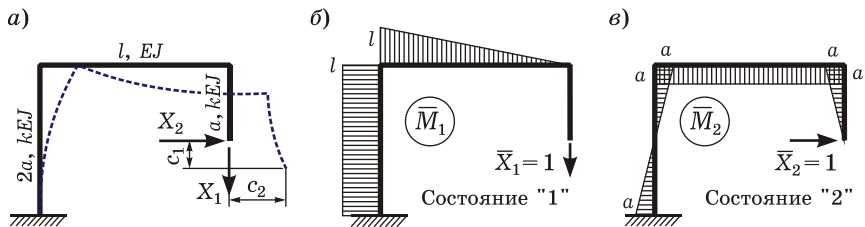


Рисунок 7.39

Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = c_1; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = c_2. \end{cases}$$

Формируем состояния «1» и «2» основной системы и строим единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рисунок 7.39, б, в). Единичные перемещения получим, перемножив соответствующие единичные эпюры:

$$\delta_{11} = \frac{13258}{EJ} (\text{м}); \quad \delta_{22} = \frac{27,27}{EJ} (\text{м}); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-25,00}{EJ} (\text{м}).$$

Решив систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \frac{132,58}{EJ} X_1 - \frac{25,00}{EJ} X_2 = 0,1; \\ -\frac{25,00}{EJ} X_1 + \frac{27,27}{EJ} X_2 = 0,2, \end{cases}$$

определяем силы X_1 , X_2 :

$$X_1 = 0,002584EJ; \quad X_2 = 0,009702EJ \quad (1/\text{м}^2).$$

Используя зависимость $M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2$, получаем окончательную эпюру изгибающих моментов (см. рисунок 7.38, б).

7.9 Возможные упрощения при расчете статически неопределимых систем методом сил

7.9.1 Понятие о рациональной основной системе. Трудоемкость расчета статически неопределимой системы методом сил зависит прежде всего от ее степени статической неопределимости n_c . Но если n_c является объективным фактором, не зависящим от расчетчика, то в нашем распоряжении остается много приемов, с помощью которых можно существенно уменьшить количество вычислений, что особенно актуально при «ручном» счете.

Вычислительные трудности становятся тем меньше, чем больше побочных коэффициентов (единичных перемещений) δ_{ic} будут равными нулю. Это связано с особенностями перемножаемых единичных эпюр внутренних усилий, а значит, с особенностями основной системы, в которой эти эпюры строятся.

Рациональной основной системой будем называть такую основную систему, которая позволяет получить наибольшее количество нулевых побочных коэффициентов.

Эпюры, результат перемножения которых друг на друга дает нуль, будем называть *взаимно ортогональными*. В частности, взаимно ортогональны симметричная и обратносимметричная (кососимметричная) эпюры (рисунок 7.40).

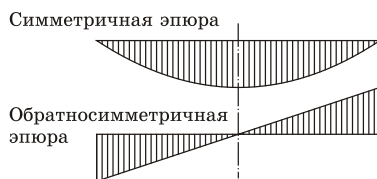


Рисунок 7.40

Для получения рациональной основной системы метода сил необходимо:

- стремиться к выбору такой основной системы, в которой получается наибольшее количество взаимно ортогональных единичных эпюр;

- стремиться к тому, чтобы единичные эпюры были как можно более «короткими», т. е. находились на наименьшем количестве участков;
- следить за тем, чтобы малые усилия не вызывали больших перемещений, т. е. чтобы перемещения и деформации в основной и заданной системах не слишком отличалась по величине (имели один порядок).

Ниже рассмотрим несколько приемов выбора рациональной основной системы.

7.9.2 Учет симметрии системы. *Симметричной* будем считать систему, обладающую симметрией своих геометрических и жесткостных параметров относительно некоторой оси.

Если заданная статически неопределимая конструкция симметрична, то симметричной должна быть и основная система. При этом основные неизвестные необходимо выбрать так, чтобы одни были симметричными, а другие – обратносимметричными (кососимметричными). Тогда побочные единичные коэффициенты, равные результату перемножения взаимно ортогональных симметричной и обратносимметричной эпюр, будут нулевыми.

Еще одно преимущество такого приема состоит в том, что в случае *симметричной* нагрузки на симметричную систему обратносимметричные неизвестные тождественно равны нулю. И наоборот: при *обратносимметричной* нагрузке на симметричную систему симметричные неизвестные нулевые.

Заметим, что указанное положение остается справедливым не только для силового внешнего воздействия, но и для любого другого, например, температурного или кинематического.

Например, для рамы на рисунке 7.41, *а* рациональная основная система, учитывающая симметрию системы, показана на рисунке 7.41, *б*. Здесь X_1 и X_2 – симметричные неизвестные, а X_3 и X_4 – обратносимметричные. Следовательно, побочные коэффициенты

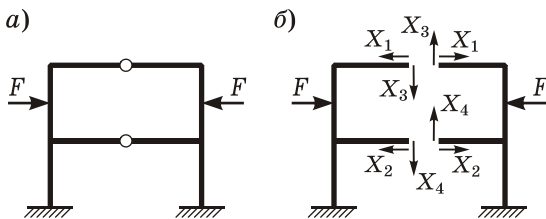


Рисунок 7.41

$$\delta_{13} = 0;$$

$$\delta_{14} = 0;$$

$$\delta_{23} = 0;$$

$$\delta_{24} = 0.$$

Так как нагрузка симметрична, то

$$X_3 = X_4 = 0.$$

Естественным следствием установленного выше результата является идея о разложении произвольной внешней нагрузки (воздействия) на симметричную и обратносимметричную составляющие. Например, нагрузку на раму, показанную на рисунке 7.42, *а*, можно представить в виде двух составляющих так, как изображено на рисунке 7.42, *б*. Этот прием в некоторых случаях тоже может способствовать упрощению расчета.

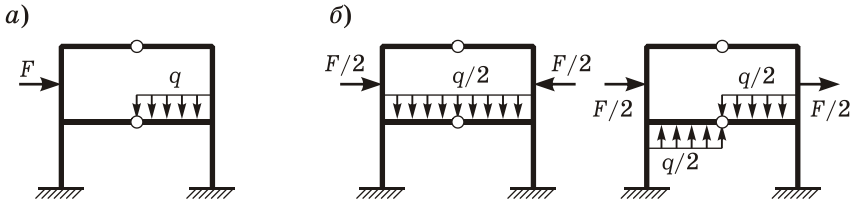


Рисунок 7.42

7.9.3 Введение жестких консолей. Рассмотрим часто встречающуюся в практике П-образную раму, содержащую три лишние связи (рисунок 7.43, *а*). В общем случае при произвольной основной системе придется решить совместную систему трех канонических уравнений. Поищем способ расчета, позволяющий получить три независимых уравнения:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \quad (7.34)$$

Рассечем раму по оси симметрии и приложим три усилия X_1, X_2, X_3 (рисунок 7.43, *б*). В полученной основной системе взаимно ортогональны единичные эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_2 и \bar{M}_2, \bar{M}_3 (рисунок 7.43, *в*), поэтому $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$. Однако перемещение $\delta_{13} \neq 0$.

Выберем другую основную систему. Для этого к сечениям прикрепим две жесткие консоли¹⁾ длиной c (рисунок 7.43, *г*), к концам которых приложим силы X_3 . Единичные эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_2 останутся такими же, эпюра \bar{M}_3 изменится (рисунок 7.43, *д*). Очевидно, что приняв длину консолей $c = 2h/3$, мы обратим перемещение δ_{13} в нуль.

Для замкнутых контуров более сложных форм (в том числе и несимметричных) длина жестких консолей и выбор направлений неизвестных определяется по специально разработанной методике [6].

¹⁾ Эти условные консоли считаются абсолютно жесткими, недеформируемыми, т. е. внутренние усилия в них не возникают; невесомыми – не создается дополнительная нагрузка от их веса.

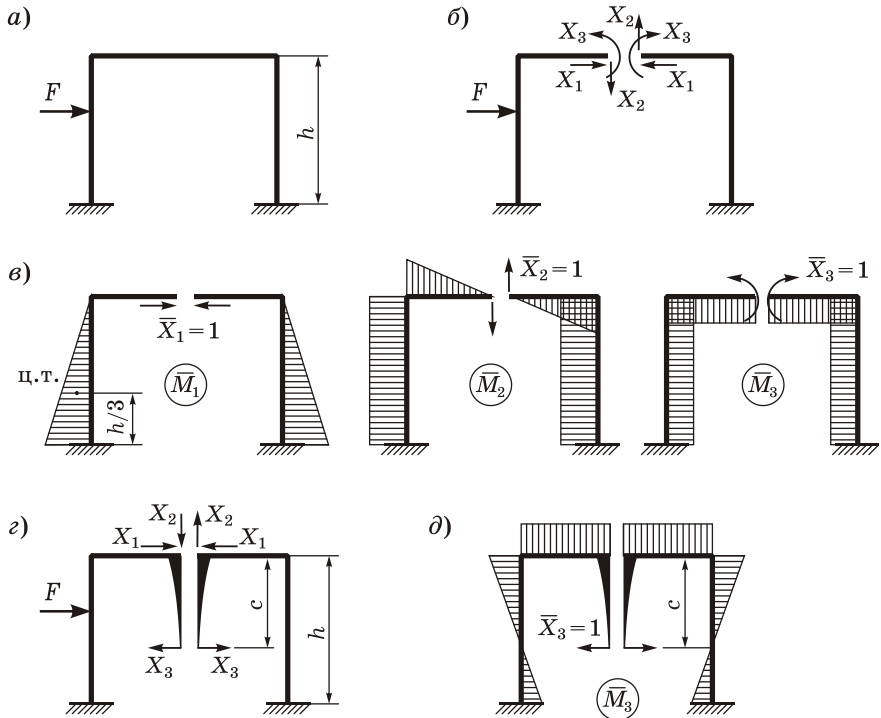


Рисунок 7.43

Заметим, что в некоторых случаях число дополнительных расчетов не оправдывает получаемого упрощения системы канонических уравнений.

7.9.4 Рациональная расстановка шарниров. Для ортогонализации единичных эпюр можно использовать прием рационального расположения шарниров в основной системе.

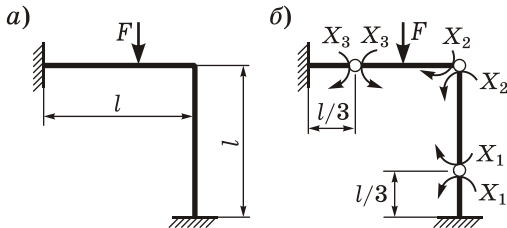


Рисунок 7.44

расположения шарниров в основной системе. Рассмотрим, например, трижды статически неопределимую раму (рисунок 7.44, а). Если выбрать основную систему, показанную на рисунке 7.44, б, то единичные эпюры в ней будут взаимно ортогональными. Следовательно,

все побочные коэффициенты получатся нулевыми и система канонических уравнений распадается на три независимых уравнения (7.34).

7.9.5 Рациональный выбор направлений неизвестных. Рассмотрим раму, показанную на рисунке 7.45, а.

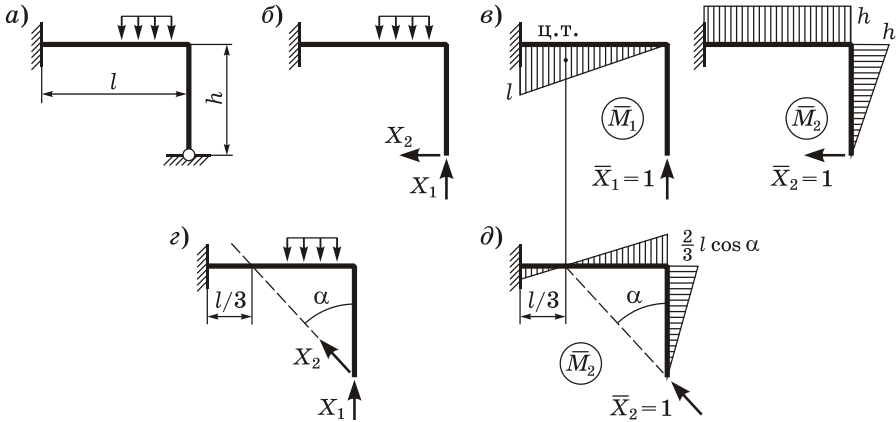


Рисунок 7.45

Принимая для расчета основную систему, изображенную на рисунке 7.45, б, получаем неортогональные единичные эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_2 (рисунок 7.45, в) и, следовательно, $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$. Однако выбор направлений неизвестных целиком находится в нашем распоряжении. Поэтому можно выбрать такое направление \bar{X}_2 (рисунок 7.45, г), при котором эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рисунок 7.45, д) взаимно ортогональны и перемещения $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

Конечно, рассмотренная дважды статически неопределимая рама имеет столь несложную систему канонических уравнений, что в ее упрощении нет необходимости. Изложенный прием выбора направлений неизвестных применяется в основном для сложных конструкций с $n_c \geq 3$.

7.9.6 Группировка неизвестных. Применение этого способа рассмотрим на примере симметричной рамы (рисунок 7.46, а). Заменяя симметрично расположенные опорные связи силами X_1, X_2 (рисунок 7.46, б), мы не получаем эффекта обнуления побочных коэффициентов δ_{12}, δ_{21} , так как эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 взаимно неортогональны (рисунок 7.46, в).

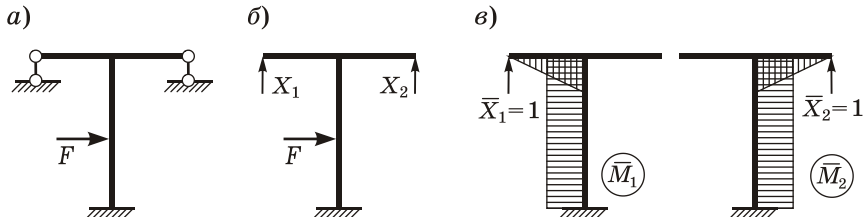


Рисунок 7.46

Примем теперь в качестве неизвестных обобщенные силы, каждая из которых представляет собой группу из двух сосредоточенных симметричных X_1 и антисимметричных X_2 сил (рисунок 7.47, а). В этом случае единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 станут взаимно ортогональными (рисунок 7.47, б), и $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$.

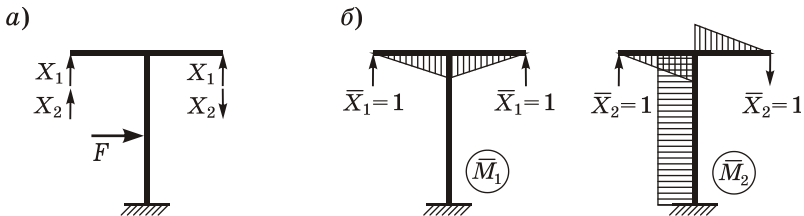


Рисунок 7.47

Таким же образом можно группировать реакции лишних связей, представляющие собой изгибающие моменты (рисунок 7.48).

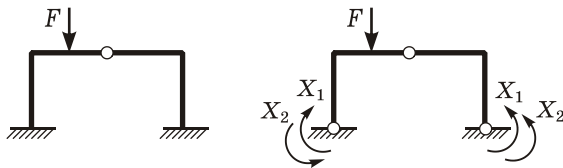


Рисунок 7.48

Рассмотренный способ может найти применение и в случае несимметричных рам. Например, для системы, показанной на рисунке 7.49, группировка неизвестных дает возможность построения более коротких единичных эпюр, что является одним из критериев выбора рациональной основной системы.

Здесь изложены принципы выбора рациональной основной системы для плоских рам. Для неразрезных балок, арок и ферм аналогичные вопросы будут рассматриваться в разд. 8.

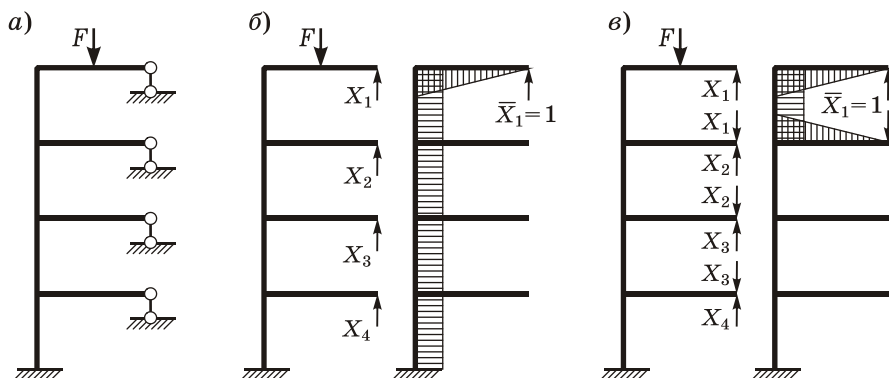


Рисунок 7.49

7.9.7 Зависимость точности расчета от принятой основной системы. Как было показано в п. 7.4.1, внутренние усилия определяются на основании принципа суперпозиции по формулам (7.19), где одни слагаемые получаются отрицательными, другие – положительными. Очевидно, что чем ближе друг к другу два числа с разными знаками, тем меньшей будет их сумма и соответственно более чувствительной к ошибкам округления.

Если основная система по особенностям работы близка к заданной системе, то значения неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n невелики. Тогда, например, в формуле для изгибающих моментов сумма $\sum M_k X_k$ невелика по сравнению с M_p . В этом случае при вычислениях по формулам (7.19) не будет получаться разности близких чисел, и алгоритм расчета будет устойчив к ошибкам округления.

Если принятая основная система по своей работе далека от заданной системы, промежуточные вычисления надо вести с высокой степенью точности, т. е. удерживать достаточно большое число знаков.

7.10 Перемещения в статически неопределимых системах

Чтобы найти перемещение методом Мора (см. подразд. 6.3), необходимо определить внутренние усилия от заданной нагрузки, а также от единичного усилия, приложенного в направлении искомого перемещения. При этом совершенно несущественно, является система статически определимой или неопределимой.

Пусть, например, требуется найти горизонтальное перемещение Δ жесткого узла один раз статически неопределимой рамы (рисунок 7.50, а). Эпюра изгибающих моментов M от заданной

нагрузки изображена на рисунке 7.50, б. Она построена методом сил (см. пример 7.5) с использованием основной системы, показанной на рисунке 7.50, в.

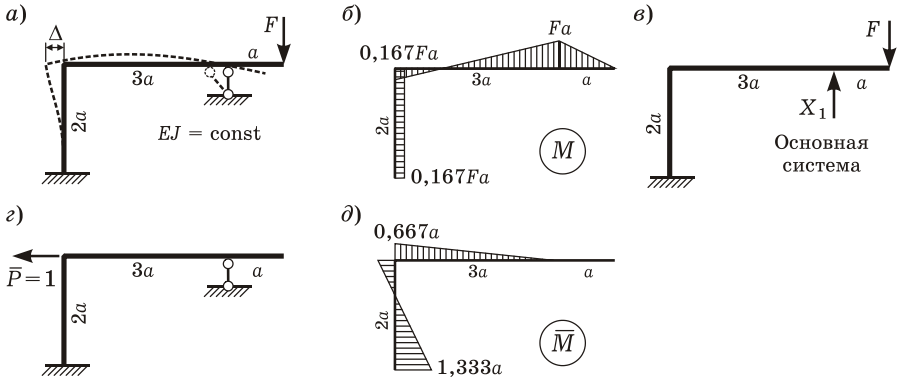


Рисунок 7.50

По направлению перемещения Δ приложим единичную силу (рисунок 7.50, з). Эпюра \bar{M} (рисунок 7.50, д) строится аналогично, причем в качестве нагрузки принимается сила $\bar{P} = 1$.

Перемножив эпюры M и \bar{M} , получим:

$$\begin{aligned} \Delta = \int_s \frac{M\bar{M}}{EJ} ds &= \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0,167Fa \cdot 1,333a - 2 \cdot 0,167Fa \cdot 0,667a + \\ &+ 0,167Fa \cdot 1,333a - 0,167Fa \cdot 0,667a) + \\ &+ \frac{3a}{6EJ} (-2 \cdot 0,167Fa \cdot 0,667a + Fa \cdot 0,667a) = 0,333 \frac{Fa^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Заметим, что расчет данной статически неопределимой рамы методом сил пришлось выполнять два раза: на действие нагрузки и единичного усилия.

Вычисление перемещений можно значительно упростить на основе следующих соображений. Отбросим одну лишнюю связь, например, опорный стержень, превратив раму в статически определимую (см. рисунок 7.50, в). При этом на нее действуют две внешние силы — F и X_1 . Эпюра моментов M от этих сил построена (см. рисунок 7.50, б).

Сформируем единичное состояние этой рамы (рисунок 7.51, а), в котором построим единичную эпюру \bar{M}^0 (рисунок 7.51, б).

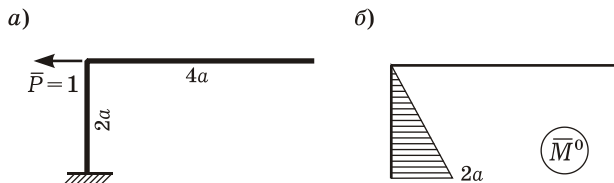


Рисунок 7.51

Перемножив эпюры M и \bar{M}^0 , получим:

$$\Delta = \int_s \frac{M\bar{M}^0}{EJ} ds = \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 2a \cdot 0,167Fa + 2a \cdot 0,167Fa) = 0,333 \frac{Fa^3}{EJ}.$$

Таким образом, единичная эпюра может быть построена не в заданной статически неопределимой системе, а в статически определимой, полученной отбрасыванием лишних связей.

Заметим, что может быть выбрана *любая статически определимая система*, а не только та, которая была использована в качестве основной системы метода сил. Например, перемножив эпюры M и \bar{M}^0 (рисунок 7.52), получим аналогичный результат:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_s \frac{M\bar{M}^0}{EJ} ds = \frac{2a}{6EJ} (-2 \cdot 2a \cdot 0,167Fa - 2a \cdot 0,167Fa) + \\ &+ \frac{3a}{6EJ} (-2 \cdot 2a \cdot 0,167Fa + 2a \cdot Fa) = 0,333 \frac{Fa^3}{EJ}. \end{aligned}$$

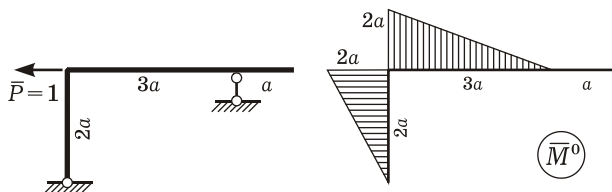


Рисунок 7.52

Иногда требуется найти перемещение в статически неопределимой системе от заданной нагрузки, но нет необходимости определять внутренние усилия. В таких случаях можно ограничиться расчетом этой системы на единичное усилие, приложенное по направлению искомого перемещения. Эпюра от нагрузки может быть построена в статически определимой системе, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Докажем это утверждение. Рассмотрим раму, изображенную на рисунке 7.50, а. Представим моменты M в виде

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p.$$

Далее

$$\Delta = \int_s \frac{M\bar{M}}{EJ} ds = \int_s \frac{(\bar{M}_1 X_1 + M_p)\bar{M}}{EJ} ds = X_1 \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}}{EJ} ds + \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds.$$

Первый интеграл от произведения $\bar{M}_1 \bar{M}$ равен нулю, так как при построении эпюры \bar{M} методом сил могла быть использована единичная эпюра \bar{M}_1 ; тогда произведение $\bar{M}_1 \bar{M}$ представляет собой кинематическую проверку. Следовательно,

$$\Delta = \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds,$$

где M_p – эпюра моментов от нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей (т. е. в основной системе метода сил).

Перемножая эпюры M_p (см. рисунок 7.14, б) и \bar{M} (см. рисунок 7.50, д) для рассматриваемой рамы, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta = \int_s \frac{M_p \bar{M}}{EJ} ds &= \frac{2a}{6EJ} (2 \cdot 0,667a \cdot 4Fa - 2 \cdot 1,333a \cdot 4Fa - \\ &- 1,333a \cdot 4Fa + 0,667a \cdot 4Fa) = 0,333 \frac{Fa^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Значение перемещения совпало с найденным ранее.

Итак, при определении перемещений в статически неопределимых системах одна из эпюр (грузовая или единичная) обязательно должна быть построена для заданной системы. Другая же эпюра может быть построена для статически определимой системы, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Способы определения перемещений, продемонстрированные на примере рамы, применимы к расчету любых статически неопределимых стержневых систем. Разница заключается в учете тех или иных внутренних усилий. Например, при расчете ферм производится перемножение эпюр продольных сил N , арок и комбинированных систем – M , N и Q .

В предыдущем разделе была изложена суть метода сил и подробно рассмотрена методика расчета статически неопределимых рам, для которых преимущественное значение имеет учет изгибных деформаций. Для статически неопределимых арок, ферм и неразрезных балок изложенная методика требует небольших корректив. Заметим, что эти коррективы относятся к отдельным частным вопросам и не затрагивают принципиальных основ метода сил.

8.1 Основные понятия о расчете арок

8.1.1 Типы статически неопределимых арок. В практике строительства наиболее часто применяются *двухшарнирная* и *бесшарнирная* арки. Первая из них один раз статически неопределима, так как содержит одну лишнюю связь ($n_c = 1$), вторая – три раза ($n_c = 3$). Замкнутые кривые стержни (*кольца*), если в них нет шарниров, также трижды статически неопределимы. *Одношарнирные* арки, дважды статически неопределимые ($n_c = 2$), на практике используются редко (рисунок 8.1).



Рисунок 8.1

Арки являются распорными конструкциями, т. е. под воздействием вертикальных нагрузок в их опорах возникают и вертикальные, и горизонтальные реакции (распор).

Если опорные устройства или нижележащие элементы неспособны воспринимать распор, в арках устраиваются *затяжки*. Обычно затяжки выполняются в двухшарнирных арках (рисунок 8.2). Арка с затяжкой имеет балочные опоры и передает на опорные конструкции от вертикальной нагрузки только вертикальные реакции и может быть установлена на высокие колонны или стены без устройства контрфорсов.

Арки изготавливаются из металла, железобетона, дерева, камня, композиционных материалов. Они могут быть сплошными

или сквозными (в виде арочных ферм), симметричными и несимметричными.

Уравнение оси статически неопределимой двухшарнирной или бесшарнирной арки может быть принято таким же, как и для трехшарнирной системы (см. п. 5.1.5). К числу наиболее распространенных относятся арки, оси которых очерчены по квадратной параболе, синусоиде, дуге окружности.

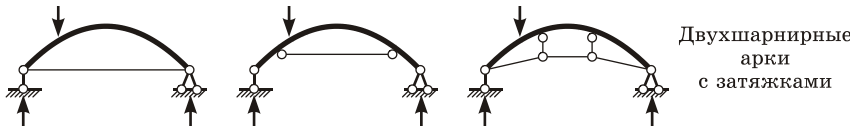


Рисунок 8.2

Арочные конструкции используются в мостостроении, промышленном и гражданском строительстве для перекрытия больших пролетов зрелищных залов, ангаров, спортивных сооружений и др., в гидротехническом строительстве (арочные плотины).

8.1.2 Особенности расчета статически неопределимых арок.

В арках внутренние усилия (M , Q , N) и перемещения зависит не только от внешней нагрузки, но и от формы оси, а в статически неопределимых арках – еще и от геометрических характеристик поперечных сечений (площадей A и моментов инерции J). Поэтому задача расчета статически неопределимой арки обычно решается следующим образом:

- назначают материал, очертание оси, форму и размеры поперечных сечений – интуитивно, а также пользуясь результатами расчета аналогичных сооружений;
- находят внутренние усилия и перемещения;
- проверяют прочность и жесткость арки;
- если условия прочности или жесткости не выполняются или, наоборот, запас прочности слишком велик, расчет повторяют, уточнив размеры сечений.

Для определения внутренних усилий в статически неопределимых арках наиболее удобен *метод сил*.

Заметим, что при вычислении коэффициентов канонических уравнений (единичных и грузовых перемещений) необходимо учитывать не только изгибающие моменты, но также продольные и поперечные силы. Для пологих строительных арок с отношением $\rho/h > 10$ (ρ – радиус кривизны оси арки, h – высота поперечного сечения) с достаточной степенью точности перемещения можно определять по формуле (6.8), полученной для прямолинейных элементов.

Заметим, что сравнительное влияние N и Q на перемещения зависит не только от геометрических параметров арки, но и от нагрузки. Для бесшарнирных арок «вклад» этих усилий обычно больше, чем для двухшарнирных.

Как правило, арка представляет собой основную часть дорогого и ответственного сооружения, поэтому при определении перемещений не следует игнорировать отдельные внутренние силы. Однако в учебных и предварительных расчетах допускается пренебрегать влиянием на перемещения поперечных, а в некоторых случаях и продольных сил.

Интегралы Мора, входящие в формулу (6.8), вычисляют приближенно, используя численные методы. Способы «перемножения эпюр», рассмотренные в подразд. 6.5, неприменимы, так как все эпюры внутренних усилий в арках криволинейны. В виде исключения можно разбить ось арки на малые участки, в пределах которых и ось, и эпюры считать прямолинейными, «перемножить» эпюры для каждого участка, а результаты просуммировать.

8.1.3 Законы изменения сечений арок. Назначая размеры сечений арки, стремятся, чтобы распределение материала по ее длине соответствовало распределению внутренних сил, прежде всего изгибающих моментов; в этом случае расход материала будет минимальным. При этом желательно, чтобы результаты расчета получались в виде простых формул.

Наиболее простой закон изменения моментов инерции поперечных сечений следующий: для двухшарнирных арок (рисунок 8.3, а)

$$J(z) = J_0 \cos^n \varphi(z);$$

для бесшарнирных (рисунок 8.3, б)

$$J(z) = J_0 / \cos^n \varphi(z),$$

где J_0 – момент инерции замкового сечения арки; φ – угол наклона касательной к оси арки в сечении с координатами y, z ; $n = 0, 1, 2, \dots$; при $n = 0$ $J = J_0 = \text{const}$.

Из приведенных выше зависимостей для момента инерции $J(z)$ можно получить и законы изменения площадей поперечных сечений арок A . Если ширина сечения постоянна (например, для прямоугольника), то переменная площадь выражается так:

$$A(z) = A_0 \sqrt[3]{J(z) / J_0},$$

где A_0 – площадь сечения в замке.

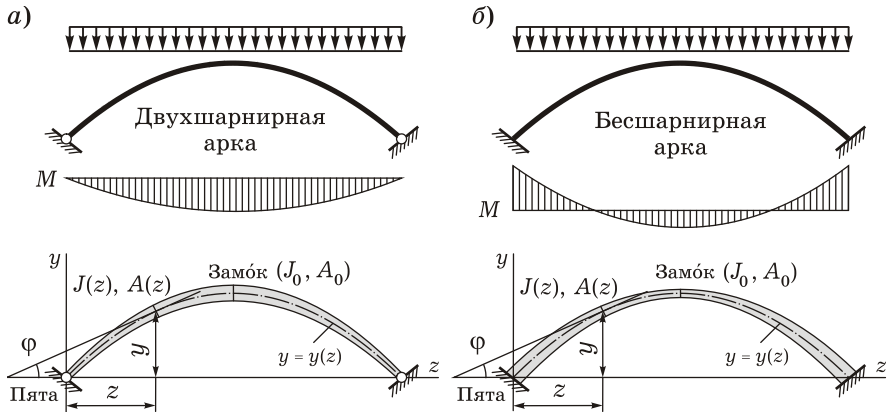


Рисунок 8.3

Могут быть предложены и другие законы изменения моментов инерции и площадей сечений [6].

Как было указано выше, размеры сечений назначаются на первом этапе проектирования арки. Далее по результатам расчета могут быть внесены изменения для обеспечения минимального расхода материалов, технологичности, архитектурной выразительности конструкций и т. д.

8.2 Расчет двухшарнирной арки на неподвижную нагрузку

8.2.1 Общий ход расчета. Заданная двухшарнирная арка (рисунок 8.4, а) содержит одну лишнюю связь, поэтому для получения статически определенной основной системы метода сил необходимо эту связь отбросить и заменить действием реакции X_1 .

Основная система метода сил может быть образована двумя способами (рисунок 8.4, б): в виде трехшарнирной арки (арочная основная система) или криволинейной балки (балочная основная система). В первом случае X_1 представляет собой изгибающий момент в замковом сечении, во втором – горизонтальную опорную реакцию (распор).

Условием эквивалентности основной и заданной систем является отсутствие в основной системе перемещения Δ_1 по направлению усилия X_1 , вызванного совместным действием заданной нагрузки и X_1 . Смысл перемещения Δ_1 для каждой системы ясен из рисунка 8.4, в.

На основании принципа суперпозиции $\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p}$. Приравняв это выражение к нулю, получим *каноническое уравнение*:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (8.1)$$

где δ_{11} – перемещение по направлению X_1 , вызванное единичным силовым фактором, приложенным в направлении X_1 ; Δ_{1p} – перемещение по направлению X_1 от внешней нагрузки.

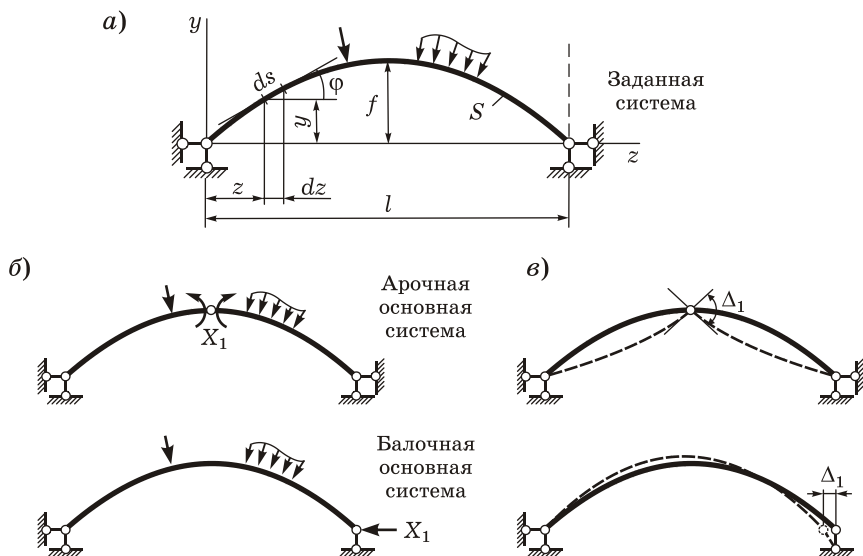


Рисунок 8.4

Далее следует сформировать единичное и грузовое состояния основной системы, определить в каждом из них внутренние усилия – $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$ и M_p, Q_p, N_p соответственно. Затем, воспользовавшись методом Мора, необходимо найти перемещения δ_{11} и Δ_{1p} :

$$\delta_{11} = \int_S \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds + \int_S \eta \frac{\bar{Q}_1^2}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_1^2}{EA} ds ;$$

$$\Delta_{1p} = \int_S \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} ds + \int_S \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_p}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_1 N_p}{EA} ds, \quad (8.2)$$

где S – длина оси арки; ds – бесконечно малый элемент оси; EJ, GA, EA – жесткости сечения соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению при изгибе и зависящий от формы сечения.

Из уравнения (8.1) следует, что

$$X_1 = -\Delta_{1p} / \delta_{11}. \quad (8.3)$$

Теперь, зная X_1 , по принципу суперпозиции можно определить изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в заданной арке:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p; \quad Q = \bar{Q}_1 X_1 + Q_p; \quad N = \bar{N}_1 X_1 + N_p. \quad (8.4)$$

Для контроля вычисленных внутренних усилий выполняется кинематическая (деформационная) проверка. Для этого определяется перемещение

$$\Delta_1 = \int_s \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_1 Q}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_1 N}{EA} ds. \quad (8.5)$$

Равенство Δ_1 нулю говорит о правильности расчетов.

8.2.2 Особенности расчета арки с балочной основной системой. В большинстве случаев определение внутренних усилий и перемещений с применением балочной основной системы проще, чем с арочной. Поэтому рассмотрим его подробнее.

Сформируем *единичное состояние* балочной основной системы, приложив по направлению распора X_1 единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ (рисунок 8.5, а). Очевидно, что вертикальные реакции нулевые, горизонтальная реакция левой опоры равна 1.

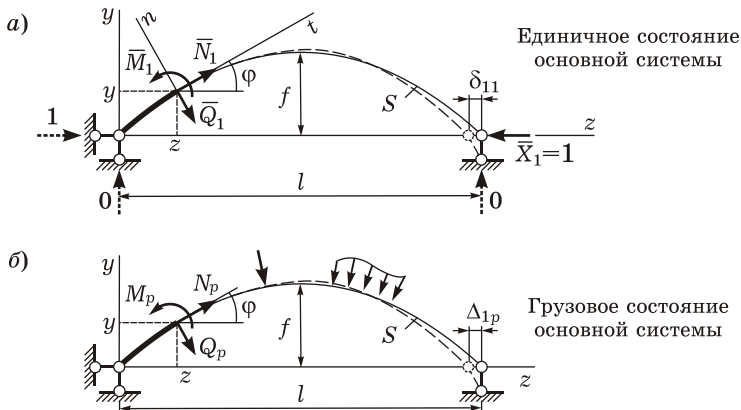


Рисунок 8.5

Проведем произвольное сечение с координатами z , y и углом наклона касательной к оси $\varphi(z)$. Введем в нем локальную систему координат t , n (t – касательная, n – нормаль).

Определим внутренние усилия $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$ в единичном состоянии основной системы. Из уравнений равновесия левой части

$$\begin{aligned} \sum M = 0; \quad \bar{M}_1 + 1 \cdot y = 0; \quad \sum n = 0; \quad -\bar{Q}_1 - 1 \cdot \sin \varphi = 0; \\ \sum t = 0; \quad \bar{N}_1 + 1 \cdot \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

следует, что

$$\bar{M}_1 = -y; \quad \bar{Q}_1 = -\sin \varphi; \quad \bar{N}_1 = -\cos \varphi. \quad (8.6)$$

Сформируем *грузовое состояние* основной системы (рисунок 8.5, б). В общем случае произвольной нагрузки готовые выражения для внутренних усилий M_p, Q_p, N_p обычно не получают, а находят их числовые значения в ряде характерных сечений.

Подставим выражения (8.6) в формулы (8.2) для единичного и грузового перемещений; при этом заменим интегрирование по длине оси S интегрированием по длине пролета l , учитывая, что (см. рисунок 8.4, а)

$$ds = \frac{dz}{\cos \varphi(z)}. \quad (8.7)$$

Получим

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{y^2}{EJ \cos \varphi} dz + \int_0^l \eta \frac{\sin^2 \varphi}{GA \cos \varphi} dz + \int_0^l \frac{\cos \varphi}{EA} dz; \quad (8.8)$$

$$\Delta_{1p} = -\int_0^l \frac{y M_p}{EJ \cos \varphi} dz - \int_0^l \eta \frac{\sin \varphi Q_p}{GA \cos \varphi} dz - \int_0^l \frac{N_p}{EA} dz. \quad (8.9)$$

Замечание. При приближенном расчете двухшарнирных арок со стрелой подъема $f < l/3$ и высотой поперечного сечения $h < l/10$ допускается не учитывать поперечные силы при определении δ_{11} по формуле (8.8), продольные и поперечные силы – при определении Δ_{1p} по формуле (8.9). При этом погрешность по сравнению с точным расчетом не превысит 1–2 %. Однако, если ось арки при заданной схеме нагружения близка к рациональной оси аналогичной трехшарнирной системы, необходимо учитывать все силовые факторы (M, Q, N).

Строительные арки часто рассчитывают только на вертикальную нагрузку либо на совокупность вертикальной нагрузки и горизонтальной силы F на уровне опор (рисунок 8.6, а).

В этих случаях внутренние усилия M_p, Q_p, N_p в грузовом состоянии основной системы удобно выражать через изгибающий момент и поперечную силу $M^{\text{бал}}, Q^{\text{бал}}$ в соответствующей балке (рисунок 8.6, б).

При только вертикальной нагрузке ($F = 0$)

$$M_p = M^{\text{бал}}; \quad Q_p = Q^{\text{бал}} \cos \varphi; \quad N_p = -Q^{\text{бал}} \sin \varphi; \quad (8.10)$$

при вертикальной нагрузке и силе F на уровне опор

$$\begin{aligned} M_p &= M^{\text{бал}} - Fy; & Q_p &= Q^{\text{бал}} \cos \varphi - F \sin \varphi; \\ N_p &= -Q^{\text{бал}} \sin \varphi - F \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.11)$$

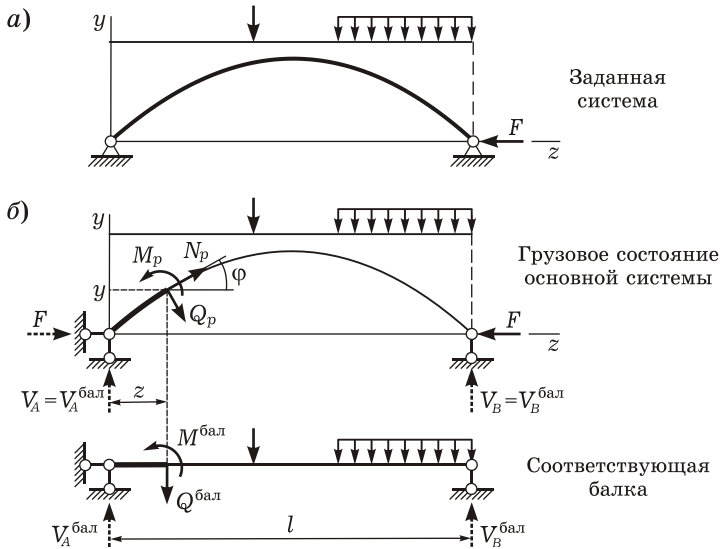


Рисунок 8.6

Соотношения (8.10) и (8.11) легко могут быть получены из условий равновесия конструкций, показанных на рисунке 8.6, б. Заметим, что они аналогичны формулам для расчета внутренних усилий в трехшарнирной арке (см. п. 5.2.2).

Пример 8.1 Для двухшарнирной арки (рисунок 8.7, а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (M , Q , N). Длина пролета $l = 40$ м, стрела подъема $f = 8$ м, очертание оси – дуга окружности; нагрузки: $q = 6$ кН/м, $P = 75$ кН, $F = 40$ кН; сечение прямоугольное с размерами $h = 0,75$ м, $b = 0,25$ м; материал – сона с модулем Юнга $E = 10^7$ кПа.

Геометрические параметры оси арки. Наметим на оси арки расчетные сечения $k = 0, \dots, 8$ (см. рисунок 8.7, а). Положение k -го сечения характеризуется тремя геометрическими параметрами: абсциссой z_k , ординатой y_k , углом φ_k между касательной к оси арки и осью z . Определяем эти параметры, а также $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ по формулам (см. пример 5.1):

$$z_k = k \frac{l}{8}; \quad y_k = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - z_k\right)^2} - R + f; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

$$\sin \varphi_k = \frac{l - 2z_k}{2R}; \quad \cos \varphi_k = \frac{y_k + R - f}{R}.$$

Результаты расчета берем из примера 5.1 и приводим в таблице 8.1.

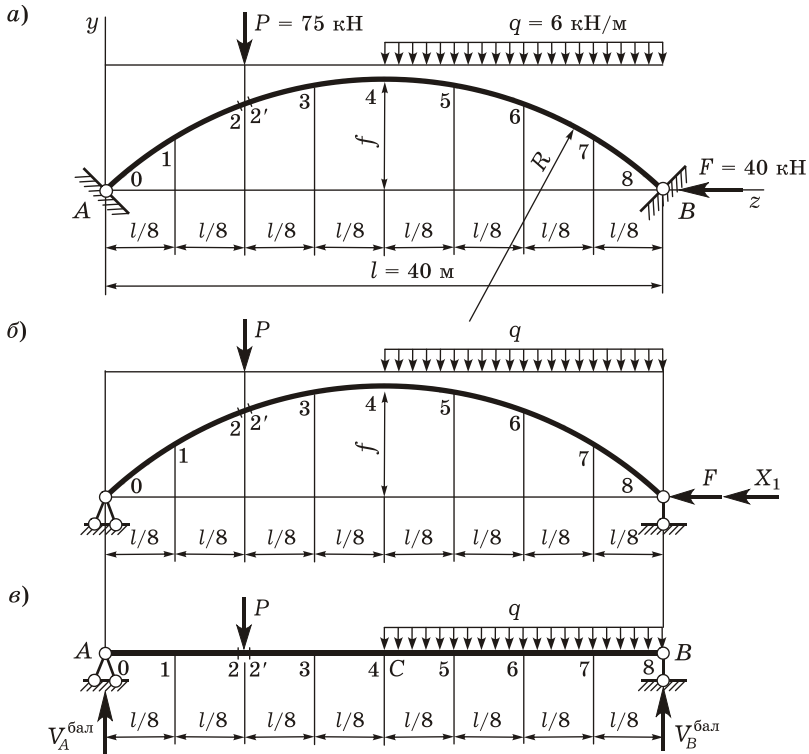


Рисунок 8.7

Жесткости. Определяем площадь сечения A и момент инерции J :

$$A = bh = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875 \text{ м}^2; \quad J = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,25 \cdot 0,75^3}{12} = 8,789 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4.$$

Находим жесткости при растяжении-сжатии и изгибе:

$$EA = 10^7 \cdot 0,1875 = 1,875 \cdot 10^6 \text{ кН};$$

$$EJ = 10^7 \cdot 8,789 \cdot 10^{-3} = 8,789 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Таблица 8.1 – Геометрические параметры и внутренние усилия в соответствующей балке и основной системе

Номер сечения k	$z_k, \text{ м}$	$y_k, \text{ м}$	φ_k	$\sin \varphi_k$	$\cos \varphi_k$	$M_k^{\text{бал}}, \text{ кН} \cdot \text{ м}$	$Q_k^{\text{бал}}, \text{ кН}$	$M_p^{(k)}, \text{ кН} \cdot \text{ м}$	$Q_p^{(k)}, \text{ кН}$	$N_p^{(k)}, \text{ кН}$
0	0	0	43,60°	0,690	0,724	0	86,25	0	34,87	-88,45
1	5	3,819	31,15°	0,517	0,856	431,25	86,25	278,48	53,13	-78,85
2, 2'	10	6,221	20,17°	0,345	0,939	862,50	86,25 11,25	613,65	67,17 -3,23	-67,29 -41,43
3	15	7,566	9,93°	0,172	0,985	918,75	11,25	616,12	4,18	-41,34
4	20	8,000	0,00°	0	1	975,00	11,25	655,00	11,25	-40,00
5	25	7,566	-9,93°	-0,172	0,985	956,25	-18,75	653,62	-11,57	-42,63
6	30	6,221	-20,17°	-0,345	0,939	787,50	-48,75	538,65	-31,97	-54,36
7	35	3,819	-31,15°	-0,517	0,856	468,75	-78,75	315,98	-46,71	-74,97
8	40	0	-43,60°	-0,690	0,724	0	-108,75	0	-51,16	-103,97

Основная система. Арка один раз статически неопределима. Выбираем балочную основную систему, т. е. представляем арку в виде статически определимой криволинейной балки на двух опорах. Для этого отбрасываем одну связь: заменяем правую шарнирно-неподвижную опору шарнирно-подвижной и вводим неизвестную силу X_1 (рисунок 8.7, б).

Каноническое уравнение метода сил имеет вид (8.1):

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

где δ_{11} – перемещение по направлению X_1 , вызванное единичным силовым фактором, приложенным в направлении X_1 ; Δ_{1p} – перемещение по направлению X_1 от внешней нагрузки.

Внутренние усилия в соответствующей балке. Изгибающие моменты и поперечные силы в балке (рисунок 8.7, в) возьмем из примера 5.1. Также запишем их в таблицу 8.1.

Внутренние усилия в основной системе. В единичном состоянии основной системы изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в расчетных сечениях определяем по формулам (8.6):

$$\bar{M}_1^{(k)} = -y_k; \quad \bar{Q}_1^{(k)} = -\sin \varphi_k; \quad \bar{N}_1^{(k)} = -\cos \varphi_k.$$

В грузовом состоянии усилия вычисляем по формулам (8.11):

$$M_p^{(k)} = M_k^{\text{бал}} - Fy_k; \quad Q_p^{(k)} = Q_k^{\text{бал}} \cos \varphi_k - F \sin \varphi_k; \quad N_p^{(k)} = -Q_k^{\text{бал}} \sin \varphi_k - F \cos \varphi_k.$$

Рассчитанные значения вносим в таблицу 8.1.

Определение единичного и грузового перемещений. Воспользуемся формулами (8.8), (8.9), учитывая при расчете перемещения δ_{11} изгибающие моменты и продольные силы, а при вычислении Δ_{1p} – только моменты:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{y^2}{\cos\varphi} dz + \frac{1}{EA} \int_0^l \cos\varphi dz ; \quad \Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{(-y)M_p}{\cos\varphi} dz .$$

Здесь постоянные жесткости EJ и EA вынесены за знаки интегралов.

Значения интегралов находим численно, используя *формулу трапеций*, которая в данном случае имеет вид

$$\int_0^l f(z) dz \approx \Delta z [0,5f(z_0) + f(z_1) + \dots + f(z_7) + 0,5f(z_8)] ,$$

где $\Delta z = l/8$ – шаг; $f(z_0), f(z_1), \dots, f(z_8)$ – значения подынтегральной функции $f(z)$ в расчетных сечениях $0, 1, \dots, 8$.

В таблице 8.2 вычисляем значения необходимых подынтегральных функций и умножаем их на соответствующие формуле трапеций множители. Далее суммируем полученные числа по всем расчетным сечениям, результаты ($\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$) записываем в последней строке таблицы.

Таблица 8.2 – Расчет единичного и грузового перемещений

Номер сечения k	Единичное перемещение						Грузовое перемещение		
	$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{y^2}{\cos\varphi} dz + \frac{1}{EA} \int_0^l \cos\varphi dz$						$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{(-y)M_p}{\cos\varphi} dz$		
	1-е слагаемое			2-е слагаемое			$-\frac{y_k M_p^{(k)}}{\cos\varphi_k}$	Мно- жи- тель m	$-\frac{y_k M_p^{(k)} m}{\cos\varphi_k}$
$\frac{y_k^2}{\cos\varphi_k}$	Мно- жи- тель m	$\frac{y_k^2 m}{\cos\varphi_k}$	$\cos\varphi_k$	Мно- жи- тель m	$\cos\varphi_k \times m$				
0	0,00	0,5	0,00	0,724	0,5	0,362	0,0	0,5	0,0
1	17,05	1	17,05	0,856	1	0,856	-1242,8	1	-1242,8
2	41,23	1	41,23	0,939	1	0,939	-4067,1	1	-4067,1
3	58,11	1	58,11	0,985	1	0,985	-4732,3	1	-4732,3
4	64,00	1	64,00	1,000	1	1,000	-5240,0	1	-5240,0
5	58,11	1	58,11	0,985	1	0,985	-5020,3	1	-5020,3
6	41,23	1	41,23	0,939	1	0,939	-3570,0	1	-3570,0
7	17,05	1	17,05	0,856	1	0,856	-1410,1	1	-1410,1
8	0,00	0,5	0,00	0,724	0,5	0,362	0,0	0,5	0,0
		Σ_1	296,78		Σ_2	7,284		Σ_3	-25282,6

Вычисляем перемещения:

$$\delta_{11} = \frac{\Delta z \cdot \Sigma_1}{EJ} + \frac{\Delta z \cdot \Sigma_2}{EA} = \frac{5 \cdot 296,78}{8,789 \cdot 10^4} + \frac{5 \cdot 7,284}{1,875 \cdot 10^6} = 0,016903 \text{ м/кН};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{\Delta z \cdot \Sigma_3}{EJ} = \frac{5 \cdot (-252826)}{8,789 \cdot 10^4} = -1,4383 \text{ м.}$$

Решение канонического уравнения. Определяем неизвестную силу:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{1,4383}{0,016903} = 85,09 \text{ кН.}$$

Вычисление внутренних усилий в арке. Окончательные изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в расчетных сечениях арки $k = 0, \dots, 8$ определяем по формулам:

$$M^{(k)} = \bar{M}_1^{(k)} X_1 + M_p^{(k)} = M_p^{(k)} - X_1 y_k;$$

$$Q^{(k)} = \bar{Q}_1^{(k)} X_1 + Q_p^{(k)} = Q_p^{(k)} - X_1 \sin \varphi_k;$$

$$N^{(k)} = \bar{N}_1^{(k)} X_1 + N_p^{(k)} = N_p^{(k)} - X_1 \cos \varphi_k.$$

Результаты расчета приведены в таблице 8.3.

Таблица 8.3 – Внутренние усилия в двухшарнирной арке

Номер сечения k	$M^{(k)}$, кН·м	$Q^{(k)}$, кН	$N^{(k)}$, кН	Кинематическая проверка эпюры M				
				y_k , м	$\cos \varphi_k$	Расчет перемещения		
						$\Delta_1 = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{(-y)M}{\cos \varphi} dz$	Мно- жи- тель m	$\frac{-y_k M^{(k)} m}{\cos \varphi_k}$
0	0	-23,81	-150,1	0	0,724	0,00	0,5	0,00
1	-46,52	9,11	-151,7	3,819	0,856	207,62	1	207,62
2, 2'	84,26	37,82 -32,58	-147,2 -121,3	6,221	0,939	-558,45	1	-558,45
3	-27,67	-10,49	-125,2	7,566	0,985	212,49	1	212,49
4	-25,74	11,25	-125,1	8,000	1	205,93	1	205,93
5	9,83	3,10	-126,5	7,566	0,985	-75,54	1	-75,54
6	9,26	-2,62	-134,2	6,221	0,939	-61,37	1	-61,37
7	-9,02	-2,69	-147,8	3,819	0,856	40,26	1	40,26
8	0	7,52	-165,6	0	0,724	0,00	0,5	0,00
Σ_4								-29,05

По полученным данным строим эпюры M , Q , N (рисунок 8.8). Для удобства ординаты откладываем не от оси арки, а от горизонтальной базы. Напомним, что эпюра M строится на растянутых волокнах, т. е. отрицательные моменты откладываются сверху, положительные – снизу.

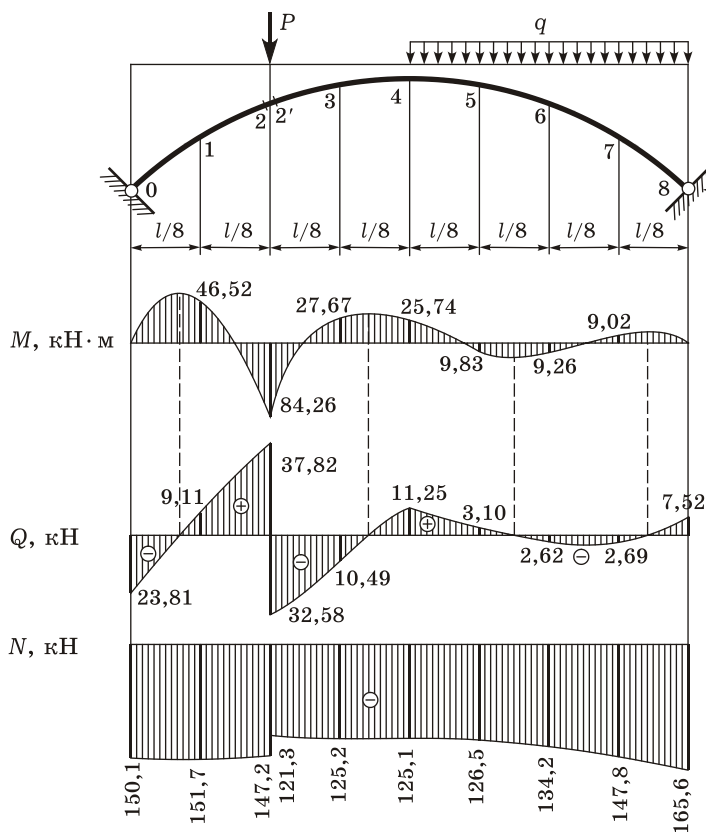


Рисунок 8.8

Заметим, что под сечением, в котором приложена сосредоточенная внешняя сила P , эпюры Q , N имеют скачок, а M – излом. Эпюра Q пересекает ось в четырех точках, следовательно, здесь эпюра M имеет экстремумы.

Кинематическая проверка эпюры M . Согласно формуле (8.5) находим перемещение Δ_1 в заданной арке по направлению силы X_1 . Как и при вычислении Δ_{1p} будем учитывать только изгибающие моменты:

$$\Delta_1 = \int_s \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{(-y)M}{\cos \varphi} dz.$$

Если моменты найдены верно, Δ_1 получится близким к нулю.

Расчет ведем в табличной форме (см. таблицу 8.3). Искомое перемещение определяем аналогично Δ_{1p} , используя формулу трапеций:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta z \cdot \Sigma_4}{EJ} = \frac{5 \cdot (-29,05)}{8,789 \cdot 10^4} = -1,653 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 0.$$

Точность подсчетов приемлемая. Значение Δ_1 близко к нулю, следовательно, моменты в арке найдены верно.

8.3 Расчет двухшарнирной арки с затяжкой

8.3.1 Общий ход расчета. Затяжка воспринимает распор арки и работает на растяжение. Общий ход расчета практически не отличается от рассмотренного выше.

Рассмотрим арку с затяжкой выше уровня опор, воспринимающую вертикальную нагрузку (рисунок 8.9, а). Основная система получается разрезанием затяжки и введением в ней неизвестной продольной силы X_1 (рисунок 8.9, б).

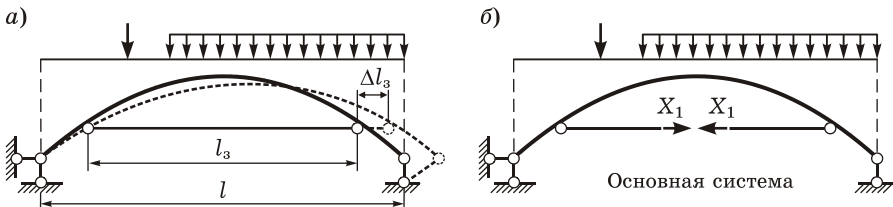


Рисунок 8.9

В процессе деформирования системы затяжка удлиняется на

$$\Delta l_3 = \frac{X_1 l_3}{E_3 A_3},$$

где l_3 – длина затяжки; $E_3 A_3$ – ее жесткость (E_3 – модуль Юнга, A_3 – площадь сечения).

Уравнение для определения X_1 получим из условия

$$\Delta_1 = -\Delta l_3 = \frac{-X_1 l_3}{E_3 A_3}, \quad (8.12)$$

где Δ_1 – полное перемещение в направлении X_1 .

Знак минус в правой части потому, что направления данного перемещения и силы X_1 противоположны.

По принципу суперпозиции

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p}, \quad (8.13)$$

где δ_{11} и Δ_{1p} – перемещения в направлении X_1 от действия единичной силы в этом же направлении и от внешней нагрузки соответственно.

Приравнявая правые части соотношений (8.12) и (8.13) и приводя подобные, получаем каноническое уравнение:

$$\delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (8.14)$$

где

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} + \frac{l_3}{E_3 A_3}. \quad (8.15)$$

Перемещения δ_{11} и Δ_{1p} в основной системе определяются по формулам (8.8), (8.9).

Дальнейший расчет ведется по методике, изложенной в подразд. 8.2 для двухшарнирной арки без затяжки. Из уравнения (8.14) с учетом (8.15)

$$X_1 = -\Delta_{1p} / \delta_{11}^* = -\Delta_{1p} / \left(\delta_{11} + \frac{l_3}{E_3 A_3} \right). \quad (8.16)$$

Далее по зависимостям (8.4) находят изгибающие моменты, поперечные и продольные силы и выполняют кинематическую (деформационную) проверку по формуле (8.5). В отличие от арки без затяжки Δ_1 должно получиться, согласно (8.12), равным $-X_1 l_3 / (E_3 A_3)$.

8.3.2 Влияние жесткости затяжки на усилия и напряжения.

Как известно, в элементах статически неопределимых систем распределение усилий зависит от соотношений их жесткостей. Следовательно, увеличение или уменьшение размеров сечения затяжки по отношению к размерам сечений арки сказывается не только на значении продольной силы и напряжений в затяжке, но и на величинах внутренних усилий в арке M , Q , N .

Продольная сила в затяжке. Рассмотрим двухшарнирную арку, нагруженную вертикальными силами (см. рисунок 8.9). Грузовое перемещение Δ_{1p} не зависит от площади сечения затяжки A_3 , так как в грузовом состоянии сила X_1 в затяжке отсутствует. Перемещение δ_{11}^* (8.14) всегда положительно, значит, знаменатель выражения (8.15) также всегда положителен. Следовательно, изменением площади сечения затяжки A_3 нельзя изменить в ней знак продольной силы X_1 .

С уменьшением площади сечения затяжки продольная сила в ней убывает, в пределе при $A_3 \rightarrow 0$ $X_1 \rightarrow 0$. Арка превращается в безраспорную систему – криволинейную статически определимую балку на двух опорах (рисунок 8.10). То есть относительно

слабая затяжка не позволяет использовать преимущества арки с затяжкой как распорной системы.

С увеличением площади сечения затяжки продольная сила в ней возрастает, но в гораздо меньшей степени. В пределе при $A_3 \rightarrow \infty$ $X_1 \rightarrow -\Delta_{1p}/\delta_{11}$, т. е. усилие в затяжке асимптотически стремится к значению (8.3). Таким образом, если считать затяжку абсолютно нерастяжимой, данную арку можно рассматривать как обычную двухшарнирную арку на неподвижных опорах (см. рисунок 8.10).

Напряжения в затяжке. Затяжка работает на центральное растяжение, поэтому нормальные напряжения в ней вычисляются по формуле

$$\sigma_3 = X_1/A_3.$$

С учетом (8.16) напряжения в затяжке следующие:

$$\sigma_3 = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}A_3 + l_3/E_3}. \quad (8.17)$$

Анализируя соотношение (8.16), видим, что знак напряжений в затяжке, как и знак продольной силы, не зависит от площади ее сечения A_3 . С увеличением A_3 напряжения нелинейно уменьшаются (рисунок 8.11).

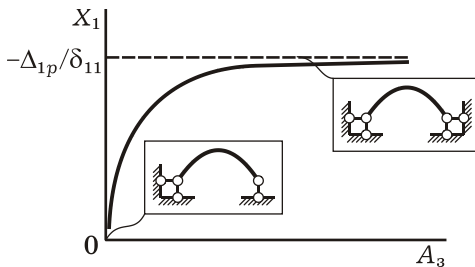


Рисунок 8.10

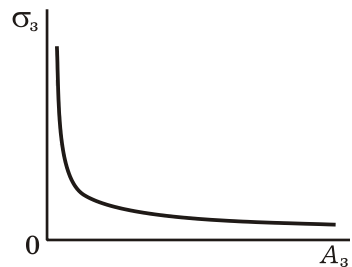


Рисунок 8.11

Внутренние усилия в арке. Как уже было отмечено, с ростом размеров сечения затяжки арка приближается к двухшарнирной арке на неподвижных опорах, в которой внутренние усилия меньше, чем в криволинейной балке. Характер зависимости изгибающего момента и продольной силы в арке от площади сечения затяжки установим, рассмотрев следующий пример.

Пример 8.2 Деревянная арка ($l = 40$ м; $f = 8$ м) со стальной затяжкой на уровне опор (рисунок 8.12, а) нагружена равномерно распределенной вертикальной нагрузкой $q = 7$ кН/м и двумя силами $F = 60$ кН.

Арка очерчена по квадратной параболе $y(z) = 4fz(l-z)/l^2$, поперечное сечение прямоугольное с $h = 1$ м; $b = 0,25$ м; диаметр затяжки d .

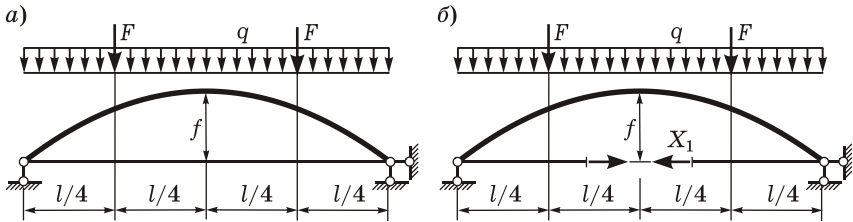


Рисунок 8.12

Арка рассчитана по методике, описанной в п. 8.2.1. Основная система для нее показана на рисунке 8.12, б.

На рисунке 8.13 приведены эпюры изгибающих моментов и продольных сил для арки с затяжкой различного диаметра. Изменяя d , можно добиться изменения знака изгибающего момента и снижения внутренних усилий по абсолютной величине.

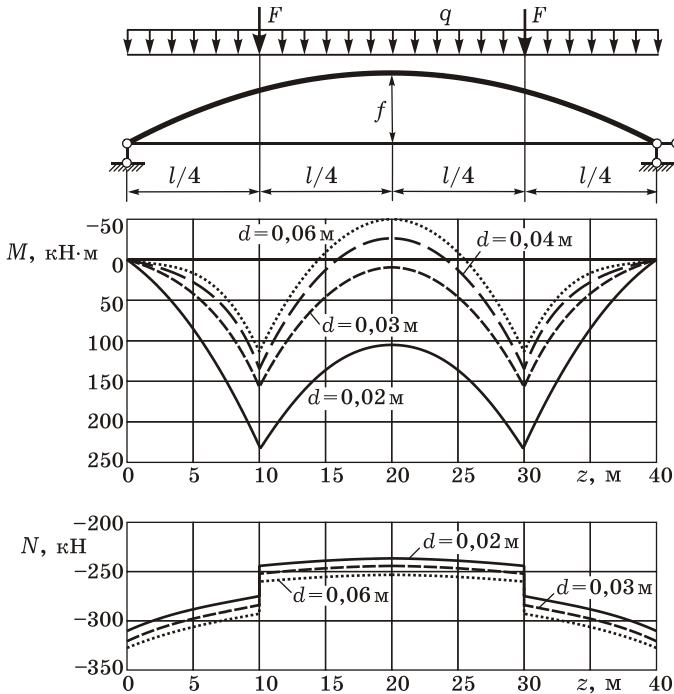


Рисунок 8.13

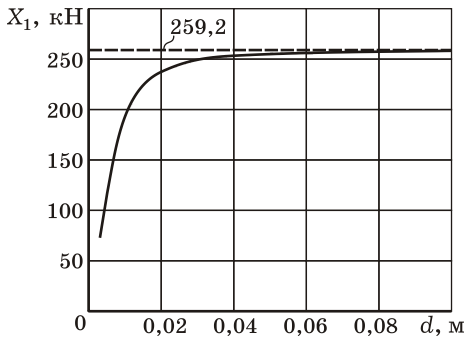


Рисунок 8.14

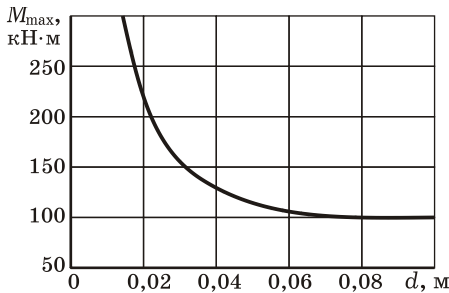


Рисунок 8.15

Рисунок 8.14 иллюстрирует изменение продольной силы X_1 в затяжке в зависимости от ее диаметра. С увеличением d значение X_1 возрастает, асимптотически стремясь к 259,2 кН, что соответствует распуру аналогичной двухшарнирной арки на неподвижных опорах.

На рисунке 8.15 показано изменение изгибающего момента в опасном сечении арки (под сосредоточенной силой) при увеличении диаметра затяжки.

С увеличением диаметра затяжки максимальный момент нелинейно уменьшается. При слабой затяжке ($d < 0,015$ м) максимальный момент становится значительным, на порядок большим, чем при затяжке достаточной жесткости, условие прочности не выполняется.

8.4 Расчет бесшарнирной арки на неподвижную нагрузку

8.4.1 Общий ход расчета. Бесшарнирная арка (рисунок 8.16, *a*) три раза статически неопределима ($n_c = 3$). Основная система метода сил получается удалением трех избыточных связей, например, введением трех шарниров (рисунок 8.16, *b*), отбрасыванием жесткой опоры (рисунок 8.16, *в*); разрезанием арки по оси симметрии (рисунок 8.16, *г*) и добавлением неизвестных реакций этих связей X_1, X_2, X_3 .

Для симметричной арки желательно выбирать и симметричную основную систему. В этом случае многие расчеты можно будет производить только для половины арки.

Канонические уравнения выражают условия отсутствия перемещений по направлениям неизвестных усилий X_1, X_2, X_3 . В первом случае это углы поворота опорных сечений и взаимный угол

поворота сечений в замке, во втором – линейные и угловое перемещения конца консоли. Для основной системы на рисунке 8.16, *г* канонические уравнения (8.18) выражают условие полной взаимной неподвижности левого и правого сечений в месте разреза.

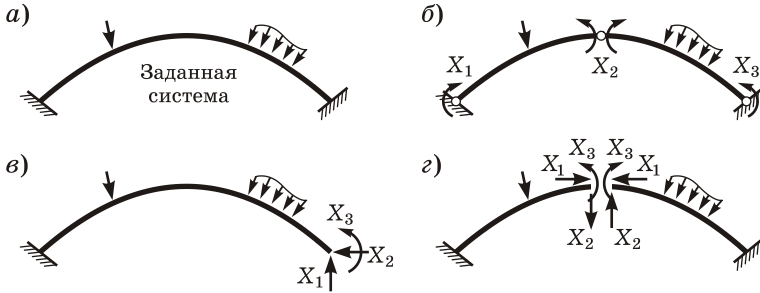


Рисунок 8.16

В общем случае канонические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Входящие в них перемещения определяются по методу Мора:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \int_S \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} ds + \int_S \eta \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k}{EA} ds \quad (i, k = 1, 2, 3); \\ \Delta_{ip} &= \int_S \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} ds + \int_S \eta \frac{\bar{Q}_i Q_p}{GA} ds + \int_S \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} ds, \end{aligned} \quad (8.19)$$

где $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ и M_p, Q_p, N_p – внутренние усилия в основной системе от $X_i = 1$ и внешней нагрузки соответственно; S – длина оси арки; ds – бесконечно малый элемент оси; EJ, GA, EA – жесткости сечения соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении–сжатии; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению при изгибе и зависящий от формы сечения.

Наиболее простой расчет получится с использованием основной системы, показанной на рисунке 8.16, *г*, так как четыре из побочных коэффициентов будут нулевыми (это будет показано далее, в п. 8.4.2).

После решения канонических уравнений вычисляются значения внутренних усилий M , N , Q по формулам:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_p;$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 + N_p;$$

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 + Q_p.$$

Далее необходимо выполнить кинематическую (деформационную) проверку правильности вычисления внутренних усилий. Для этого можно использовать усилия одного из единичных состояний $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\Delta_i = \int_s \frac{\bar{M}_i M}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_i Q}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_i N}{EA} ds = 0 \quad (8.20)$$

или найти суммарные величины $\bar{M}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \bar{M}_i$; $\bar{Q}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_i$; $\bar{N}_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i$:

$$\int_s \frac{\bar{M}_\Sigma M}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_\Sigma Q}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_\Sigma N}{EA} ds = 0. \quad (8.21)$$

Здесь Δ_i – перемещение по направлению X_i . Выполнение условий (8.20) и (8.21) говорит о том, что перемещения по направлениям реакций отброшенных связей отсутствуют, что соответствует расчетной схеме заданной бесшарнирной арки.

8.4.2 Особенности расчета с основной системой, полученной разрезанием арки по оси симметрии. Определим коэффициенты канонических уравнений для основной системы, показанной на рисунке 8.16, *г*. Начало координат выберем на оси симметрии на уровне опор (рисунок 8.17, *а*).

Сформируем состояние «1» основной системы, в котором приложим единичную силу по направлению X_1 (рисунок 8.17, *б*). Определим внутренние усилия $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$ в некотором произвольном сечении, характеризуемом координатами z, y и углом наклона φ . Рассматривая равновесие правой верхней части, получим:

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot (f - y); \quad \bar{Q}_1 = -\sin \varphi; \quad \bar{N}_1 = \cos \varphi. \quad (8.22)$$

В состоянии «2» нагрузим основную систему единичной силой по направлению X_2 (рисунок 8.17, *в*). Аналогично найдем внутренние усилия $\bar{M}_2, \bar{Q}_2, \bar{N}_2$:

$$\bar{M}_2 = z; \quad \bar{Q}_2 = \cos \varphi; \quad \bar{N}_2 = \sin \varphi. \quad (8.23)$$

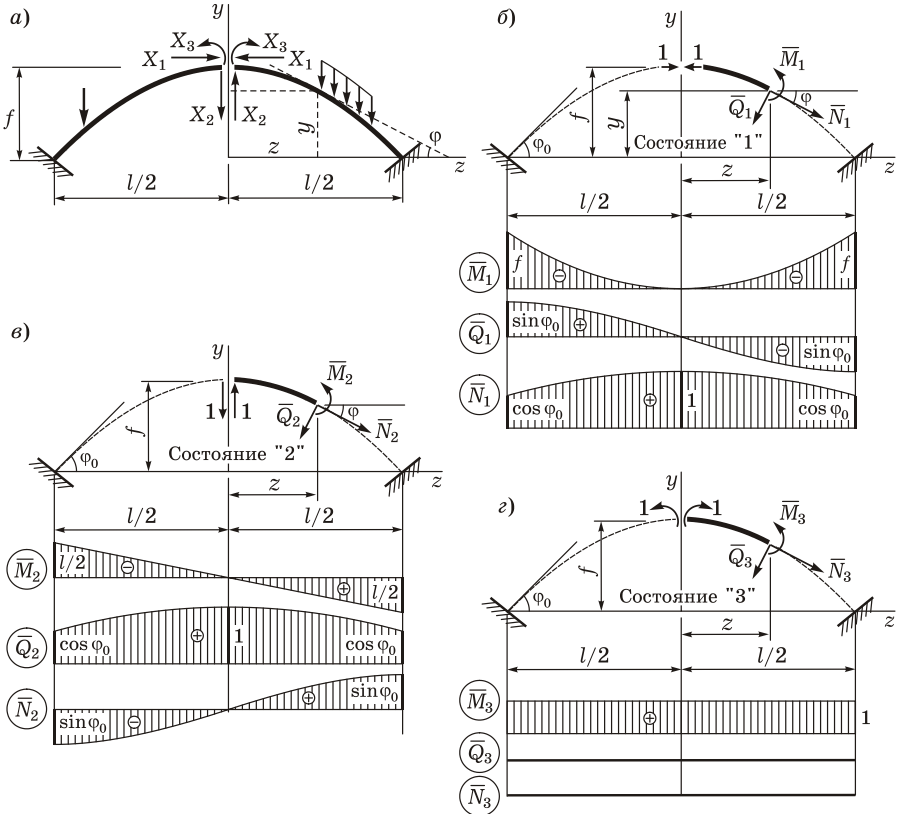


Рисунок 8.17

В состоянии «3» от действия единичного момента направлению X_3 (рисунок 8.17, d) получим:

$$\bar{M}_3 = 1; \quad \bar{Q}_3 = 0; \quad \bar{N}_3 = 0. \quad (8.24)$$

Для наглядности изобразим зависимости (8.22) – (8.24) в виде эпюр (см. рисунок 8.17, $b-d$). Анализируя эти эпюры, делаем вывод, что все они принадлежат к трем типам: симметричные ($\bar{M}_1, \bar{N}_1, \bar{Q}_2, \bar{M}_3$), антисимметричные ($\bar{Q}_1, \bar{M}_2, \bar{N}_2$) и нулевые (\bar{Q}_3, \bar{N}_3). Так как произведение симметричной и антисимметричной эпюр равно нулю, то побочные перемещения будут следующими:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{EA} ds = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int_s \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_2 \bar{Q}_3}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_2 \bar{N}_3}{EA} ds = 0;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_3}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_3}{EA} ds = \int_s \frac{y-f}{EJ} ds.$$

Заметим, что можно добиться равенства нулю и перемещения δ_{13} . Для этого неизвестные X_1, X_2, X_3 необходимо приложить не в месте разреза, а ниже, прикрепив к сечениям абсолютно жесткие невесомые консоли¹⁾ (рисунок 8.18). Тогда эпюра \bar{M}_1 также «сдвинется» вниз, т. е. в ней будут и положительные, и отрица-

тельные ординаты, и при перемножении ее с эпюрой \bar{M}_3 получится нуль. Остальные эпюры, определяемые соотношениями (8.22) – (8.24), не изменятся.

Рассматривая равновесие правой верхней части в состоянии «1» (см. рисунок 8.18), получим:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= -1(f - c - y) = \\ &= y + c - f. \end{aligned}$$

Рисунок 8.18

Тогда перемещение δ_{13} определится соотношением:

$$\delta_{13} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EJ} ds + \int_s \eta \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_3}{GA} ds + \int_s \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_3}{EA} ds = \int_s \frac{y+c-f}{EJ} ds. \quad (8.25)$$

При увеличении длины консолей с положительная область эпюры \bar{M}_1 увеличивается за счет отрицательной и наоборот. Подберем c из условия $\delta_{13} = 0$. С учетом формулы (8.25) получим:

¹⁾ Консоли считаются абсолютно жесткими, недеформируемыми, следовательно, в них отсутствуют внутренние усилия, и невесомыми, т. е. не создают дополнительную нагрузку на арку от своего веса.

$$\int_s \frac{y + c - f}{EJ} ds = 0; \quad \int_s \frac{y}{EJ} ds + (c - f) \int_s \frac{ds}{EJ} = 0,$$

откуда

$$c = f - \int_s \frac{y}{EJ} ds \Big/ \int_s \frac{ds}{EJ}. \quad (8.26)$$

Заменим интегрирование по длине оси арки S интегрированием по длине пролета l с учетом, что $ds = dz/\cos \varphi$. Получим:

$$c = f - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{y dz}{EJ \cos \varphi} \Big/ \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{EJ \cos \varphi} = f - \int_0^{l/2} \frac{y dz}{EJ \cos \varphi} \Big/ \int_0^{l/2} \frac{dz}{EJ \cos \varphi}. \quad (8.27)$$

Формулы (8.26) и (8.27) определяют длину жестких консолей, такую, при которой все побочные перемещения отсутствуют. Тогда система (8.18) распадается на три независимых уравнения:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0; \quad \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0,$$

откуда $X_1 = -\Delta_{1p}/\delta_{11}$; $X_2 = -\Delta_{2p}/\delta_{22}$; $X_3 = -\Delta_{3p}/\delta_{33}$.

Точка, в которой приложены неизвестные, называется *упругим центром арки*. Она соответствует центру тяжести арки.

Рассмотренная методика расчета бесшарнирной арки полностью применима и к замкнутым контурам любого очертания.

8.5 Расчет статически неопределимых ферм

8.5.1 Статическая неопределимость плоских ферм. Применяемые на практике фермы, строго говоря, никогда не бывают статически определимыми, так как не имеют идеальных шарнирных соединений в узлах (см. п. 4.1.1). Однако здесь будем рассматривать статическую неопределимость, обусловленную наличием избыточных стержней в шарнирно-стержневых расчетных схемах, а не жесткостью узлов.

Степень статической неопределимости (количество лишних стержней) определяется по формуле (7.3):

$$n_c = C_o - 2U = C_\phi + C_{оп} - 2U, \quad (8.28)$$

где C_o – количество одиночных связей (стержней фермы C_ϕ и опорных стержней $C_{оп}$); U – количество узлов фермы (шарниров), не связанных с землей.

Избыточными (лишними) могут быть как связи опор, так и элементы самой фермы. *Внешне статически неопределимая*

ферма содержит лишние опорные стержни, но сама она, отделенная от опор, статически определима. *Внутренне статически неопределимая* ферма имеет минимально необходимое количество опорных связей, однако в ее структуре присутствуют больше стержней, чем нужно для неизменяемости (рисунок 8.19).

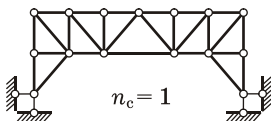
Внешне статически неопределимая ферма Внутренне статически неопределимая ферма



Рисунок 8.19

Заметим, что такое разделение ферм является условным. Например, систему на рисунке 8.20, *а* можно трактовать или как внутренне, или как внешне статически неопределимую. Лишним здесь можно считать элемент самой фермы либо опорный стержень: отбросив его, получим статически определимую систему (рисунок 8.20, *б*).

а) Статически неопределимая ферма



б) Статически определимые фермы:
трехшарнирная (распорная) безраспорная

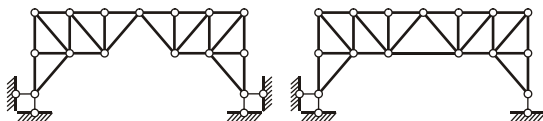


Рисунок 8.20

Как и всякая статически неопределимая система, ферма может иметь начальные усилия, обусловленные неточностью сборки или нивелировки опор, а также температурой. Однако с конструктивной точки зрения статически определимые фермы сложнее, так как приходится устраивать шарниры, подвижные опоры, разрезать систему при помощи специальных швов. В то же время статически неопределимые фермы в целом более надежны, так как аварии отдельных ее элементов не приводят к столь тяжелым последствиям, как разрушение элементов статически определимых ферм.

8.5.2 Общий ход расчета. Основная система метода сил образуется разрезанием¹⁾ стержней фермы либо устранением

¹⁾ Разрезание стержня отличается от его удаления тем, что в расчете основной системы учитываются его параметры: длина и жесткость. Аналогично учитывались параметры затяжки двухшарнирной арки.

избыточных опорных связей. Например, для трижды статически неопределимой фермы на рисунке 8.21 показано несколько ее вариантов.

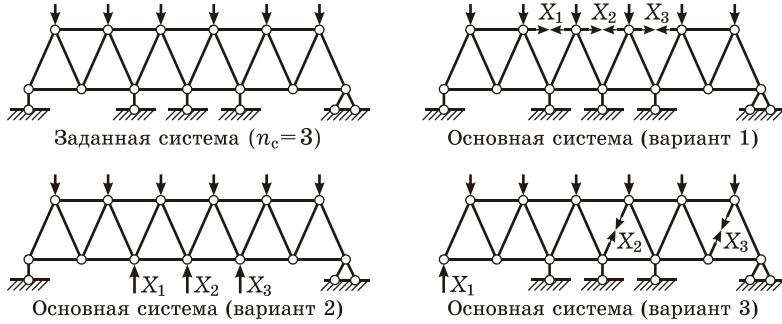


Рисунок 8.21

Заметим, что основная система, получаемая разрезанием стержней фермы, во многих случаях оказывается удобнее основной системы, в которой устраняются опорные связи. Например, первый вариант основной системы на рисунке 8.21 удобнее второго и третьего, потому что в нем продольные силы от внешней нагрузки во многих стержнях равны нулю. Во втором и третьем вариантах этого нет. Кроме того, в первой основной системе усилия в некоторых стержнях в единичных состояниях получатся нулевыми, поэтому и некоторые слагаемые канонических уравнений будут отсутствовать.

В общем случае канонические уравнения имеют стандартный вид (7.8). Для n раз статически неопределимой фермы они записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1i}X_i + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2i}X_i + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{ki}X_i + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{ni}X_i + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned}$$

Для идеальных шарнирных ферм отличны от нуля только продольные силы в стержнях, которые, как и жесткости, постоянны по длине каждого отдельного стержня. В соответствии с формулой (6.15) единичные и грузовые перемещения, входящие в канонические уравнения, определяются соотношениями:

$$\delta_{ki} = \sum_j \frac{\bar{N}_k^{(j)} \bar{N}_i^{(j)}}{EA_j} l_j; \quad \Delta_{kp} = \sum_j \frac{\bar{N}_k^{(j)} N_p^{(j)}}{EA_j} l_j, \quad (8.29)$$

где $\bar{N}_k^{(j)}, N_p^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне основной системы от единичной силы, приложенной по направлению X_k и внешней нагрузки соответственно; l_j, EA_j – длина и жесткость j -го стержня. Знак суммы распространяется на все стержни системы.

После решения канонических уравнений вычисляются значения продольных сил в ферме по формуле

$$N^{(j)} = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k^{(j)} X_k + N_p^{(j)}, \quad (8.30)$$

где $N^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне заданной фермы.

Далее следует выполнить *статическую проверку* правильности вычисления внутренних усилий, вырезав несколько узлов и проверив их равновесие.

Для *кинематической (деформационной) проверки* необходимо взять усилия одного из единичных состояний ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\Delta_k = \sum_j \frac{\bar{N}_k^{(j)} N^{(j)}}{EA_j} l_j = 0 \quad (8.31)$$

или использовать величину $\bar{N}_\Sigma^{(j)} = \sum_{k=1}^n \bar{N}_k^{(j)}$:

$$\sum_j \frac{\bar{N}_\Sigma^{(j)} N^{(j)}}{EA_j} l_j = 0. \quad (8.32)$$

Здесь Δ_k – перемещение по направлению X_k . Выполнение условий (8.31) и (8.32) говорит о том, что перемещения по направлениям усилий в разрезанных стержнях равны удлинением этих стержней, что соответствует расчетной схеме заданной фермы.

Пример 8.3 Требуется определить усилия в стержнях статически неопределимой фермы (рисунок 8.22). Исходные данные: $l = 24$ м, $h = 6$ м, силы $F = 30$ кН; жесткости стержней решетки $EA_p = 1,5 \cdot 10^5$ кН, верхнего пояса $EA_v = 3,0 \cdot 10^5$ кН, нижнего пояса $EA_n = 2,0 \cdot 10^5$ кН.

Геометрические параметры стержней. Найдем углы α и β . Очевидно, что $\alpha = 45^\circ$. Размер $a = (l - 2 \cdot 0,4h)/6 = (24 - 2 \cdot 0,4 \cdot 6)/6 = 3,2$ м, тогда $\operatorname{tg} \beta = a/(0,2h) = 3,2/(0,2 \cdot 6) = 8/3$; $\beta = 69,44^\circ$.

Обозначим стержни фермы номерами $j = 1, \dots, 30$ и определим их длины l_j . Длины стоек $l_3 = l_7 = l_{11} = l_{15} = l_{19} = l_{23} = l_{27} = 0,4h = 2,4$ м, стержней нижнего пояса 1 и 29 $l_1 = l_{29} = 0,4h = 2,4$ м, стержней верхнего пояса 2 и 28 $l_2 = l_{28} = 0,4h/\cos \alpha = 2,4/\cos 45^\circ = 3,94$ м, стержня 30 $l_{30} = 4a = 4 \cdot 3,2 = 12,8$ м, раскосов и остальных стержней поясов $l_4 = l_5 = l_6 = l_8 = l_9 = \dots = 0,2h/\cos \beta = 0,2 \cdot 6/\cos 69,44^\circ = 3,42$ м. Номер, длины и жесткость каждого стержня записываем в таблицу 8.4.

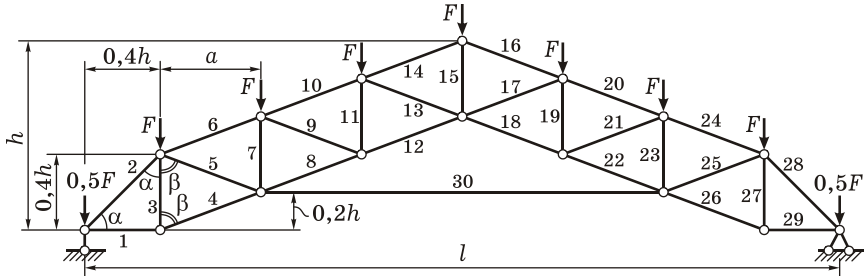


Рисунок 8.22

Степень статической неопределимости. Количество узлов фермы, не связанных с землей $Y = 16$, одиночных связей (стержней фермы и опорных стержней) $C_0 = 33$. Согласно формуле (8.28)

$$n_c = C_0 - 2Y = 33 - 2 \cdot 16 = 1.$$

Основная система. Разрезаем стержень 30 и вводим в нем неизвестную продольную силу X_1 (рисунок 8.23).

Каноническое уравнение. Так как ферма один раз статически неопределима, имеем одно уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

где δ_{11} – единичное перемещение по направлению X_1 от действия единичной силы в стержне 30; Δ_{1p} – грузовое перемещение по направлению X_1 от внешней нагрузки.

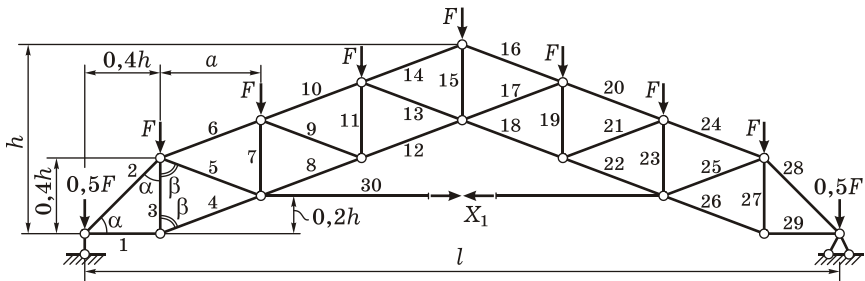


Рисунок 8.23

Определение усилий в основной системе от единичной силы в направлении X_1 . Формируем единичное состояние основной системы (рисунок 8.24, а). Составляя уравнения моментов всех сил относительно левой и правой опор, убеждаемся, что все опорные реакции нулевые.

Для определения продольных сил в стержнях основной системы вырезаем узлы (рисунок 8.24, б) и составляем уравнения проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси.

Таблица 8.4 – Внутренние усилия в статически неопределимой ферме

Параметры стержней		Усилия в основной системе		Расчет перемещений δ_{11} и Δ_{1p}		Усилия в основной системе		Усилия в заданной системе		Кинематическая проверка	
номер	длина	жесткость	от $\bar{X}_1 = 1$		$\frac{(\bar{N}_1^{(j)})^2}{EA_j} l_j, \frac{м}{кН}$	$\frac{\bar{N}_1^{(j)} N_p^{(j)}}{EA_j} l_j, м$	от X_1		$N^{(j)}, кН$	$\frac{\bar{N}_1^{(j)} N^{(j)}}{EA_j} l_j, м$	
			\bar{X}_1	$N_p^{(j)}, кН$			$\bar{N}_1^{(j)} X_1, кН$				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1(н)	2,40	$2 \cdot 10^5$	0	105,00	0	0	0	105,00	0		
2(в)	3,94	$3 \cdot 10^5$	0	-148,49	0	0	0	-148,49	0		
3(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0	-39,38	0	0	0	-39,38	0		
4(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	0	112,14	0	0	0	112,14	0		
5(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	0	106,80	0	0	0	106,80	0		
6(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	0	-218,94	0	0	0	-218,94	0		
7(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0,375	-75,00	$2,250 \cdot 10^{-6}$	$-4,500 \cdot 10^{-4}$	56,23	-18,77	$-1,126 \cdot 10^{-4}$		
8(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	-1,068	218,94	$19,491 \cdot 10^{-6}$	$-39,957 \cdot 10^{-4}$	-160,14	58,80	$-10,730 \cdot 10^{-4}$		
9(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	-0,534	64,08	$6,497 \cdot 10^{-6}$	$-7,796 \cdot 10^{-4}$	-80,07	-15,99	$1,946 \cdot 10^{-4}$		
10(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	0,534	-283,02	$3,249 \cdot 10^{-6}$	$-17,217 \cdot 10^{-4}$	80,07	-202,95	$-12,346 \cdot 10^{-4}$		
11(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0,375	-45,00	$2,250 \cdot 10^{-6}$	$-2,700 \cdot 10^{-4}$	56,23	11,23	$0,674 \cdot 10^{-4}$		
12(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	-1,602	283,02	$43,855 \cdot 10^{-6}$	$-77,477 \cdot 10^{-4}$	-240,22	42,80	$-11,718 \cdot 10^{-4}$		
13(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	-0,534	21,36	$6,497 \cdot 10^{-6}$	$-2,599 \cdot 10^{-4}$	-80,07	-58,71	$7,143 \cdot 10^{-4}$		
14(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	1,068	-304,38	$12,994 \cdot 10^{-6}$	$-37,033 \cdot 10^{-4}$	160,14	-144,24	$-17,549 \cdot 10^{-4}$		

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	-0,750	183,75	$9,000 \cdot 10^{-6}$	$-22,050 \cdot 10^{-4}$	-112,46	71,29	$-8,555 \cdot 10^{-4}$
16(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	1,068	-304,38	$12,994 \cdot 10^{-6}$	$-37,033 \cdot 10^{-4}$	160,14	-144,24	$-17,549 \cdot 10^{-4}$
17(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	-0,534	21,36	$6,497 \cdot 10^{-6}$	$-2,599 \cdot 10^{-4}$	-80,07	-58,71	$7,143 \cdot 10^{-4}$
18(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	-1,602	283,02	$43,855 \cdot 10^{-6}$	$-77,477 \cdot 10^{-4}$	-240,22	42,80	$-11,718 \cdot 10^{-4}$
19(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0,375	-45,00	$2,250 \cdot 10^{-6}$	$-2,700 \cdot 10^{-4}$	56,23	11,23	$0,674 \cdot 10^{-4}$
20(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	0,534	-283,02	$3,249 \cdot 10^{-6}$	$-17,217 \cdot 10^{-4}$	80,07	-202,95	$-12,346 \cdot 10^{-4}$
21(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	-0,534	64,08	$6,497 \cdot 10^{-6}$	$-7,796 \cdot 10^{-4}$	-80,07	-15,99	$1,946 \cdot 10^{-4}$
22(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	-1,068	218,94	$19,491 \cdot 10^{-6}$	$-39,957 \cdot 10^{-4}$	-160,14	58,80	$-10,730 \cdot 10^{-4}$
23(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0,375	-75,00	$2,250 \cdot 10^{-6}$	$-4,500 \cdot 10^{-4}$	56,23	-18,77	$-1,126 \cdot 10^{-4}$
24(в)	3,42	$3 \cdot 10^5$	0	-218,94	0	0	0	-218,94	0
25(р)	3,42	$1,5 \cdot 10^5$	0	106,80	0	0	0	106,80	0
26(н)	3,42	$2 \cdot 10^5$	0	112,14	0	0	0	112,14	0
27(р)	2,40	$1,5 \cdot 10^5$	0	-39,38	0	0	0	-39,38	0
28(в)	3,94	$3 \cdot 10^5$	0	-148,49	0	0	0	-148,49	0
29(н)	2,40	$2 \cdot 10^5$	0	105,00	0	0	0	105,00	0
30(н)	12,80	$2 \cdot 10^5$	1,000	0	$64,000 \cdot 10^{-6}$	0	149,95	149,95	$95,967 \cdot 10^{-4}$
			Σ	Σ	$267,16 \cdot 10^{-6}$	$-400,607 \cdot 10^{-4}$	Σ	Σ	0

Примечание – (в) – верхний пояс, (н) – нижний пояс, (р) – решетка.

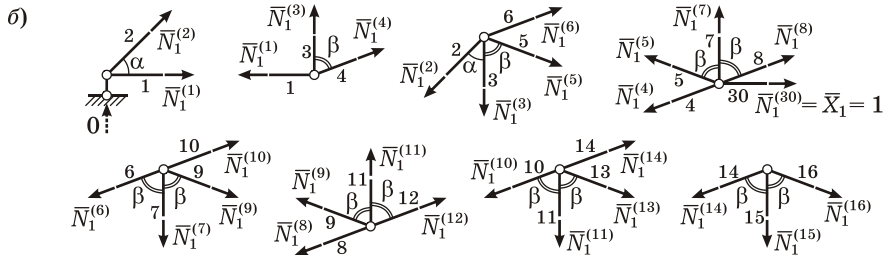
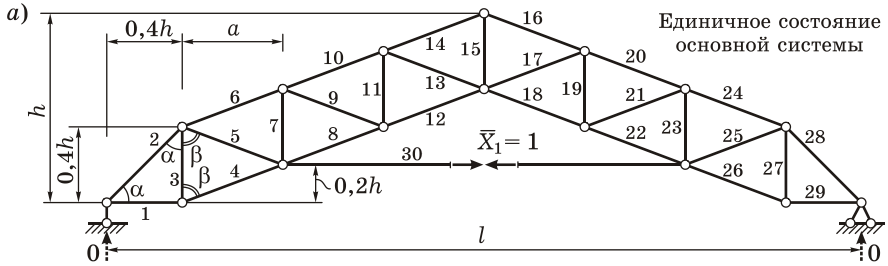


Рисунок 8.24

Узел 1-2: $\bar{N}_1^{(2)} = 0$; $\bar{N}_1^{(1)} = 0$. Узел 1-3-4: $\bar{N}_1^{(4)} = 0$; $\bar{N}_1^{(3)} = 0$.

Узел 2-3-5-6: $\bar{N}_1^{(5)} + \bar{N}_1^{(6)} = 0$; $\bar{N}_1^{(5)} - \bar{N}_1^{(6)} = 0$, отсюда $\bar{N}_1^{(5)} = \bar{N}_1^{(6)} = 0$.

Узел 4-5-7-8-30: Усилие в разрезанном стержне $\bar{N}_1^{(30)} = \bar{X}_1 = 1$;

$$\bar{N}_1^{(8)} = -\bar{N}_1^{(30)} / \sin\beta = -1 / \sin 69,44^\circ = -1,068;$$

$$\bar{N}_1^{(7)} = -\bar{N}_1^{(8)} \cos\beta = 1,068 \cdot \cos 69,44^\circ = 0,375.$$

Узел 6-7-9-10: $(\bar{N}_1^{(9)} + \bar{N}_1^{(10)} - \bar{N}_1^{(6)}) \sin\beta = 0$;

$$(\bar{N}_1^{(10)} - \bar{N}_1^{(9)} - \bar{N}_1^{(6)}) \cos\beta - \bar{N}_1^{(7)} = 0; \text{ отсюда}$$

$$\bar{N}_1^{(10)} = \bar{N}_1^{(7)} / (2 \cos\beta) = 0,375 / (2 \cdot \cos 69,44^\circ) = 0,534;$$

$$\bar{N}_1^{(9)} = -\bar{N}_1^{(10)} = -0,534.$$

Узел 8-9-11-12: $(\bar{N}_1^{(12)} - \bar{N}_1^{(8)} - \bar{N}_1^{(9)}) \sin\beta = 0$, отсюда

$$\bar{N}_1^{(12)} = \bar{N}_1^{(8)} + \bar{N}_1^{(9)} = -1,068 - 0,534 = -1,602;$$

$$(\bar{N}_1^{(12)} + \bar{N}_1^{(9)} - \bar{N}_1^{(8)}) \cos\beta + \bar{N}_1^{(11)} = 0;$$

$$\bar{N}_1^{(11)} = (\bar{N}_1^{(8)} - \bar{N}_1^{(9)} - \bar{N}_1^{(12)}) \cos\beta =$$

$$= (-1,068 + 0,534 + 1,602) \cos 69,44^\circ = 0,375.$$

$$\text{Узел 10-11-13-14: } (\bar{N}_1^{(13)} + \bar{N}_1^{(14)} - \bar{N}_1^{(10)}) \sin \beta = 0;$$

$$(\bar{N}_1^{(14)} - \bar{N}_1^{(13)} - \bar{N}_1^{(10)}) \cos \beta - \bar{N}_1^{(11)} = 0;$$

$$\bar{N}_1^{(14)} = \bar{N}_1^{(10)} + \bar{N}_1^{(11)} / (2 \cos \beta) =$$

$$= 0,534 + 0,375 / (2 \cdot \cos 69,44^\circ) = 1,068;$$

$$\bar{N}_1^{(13)} = \bar{N}_1^{(10)} - \bar{N}_1^{(14)} = 0,534 - 1,068 = -0,534.$$

$$\text{Узел 14-15-16: } \bar{N}_1^{(16)} = \bar{N}_1^{(14)} = 1,068; \quad \bar{N}_1^{(15)} = -(\bar{N}_1^{(14)} + \bar{N}_1^{(16)}) \cos \beta =$$

$$= -2 \cdot 1,068 \cdot \cos 69,44^\circ = -0,750.$$

В силу симметрии основной системы

$$\bar{N}_1^{(17)} = \bar{N}_1^{(13)} = -0,534; \quad \bar{N}_1^{(18)} = \bar{N}_1^{(12)} = -1,602; \quad \bar{N}_1^{(19)} = \bar{N}_1^{(11)} = 0,375;$$

$$\bar{N}_1^{(20)} = \bar{N}_1^{(10)} = 0,534; \quad \bar{N}_1^{(21)} = \bar{N}_1^{(9)} = -0,534; \quad \bar{N}_1^{(22)} = \bar{N}_1^{(8)} = -1,068;$$

$$\bar{N}_1^{(23)} = \bar{N}_1^{(7)} = 0,375; \quad \bar{N}_1^{(24)} = \bar{N}_1^{(25)} = \bar{N}_1^{(26)} = \bar{N}_1^{(27)} = \bar{N}_1^{(28)} = \bar{N}_1^{(29)} = 0.$$

Расчитанные значения записываем в таблицу 8.4.

Определение усилий в основной системе от внешней нагрузки. Формируем грузовое состояние основной системы (рисунок 8.25, а). Очевидно, что опорные реакции равны по $4F$. Далее вырезаем узлы (рисунок 8.25, б) и из уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси находим усилия в стержнях основной системы.

$$\text{Узел 1-2: } N_p^{(2)} = (0,5F - 4F) / \sin \alpha =$$

$$= (0,5 \cdot 30 - 4 \cdot 30) / \sin 45^\circ = -148,49 \text{ кН};$$

$$N_p^{(1)} = -N_p^{(2)} \cos \alpha = 148,49 \cdot \cos 45^\circ = 105,00 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел 1-3-4: } N_p^{(4)} = N_p^{(1)} / \sin \beta = 105 / \sin 69,44^\circ = 112,14 \text{ кН};$$

$$N_p^{(3)} = -N_p^{(4)} \cos \beta = -112,14 \cdot \cos 69,44^\circ = -39,38 \text{ кН}.$$

$$\text{Узел 2-3-5-6: } (N_p^{(5)} + N_p^{(6)}) \sin \beta = N_p^{(2)} \sin \alpha;$$

$$(N_p^{(6)} - N_p^{(5)}) \cos \beta = -F - N_p^{(3)} - N_p^{(2)} \sin \alpha;$$

$$N_p^{(6)} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta} N_p^{(2)} + \frac{1}{2 \cos \beta} (F + N_p^{(3)} + N_p^{(2)} \cos \alpha) =$$

$$= \frac{\sin 45^\circ (-148,49)}{2 \cdot \sin 69,44^\circ} + \frac{1}{2 \cdot \cos 69,44^\circ} (30 - 39,38 -$$

$$- 148,29 \cdot \cos 45^\circ) = -218,94 \text{ кН};$$

$$N_p^{(5)} = -N_p^{(6)} + N_p^{(2)} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} =$$

$$= 218,94 - 148,49 \frac{\sin 45^\circ}{\sin 69,44^\circ} = 106,80 \text{ кН.}$$

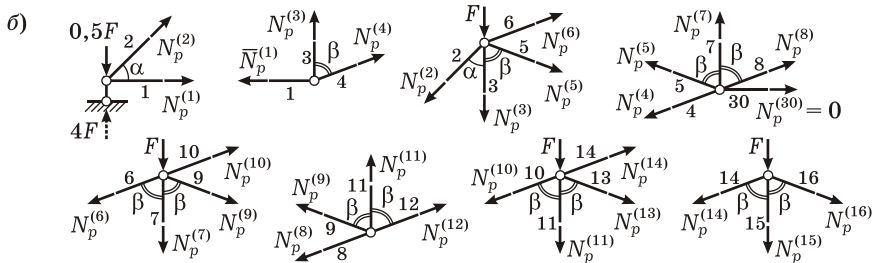
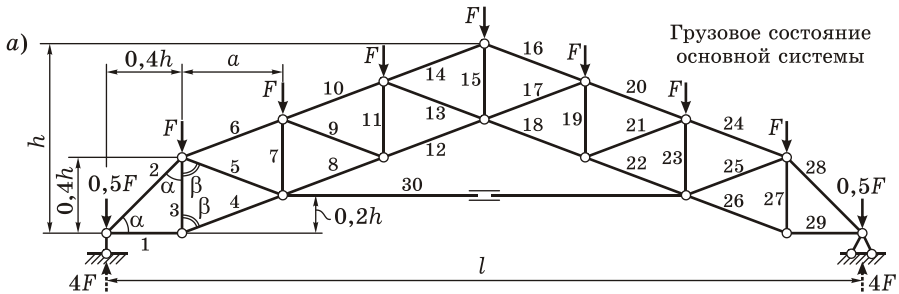


Рисунок 8.25

Узел 4-5-7-8-30: Усилие в разрезанном стержне $N_p^{(30)} = 0$.

$$(N_p^{(8)} - N_p^{(4)} - N_p^{(5)}) \sin \beta = 0;$$

$$N_p^{(8)} = N_p^{(4)} + N_p^{(5)} = 11214 + 10680 = 21894 \text{ кН};$$

$$N_p^{(7)} = (N_p^{(4)} - N_p^{(5)} - N_p^{(8)}) \cos \beta =$$

$$= (11214 - 10680 - 21894) \cos 69,44^\circ = -75,00 \text{ кН.}$$

Узел 6-7-9-10: $(N_p^{(9)} + N_p^{(10)} - N_p^{(6)}) \sin \beta = 0$;

$$(N_p^{(10)} - N_p^{(9)} - N_p^{(6)}) \cos \beta - N_p^{(7)} - F = 0;$$

$$N_p^{(10)} = N_p^{(6)} + \frac{1}{2 \cos \beta} (F + N_p^{(7)}) =$$

$$= -21894 + \frac{1}{2 \cos 69,44^\circ} (30 - 75,00) = -283,02 \text{ кН};$$

$$N_p^{(9)} = -N_p^{(10)} + N_p^{(6)} = 28302 - 21894 = 6408 \text{ кН.}$$

$$\text{Узел 8-9-11-12: } (N_p^{(12)} - N_p^{(8)} - N_p^{(9)}) \sin \beta = 0;$$

$$N_p^{(12)} = N_p^{(8)} + N_p^{(9)} = 21894 + 6408 = 28302 \text{ кН;}$$

$$(N_p^{(12)} + N_p^{(9)} - N_p^{(8)}) \cos \beta + N_p^{(11)} = 0;$$

$$\begin{aligned} N_p^{(11)} &= (N_p^{(8)} - N_p^{(9)} - N_p^{(12)}) \cos \beta = \\ &= (21894 - 6408 - 28302) \cos 69,44^\circ = -45,00 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\text{Узел 10-11-13-14: } (N_p^{(13)} + N_p^{(14)} - N_p^{(10)}) \sin \beta = 0;$$

$$(N_p^{(14)} - N_p^{(13)} - N_p^{(10)}) \cos \beta - N_p^{(11)} - F = 0;$$

$$\begin{aligned} N_p^{(14)} &= N_p^{(10)} + (N_p^{(11)} + F) / (2 \cos \beta) = \\ &= -28302 + (-45,00 + 30) / (2 \cos 69,44^\circ) = -30438 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$N_p^{(13)} = N_p^{(10)} - N_p^{(14)} = -28302 + 30438 = 2136 \text{ кН.}$$

$$\text{Узел 14-15-16: } N_p^{(16)} = N_p^{(14)} = -30438 \text{ кН;}$$

$$\begin{aligned} N_p^{(15)} &= -F - (N_p^{(14)} + N_p^{(16)}) \cos \beta = \\ &= -30 + 2 \cdot 30438 \cdot \cos 69,44^\circ = 18375 \text{ кН.} \end{aligned}$$

В силу симметрии основной системы и ее нагружения

$$N_p^{(17)} = N_p^{(13)} = 2136 \text{ кН; } N_p^{(18)} = N_p^{(12)} = 28302 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(19)} = N_p^{(11)} = -45,00 \text{ кН; } N_p^{(20)} = N_p^{(10)} = -28302 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(21)} = N_p^{(9)} = 6408 \text{ кН; } N_p^{(22)} = N_p^{(8)} = 21894 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(23)} = N_p^{(7)} = -75,00 \text{ кН; } N_p^{(24)} = N_p^{(6)} = -21894 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(25)} = N_p^{(5)} = 10680 \text{ кН; } N_p^{(26)} = N_p^{(4)} = 11214 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(27)} = N_p^{(3)} = -39,38 \text{ кН; } N_p^{(28)} = N_p^{(2)} = -148,49 \text{ кН;}$$

$$N_p^{(29)} = N_p^{(1)} = 105,00 \text{ кН.}$$

Расчитанные значения записываем в таблицу 8.4.

Определение единичного и грузового перемещений. Согласно формулам (8.29)

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^{30} \frac{(\bar{N}_1^{(j)})^2}{EA_j} l_j; \quad \Delta_{1p} = \sum_{j=1}^{30} \frac{\bar{N}_1^{(j)} N_p^{(j)}}{EA_j} l_j,$$

где $\bar{N}_1^{(j)}$, $N_p^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне основной системы от единичной силы, приложенной по направлению X_1 и внешней нагрузки со-

ответственно; l_j , EA_j – длина и жесткость j -го стержня. Знак суммы распространяется на все стержни системы.

Вычисляем величины $(\bar{N}_1^{(j)})^2 l_j / EA_j$ и $\bar{N}_1^{(j)} N_p^{(1)} l_j / EA_j$ для каждого стержня, заносим их в таблицу 8.4, затем суммируем по всем стержням. Значения полученных сумм и есть искомые δ_{11} и Δ_{1p} :

$$\delta_{11} = 267,16 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН}; \quad \Delta_{1p} = -400,607 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Решение канонического уравнения. Из канонического уравнения определяем продольную силу в стержне 30:

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{400,607 \cdot 10^{-4}}{267,16 \cdot 10^{-6}} = 149,95 \text{ кН.}$$

Вычисление усилий в заданной системе. Продольные силы в стержнях фермы определяем по формуле (8.30), записывая результат в таблице 8.4:

$$N^{(j)} = \bar{N}_1^{(j)} X_1 + N_p^{(j)},$$

где $N^{(j)}$ – продольная сила в j -м стержне заданной фермы.

Значения продольных сил указываем на схеме (рисунок 8.26, а).

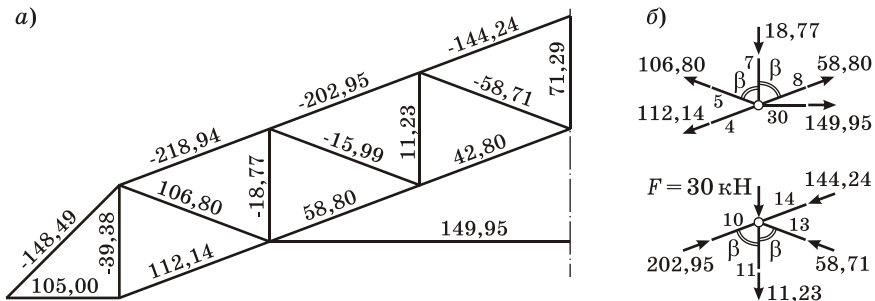


Рисунок 8.26

Статическая проверка. Вырежем два узла (рисунок 8.26, б) и составим уравнения проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси.

$$\text{Узел 4-5-7-8-30: } (106,80 + 58,80 - 112,14) \cos \beta - 18,77 =$$

$$= 53,46 \cdot \cos 69,44^\circ - 18,77 = 0;$$

$$(58,80 - 106,80 - 112,14) \sin \beta + 149,95 =$$

$$= -160,14 \cdot \sin 69,44^\circ + 149,95 = 0.$$

$$\text{Узел 10-11-13-14: } (202,95 + 58,71 - 144,24) \cos \beta - 30 - 11,23 =$$

$$= 117,42 \cdot \cos 69,44^\circ - 41,23 = 0;$$

$$(20295 - 58,71 - 14424) \sin \beta = 0.$$

Узлы находятся в равновесии.

Кинематическая проверка. Согласно формуле (8.31) вычисляем перемещение

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{30} \frac{\bar{N}_1^{(j)} N^{(j)}}{EA_j} l_j ;$$

если расчет выполнен верно, оно должно получиться нулевым.

Расчет также ведем в табличной форме (последний столбец таблицы 8.4). Сумма по столбцу и есть искомое перемещение Δ_1 . Значение $\Delta_1 = 0$, следовательно, продольные силы в стержнях заданной фермы найдены верно.

8.6 Расчет неразрезных балок. Основная система метода сил

8.6.1 Общие сведения о неразрезных балках. *Неразрезной* называется статически неопределимая сплошная балка, имеющая более двух опор и, следовательно, перекрывающая более одного пролета (рисунок 8.27, а). Характерным ее отличием от многопролетной шарнирной балки (рисунок 8.27, б) является то, что нагрузка, приложенная в любом пролете, изгибает неразрезную балку на протяжении всех ее пролетов, создавая плавную упругую линию.

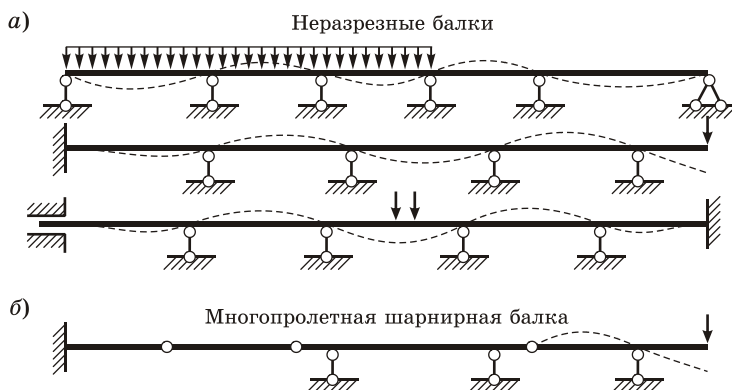


Рисунок 8.27

Закрепление концов балки производится так, чтобы равномерный нагрев (охлаждение) не вызывали появления дополнительных усилий. На расчетной схеме одна из крайних опор может быть шарнирно неподвижной или жесткой заделкой, а вто-

рая должна быть шарнирно подвижной или скользящей заделкой (см. рисунок 8.27). Все промежуточные опоры рассматриваются как шарнирно подвижные.

Если балка опирается на длинные стойки, то промежуточные опоры должны рассматриваться как упруго-податливые; опорные сечения балки могут перемещаться перпендикулярно оси, причем эти перемещения пропорциональны реакциям опор.

Действительная конструкция прикрепления неразрезной балки к опорам обычно отступает от указанной выше схемы. На практике всегда принимаются меры к тому, чтобы балка не могла отделяться от своих опор. Свободная ее укладка на опоры (рисунок 8.28) допускается только в случаях, когда сама нагрузка прижимает балку по всей ее длине и не дает ей подниматься вверх.

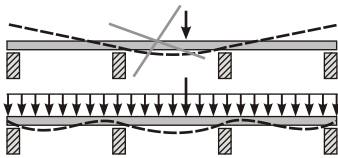


Рисунок 8.28

Можно выделить следующие типы неразрезных балок: *простая неразрезная* – если балка своими концами опирается на шарнирные опоры; *консольно-неразрезная* – если имеет консоли; *неразрезная балка с защемлениями* – если ее концы закреплены жесткой и скользящей заделками (рисунок 8.29).

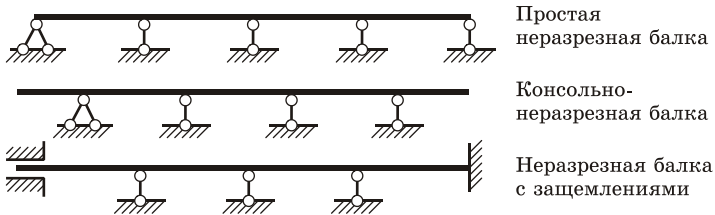


Рисунок 8.29

8.6.2 Степень статической неопределимости неразрезной балки. Как известно, для обеспечения неподвижности диска на плоскости требуются три одиночные связи. Поэтому количество лишних связей неразрезной балки меньше числа ее опорных стержней на три единицы. Следовательно, степень статической неопределимости можно вычислить по формуле:

$$n_c = C_o - 3, \quad (8.33)$$

где C_o – число одиночных опорных стержней (жесткая заделка эквивалентна трем стержням, скользящая – двум).

Степень статической неопределенности неразрезной балки также может быть найдена по общим правилам, рассмотренным в разд. 7.

8.6.3 Основная система метода сил. Рассмотрим простую неразрезную балку, имеющую на концах шарнирные опоры. Условимся нумеровать опоры слева направо так, чтобы для каждого пролета номер правой опоры совпадал с номером пролета, а левой – был на единицу меньше (рисунок 8.30, а). Начинать будем, как правило, с 0.

Основную систему можно получить:

1) устраняя все промежуточные опоры и принимая в качестве неизвестных вертикальные опорные реакции (рисунок 8.30, б);

2) вводя шарниры, чаще всего в сечениях над промежуточными опорами, и принимая за неизвестные опорные изгибающие моменты (рисунок 8.30, в).

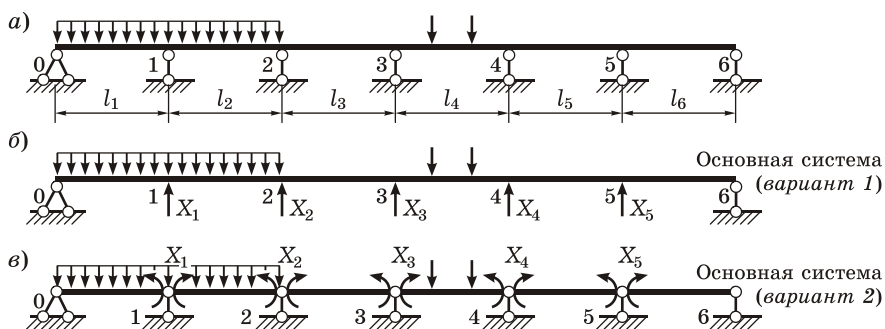


Рисунок 8.30

Нетрудно убедиться, что для первого варианта основной системы любая сила $\bar{X}_i = 1$ вызывает перемещения по направлениям всех неизвестных сил (рисунок 8.31, а). Для второго варианта основной системы любой момент $\bar{X}_i = 1$ деформирует только два смежных пролета по обе стороны от опоры, где он приложен, и вызывает перемещения только по направлениям трех неизвестных: X_{i-1} , X_i и X_{i+1} (рисунок 8.31, б).

Следовательно, в первой основной системе каждое побочное перемещение δ_{ij} ($i \neq j$) не равно нулю, и канонические уравнения будут полными. Во второй основной системе большое число побочных коэффициентов будет равно нулю, канонические уравнения упростятся. Следовательно, вторая основная система рациональнее первой, она и будет рассматриваться далее.

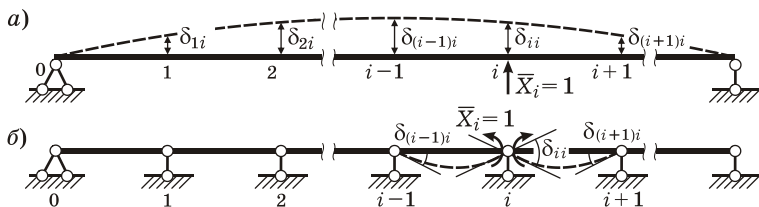


Рисунок 8.31

Заметим, что при малом числе промежуточных опор (1–2) может применяться и первый вариант основной системы.

8.7 Уравнение трех моментов

8.7.1 Вывод уравнения трех моментов. Положим, что балка имеет ступенчато-переменное сечение с постоянным моментом инерции J_i в каждом i -м пролете.

Рассмотрим два смежных пролета выбранного варианта основной системы: i -й и $(i+1)$ -й (рисунок 8.32, а). Запишем i -е каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{i(i-1)}X_{i-1} + \delta_{ii}X_i + \delta_{i(i+1)}X_{i+1} + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (8.34)$$

Очевидно, что моменты X_1, X_2, \dots, X_{i-2} и X_{i+2}, \dots, X_n не деформируют рассматриваемые пролеты балки и, следовательно, не вызывают перемещений по направлению момента X_i . Поэтому коэффициенты $\delta_{i1} = 0; \delta_{i2} = 0; \dots; \delta_{i(i-2)} = 0; \delta_{i(i+2)} = 0; \dots; \delta_{in} = 0$. Уравнение (8.34) принимает вид

$$\delta_{i(i-1)}X_{i-1} + \delta_{ii}X_i + \delta_{i(i+1)}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0. \quad (8.35)$$

Коэффициенты и свободный член этого уравнения представляют собой углы поворота сечений балки над i -й опорой, вызванные $\bar{X}_{i-1} = 1, \bar{X}_i = 1, \bar{X}_{i+1} = 1$ и внешней нагрузкой соответственно.

При определении перемещений по методу Мора будем учитывать только изгибающие моменты, пренебрегая поперечными силами. Эпюры, необходимые для вычисления единичных перемещений $\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}$, входящих в уравнение (8.35), построены на рисунке 8.32, б-г. Перемножая их по правилу (6.19) для прямолинейных эпюр на участке постоянной жесткости, получаем:

$$\delta_{i(i-1)} = \int_S \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i-1}}{EJ} ds = \frac{l_i}{6EJ_i} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l_i}{6EJ_i};$$

$$\delta_{ii} = \int_s \frac{(\bar{M}_i)^2}{EJ} ds = \frac{l_i}{6EJ_i} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}};$$

$$\delta_{i(i+1)} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}{EJ} ds = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}. \quad (8.36)$$

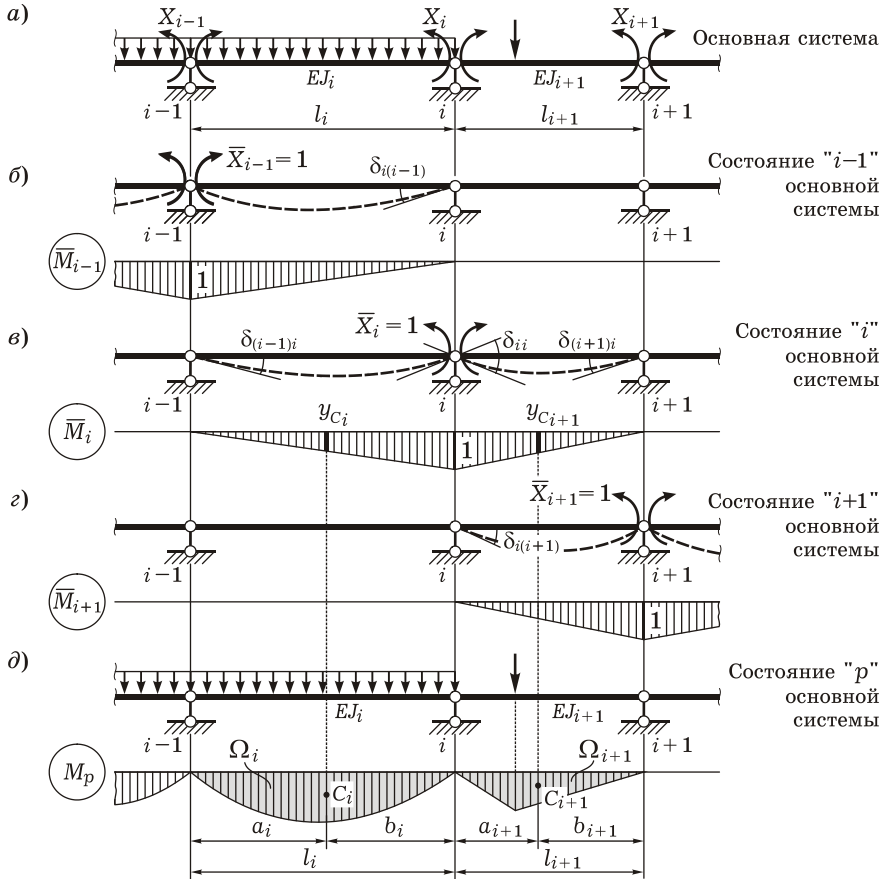


Рисунок 8.32

Подставим соотношения (8.36) в уравнение (8.35):

$$\frac{l_i}{6EJ_i} X_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right) X_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0.$$

Умножая его на произвольное значение $6EJ_0$, получим:

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + 6EJ_0\Delta_{ip} = 0, \quad (8.37)$$

где $\lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i}$ – приведенная длина i -го пролета.

Каноническое уравнение метода сил, записанное в форме (8.37), называется *уравнением трех моментов*. Оно связывает три последовательных неизвестных опорных момента для двух смежных пролетов с длинами l_i и l_{i+1} .

Смысл i -го уравнения: отсутствие взаимного угла поворота сечений балки на i -й опоре.

Подчеркнем, что $6EJ_0$ – произвольная величина. Однако для удобства в качестве J_0 принимают момент инерции одного из пролетов балки. Тогда приведенные и реальные длины пролетов имеют одинаковую размерность.

8.7.2 Формула для грузового перемещения. Построим грузовую эпюру M_p (рисунок 8.32, ∂) и перемножим ее с эпюрой \bar{M}_i (см. рисунок 8.32, ϵ) по правилу Верещагина:

$$\Delta_{ip} = \frac{\Omega_i y_{C_i}}{EJ_i} + \frac{\Omega_{i+1} y_{C_{i+1}}}{EJ_{i+1}},$$

где Ω_i, Ω_{i+1} – площадь эпюры M_p в i -м и $(i+1)$ -м пролетах; y_{C_i} – ордината эпюры \bar{M}_i под центром тяжести C_i эпюры M_p в i -м пролете; $y_{C_{i+1}}$ – то же в $(i+1)$ -м пролете; EJ_i, EJ_{i+1} – жесткости балки в i -м и $(i+1)$ -м пролетах.

Рассматривая подобные треугольники эпюры \bar{M}_i , получаем:

$$y_{C_i} = a_i / l_i; \quad y_{C_{i+1}} = b_{i+1} / l_{i+1}.$$

С учетом этого формула для грузового перемещения принимает вид

$$\Delta_{ip} = \frac{\Omega_i a_i}{EJ_i l_i} + \frac{\Omega_{i+1} b_{i+1}}{EJ_{i+1} l_{i+1}}, \quad (8.38)$$

где a, b – расстояния от центра тяжести эпюры M_p до левой и правой опор.

8.7.3 Особенности применения уравнений трех моментов. Применение уравнения трех моментов зависит от условий на концах балки.

Шарнирные опоры на концах. В уравнении (8.37) индекс i должен принимать значения 1, 2, ..., $(m-1)$, где m – номер последнего пролета. При этом количество уравнений достаточно для определения всех неизвестных моментов. В эти уравнения будут

входить X_0 и X_m – моменты на крайних шарнирных опорах, которые равны нулю (рисунок 8.33, а).

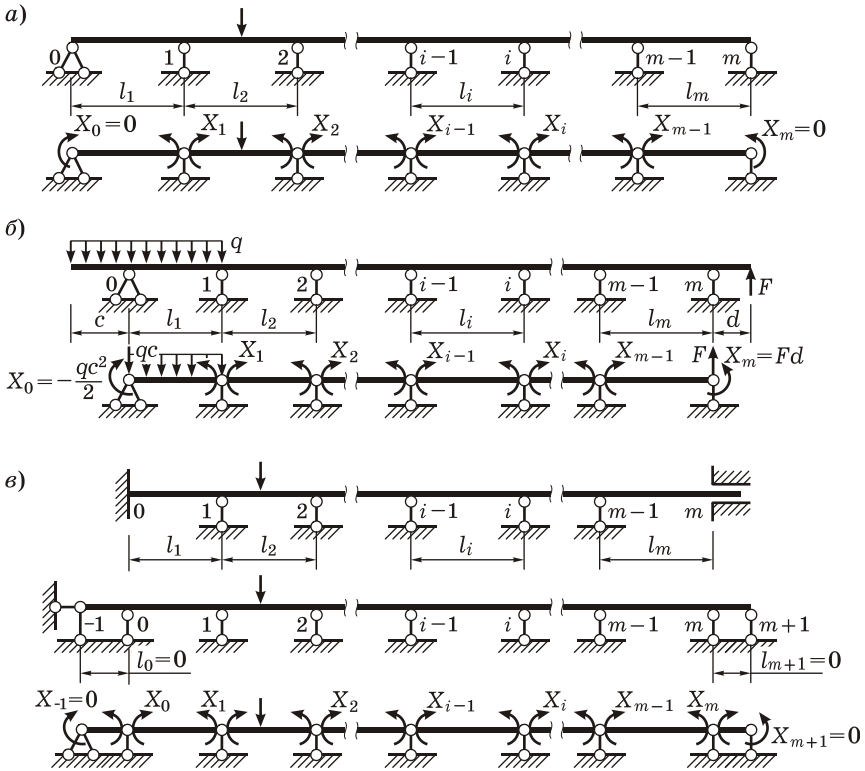


Рисунок 8.33

Консоли на концах балки. Удобно отбросить консоли и перенести нагрузку на крайние опоры, заменив ее силами и моментами (рисунок 8.33, б). Затем составить уравнения трех моментов так, как для балки на шарнирных опорах. В отличие от предыдущего случая, моменты X_0 и X_m не будут нулевыми. Направлять их следует так же, как и моменты на промежуточных опорах: чтобы были растянуты нижние волокна, а знак определять в соответствии с действием нагрузки на консолях.

Заделки на концах балки. Жесткую заделку необходимо заменить тремя стержнями, скользящую – двумя (рисунок 8.33, в). В результате образуются два дополнительных пролета бесконечно

малой длины, позволяющие составить два дополнительных уравнения – 0-е и m -е, как для балки с крайними шарнирными опорами. В эти уравнения будут входить X_{-1} и X_{m+1} – моменты на крайних шарнирных опорах, равные нулю.

8.7.4 Порядок расчета неразрезной балки. Чтобы определить внутренние усилия в неразрезной балке с помощью уравнений трех моментов, необходимо:

- 1) найти степень статической неопределимости n_c по формуле (8.33);
- 2) если система содержит консоли или заделки, необходимо привести ее к балке с шарнирными опорами на концах, как указано в п. 8.7.3;
- 3) вычислить моменты на крайних опорах;
- 4) сформировать основную систему, врезав шарниры в промежуточные опорные сечения и приложив в них моменты, растягивающие нижние волокна;
- 5) записать уравнения трех моментов (8.37), количество которых равно n_c ;
- 6) построить грузовую эпюру M_p в основной системе, рассматривая каждый пролет как отдельную простую балку;
- 7) вычислить приведенные длины пролетов и грузовые перемещения;
- 8) найденные значения подставить в уравнения трех моментов и, решив эти уравнения, определить моменты на промежуточных опорах;
- 9) построить эпюру изгибающих моментов M в заданной системе: отложить под опорами известные моменты, соединить их прямой линией, к полученной эпюре прибавить M_p и достроить эпюру на консолях (если они имеются);
- 10) выполнить кинематическую проверку эпюры M ;
- 11) по эпюре M определить поперечные силы Q ;
- 12) определить вертикальные опорные реакции и выполнить статическую проверку равновесия балки.

Методика расчета неразрезной балки с помощью уравнений трех моментов имеет несомненное преимущество перед классическим методом сил: чтобы определить коэффициенты канонических уравнений, нет необходимости строить и перемножать единичные эпюры моментов в основной системе.

Пример 8.4 Дана трехпролетная неразрезная балка (рисунок 8.34, а), у которой $l_1 = 6$ м; $l_2 = 5$ м; $l_3 = 4$ м; $c = 0,8$ м; $q = 7$ кН/м; $F = 16$ кН; $EJ_1 = EJ$; $EJ_2 = 2EJ$; $EJ_3 = 3EJ$. Требуется построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

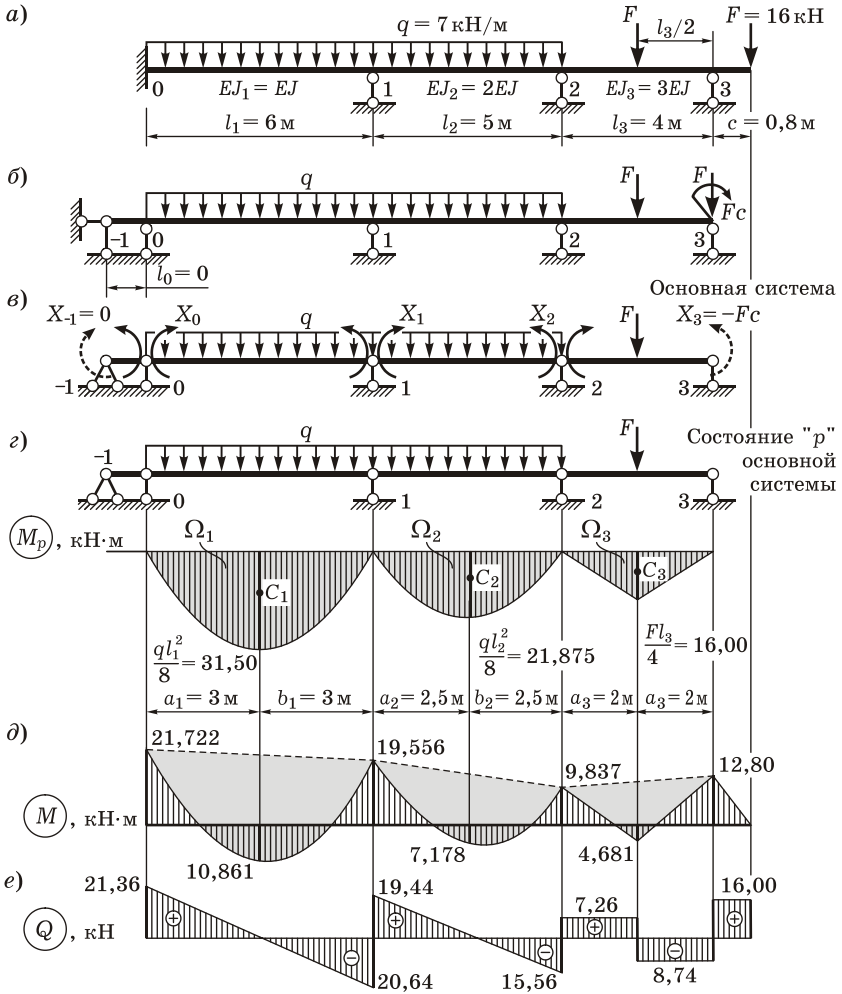


Рисунок 8.34

Нумерация. Нумеруем опоры слева направо, присваивая первой опоре номер 0 и далее 1, 2, 3. При этом номер пролета и номер правой опоры совпадают.

Определение количества неизвестных. Степень статической неопределимости согласно формуле (8.33)

$$n_c = C_0 - 3 = 6 - 3 = 3,$$

где $C_0 = 6$ – число одиночных опорных стержней (жесткая заделка эквивалентна трем стержням).

Приведение конструкции к балке с шарнирными опорами на концах. Заменяем заделку 0 тремя стержнями – образуется дополнительный пролет бесконечно малой длины ($l_0 = 0$) и шарнирная опора с номером, на единицу меньшим: (-1). Отбрасываем консоль и переносим силу F на опору 3, добавив к ней момент Fc , растягивающий верхние волокна (рисунок 8.34, б).

Основная система. Формируем основную систему, врезав шарниры в промежуточные опорные сечения и приложив в них изгибающие моменты X_0, X_1, X_2 (рисунок 8.34, в). Будем считать, что все моменты растягивают нижние волокна; если на самом деле тот или иной момент растягивает верхние волокна, то он получится отрицательным.

На крайних опорах (-1) и 3 таким же образом прикладываем известные моменты:

$$X_{-1} = 0; \quad X_3 = -Fc = -16 \cdot 0,8 = -1280 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вертикальная сила F , перенесенная на опору 3 с консоли, полностью воспринимается этой опорой, влияя лишь на значение опорной реакции, поэтому при построении эпюр M, Q учитываться не будет.

Канонические уравнения метода сил (уравнения трех моментов). Для определения трех неизвестных моментов X_0, X_1, X_2 необходимо составить три уравнения (8.37), задавая значения $i = 0, 1, 2$:

$$\lambda_0 X_{-1} + 2(\lambda_0 + \lambda_1)X_0 + \lambda_1 X_1 + 6EJ_0 \Delta_{0p} = 0;$$

$$\lambda_1 X_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 + 6EJ_0 \Delta_{1p} = 0;$$

$$\lambda_2 X_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)X_2 + \lambda_3 X_3 + 6EJ_0 \Delta_{2p} = 0,$$

где λ_i – приведенная длина i -го пролета; J_0 – произвольная величина, которую примем равной моменту инерции первого пролета балки; Δ_{ip} – грузовые перемещения.

На рисунке 8.35 схематично показано, для каких пролетов и опорных моментов составлено каждое уравнение.

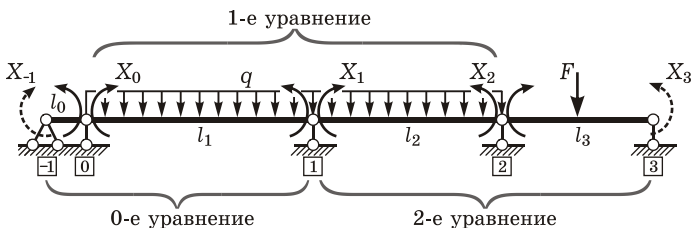


Рисунок 8.35

Построение грузовой эпюры в основной системе. Формируем грузовое состояние «р» основной системы. Каждый пролет деформируется независимо от других, поэтому рассматриваем его как отдельную простую балку. Строим эпюру M_p (рисунок 8.34, з).

Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений трех моментов. Определим приведенные длины пролетов $\lambda_i = l_i J_0/J_i$:

$$\lambda_0 = l_0 \frac{J_0}{J_0} = 0; \quad \lambda_1 = l_1 \frac{J_0}{J_1} = 6 \frac{J}{J} = 6 \text{ м};$$

$$\lambda_2 = l_2 \frac{J_0}{J_2} = 5 \frac{J}{2J} = 2,5 \text{ м}; \quad \lambda_3 = l_3 \frac{J_0}{J_3} = 4 \frac{J}{3J} = 1,333 \text{ м}.$$

Вычисляем площади участков эпюры M_p в каждом пролете:

$$\Omega_0 = 0; \quad \Omega_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot \frac{ql_1^2}{8} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{7 \cdot 6^2}{8} = 12600 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{3} l_2 \cdot \frac{ql_2^2}{8} = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{7 \cdot 5^2}{8} = 72917 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\Omega_3 = \frac{l_3}{2} \cdot \frac{Fl_3}{4} = \frac{4}{2} \cdot \frac{16 \cdot 4}{4} = 3200 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Расстояния от опор до центра тяжести эпюры M_p в пределах одного пролета

$$a_1 = b_1 = \frac{l_1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ м}; \quad a_2 = b_2 = \frac{l_2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ м}; \quad a_3 = b_3 = \frac{l_3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ м}.$$

Находим грузовые перемещения по формуле (8.38)

$$\Delta_{0p} = \frac{\Omega_0 a_0}{EJ_0 l_0} + \frac{\Omega_1 b_1}{EJ_1 l_1} = 0 + \frac{12600 \cdot 3}{EJ \cdot 6} = \frac{63000}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\Delta_{1p} = \frac{\Omega_1 a_1}{EJ_1 l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{EJ_2 l_2} = \frac{12600 \cdot 3}{EJ \cdot 6} + \frac{72917 \cdot 2,5}{2EJ \cdot 5} = \frac{81229}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\Delta_{2p} = \frac{\Omega_2 a_2}{EJ_2 l_2} + \frac{\Omega_3 b_3}{EJ_3 l_3} = \frac{72917 \cdot 2,5}{2EJ \cdot 5} + \frac{3200 \cdot 2}{3EJ \cdot 4} = \frac{23563}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Решение системы канонических уравнений. Подставив значения коэффициентов и свободных членов в уравнения трех моментов, получим:

$$0 \cdot 0 + 2(0 + 6)X_0 + 6X_1 + 6EJ \cdot 63000/EJ = 0;$$

$$6X_0 + 2(6 + 2,5)X_1 + 2,5X_2 + 6EJ \cdot 81229/EJ = 0;$$

$$2,5X_1 + 2(2,5 + 1,333)X_2 + 1,333X_3 + 6EJ \cdot 23563/EJ = 0,$$

или

$$12X_0 + 6X_1 = -37800;$$

$$6X_0 + 17X_1 + 2,5X_2 = -487375;$$

$$2,5X_1 + 7,667X_2 + 1,333X_3 = -141,375.$$

Решив систему, получим:

$$X_0 = -21,722 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_1 = -19,556 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_2 = -9,837 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выполняем проверку, подставив найденные значения моментов в исходную систему уравнений.

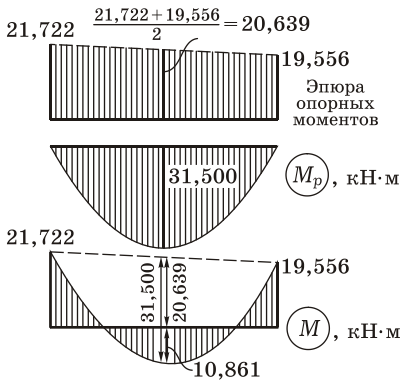


Рисунок 8.36

Построение эпюры изгибающих моментов в заданной балке. В каждом пролете окончательную эпюру M получаем как сумму эпюры опорных моментов и эпюры M_p . Для этого под опорами откладываем найденные значения моментов X_0, X_1, X_2 , а также определенный ранее X_3 , соединяем их ординаты прямыми линиями. От них откладываем ординаты эпюры M_p , т. е. как бы «подвешиваем» эпюру M_p к линии опорных моментов. На рисунке 8.36 эта операция подробно показана для первого пролета. Полученную окончательную эпюру моментов M продлеваем на консоль (рисунок 8.34, д).

Кинематическая проверка эпюры моментов. Построим суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ в основной системе метода сил. Для этого отбросим консоль, врежем шарниры в опорные сечения 0, 1, 2 и приложим единичные моменты (рисунок 8.37).

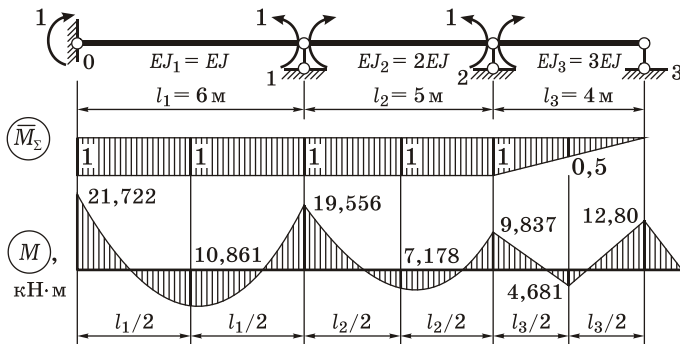


Рисунок 8.37

Перемножим полученную эпюру и эпюру M :

$$\begin{aligned}
 \int_S \frac{\bar{M}_s M}{EJ} ds &= \frac{l_1}{6EJ_1} (-1 \cdot 21,722 + 4 \cdot 1 \cdot 10,861 - 1 \cdot 19,556) + \\
 &+ \frac{l_2}{6EJ_2} (-1 \cdot 19,556 + 4 \cdot 1 \cdot 7,178 - 1 \cdot 9,837) + \\
 &+ \frac{l_3/2}{6EJ_3} (-2 \cdot 1 \cdot 9,837 + 2 \cdot 0,5 \cdot 4,681 - 1 \cdot 4,681 + 0,5 \cdot 9,837) + \\
 &+ \frac{l_3/2}{6EJ_3} (2 \cdot 0,5 \cdot 4,681 - 0,5 \cdot 12,800) = \frac{6}{6EJ} \cdot 2,166 + \frac{5}{6 \cdot 2EJ} (-0,681) + \\
 &+ \frac{2}{6 \cdot 3EJ} (-14,756) + \frac{2}{6 \cdot 3EJ} (-1,719) = \frac{0,052}{EJ} \approx 0.
 \end{aligned}$$

Проверка выполняется, значит, эпюра M построена верно.

Построение эпюры поперечных сил. Эпюру Q строим по готовой эпюре M . На участках с распределенной нагрузкой строим отдельные пролеты (рисунок 8.38) и рассматриваем их равновесие.

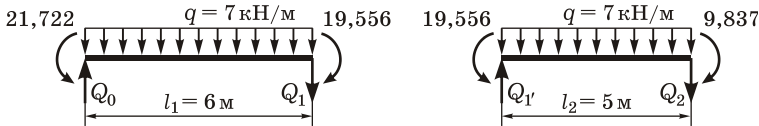


Рисунок 8.38

1-й пролет:

$$Q_0 = \frac{1}{l_1} \left(\frac{ql_1^2}{2} + 21,722 - 19,556 \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{7 \cdot 6^2}{2} + 2,166 \right) = 21,36 \text{ кН};$$

$$Q_1 = \frac{1}{l_1} \left(-\frac{ql_1^2}{2} + 21,722 - 19,556 \right) = \frac{1}{6} \left(-\frac{7 \cdot 6^2}{2} + 2,166 \right) = -20,64 \text{ кН}.$$

2-й пролет:

$$Q_{1'} = \frac{1}{l_2} \left(\frac{ql_2^2}{2} + 19,556 - 9,837 \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{7 \cdot 5^2}{2} + 9,719 \right) = 19,44 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \frac{1}{l_2} \left(-\frac{ql_2^2}{2} + 19,556 - 9,837 \right) = \frac{1}{5} \left(-\frac{7 \cdot 5^2}{2} + 9,719 \right) = -15,56 \text{ кН}.$$

В третьем пролете поперечную силу находим как тангенс угла наклона эпюры моментов:

$$Q_{2'} = \frac{9,837 + 4,681}{l_3/2} = \frac{14,518}{2} = 7,26 \text{ кН};$$

$$Q_3 = \frac{-(4,681 + 12,800)}{l_3/2} = \frac{-17,481}{2} = -8,74 \text{ кН}.$$

На консоли $Q_{3'} = F = 16,00$ кН.

По полученным данным строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 8.34, е).

Проверка равновесия балки (статическая проверка правильности вычисления внутренних усилий). Найдем опорные реакции балки. Их проще всего определить по смежным ординатам эпюры Q (рисунок 8.39):

$$V_0 = Q_0 = 21,36 \text{ кН}; \quad V_1 = Q_{1'} - Q_1 = 19,44 - (-20,64) = 40,08 \text{ кН};$$

$$V_2 = Q_2 - Q_2 = 7,26 - (-15,56) = 22,82 \text{ кН};$$

$$V_3 = Q_{3'} - Q_3 = 16,00 - (-8,74) = 24,74 \text{ кН}.$$

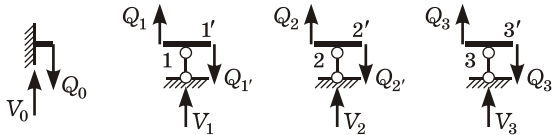


Рисунок 8.39

Проверим выполнение условия равновесия, составив уравнение проекций всех сил, приложенных к балке, на вертикальную ось (рисунок 8.40):

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + V_2 + V_3 - q(l_1 + l_2) - 2F &= \\ = 21,36 + 40,08 + 22,82 + 24,74 - 7(6 + 5) - 2 \cdot 16 &= 0. \end{aligned}$$

Также найдем сумму моментов всех сил относительно точки 0:

$$\begin{aligned} 21,722 + V_1 l_1 + V_2(l_1 + l_2) + V_3(l_1 + l_2 + l_3) - q(l_1 + l_2)^2/2 - \\ - F(l_1 + l_2 + l_3/2) - F(l_1 + l_2 + l_3 + c) &= \\ = 21,722 + 40,08 \cdot 6 + 22,82(6 + 5) + 24,74(6 + 5 + 4) - 7(6 + 5)^2/2 - \\ - 16(6 + 5 + 2) - 16(6 + 5 + 4 + 0,8) &= 0. \end{aligned}$$

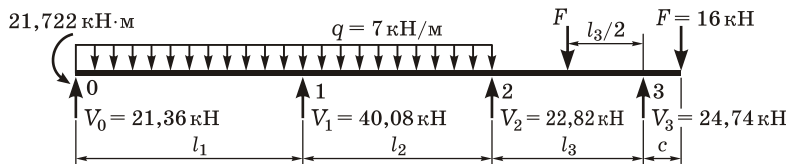


Рисунок 8.40

Условия равновесия выполняются, следовательно, расчет неразрезной балки выполнен верно.

9.1 Кинематическая неопределимость

9.1.1 Идея метода перемещений. В методе сил за неизвестные принимались *усилия* в лишних связях; для отыскания этих усилий составлялись *уравнения совместности деформаций*; после этого устанавливалась картина распределения внутренних сил и моментов, далее определялись перемещения заданных сечений и узлов системы.

Но задача расчета статически неопределимой системы может быть решена и по-другому. В качестве неизвестных можно принять не усилия, а *характерные перемещения* системы, например, перемещения ее узлов; для их отыскания составить *уравнения равновесия*; по найденным значениям перемещений установить деформированное состояние конструкции и далее найти внутренние усилия. Такой метод расчета получил название *метода перемещений*.

В настоящее время метод перемещений широко распространен в расчетной практике, особенно для сложных систем с большим количеством связей, обладающих малой подвижностью узлов. Это, например, сложные каркасные рамы, фермы с жесткими узлами и т. п. Этот метод применяется при решении задач динамики и устойчивости сооружений. Он явился основой для разработки многих приближенных методов расчета рам. Основные положения метода перемещений, как и метода сил, использованы в теории метода конечных элементов.

9.1.2 Основные неизвестные метода перемещений. В результате различных внешних воздействий сооружение деформируется, его сечения и узлы смещаются. *Узлами* называют точки соединения отдельных стержней и делят на шарнирные, жесткие и упруго-податливые (см. п. 1.4.1). В данном разделе будем рассматривать два вида узлов – шарнирные и жесткие. Перемещения узлов, и угловые, и линейные, будем обозначать символом Z независимо от типа.

Каждый *шарнирный узел* системы (рисунок 9.1, а) может иметь линейное смещение, определяемое на плоскости двумя компонентами – вертикальным и горизонтальным перемещениями Z_1 и Z_2 (либо, если удобно, по двум другим взаимно перпендикулярным направлениям).

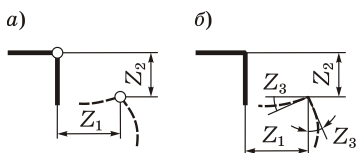


Рисунок 9.1

Таким образом, за основные неизвестные метода перемещений принимаются *угловые и линейные перемещения узлов* системы.

Система, у которой все перемещения узлов известны либо отсутствуют, называется *кинематически определенной*.

Заметим, что понятия «статическая определенность» и «кинематическая определенность» никак не связаны: статически определимые системы могут быть кинематически неопределимыми и наоборот.

9.1.3 Допущения метода перемещений. Стержневые системы, к расчету которых предполагается применять метод перемещений, считаются линейно деформируемыми. Для них сохраняются все гипотезы и допущения, принятые ранее (см. подразд. 1.7).

В частности, справедливо *допущение о малости деформаций* (см. п. 1.7.3), из которого следует, что

1) при изгибе прямого стержня сближением его концов можно пренебречь, т. е. можно считать, что проекция изогнутого стержня на первоначальное направление равна его первоначальной длине (рисунок 9.2);

2) углы поворота сечений настолько малы, что полагаются равными их тангенсам.

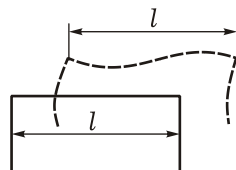


Рисунок 9.2

Для рам и балок, в которых перемещения обусловлены преимущественно изгибными деформациями, вводится дополнительное допущение, позволяющее *не учитывать продольные деформации стержней*: деформации стержней за счет растяжения–сжатия (удлинения и укорочения) малы по сравнению с деформациями изгиба, поэтому ими можно пренебречь.

Достаточно хорошо это допущение соблюдается для рам с вертикальными стойками при небольшом числе этажей. Для многоэтажных рам, рам с наклонными стойками, арок и ферм продольные деформации стержней могут достигать значительных величин, поэтому их необходимо учитывать.

Таким образом, будем различать *два типа моделей*, схематизирующих работу системы: с нерастяжимыми (несжимаемыми)

Каждый *жесткий узел*, помимо линейного смещения, может еще и поворачиваться на угол Z_3 (рисунок 9.1, б). При этом соединение стержней в таких узлах считается абсолютно жестким, то есть величины углов между стержнями при деформации системы не изменяются.

стержнями (жесткость $EA = \infty$) и растяжимыми стержнями (жесткость EA конечна). При использовании первой модели количество неизвестных, как правило, существенно меньше, чем при применении второй.

Первая модель применяется при упрощенных расчетах рам и балок, выполняемых вручную, или при минимальной автоматизации вычислений. В данном разделе при изучении основ метода перемещений будем использовать эту модель, так как она позволяет на простых примерах понять суть метода и овладеть основными его операциями.

Вторая модель позволяет получить более общий и точный результат. Поэтому современные программные комплексы по расчету конструкций, для которых большое количество неизвестных не является проблемой, базируются на ней.

9.1.4 Степень кинематической неопределимости. Минимальное число тех неизвестных перемещений узлов, знание которых позволяет установить деформированный вид системы (а следовательно, затем и усилия в ее элементах), называется *степенью кинематической неопределимости*.

Степень кинематической неопределимости плоской стержневой системы можно вычислить по формуле

$$n_k = n_y + n_l, \quad (9.1)$$

где n_y , n_l – количество независимых угловых и линейных перемещений узлов.

Значение n_y равно числу жестких узлов системы.

Величину n_l определяют, анализируя смещения узлов в двух взаимно перпендикулярных направлениях (как правило, вертикальном и горизонтальном). Также n_l равно количеству дополнительных одиночных связей (стерженьков) $C_O^{\text{доп}}$, которые необходимо установить в выбранных направлениях для полной ликвидации линейных смещений узлов:

$$n_l = C_O^{\text{доп}}. \quad (9.2)$$

Значение n_l существенно зависит от того, ведется расчет с учетом или без учета продольных деформаций стержней.

Пример 9.1 Найти степень кинематической неопределимости рамы, показанной на рисунке 9.3, а, с учетом и без учета продольных деформаций стержней.

Расчет с учетом продольных деформаций. Под действием нагрузки узлы смещаются вправо (за счет изгиба элементов), опускаются вниз и сближаются (за счет сжатия стержней). Для установления деформированного вида рамы необходимо знание пяти независимых перемещений

узлов (рисунок 9.3, б) – одного углового Z_1 ($n_y = 1$) и четырех линейных Z_2, \dots, Z_5 ($n_l = 4$). По формуле (9.1)

$$n_k = n_y + n_l = 1 + 4 = 5.$$

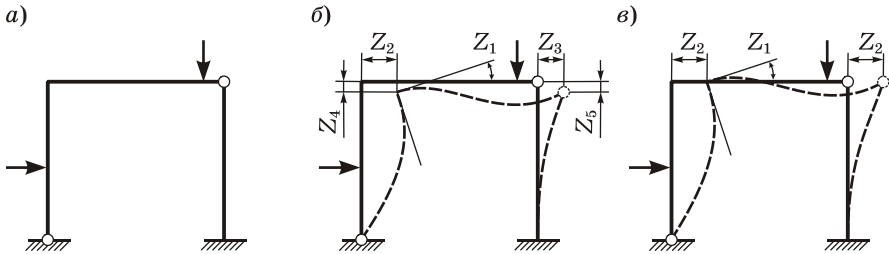


Рисунок 9.3

Расчет без учета продольных деформаций. Считается, что под действием нагрузки узлы смещаются вправо (за счет изгиба элементов), но вниз не опускаются и не сближаются (на основании допущения о пренебрежении продольными деформациями). Тогда $Z_3 = Z_2$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$. Следовательно, $n_y = 1$, $n_l = 1$. По формуле (9.1)

$$n_k = n_y + n_l = 1 + 1 = 2.$$

То есть для установления деформированного вида рамы достаточно всего двух перемещений – Z_1 и Z_2 (рисунок 9.3, в).

Рассмотрим, как иначе найти степень кинематической неопределенности. Было указано, что значение n_y равно числу жестких узлов системы. Рама содержит один жесткий узел, поэтому $n_y = 1$.

Величину n_l можно определить по формуле (9.2) как количество дополнительных одиночных связей, которые необходимо установить для полной ликвидации линейных смещений узлов: $n_l = C_{O}^{\text{доп}}$. Без использования допущений метода перемещений узлы необходимо закрепить четырьмя стерженьками (рисунок 9.4, а) – двумя горизонтальными и двумя вертикальными. С учетом принятых допущений достаточно одной горизонтальной связи (рисунок 9.4, б).

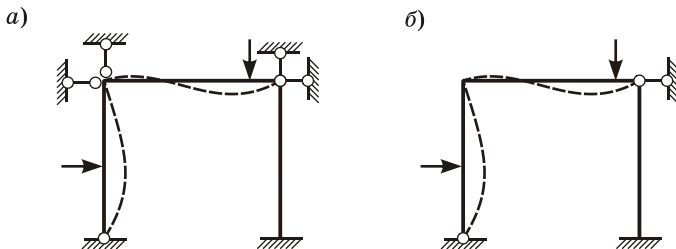


Рисунок 9.4

Замечание. При расчете рамы без учета продольных деформаций величину $n_{\text{л}}$ удобно определять как число степеней свободы шарнирной схемы $W^{\text{шарн}}$:

$$n_{\text{л}} = W^{\text{шарн}}.$$

Шарнирная схема рамы получается введением шарниров во все узлы и жесткие опорные закрепления. При этом все консоли, если они есть, должны быть отброшены¹⁾. Число степеней свободы шарнирной схемы можно найти по формулам (1.2) – (1.5). Удобна формула (1.5) $W = III - 3K$, согласно которой

$$n_{\text{л}} = W^{\text{шарн}} = (III - 3K)^{\text{шарн}}, \quad (9.3)$$

где III – количество простых шарниров; K – количество замкнутых контуров.

Пример 9.2 Найти степень кинематической неопределимости рам I, II, III, показанных на рисунке 9.5, а, б, в.

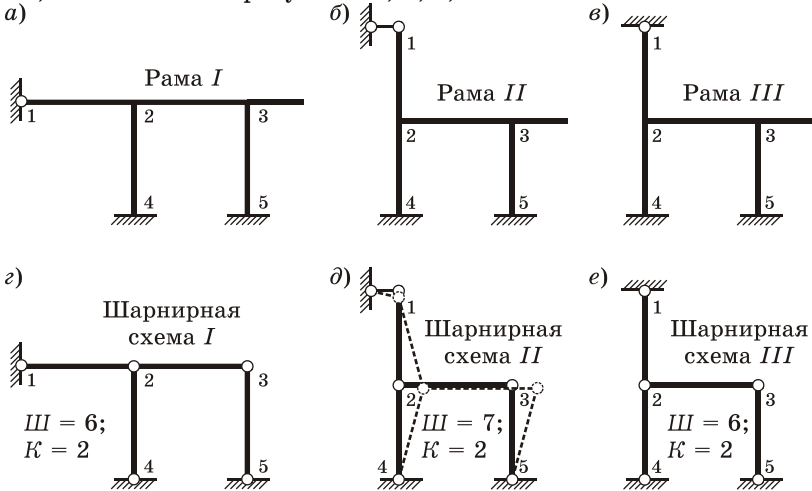


Рисунок 9.5

Каждая рама содержит два жестких узла (2, 3), поэтому $n_{\text{в}} = 2$.

Количество линейных перемещений $n_{\text{л}}$ найдем по формуле (9.3). Образуем шарнирные схемы этих рам (рисунок 9.5, в, г, д), вводя шарниры во все узлы, включая опорные; при этом консоль необходимо отбросить. Для первой и третьей шарнирных схем количество простых шарниров $III^{I,III} = 6$, количество замкнутых контуров $K^{I,III} = 2$, следовательно,

¹⁾ Консоли всегда статически определимы, поэтому перемещения их концов не входят в число неизвестных метода перемещений.

$$n_{\text{л}}^{I,III} = (III^{I,III} - 3K^{I,III})_{\text{шарн}} = 6 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Для второй схемы $III^II = 7$, $K^II = 2$, поэтому

$$n_{\text{л}}^{II} = (III^II - 3K^II)_{\text{шарн}} = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Теперь по формуле (9.1) $n_{\text{к}} = n_{\text{y}} + n_{\text{л}}$ находим:

$$n_{\text{к}}^{I,III} = n_{\text{y}} + n_{\text{л}}^{I,III} = 2 + 0 = 2; \quad n_{\text{к}}^{II} = n_{\text{y}} + n_{\text{л}}^{II} = 2 + 1 = 3.$$

Обратим внимание на раму III и ее шарнирную схему. Почему же у нас получилось $n_{\text{л}}^{III} = 0$, хотя узлы 2 и 3 вроде бы могут смещаться по горизонтали, как для рамы II ? Дело в том, что используя формулу (9.3), мы не учитываем продольные деформации элементов. Узлы 2 и 3 могут смещаться по горизонтали на *бесконечно малые* величины без растяжения стержней 1-2 и 2-4, однако *конечные* перемещения возможны только за счет удлинения этих стержней. Таким образом, можно говорить о некорректной расчетной модели рамы III , если предполагается определять усилия в ней без учета продольных деформаций элементов.

9.2 Основная система метода перемещений

9.2.1 Дополнительные связи и цель их введения. При расчете конструкций методом сил отбрасывались лишние связи и образовывалась статически определимая основная система, в которой возможно построение эпюр от нагрузки и единичных усилий.

В методе перемещений заданная система также преобразуется, но не в статически, а в *кинематически определенную*. Для этого вводятся дополнительные связи, устраняющие угловые и линейные перемещения узлов.

Эти связи можно разделить на два вида:

- *плавающие заделки (защемления)*, которые накладываются на все жесткие узлы (см. п. 1.5.7);
- *одиночные стержни*, которые устанавливаются по направлениям возможных линейных смещений узлов¹⁾.



Рисунок 9.6

На рисунке 9.6 показаны варианты изображения одной и той же плавающей заделки на расчетной схеме. Такая заделка не лишает узел линейной подвижности. Она может поступательно перемещаться вместе с узлом, но не может поворачиваться до тех пор, пока ей не сообщен принудительный поворот.

¹⁾ При использовании модели, в которой не учитываются продольные деформации, при наложении на узлы одиночных стержней можно руководствоваться шарнирной схемой сооружения: устанавливать стержни так, чтобы шарнирная схема стала геометрически неизменяемой.

Если число дополнительных связей совпадает со степенью кинематической неопределимости сооружения и все они введены правильно, то все узлы станут неподвижными. В заданной же системе узлы смещаются. Поэтому наложение связей на конструкцию необходимо компенсировать дополнительными внешними воздействиями: ее узлам следует придать такие же перемещения, которые имелись изначально. Полученная таким образом система представляет собой *основную систему метода перемещений*.

Казалось бы, введение дополнительных связей усложняет задачу. Однако это позволяет представить систему как «набор» прямых линейно деформируемых стержней постоянного сечения, которые могут быть по отдельности рассчитаны на любые виды воздействий (силовое, температурное, кинематическое).

Например, для рамы, показанной на рисунке 9.3, *а*, основная система получается следующим образом: в жесткий узел вводится плавающая заделка (связь 1), которой придается поворот на угол Z_1 , а также узлы рамы закрепляются горизонтальным стержнем (связь 2), который принудительно смещается на Z_2 (рисунок 9.7, *а*). Заданная и основная системы эквивалентны: их деформированное состояние, а следовательно, и внутренние усилия одинаковы.

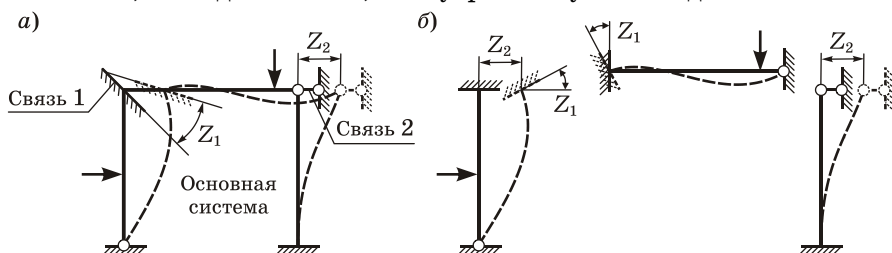


Рисунок 9.7

Теперь каждый элемент рамы можно отделить от остальных и рассчитать отдельно на действующую нагрузку и смещение концов (рисунок 9.7, *б*).

Часто деформированное состояние основной системы не показывают, а для перемещений задают лишь направления. Другой способ изображения основной системы для рассмотренной выше рамы показан на рисунке 9.8.

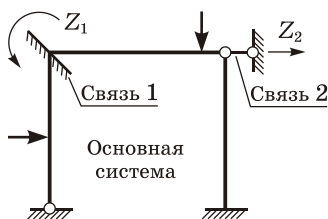


Рисунок 9.8

Плавающие заделки накладываются на все жесткие узлы системы, опорные стержни устанавливаются по всем направлениям

независимых линейных смещений узлов. Следовательно, основная система метода перемещений может быть по существу сформирована *единственным образом*. Напомним, что в методе сил можно было предложить множество вариантов.

Пример 9.3 Сформировать основную систему метода перемещений для рамы II, рассмотренной в примере 9.2 (рисунок 9.9, а). Под действием нагрузки узлы смещаются так, как показано на рисунке 9.9, б.

Степень кинематической неопределенности этой рамы $n_k = n_v + n_d = 2 + 1 = 3$. Вводим плавающие заделки в жесткие узлы и горизонтальный опорный стержень. Теперь узлы полностью лишены подвижности.

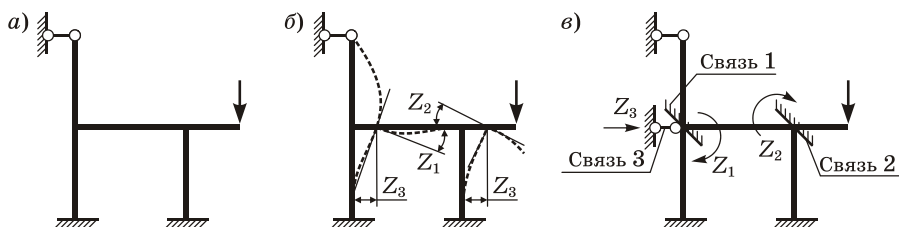


Рисунок 9.9

Для компенсации дополнительных связей узлам придаем углы поворота Z_1 , Z_2 и линейное смещение Z_3 , имеющиеся в заданной раме (рисунок 9.9, в), — получаем основную систему метода перемещений.

9.2.2 Таблицы реакций и внутренних усилий в стержне как элементе основной системы. Основная система может рассматриваться как совокупность отдельных стержней, объединенных в узлах. Эти стержни можно разделить на четыре типа (рисунок 9.10).



Рисунок 9.10

Каждый из них может быть заранее рассчитан на действие различных нагрузок, изменение температуры и смещение опор. В статически неопределимых стержнях (тип 1 и 2) внутренние усилия удобно находить методом сил, в статически определимых (тип 3 и 4) — с помощью уравнений равновесия.

Заметим, что во всех типах стержней эпюры Q и M от поперечных нагрузок, смещений опор и температурных воздействий

будут одинаковыми и при наличии, и при отсутствии продольных сил N . Так как мы договорились пока не учитывать продольные деформации стержней, то нет необходимости знать продольные силы N в стержнях типов 1–3, показанных в нижнем ряду.

Для наиболее распространенных видов воздействий расчеты отдельных стержней постоянного сечения уже выполнены, их результаты сведены в справочные таблицы (см. приложение Б). Если же такие данные отсутствуют (например, для элемента переменного сечения или криволинейного), то внутренние усилия могут быть найдены путем вспомогательного расчета.

9.3 Канонические уравнения метода перемещений

9.3.1 Система канонических уравнений для n раз кинематически неопределимой конструкции. Предположим, что мы имеем дело с системой, степень кинематической неопределимости которой n ; к ней приложена произвольная внешняя нагрузка. Чтобы устранить все независимые перемещения узлов Z_1, Z_2, \dots, Z_n , наложим n связей. Полученная основная система должна быть эквивалентна заданной, а в заданной системе этих связей нет. Следовательно, полные реакции во введенных связях должны отсутствовать:

$$R_1 = 0; R_2 = 0; \dots; R_n = 0.$$

Развернем каждое из этих равенств, применив принцип суперпозиции. Например, для реакции в первой связи получим выражение:

$$R_1 = r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p},$$

где r_{1i} – реакция в 1-й дополнительной связи от единичного перемещения i -й связи (или от $\bar{Z}_i = 1$); R_{1p} – грузовая реакция в 1-й связи, т. е. реакция от внешней нагрузки, приложенной к основной системе.

Раскрывая аналогично каждую реакцию и приравнивая ее к нулю, получаем:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2i}Z_i + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{ki}Z_i + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kp} &= 0; \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} &= 0. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (9.4) представляет собой *систему канонических уравнений метода перемещений*. Неизвестными в ней являются перемещения узлов Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Здесь единичные реакции r_{ki} ($k, i = 1, 2, \dots, n$) представляют собой коэффициенты этой системы. Коэффициенты с одинаковыми индексами ($r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$), расположенные на главной диагонали, называются *главными*, остальные – *побочными*. Грузовые реакции R_{kp} являются свободными членами СЛАУ.

Главные единичные реакции всегда положительны (это будет доказано позже). Побочные единичные реакции на основании первой теоремы Рэлея (см. п. 6.9.4) обладают свойством взаимности ($r_{ki} = r_{ik}$). Они, а также грузовые реакции R_{kp} могут иметь любой знак, а также быть равными нулю.

Подобно коэффициенту δ_{ki} в уравнениях метода сил, в обозначении реакции r_{ki} первый индекс (k) указывает номер дополнительной связи, в которой вычисляется реакция, а второй (i) – номер связи, единичное смещение которой вызывает эту реакцию (k – где возникает реакция, i – от чего).

В зависимости от типов дополнительных связей различают два типа реакций: *реактивные моменты*, возникающие в плавающих заделках; *реактивные силы*, возникающие в опорных стержнях.

Физический смысл k -го уравнения заключается в том, что суммарная реакция в k -й дополнительной связи от всех воздействий на основную систему (перемещений Z_1, Z_2, \dots, Z_n и внешней нагрузки) равна нулю.

По сути, канонические уравнения метода перемещений – это уравнения равновесия системы в деформированном состоянии. Они выражают условия равновесия ее узлов и отдельных частей.

9.3.2 Матричная запись канонических уравнений. Систему (9.4) удобно записывать в матричной форме:

$$\mathbf{R}\vec{Z} + \vec{R}_p = 0, \quad (9.5)$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2i} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{ki} & \dots & r_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{ni} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \quad \vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_k \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_p = \begin{bmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \dots \\ R_{kp} \\ \dots \\ R_{np} \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{R} является *матрицей жесткости* основной системы, которую часто называют матрицей единичных реакций; \vec{Z} – вектор основных неизвестных; \vec{R}_p – вектор грузовых реакций.

Матрица жесткости всегда является симметричной и положительно определенной (ее определитель всегда положителен). Следовательно, для решения системы уравнений (9.5) могут быть использованы различные итерационные методы.

9.4 Вычисление и проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Существуют два метода нахождения единичных и грузовых реакций: статический и общий (кинематический). Рассмотрим суть каждого из них.

9.4.1 Статический метод определения реакций. Так как коэффициенты и свободные члены канонических уравнений есть реакции связей основной системы – силы и моменты, то они могут быть определены из уравнений статического равновесия узлов и отдельных частей конструкции.

Если Z_1 – угол поворота (см. рисунок 9.8), то связь 1 – плавающая заделка, а реакции этой связи $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, R_{1p}$ – моменты; если Z_2 – горизонтальное перемещение, то связь 2 – горизонтальный стержень, а реакции этой связи $r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}, R_{2p}$ – горизонтальные силы.

Для определения *моментной реакции* необходимо вырезать узел основной системы и рассмотреть его равновесие, составив уравнение в виде суммы моментов сил, приложенных к узлу (рисунок 9.11, а).

Чтобы найти *силовую реакцию*, следует отсечь часть основной системы, содержащую эту реакцию, и составить уравнение ее равновесия в виде суммы проекций всех сил на какую-либо ось (рисунок 9.11, б).

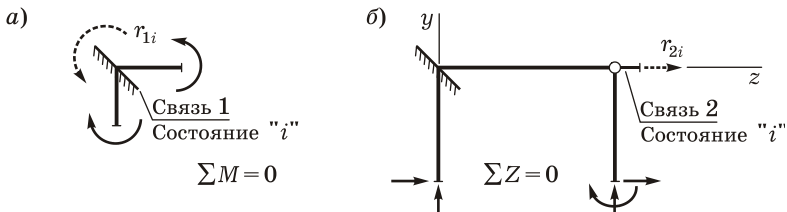


Рисунок 9.11

Предварительно необходимо построить эпюры в основной системе от единичных перемещений (в единичных состояниях) и заданной внешней нагрузки (в грузовом состоянии), пользуясь вспомогательными таблицами (см. приложение Б).

Направление определяемых единичных и грузовых реакций всегда совпадает с направлением перемещения данной связи. Например, реакции r_{11} , r_{12} , ..., r_{1n} , R_{1p} необходимо направить в ту же сторону, что и Z_1 .

Статический метод прост, нагляден и удобен, он позволяет изобразить каждую реакцию на расчетной схеме в виде силы или момента и таким образом избежать ошибок при расчете. Однако в некоторых случаях он неприменим.

Например, для рамы с наклонными стойками в уравнения проекций на оси координат войдут не только поперечные, но и продольные силы (рисунок 9.12). Поперечные силы легко найти по таблицам, однако продольные при использовании допущения об абсолютной жесткости стержней определить гораздо сложнее.

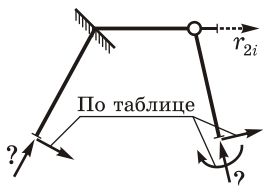


Рисунок 9.12

В случаях, когда составление уравнений равновесия громоздко, для определения реакций используют общий метод, основанный на перемножении эпюр.

9.4.2 Общий (кинематический) метод определения реакций.

Вспомним способ определения коэффициентов и свободных членов в методе сил. Единичные перемещения δ_{ik} вычислялись перемножением единичных эпюр M_i и M_k , грузовые Δ_{ip} — перемножением эпюр M_i и M_p в основной системе метода сил.

Подобным же образом можно найти единичные и грузовые реакции в основной системе метода перемещений, однако здесь есть свои особенности.

Единичные реакции. Рассмотрим основную систему метода перемещений в двух единичных состояниях « i » и « k ». В каждом из них активные внешние силы отсутствуют, но заданы единичные перемещения i -й и k -й дополнительных связей (рисунок 9.13). Возникнут реакции связей, которые будем рассматривать как внешние силы.

Работа внешних сил состояния « k » на перемещениях состояния « i »

$$A_{ik}^{(e)} = r_{ik} \cdot 1 = r_{ik},$$

где r_{ik} — реакция связи i от единичного перемещения связи k .

Другие реакции состояния « k » работу не совершают, так как по их направлениям в состоянии « i » перемещений нет.

Далее определим возможную работу внутренних сил единичного состояния « k » на перемещениях состояния « i » $A_{ik}^{(i)}$.

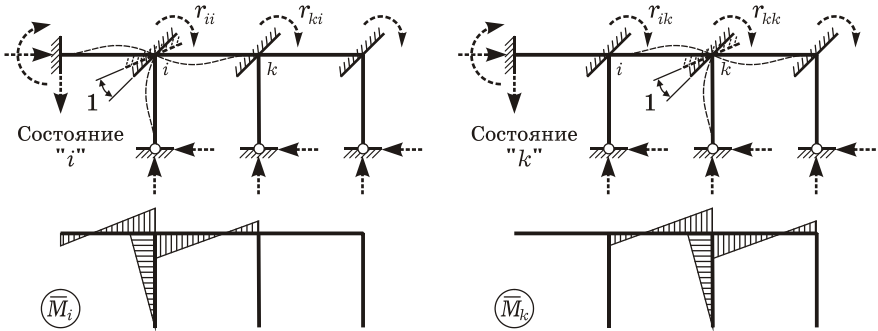


Рисунок 9.13

Если рама рассчитывается без учета продольных деформаций, то можно считать, что эту работу совершают только изгибающие моменты¹⁾ \bar{M}_k на угловых перемещениях $\Delta\theta = \bar{M}_i ds / EJ$. Тогда

$$A_{ki}^{(i)} = - \int_S \frac{\bar{M}_k \bar{M}_i}{EJ} ds,$$

где \bar{M}_k , \bar{M}_i – изгибающие моменты в основной системе в единичных состояниях «k» и «i».

Единичные состояния «i» и «k» – это состояния равновесия. По принципу Лагранжа (2.1) сумма работ внешних и внутренних сил $A_{ki}^{(e)} + A_{ki}^{(i)} = 0$, следовательно,

$$r_{ik} = \int_S \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} ds. \quad (9.6)$$

Таким образом, единичные реакции можно найти перемножением соответствующих единичных эпюр в основной системе.

Из формулы (9.6) следует, что главные коэффициенты r_{ii} всегда положительны, а побочные коэффициенты r_{ik} ($i \neq k$) могут иметь любой знак; в частности, они могут оказаться нулевыми.

Грузовые реакции. На первый взгляд, по аналогии с (9.6) грузовую реакцию R_{ip} можно вычислить перемножением эпюр \bar{M}_i и \bar{M}_p в основной системе. Но эта аналогия оказывается ложной, так как результат перемножения этих эпюр равен нулю.

Рассмотрим основную систему метода перемещений в двух состояниях: единичном «i» и грузовом «p» (рисунок 9.14).

¹⁾ При расчете балок и рам, у которых $l/h > 8$ (l – длина элемента, h – высота поперечного сечения), поперечными силами, как правило, пренебрегают. Если $5 \leq l/h \leq 8$, то необходимо учесть и поперечные силы.

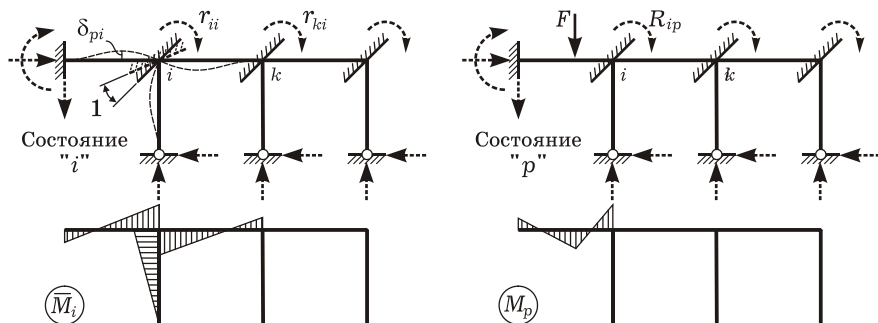


Рисунок 9.14

Работа внешних сил (реакций связей) состояния « i » на перемещениях грузового состояния $A_{ip}^{(e)} = 0$, так как по направлениям этих сил из-за наличия связей перемещения отсутствуют.

Работа внутренних сил $A_{ip}^{(i)}$ может быть найдена как работа изгибающих моментов \bar{M}_i состояния « i » на угловых перемещениях $\Delta\theta = M_p ds / EJ$ состояния « p »:

$$A_{ip}^{(i)} = - \int_S \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} ds,$$

где M_p – моменты в основной системе в состоянии « p ».

По принципу Лагранжа $A_{ip}^{(e)} = -A_{ip}^{(i)}$, следовательно,

$$\int_S \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} ds = 0; \quad R_{ip} \neq \int_S \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} ds.$$

Таким образом, грузовые реакции *не могут* быть найдены перемножением единичных и грузовой эпюр в основной системе, так как эти произведения заведомо равны нулю.

Определим теперь работу внешних сил грузового состояния на перемещениях состояния « i »:

$$A_{pi}^{(e)} = R_{ip} \cdot 1 + F \cdot \delta_{pi},$$

где δ_{pi} – перемещение в направлении внешней силы F , вызванное единичным смещением связи i .

По теореме Бетти о взаимности работ $A_{pi}^{(e)} = A_{ip}^{(e)} = 0$, откуда

$$R_{ip} = -F \cdot \delta_{pi}. \quad (9.7)$$

Равенство (9.7) было установлено А. А. Гвоздевым и часто называется *теоремой Гвоздева*. Она формулируется так: грузовая реакция в i -й связи основной системы равна взятой с обратным

знаком работе нагрузки на перемещениях, вызванных единичным смещением этой связи. Заметим, что вторая теорема Рэлея (см. п. 6.9.5) – частный случай теоремы Гвоздева.

Для определения перемещения δ_{pi} по методу Мора необходимо сформировать единичное состояние системы: по направлению искомого перемещения приложить единичную силу. Это можно сделать в любой системе, не содержащей i -й дополнительной связи. Удобнее всего взять статически определимую систему, образованную из заданной отбрасыванием лишних связей (рисунок 9.15, а). Эпюру изгибающих моментов, построенную в ней от единичной силы $\bar{P} = 1$, назовем \bar{M}_p^0 .

Умножив эпюру \bar{M}_p^0 на эпюру \bar{M}_i , получим:

$$\delta_{pi} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_p^0}{EJ} ds.$$

Подставив значение δ_{pi} в выражение (9.7), найдем

$$R_{ip} = -F \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_p^0}{EJ} ds. \quad (9.8)$$

Внеся в (9.8) множитель F под знак интеграла и заменив произведение $F\bar{M}_p^0 = M_p^0$, получим

$$R_{ip} = - \int_s \frac{\bar{M}_i M_p^0}{EJ} ds, \quad (9.9)$$

где M_p^0 – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки (рисунок 9.15, б), построенная в любой системе, не содержащей i -й дополнительной связи (как правило, в статически определимой, образованной из заданной отбрасыванием лишних связей).

Замечание. Если рама рассчитывается с учетом продольных деформаций, то

$$r_{ik} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} ds + \int_s \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k}{EA} ds; \quad R_{ip} = - \int_s \frac{\bar{M}_i M_p^0}{EJ} ds - \int_s \frac{\bar{N}_i N_p^0}{EA} ds, \quad (9.10)$$

где \bar{M}_i , \bar{M}_k , \bar{N}_i , \bar{N}_k – изгибающие моменты и продольные силы в основной системе в единичных состояниях « i » и « k »; M_p^0 , N_p^0 – изгибающие моменты и продольные силы от внешней нагрузки в любой системе, не содержащей i -й дополнительной связи (обычно в статически определимой, образованной из заданной отбрасыванием лишних связей).

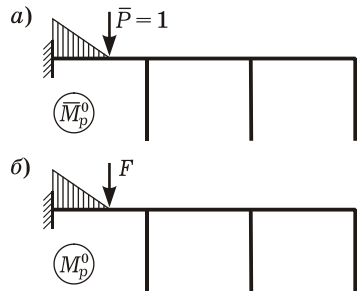


Рисунок 9.15

9.4.3 Проверка правильности вычисления реакций. Формулы (9.6), (9.9) позволяют выполнить проверку правильности вычисления единичных и грузовых реакций.

Предварительно необходимо построить суммарную единичную эпюру \overline{M}_Σ , сложив все единичные эпюры в основной системе:

$$\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_k + \dots + \overline{M}_n = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k. \quad (9.11)$$

Универсальная проверка. Результат умножения суммарной единичной эпюры (9.11) самой на себя должен быть равен алгебраической сумме всех единичных реакций. Докажем это:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\overline{M}_\Sigma^2}{EJ} ds &= \int_S \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n)^2}{EJ} ds = \int_S \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} ds + \int_S \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} ds + \dots + \\ &+ \int_S \frac{\overline{M}_n^2}{EJ} ds + \int_S \frac{2\overline{M}_1\overline{M}_2}{EJ} ds + \dots + \int_S \frac{2\overline{M}_{n-1}\overline{M}_n}{EJ} ds = \\ &= r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn} + 2r_{12} + \dots + 2r_{(n-1)n} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ki}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Построчная проверка. Если универсальная проверка не сходится, то для выявления ошибки может делаться построчная проверка. Переменная суммарная единичная эпюра \overline{M}_Σ на единичную эпюру \overline{M}_k , проверяют правильность вычисления коэффициентов k -го канонического уравнения:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\overline{M}_\Sigma \overline{M}_k}{EJ} ds &= \int_S \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \overline{M}_k}{EJ} ds = \int_S \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_k}{EJ} ds + \int_S \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_k}{EJ} ds + \\ &+ \dots + \int_S \frac{\overline{M}_n \overline{M}_k}{EJ} ds = r_{k1} + r_{k2} + \dots + r_{kn} = \sum_{i=1}^n r_{ki}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Постолбцовая проверка. Правильность определения свободных членов канонических уравнений – грузовых реакций – проверяют, умножая эпюру \overline{M}_Σ на эпюру M_p^0 от внешней нагрузки, построенную в статически определимой системе:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\overline{M}_\Sigma M_p^0}{EJ} ds &= \int_S \frac{(\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) M_p^0}{EJ} ds = \int_S \frac{\overline{M}_1 M_p^0}{EJ} ds + \int_S \frac{\overline{M}_2 M_p^0}{EJ} ds + \\ &+ \dots + \int_S \frac{\overline{M}_n M_p^0}{EJ} ds = -R_{1p} - R_{2p} - \dots - R_{np} = -\sum_{k=1}^n R_{kp}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Для систем, предполагающих учет продольных деформаций, формулы универсальной и постолбцовой проверки имеют вид

$$\int_S \frac{\overline{M}_\Sigma^2}{EJ} ds + \int_S \frac{\overline{N}_\Sigma^2}{EA} ds = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n r_{ki} ; \quad \int_S \frac{\overline{M}_\Sigma M_p^0}{EJ} ds + \int_S \frac{\overline{N}_\Sigma N_p^0}{EA} ds = - \sum_{k=1}^n R_{kp} , \quad (9.15)$$

где \overline{N}_Σ – суммарная единичная эпюра продольных сил в основной системе (алгебраическая сумма соответствующих единичных эпюр),

$$\overline{N}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \overline{N}_k ,$$

N_p^0 – эпюра продольных сил от внешней нагрузки, построенная в статически определимой системе.

Заметим, что проверки (9.12)–(9.15) служат лишь подтверждением правильности произведенных вычислений, но никак не удостоверяют правильность построения единичных и грузовых эпюр в основной системе.

9.5 Определение внутренних усилий и их проверка.

Алгоритм расчета рам методом перемещений

9.5.1 Определение изгибающих моментов. Нам уже приходилось находить изгибающие моменты в основной системе, которая эквивалентна заданной, от отдельных частных воздействий – единичных перемещений дополнительных связей и заданной нагрузки. Поэтому достаточно на основании принципа суперпозиции «собрать» результаты отдельных частных расчетов.

Таким образом, значения изгибающих моментов в заданной системе получаются по зависимости

$$M = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k X_k + M_p ; \quad (9.16)$$

где \overline{M}_k, M_p – моменты в основной системе от единичного перемещения k -й дополнительной связи и от внешней нагрузки.

Если система рассчитывалась с учетом продольных деформаций, то формула, аналогичная (9.16), может быть применена и для определения продольных сил N .

Изгибающие моменты в заданной системе, вычисленные по формуле (9.16), часто называют *окончательными*. В отличие от них моменты, найденные ранее в основной системе, считаются промежуточными или вспомогательными. Единичные эпюры, умноженные на соответствующие значения Z_1, Z_2, \dots, Z_n , иногда называют «исправленными» эпюрами.

9.5.2 Определение поперечных и продольных сил. При расчете рам и балок поперечные силы Q вычисляются по значениям изгибающих моментов M , а продольные силы N – по значениям поперечных сил. Методика расчета была изложена в п. 7.5.2.

9.5.3 Проверки правильности определения внутренних усилий. В методе сил проверкой правильности определения внутренних сил было соблюдение условий совместности деформаций в заданной системе (*деформационная*, или *кинематическая*, *проверка*). В методе перемещений, напротив, эти условия автоматически выполняются при любых перемещениях узлов Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Критерием правильности решения задачи является, очевидно, то, что внутренние усилия, вычисленные по данным перемещениям, удовлетворяют и всем условиям равновесия системы (*статическая проверка*).

Фактически надо убедиться, что в условно введенных связях основной системы полные реакции равны нулю, т. е.

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad \dots; \quad R_n = 0.$$

Для этого надо вырезать узлы и части конструкции и проверить, находятся ли они в равновесии под действием только внутренних усилий, приложенных в местах разрезов.

Такая проверка является надежной, так как в основной системе единичные и грузовая эпюры удовлетворяют условиям равновесия только совместно с реакциями связей. Заметим, что в методе сил условия равновесия выполняются для каждой единичной и грузовой эпюр и поэтому не обеспечивают проверку правильности решения.

Проверка эпюры изгибающих моментов вычислением реакций связей. В п. 9.4.2 была получена формула (9.8) для определения реакции i -й дополнительной связи, предполагающая перемножение эпюр \bar{M}_i и M_p^0 . Здесь под M_p^0 понимается эпюра от нагрузки в *любой* системе, не содержащей i -й дополнительной связи. То есть можно взять *заданную* статически неопределимую систему, в которой построена эпюра M от нагрузки. Тогда

$$R_{ip} = - \int_S \frac{\bar{M}_i M}{EJ} ds.$$

Суммируя все грузовые реакции, получим

$$\sum_{i=1}^n R_{ip} = - \sum_{i=1}^n \int_S \frac{M \bar{M}_i}{EJ} ds = - \int_S \frac{M \sum_{i=1}^n \bar{M}_i}{EJ} ds = - \int_S \frac{M \bar{M}_\Sigma}{EJ} ds$$

или

$$\int_S \frac{M \bar{M}_\Sigma}{EJ} ds = - \sum_{i=1}^n R_{ip}. \quad (9.17)$$

Условие (9.17) является необходимым и при верно построенных исходных единичных и грузовой эпюрах достаточным условием правильности эпюры M .

Заметим, что при расчете систем с учетом продольных деформаций в левую часть соотношения (9.17) необходимо добавить интеграл от произведения продольных сил N и \bar{N}_Σ , т. е. данная проверка позволит выяснить правильность двух эпюр – M и N .

9.5.4 Порядок расчета рам методом перемещений. Расчет статически неопределимых рам, а также балок, работающих на изгиб, удобно вести в следующем порядке:

- 1) вычисление степени кинематической неопределимости n_k ;
- 2) формирование основной системы;
- 3) составление системы канонических уравнений;
- 4) построение единичных и грузовой эпюр в основной системе;
- 5) вычисление единичных и грузовых реакций и их проверка;
- 6) решение системы канонических уравнений;
- 7) построение эпюры изгибающих моментов M и ее проверки;
- 8) построение эпюры поперечных сил Q (по готовой эпюре M);
- 9) построение эпюры продольных сил N (по готовой эпюре Q);
- 10) статическая проверка равновесия рамы в целом.

Для простых рам и балок некоторые проверки расчета допускаются не делать.

9.6 Примеры расчета рам методом перемещений

Пример 9.4 Для рамы, показанной на рисунке 9.16, а, требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Степень кинематической неопределимости. Рама имеет один жесткий узел, поэтому количество независимых угловых перемещений $n_y = 1$. Этот узел не имеет возможности смещаться ни по горизонтали, ни по вертикали, поэтому $n_x = 0$. Это видно и по шарнирной схеме (рисунк 9.16, б). По формуле (9.1) степень кинематической неопределимости $n_k = n_y + n_x = 1 + 0 = 1$.

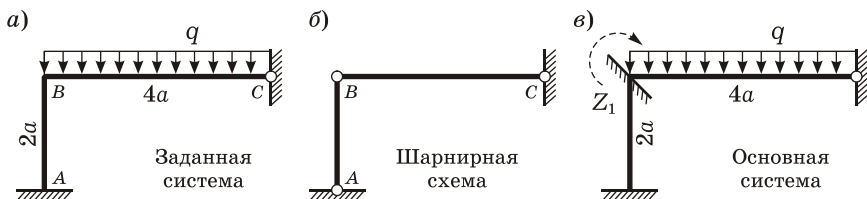


Рисунок 9.16

Основная система. Вводим плавающую заделку в жесткий узел и задаем угловое перемещение Z_1 (рисунок 9.16, в).

Каноническое уравнение. Так как $n_k = 1$, составляем одно уравнение

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0,$$

где r_{11}, R_{1p} – единичная и грузовая реакции введенной связи.

Единичная и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояние «1» основной системы, задавая поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_1 (рисунок 9.17, а). Пользуясь таблицей, строим единичную эпюру \bar{M}_1 .

Далее формируем состояние «р» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку. Строим грузовую эпюру M_p (рисунок 9.17, б).

Вычисление единичной и грузовой реакций. Вырезаем жесткий узел и рассматриваем его равновесие в двух состояниях – единичном и грузовом (рисунок 9.18). Составляя уравнение моментов, находим реакции:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{2a} + \frac{3EJ}{4a} = 2,75 \frac{EJ}{a}; \quad R_{1p} = -\frac{q(4a)^2}{8} = -2qa^2.$$

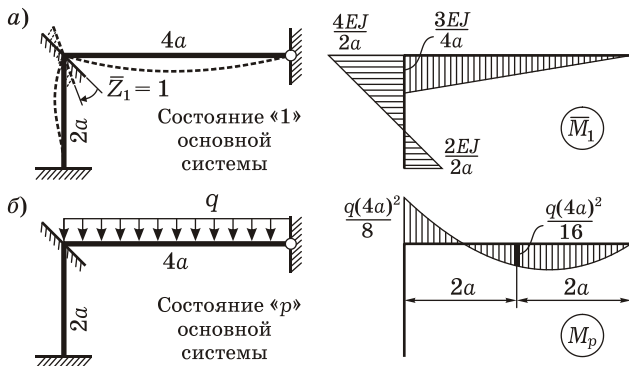


Рисунок 9.17

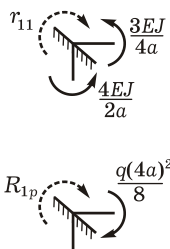


Рисунок 9.18

Решение канонического уравнения. Из канонического уравнения выражаем неизвестное перемещение:

$$Z_1 = \frac{-R_{1p}}{r_{11}} = \frac{2qa^2 \cdot a}{2,75 EJ} = 0,7273 \frac{qa^3}{EJ}.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M. На основании принципа суперпозиции

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + M_p.$$

Строим эпюру $\bar{M}_1 Z_1$, умножая ординаты \bar{M}_1 на $Z_1 = 0,7273 qa^3 / (EJ)$ (рисунок 9.19), и складываем ее с M_p . Получаем эпюру изгибающих моментов M в заданной системе (рисунок 9.20).

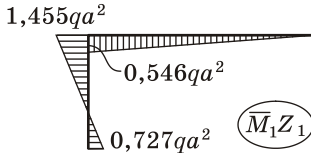


Рисунок 9.19

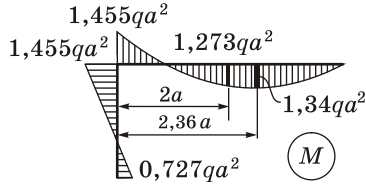


Рисунок 9.20

Проверка эпюры M . Выполняем статическую проверку равновесия узла (рисунок 9.21):

$$\sum M^{\text{узла}} = 1,455qa^2 - 1,455qa^2 = 0.$$

Проверка выполняется.

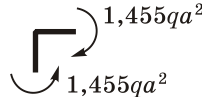


Рисунок 9.21

Построение эпюры Q . Эпюру поперечных сил строим по готовой эпюре M . На участке AB (см. рисунок 9.16, а), используя дифференциальную зависимость Q от M , получаем

$$Q_{AB} = -\frac{1,455qa^2 + 0,727qa^2}{2a} = -1,09qa.$$

Участок BC рассматриваем отдельно, приложив к его сечениям искомые силы Q_B, Q_C и момент $1,455qa^2$, взятый из эпюры M (рисунок 9.22, а). Составив уравнения моментов относительно точек C и B , получаем:

$$Q_B = (q \cdot 4a \cdot 2a + 1,455qa^2) / 4a = 2,36qa;$$

$$Q_C = (-q \cdot 4a \cdot 2a + 1,455qa^2) / 4a = -1,64qa.$$

По полученным данным строим эпюру Q (рисунок 9.23).

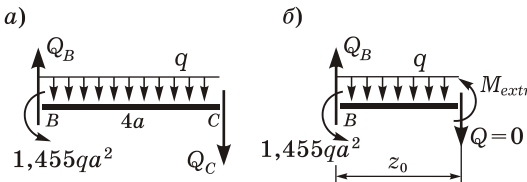


Рисунок 9.22

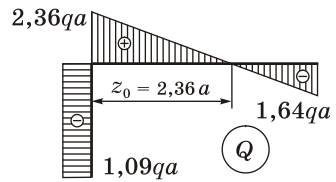


Рисунок 9.23

В сечении, где эпюра Q пересекла ось на участке BC , момент будет иметь экстремальное значение. Определим расстояние z_0 из условия равенства нулю поперечной силы в данном сечении (рисунок 9.22, б):

$$Q = Q_B - qz_0 = 0; \quad z_0 = Q_B / q = 2,36qa / q = 2,36a.$$

Экстремальный момент

$$M_{extr} = Q_B z_0 - q z_0^2 / 2 - 1,455 q a^2 = \\ = 2,36 q a \cdot 2,36 a - q (2,36 a)^2 / 2 - 1,455 q a^2 = 1,34 q a^2.$$

Отмечаем это значение на эпюре M (см. рисунок 9.20).

Построение эпюры N . Вырезаем жесткий узел (рисунок 9.24), прикладываем к его сечениям поперечные силы Q с учетом знака (положительная сила совершает вращение по часовой стрелке), а также искомые продольные силы N (от сечения в сторону отброшенной части). Из условий равновесия

$$N_{AB} = -2,36 q a; \quad N_{BC} = -1,09 q a.$$

Строим эпюру N (рисунок 9.25).

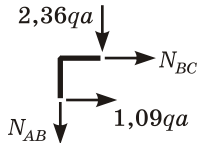


Рисунок 9.24

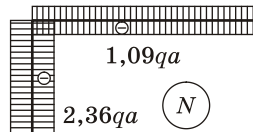


Рисунок 9.25

Проверка равновесия рамы. Отсекаем раму от опор и в полученных сечениях прикладываем моменты и силы, взятые из эпюр M , Q , N (рисунок 9.26). Составляем уравнения равновесия:

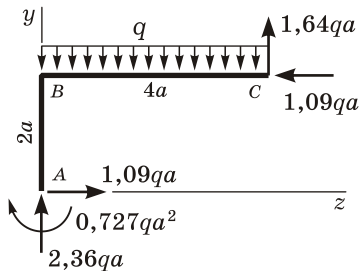


Рисунок 9.26

$$\sum Y = 1,64 q a + 2,36 q a - q \cdot 4 a = 0;$$

$$\sum Z = 1,09 q a - 1,09 q a = 0;$$

$$\sum M_C = q \cdot 4 a \cdot 2 a + 1,09 q a \cdot 2 a - \\ - 2,36 q a \cdot 4 a - 0,727 q a^2 = \\ = 0,01 q a^2 \approx 0.$$

Рама в равновесии, следовательно, расчет выполнен верно.

Пример 9.5 Дана статически неопределимая рама (рисунок 9.27, а), у которой $l_1 = 2$ м; $l_2 = 6$ м; $l_3 = 3$ м; $l_4 = 4$ м; $F = 20$ кН; $q = 18$ кН/м; $k = 0,7$. Требуется построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных сил N ; выполнить необходимые проверки.

Определение количества неизвестных. Деформированный вид рамы изображен на рисунке 9.27, б. Независимыми перемещениями узлов являются угол поворота Z_1 и вертикальное смещение Z_2 . Следовательно, $n_y = 1$, $n_x = 1$.

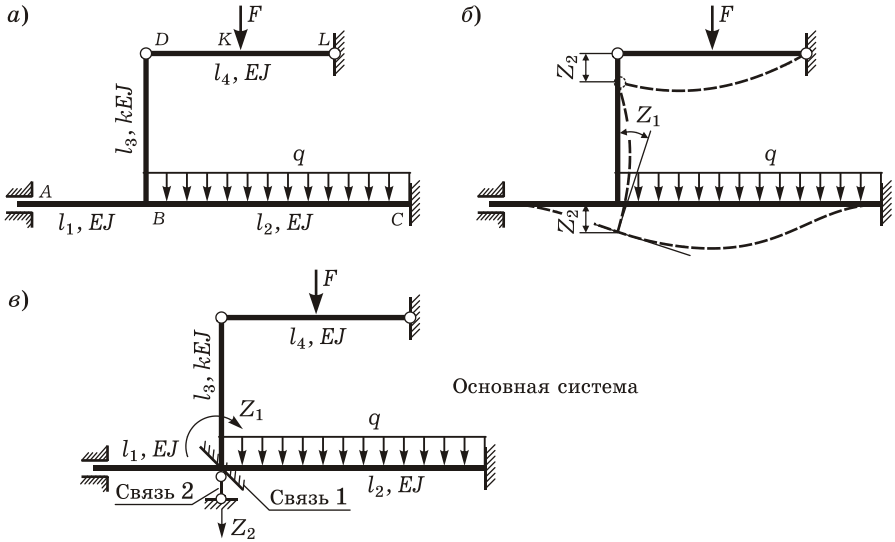


Рисунок 9.27

По формуле (9.1) степень кинематической неопределенности

$$n_k = n_y + n_x = 1 + 1 = 2.$$

Основная система. Вводим в жесткий узел плавающую заделку (связь 1) и придаем ей угловое перемещение Z_1 . Закрепляем узлы вертикальным опорным стержнем (связь 2), которому задаем смещение вниз на величину Z_2 . Получаем основную систему метода перемещений (рисунок 9.27, в).

Канонические уравнения. Так как $n_k = 2$, составляем систему двух канонических уравнений:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0,$$

где r_{ik} ($i, k = 1, 2$) – реакция в i -й введенной связи от единичного перемещения k -й связи; R_{ip} – реакция i -й связи от внешней нагрузки.

Отметим, что r_{11} , r_{12} , R_{1p} представляют собой моментные реакции связи 1; r_{21} , r_{22} , R_{2p} – вертикальные силовые реакции связи 2. При этом r_{ii} являются главными единичными реакциями, r_{ik} ($i \neq k$) – побочными; $r_{ik} = r_{ki}$.

Единичные и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояния «1» и «2» основной системы, задавая поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_1 (рисунок 9.28, а) и перемещение опорного стержня в направлении Z_2 (вертикально вниз) на единицу (ри-

сунок 9.28, б). По таблице строим единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Сразу же выписываем значения опорных реакций в несмещающихся заделках.

Далее формируем состояние «р» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку. Пользуясь таблицами приложения Б, для отдельно взятых элементов – «балок» – строим эпюры изгибающих моментов. Изобразив их на общей базе, получаем грузовую эпюру M_p (рисунк 9.28, в).

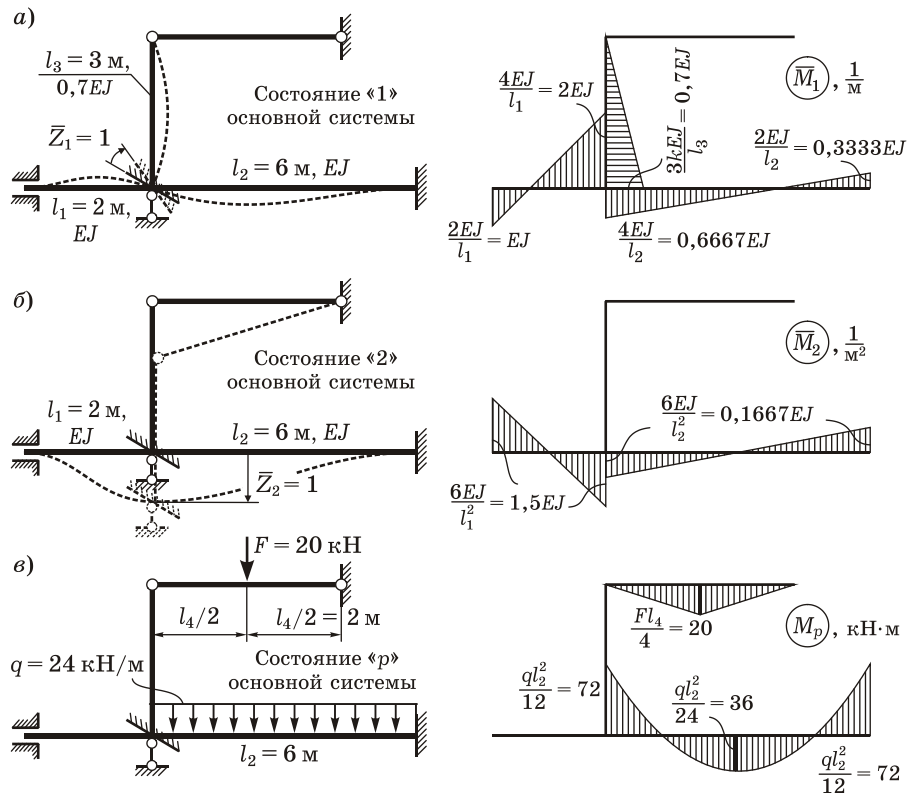


Рисунок 9.28

Вычисление единичных и грузовых реакций. Реакции введенных дополнительных связей делятся на два типа: моменты r_{11} , r_{12} , R_{1p} , возникающие в плавающей заделке, и силы r_{21} , r_{22} , R_{2p} – в опорном стержне.

Находим моментные реакции в плавающей заделке. Для этого вырезаем жесткий узел с данной связью в состояниях «1», «2» и «р» (рисунок 9.29) и составляем уравнение равновесия $\sum M^{\text{узла}} = 0$ в каждом из состояний. В результате получаем, что

$$r_{11} = 2EJ + 0,7EJ + 0,6667EJ = 3,3667EJ \text{ (1/м)};$$

$$r_{12} = 0,1667EJ - 1,5EJ = -1,3333EJ \text{ (1/м}^2\text{)}; \quad R_{1p} = -72 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

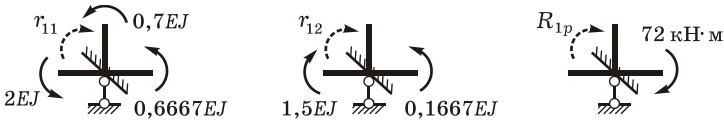


Рисунок 9.29

Определяем силовые реакции в опорном стержне. Для этого отсекаем раму от опор в состояниях «1», «2» и «p» (рисунок 9.30) и прикладываем реакии, взятые из таблиц приложения Б. Составляем уравнение проекций на вертикальную ось $\sum Y = 0$ в каждом из состояний. Находим, что

$$r_{21} = 0,1667EJ - 1,5EJ = -1,3333EJ \text{ (1/м}^2\text{)};$$

$$r_{22} = 1,5EJ + 0,0556EJ = 1,5556EJ \text{ (1/м}^3\text{)};$$

$$R_{2p} = 72 + 10 - 20 - 24 \cdot 6 = -82 \text{ (кН)}.$$

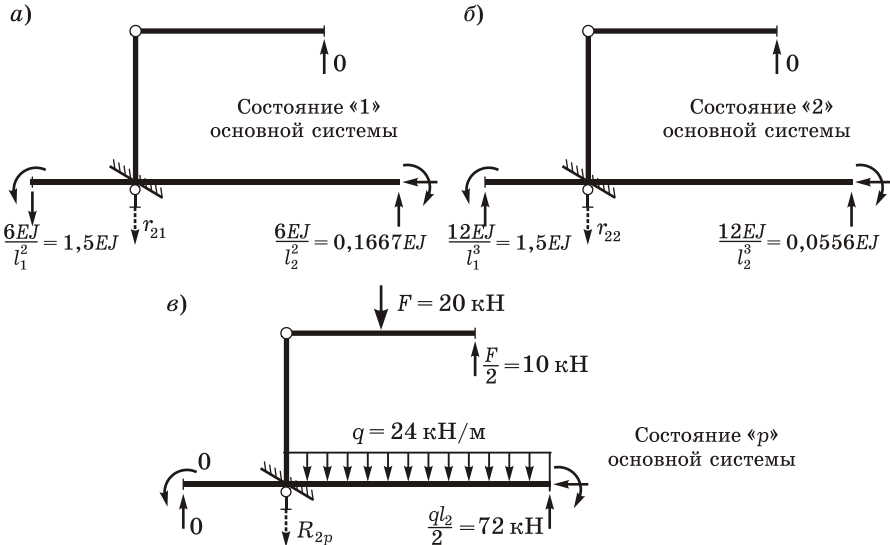


Рисунок 9.30

Проанализировав полученные значения, убеждаемся, что главные единичные реакции r_{11} и r_{22} положительны, а для побочных выполняется условие взаимности $r_{12} = r_{21}$.

Решение системы канонических уравнений. Подставим найденные значения реакций в систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} 3,3667EJ \cdot Z_1 - 1,3333EJ \cdot Z_2 - 72 &= 0; \\ -1,3333EJ \cdot Z_1 + 1,5556EJ \cdot Z_2 - 82 &= 0. \end{aligned}$$

Решив систему, найдем перемещения

$$Z_1 = 63,983/EJ \text{ (кН} \cdot \text{м}^2\text{)}; \quad Z_2 = 107,557/EJ \text{ (кН} \cdot \text{м}^3\text{)}.$$

Заметим, что Z_1 является углом поворота жесткого узла, Z_2 – вертикальным смещением узлов.

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов. Ординаты эпюры M в заданной системе находим по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p.$$

Для этого умножаем ординаты единичных эпюр \bar{M}_1, \bar{M}_2 на найденные значения перемещений Z_1, Z_2 (рисунок 9.31, а, б), складываем их и добавляем ординаты грузовой эпюры M_p (рисунок 9.31, в). Получаем окончательную эпюру изгибающих моментов M (рисунок 9.31, г).

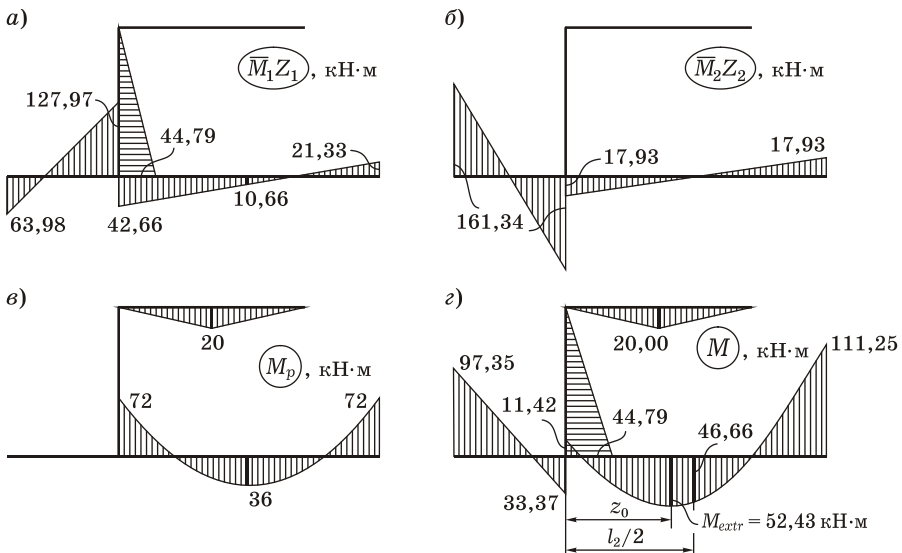


Рисунок 9.31

Статическая проверка эпюры M . Вырезаем жесткий Т-образный узел рамы (рисунок 9.32) и рассматриваем его равновесие, составляя уравнение моментов:

$$\sum M = 44,79 - 33,37 - 11,42 = 0.$$

Проверка выполняется.

Проверка эпюры M вычислением реакций связей. Перемножив эпюру M и суммарную единичную эпюру в основной системе согласно (9.17), мы должны получить сумму грузовых реакций с обратным знаком:

$$\int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds = -R_{1p} - R_{2p}.$$

Это является необходимым и достаточным условием правильности эпюры M (при верно построенных единичных и грузовой эпюрах в основной системе).

Сложив \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , получаем суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ (рисунок 9.33).

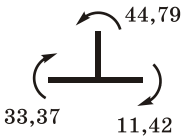


Рисунок 9.32

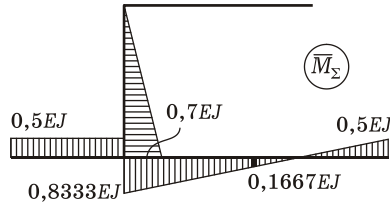


Рисунок 9.33

С одной стороны,

$$\begin{aligned} \int_S \frac{M\bar{M}_\Sigma}{EJ} ds &= \frac{l_1}{6EJ} (2 \cdot 97,35 \cdot 0,5 - 2 \cdot 33,37 \cdot 0,5 + 97,35 \cdot 0,5 - 33,37 \cdot 0,5) EJ + \\ &+ \frac{l_2}{6EJ} (-11,42 \cdot 0,8333 + 11,125 \cdot 0,5 + 4 \cdot 46,66 \cdot 0,1667) EJ + \\ &+ \frac{l_3}{6kJ} \cdot 2 \cdot 44,79 \cdot 0,7 EJ = \frac{2}{6} \cdot 95,76 + \frac{6}{6} \cdot 77,22 + \frac{3}{6 \cdot 0,7} \cdot 62,70 = 154, \end{aligned}$$

с другой –

$$-R_{1p} - R_{2p} = 72 + 82 = 154.$$

Результаты совпали, следовательно, эпюра изгибающих моментов построена верно.

Построение эпюры поперечных сил Q . Эпюру поперечных сил построим по готовой эпюре изгибающих моментов M .

Вырежем участок BC (см. рисунок 9.27, *a*), на котором эпюра M ограничена параболой, т. е. действует равномерно распределенная нагрузка. Приложим к сечениям B , C известные моменты и пока неизвестные поперечные силы (рисунок 9.34, *a*). Эпюра M (см. рисунок 9.31, *z*) построена на растянутых волокнах, следовательно, в точках B и C растянуты верхние волокна. Поперечные силы считаем положительными, т. е. они вращают рассматриваемый участок по часовой стрелке.

Из уравнений равновесия

$$\sum M_C = 0; \quad \sum M_B = 0$$

получаем

$$Q_B = \frac{M_B - M_C}{l_2} + q \frac{l_2}{2} = \frac{11,42 - 111,25}{6} + 24 \cdot \frac{6}{2} = 55,36 \text{ кН};$$

$$Q_C = \frac{M_B - M_C}{l_2} - q \frac{l_2}{2} = \frac{11,42 - 111,25}{6} - 24 \cdot \frac{6}{2} = -88,64 \text{ кН}.$$

На участках рамы, где эпюра M прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. Q положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. В соответствии с этим

$$Q_{AB} = \frac{97,35 + 33,37}{l_1} = \frac{130,72}{2} = 65,36 \text{ кН};$$

$$Q_{BD} = -\frac{44,79}{l_3} = -\frac{44,79}{3} = -14,93 \text{ кН};$$

$$Q_{DK} = \frac{20}{l_4/2} = \frac{20}{4/2} = 10 \text{ кН}; \quad Q_{KL} = -\frac{20}{l_4/2} = -\frac{20}{4/2} = -10 \text{ кН}.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру Q (рисунок 9.35).

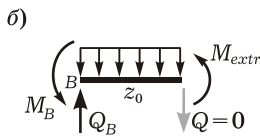
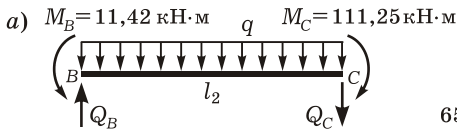


Рисунок 9.34

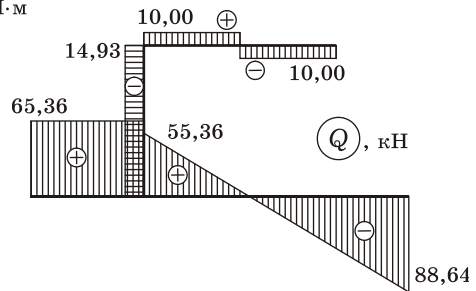


Рисунок 9.35

Определение экстремального момента на участке BC. Проведем сечение на расстоянии z_0 от начала участка (рисунок 9.34, б). Поперечная сила в нем равна нулю, а изгибающий момент экстремален. Составим уравнение проекций на вертикальную ось: $Q_B - qz_0 = 0$, из которого

$$z_0 = Q_B / q = 55,36 / 24 = 2,307 \text{ м}.$$

Экстремальный изгибающий момент

$$M_{extr} = -M_B + qz_0^2 / 2 = -11,42 + 24 \cdot 2,307^2 / 2 = 52,43 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Отмечаем полученное значение на эпюре M (см. рисунок 9.31, з).

Построение эпюры продольных сил. Эпюру продольных сил N будем строить по готовой эпюре Q . На участке AB сила $N_{AB} = 0$, так как скользящая заделка допускает свободные продольные перемещения, горизонтальная реакция в ней не возникает.

Вырежем узлы рамы. В сечениях приложим поперечные и продольные силы (рисунок 9.36). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке, отрицательные – против часовой стрелки. Все продольные силы N считаем растягивающими.

Из уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси найдем неизвестные продольные силы. Для Г-образного узла

$$N_{BD} = -Q_{DK} = -10 \text{ кН}; \quad N_{DL} = -|Q_{BD}| = -14,93 \text{ кН}.$$

Для Т-образного узла

$$N_{BD} = Q_B - Q_{AB} = 55,36 - 65,36 = -10 \text{ кН}; \quad N_{BC} = |Q_{BD}| = 14,93 \text{ кН}.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержни BD и DL сжаты. По полученным данным строим эпюру N (рисунок 9.37).

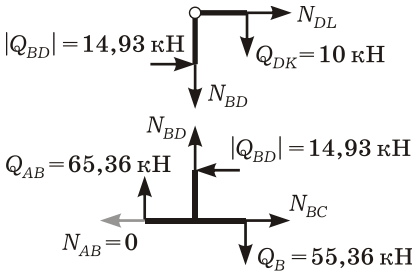


Рисунок 9.36

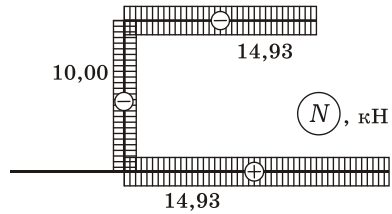


Рисунок 9.37

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор (рисунок 9.38) и приложим в местах сечений внутренние усилия, взятые из эпюр M , Q , N . При этом силы Q и N показываем с их реальными направлениями, т. е. с учетом знака.

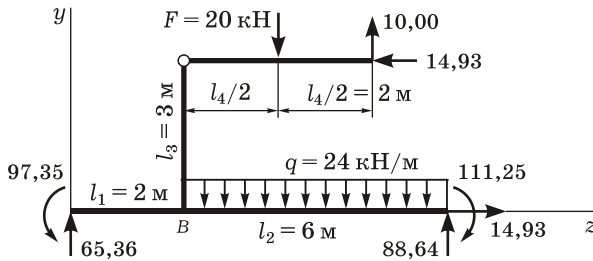


Рисунок 9.38

Сумма проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси

$$\sum Z = 14,93 - 14,93 = 0;$$

$$\sum Y = -F - ql_2 + 65,36 + 88,64 + 10 = -20 - 24 \cdot 6 + 164 = 0.$$

Подсчитаем сумму моментов всех сил относительно точки B (при выборе точки стараемся, чтобы в уравнение вошло как можно больше сил и моментов):

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -F \cdot l_4 / 2 - ql_2^2 / 2 + 10l_4 + 88,64l_2 - 65,36l_1 + 97,35 - 11125 = \\ &= -20 \cdot 4 / 2 - 24 \cdot 6^2 / 2 + 10 \cdot 4 + 88,64 \cdot 2 - 65,36 \cdot 6 + 97,35 - 11125 = 0. \end{aligned}$$

Рама находится в равновесии, следовательно, внутренние усилия найдены верно.

9.7 Особенности расчета рам с наклонными элементами

9.7.1 Особенности построения эпюр моментов от линейных смещений связей. При использовании допущения об абсолютной жесткости стержней на растяжение – сжатие получаем уменьшение числа независимых линейных перемещений узлов системы. Однако определение реакций в линейных связях при наличии наклонных стержней, как правило, несколько усложняется.

На рисунке 9.39, *а* показана рама и обозначены неизвестные перемещения Z_1, Z_2, Z_3 . Основная система для нее изображена на рисунке 9.39, *б*.

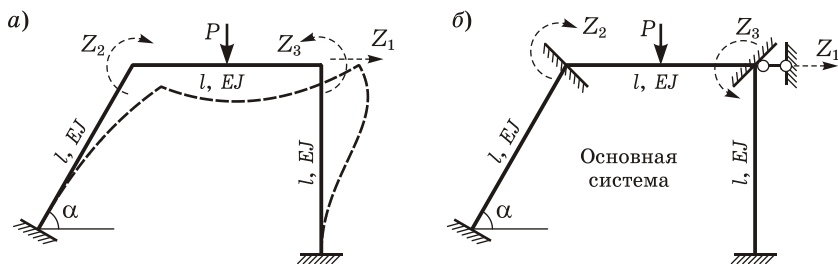


Рисунок 9.39

Очевидно, что линейное смещение сопровождается искажением конфигурации рамы. Искажение соответствующей шарнирной схемы изображено на рисунке 9.40, *а*. Линейные перемещения всех узлов от $\bar{Z}_1 = 1$ найдем с учетом неизменности длин стержней и малости перемещений: при повороте стержня считается, что его точки перемещаются не по окружностям, а по нормальям к первоначальной оси. Тогда смещения узлов рамы (рисунок 9.40, *б*) можно принять такими же, как и в шарнирной схеме.

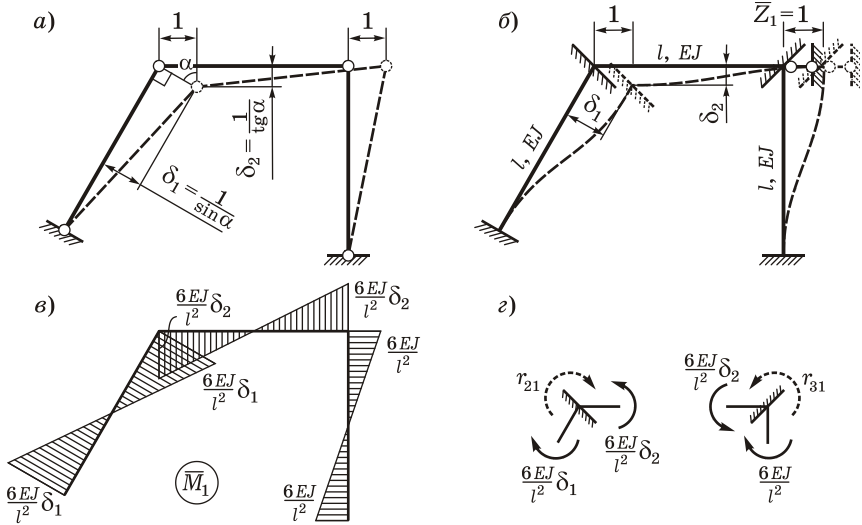


Рисунок 9.40

Соответствующая эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 9.40, в.

9.7.2 Особенности вычисления реакций дополнительных связей. Рассмотрим определение коэффициентов и свободных членов системы уравнений для данной рамы:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} &= 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Реакции, входящие в последние два уравнения (моменты в плавающих заделках), легко найти из условий равновесия узлов по эпюрам M_1 (рисунок 9.40, в), M_2 , M_3 , M_p (рисунок 9.41):

$$\begin{aligned} r_{21} &= \frac{6EJ}{l^2}(\delta_2 - \delta_1); & r_{31} &= \frac{6EJ}{l^2}(1 - \delta_2); & r_{22} &= r_{33} = \frac{8EJ}{l}; \\ r_{23} &= r_{32} = -\frac{2EJ}{l}; & R_{2p} &= R_{3p} = -\frac{Pl}{8}. \end{aligned}$$

Сложности возникают при вычислении реакций, входящих в первое уравнение. По смыслу r_{11} , r_{12} , r_{13} , R_{1p} – силовые реакции в горизонтальном опорном стержне. В П-образной раме такие ре-

акции определялись бы из суммы проекций всех сил на горизонтальную ось. Из-за наклона стержня в это уравнение войдет продольная сила, которую необходимо предварительно определить. Это можно сделать, вырезав узлы и приложив к ним искомые продольные силы и поперечные силы, установленные по эпюре моментов.

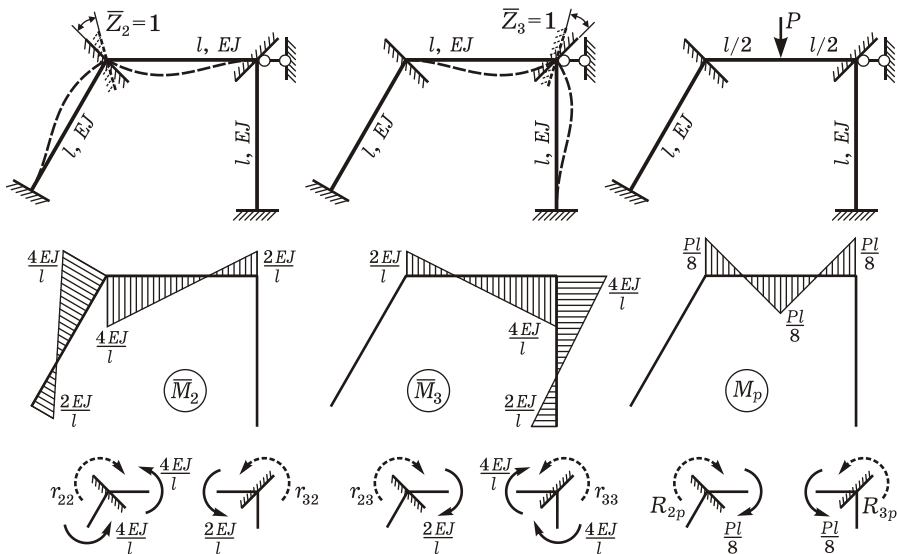


Рисунок 9.41

Как правило, стараются составлять условия равновесия так, чтобы в них не входили продольные силы. Например, реакцию R_{1p} можно найти, приравняв сумму моментов относительно точки K нулю (рисунок 9.42). Учитывая, что в сечениях стоек действуют только продольные силы, которые не дают момента относительно точки K , получим:

$$\sum M_K = 0; \quad R_{1p} l \operatorname{tg} \alpha + P \frac{l}{2} = 0;$$

откуда

$$R_{1p} = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

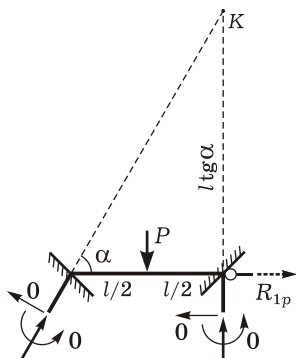


Рисунок 9.42

Тот же результат можно получить перемножением эпюр \bar{M}_1 и M_p^0 (рисунок 9.43) по формуле (9.8)

$$R_{1p} = -\int_s \frac{\bar{M}_1 M_p^0}{EJ} ds = -\frac{l/2}{6EJ} \cdot 2 \frac{6EJ}{l^2} \delta_2 \frac{Pl}{2} = -\frac{P\delta_2}{2} = -\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

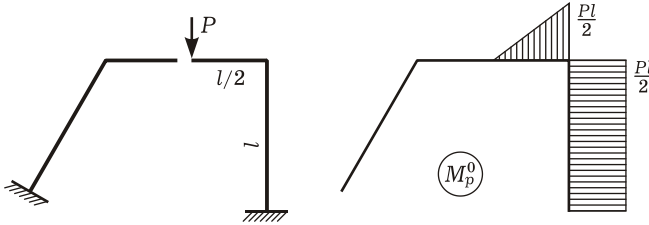


Рисунок 9.43

Единичные реакции r_{11} , r_{12} , r_{13} могут быть найдены путем перемножения соответствующих эпюр по формуле (9.6). Например, для главной реакции r_{11} умножение эпюры \bar{M}_1 (см. рисунок 9.40, в) самой на себя дает следующий результат:

$$r_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{12EJ}{l^3} \left(\frac{l}{\sin^2 \alpha} + \frac{l}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 \right).$$

Для определения побочных реакций можно применить те же способы. Однако проще всего использовать теорему о взаимности единичных реакций (6.34):

$$r_{12} = r_{21} = \frac{6EJ}{l^2} (\delta_2 - \delta_1); \quad r_{13} = r_{31} = \frac{6EJ}{l^2} (1 - \delta_2).$$

Заметим, что единичные реакции r_{11} , r_{12} , r_{13} также могут быть найдены из уравнений равновесия (суммы моментов относительно точки К) в состояниях, возникающих от $\bar{Z}_1 = 1$, $\bar{Z}_2 = 1$ и $\bar{Z}_3 = 1$.

9.8 Расчет рам на изменение температуры

9.8.1 Канонические уравнения метода перемещений при температурном воздействии. Пусть стержневая система испытывает температурное воздействие, заданное в виде приращений температуры крайних волокон ее элементов (по отношению к некоторой начальной температуре). В результате элементы деформируются, в них появляются внутренние усилия.

Общий порядок расчета конструкции при температурном воздействии остается таким же, как и при силовом. Формируется

основная система, составляются канонические уравнения, отличающиеся от уравнений (9.4) лишь свободными членами:

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1t} &= 0; \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2i}Z_i + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2t} &= 0; \\
 &\dots \\
 r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{ki}Z_i + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kt} &= 0; \\
 &\dots \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nt} &= 0,
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

где R_{kt} ($k = 1, \dots, n$) – реакция k -й дополнительной связи основной системы от температурного воздействия.

Чтобы иметь возможность находить «температурные» реакции, необходимо прежде всего рассмотреть отдельный стержень, определенным образом закрепленный на концах.

9.8.2 Температурное воздействие на отдельный стержень. На рисунке 9.44, а показан элемент длиной l постоянного поперечного сечения, имеющий на одном конце заделку, а на другом – шарнирно-подвижную опору.

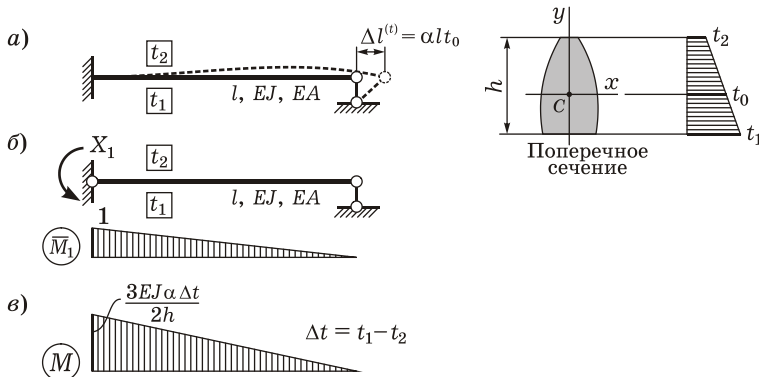


Рисунок 9.44

Пусть нижние волокна нагрелись на t_1 , верхние – на t_2 (причем $t_1 > t_2$). По высоте сечения h температура изменяется линейно (см. п. 6.7.1). Приращение температуры на уровне центра тяжести обозначим t_0 . Коэффициент линейного теплового расширения материала равен α .

Равномерный нагрев стержня. Известно, что при равномерном нагревании на t_0 элемент удлиняется на величину [16]

$$\Delta l = \alpha t_0 l. \quad (9.19)$$

Если на конце стержня имеется шарнирно-неподвижная опора (рисунок 9.45), то его свободное температурное удлинение полностью стеснено. Тогда в правой опоре возникает горизонтальная реакция $H = EA\alpha t_0$, что следует из равенства $\Delta l = Hl/(EA)$ и соотношения (9.19). При этом в элементе не будет нулевой продольная сила $N^{(t)}$.



Рисунок 9.45

Неравномерный нагрев стержня. Определим изгибающие моменты, вызванные изменением температуры крайних волокон элемента. Решение подобных задач по методу сил рассматривалось в подразд. 7.8. Основная система метода сил для данного стержня показана на рисунке 9.44, б. Каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0,$$

где

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} dz = \frac{l}{3EJ}; \quad \Delta_{1t} = - \int_0^l \frac{\overline{M}_1(t_1 - t_2)\alpha}{h} dz = - \frac{l(t_1 - t_2)\alpha}{2h}.$$

Теперь находим $X_1 = 3EJ\alpha\Delta t/(2h)$, где $\Delta t = t_1 - t_2$. Далее определяем изгибающие моменты в стержне: $M = \overline{M}_1 X_1$. При этом растянутыми оказываются более «холодные» волокна, имеющие приращение температуры t_2 (см. рисунок 9.44, б).

Итак, в отдельно взятом стержне с указанными закреплениями от изменения температуры возникают изгибающие моменты, зависящие от разности температур Δt . Кроме этого, изменяется его длина.

Аналогично может быть решена подобная задача для стержня с двумя заделками на концах. Результаты расчета сведены в таблицы (см. приложение Б).

9.8.3 Температурное воздействие на основную систему метода перемещений. Как и для отдельного стержня, для основной системы удобно отдельно исследовать равномерный и неравномерный нагрев ее элементов.

Равномерный нагрев стержней основной системы. За счет изменения длин элементов узлы основной системы получают линейные перемещения. В принципе удлинение каждого из стерж-

ней неизвестно, так как оно вызвано и свободным температурным расширением, и продольной силой $N^{(t)}$, возникающей в стесненных условиях:

$$\Delta l = \alpha t_0 l + \frac{N^{(t)} l}{EA}. \quad (9.20)$$

Однако если шарнирная схема рамы статически определима или геометрически изменяема, то второе слагаемое в формуле (9.20) оказывается значительно меньше первого. Физически это означает, что удлинения стержней от сил $N^{(t)}$ пренебрежимо малы по сравнению со свободным температурным удлинением $\alpha t_0 l$, т. е. стержневые конструкции таких типов не способны существенно стеснить свободное расширение стержней. Примем, как и

ранее, $EA = \infty$, и удлинения стержней основной системы будем определять по формуле (9.19).

Если шарнирная схема конструкции статически неопределима (рисунок 9.46), то возникающими продольными силами $N^{(t)}$ пренебрегать нельзя.

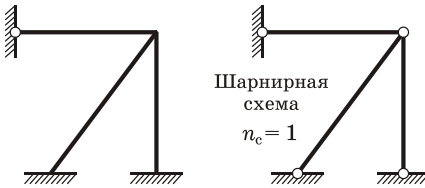


Рисунок 9.46

Удлинения элементов вызывают смещение узлов основной системы и искривление элементов. Для определения изгибающих моментов M_{t_0} , возникающих при этом, используют графу 2 таблиц Б.2 и Б.3 приложения Б для единичных линейных перемещений, домножив табличные данные на значения поперечных смещений концов стержней.

Неравномерный нагрев стержней основной системы. Для второй части температурного воздействия – неравномерного нагрева, характеризуемого разностью Δt , удлинения стержней отсутствуют. Эпюра изгибающих моментов $M_{\Delta t}$ строится гораздо проще, с использованием графы 12 таблицы Б.2 и графы 10 таблицы Б.3 приложения Б. Ординаты этой эпюры откладываются со стороны более «холодных» волокон, так как они растянуты.

9.8.4 Определение «температурных» реакций. По принципу суперпозиции «температурная» реакция k -й связи определяется как сумма двух величин:

$$R_{kt} = R_{kt_0} + R_{k\Delta t},$$

где R_{kt_0} , $R_{k\Delta t}$ – реакция k -й дополнительной связи основной системы соответственно от равномерного и неравномерного нагрева ее элементов.

Моментные реакции удобно определять из равновесия вырезанных узлов в двух эпюрах M_{t_0} и $M_{\Delta t}$. Силовые реакции при параллельных стойках находятся из равновесия отсеченной части рамы в состояниях « t_0 » и « Δt ». В более сложных случаях они могут быть найдены перемножением эпюр:

$$R_{kt_0} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_{t_0}}{EJ} ds; \quad R_{k\Delta t} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_{\Delta t}}{EJ} ds. \quad (9.21)$$

Докажем первую из формул (9.21). Найдем возможную работу внешних сил состояния « t_0 » (равномерный нагрев стержней основной системы) на перемещениях единичного состояния « k » (перемещение k -й связи на 1) (рисунок 9.47):

$$A_{t_0k}^{(e)} = R_{kt_0} \cdot 1.$$

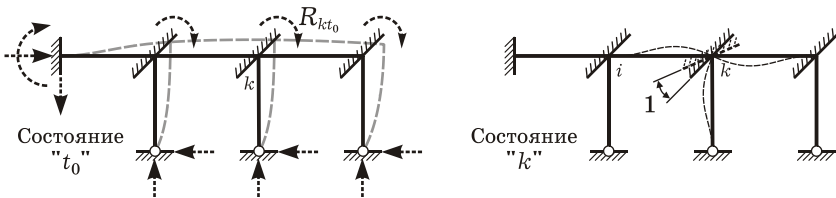


Рисунок 9.47

По теореме Бетти (6.31) работа внешних сил единичного состояния « k » на перемещениях состояния « t_0 »

$$A_{t_0k}^{(e)} = A_{k_0t}^{(e)} = R_{kt_0}.$$

Работа внутренних сил $A_{k_0t}^{(i)}$ может быть найдена как работа изгибающих моментов \overline{M}_k состояния « k » на угловых перемещениях состояния « t_0 »:

$$A_{k_0t}^{(i)} = - \int_S \frac{\overline{M}_k M_{t_0}}{EJ} ds.$$

По принципу Лагранжа $A_{k_0t}^{(e)} = -A_{k_0t}^{(i)}$, следовательно,

$$R_{kt_0} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_{t_0}}{EJ} ds.$$

Аналогично доказывается вторая из формул (9.21).

9.8.5 Определение внутренних усилий от изменения температуры и их проверка. Изгибающие моменты находятся по принципу суперпозиции аналогично моментам от силового воздействия:

$$M^{(t)} = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k Z_k + M_{t_0} + M_{\Delta t}. \quad (9.22)$$

Для полученной по формуле (9.22) эпюры изгибающих моментов могут быть выполнены статическая и деформационная проверки (см. п. 9.5.3). Наряду с ними возможна проверка перемножением этой эпюры и суммарной единичной эпюры метода перемещений:

$$\int_S \frac{M^{(t)} \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = 0. \quad (9.23)$$

Заметим, что результат перемножения эпюр $M^{(t)}$ и \overline{M}_Σ по формуле (9.23) должен получиться нулевым. Аналогичная же проверка моментов от силового воздействия (9.17) предполагает получение суммы грузовых реакций.

Поперечные силы Q вычисляются по значениям изгибающих моментов M , а продольные силы N – по значениям поперечных сил. Подробная методика расчета была изложена в п. 7.5.2. Для проверки правильности определения Q и N составляются уравнения статического равновесия конструкции в целом или отдельных ее частей.

Пример 9.6 Дана статически неопределимая рама (рисунок 9.48, а), которая испытывает тепловое воздействие: внутри температура повысилась на 20°C , сверху – на 10°C , справа осталась неизменной. При этом $a = 1$ м; $EJ = 10^5$ кН·м²; $k = 0,7$; $\alpha = 10^{-5}$ 1/(°C). Поперечное сечение элементов – прямоугольник с высотой $h = 0,1a = 0,1$ м. Требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил; выполнить необходимые проверки.



Рисунок 9.48

Определение количества неизвестных. Рама имеет один жесткий узел, угол поворота которого неизвестен, поэтому $n_y = 1$. Количество линейных смещений определим по формуле (9.3) как число степеней свободы шарнирной схемы (рисунок 9.48, б): $n_{\text{л}} = W^{\text{шарн}} = (III - 3K)^{\text{шарн}} = 3 - 3 \cdot 1 = 0$ (здесь количество шарниров $III = 3$, замкнутых контуров $K = 1$). По формуле (9.1) $n_{\text{к}} = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 0 = 1$.

Обратимся еще раз к рисунку 9.48, а. Тепловое воздействие, кроме искривления элементов, вызывает их удлинение, и как результат – смещение жесткого узла по вертикали и горизонтали. Почему же мы не считаем $n_{\text{д}} = 2$? Дело в том, что свободному температурному расширению элементов ничто не препятствует (шарнирная схема рамы статически определима), линейные перемещения узла происходят за счет удлинений стержней, которые можно определить по формуле (9.19). То есть вертикальное и горизонтальное перемещения *не являются неизвестными* метода перемещений.

Основная система. Вводим в жесткий узел плавающую заделку и придаем ей угловое перемещение Z_1 . Получаем основную систему метода перемещений (рисунок 9.48, в).

Каноническое уравнение. Так как $n_{\text{к}} = 1$, составляем одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 + R_{1t} = 0.$$

Здесь r_{11} – реакция введенной дополнительной связи (плавающей заделки) от единичного перемещения этой связи; R_{1t} – реакция введенной связи от изменения температуры, которую удобно искать как сумму двух составляющих:

$$R_{1t} = R_{1t_0} + R_{1\Delta t},$$

где R_{1t_0} , $R_{1\Delta t}$ – реакция введенной связи соответственно от равномерного и неравномерного нагрева элементов основной системы.

Единичное состояние основной системы. Задаем поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_1 (рисунок 9.49, а) и по таблице строим единичную эпюру M_1 (рисунок 9.49, б).

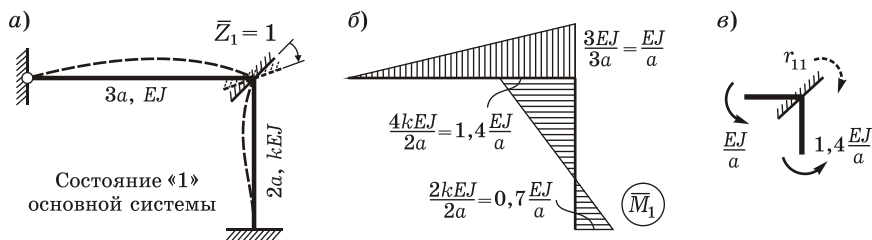


Рисунок 9.49

Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии «1» (рисунок 9.49, в). Из условия равновесия узла находим

$$r_{11} = \frac{EJ}{a} + 1,4 \frac{EJ}{a} = 2,4 \frac{EJ}{a}.$$

Определение приращений температуры t_0 и Δt . Так как сечение элементов рамы симметрично, приращение температуры на уровне центра

тяжести определяем по формуле $t_0 = (t_1 + t_2) / 2$. Разность приращений $\Delta t = t_1 - t_2$, причем $t_1 > t_2$.

Элемент AB :

$$t_1^{AB} = 20 \text{ }^\circ\text{C}; t_2^{AB} = 10 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_0^{AB} = (20 + 10) / 2 = 15 \text{ }^\circ\text{C}; \Delta t^{AB} = 20 - 10 = 10 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Элемент BC :

$$t_1^{BC} = 20 \text{ }^\circ\text{C}; t_2^{BC} = 0 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_0^{BC} = (20 + 0) / 2 = 10 \text{ }^\circ\text{C}; \Delta t^{BC} = 20 - 0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Равномерный нагрев стержней основной системы. При равномерном нагревании на t_0 элементы удлиняются, согласно формуле (9.19), на следующие величины:

$$\Delta l^{AB} = \alpha t_0^{AB} l^{AB} = \alpha \cdot 15 \cdot 3a = 45\alpha a \text{ (}^\circ\text{C)};$$

$$\Delta l^{BC} = \alpha t_0^{BC} l^{BC} = \alpha \cdot 10 \cdot 2a = 20\alpha a \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

За счет удлинения стержней узел основной системы получает линейные перемещения, а элементы изгибаются (рисунок 9.50, а). Строим эпюру моментов M_{t_0} , используя графы 2 таблиц Б.2, Б.3 приложения Б для единичных линейных перемещений, домножая табличные данные на значения поперечных смещений концов стержней (рисунок 9.50, б).

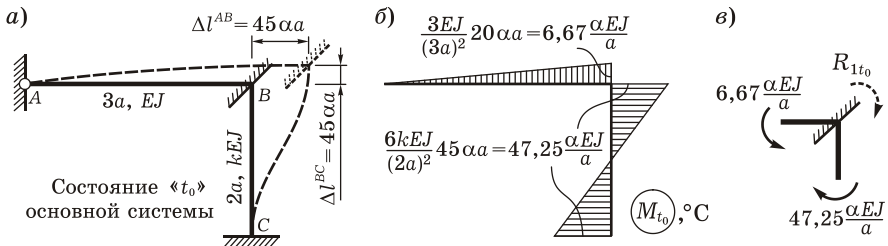


Рисунок 9.50

Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии « t_0 » (рисунок 9.50, в). Из условия равновесия узла находим

$$R_{t_0} = 6,67 \frac{\alpha EJ}{a} - 47,25 \frac{\alpha EJ}{a} = -40,58 \frac{\alpha EJ}{a} \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Неравномерный нагрев стержней основной системы. Для второй части температурного воздействия – неравномерного нагрева, характеризуемого разностью приращений температуры Δt , удлинения стержней отсутствуют (рисунок 9.51, а). Эпюру изгибающих моментов $M_{\Delta t}$ строим с использованием графы 12 таблицы Б.2 и графы 10 таблицы Б.3 (рисунок 9.51, б). Ординаты этой эпюры находятся со стороны более «холодных» волокон, так как они растянуты.

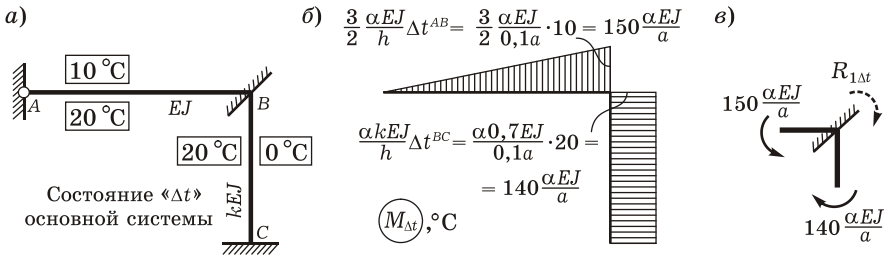


Рисунок 9.51

Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии « Δt » (рисунок 9.51, в). Из условия равновесия узла

$$R_{1\Delta t} = 150 \frac{\alpha EJ}{a} - 140 \frac{\alpha EJ}{a} = 10 \frac{\alpha EJ}{a} \text{ (}^{\circ}\text{C)}.$$

Вычисление температурной реакции. Складывая значения R_{1t_0} и $R_{1\Delta t}$, получаем

$$R_{1t} = R_{1t_0} + R_{1\Delta t} = -40,58 \frac{\alpha EJ}{a} + 10 \frac{\alpha EJ}{a} = -30,58 \frac{\alpha EJ}{a} \text{ (}^{\circ}\text{C)}.$$

Решение канонического уравнения. Из канонического уравнения определяем неизвестное перемещение

$$Z_1 = \frac{-R_{1t}}{r_{11}} = 30,58 \frac{\alpha EJ}{a} \frac{a}{2,4EJ} = 12,742\alpha \text{ (}^{\circ}\text{C)}.$$

Построение эпюры изгибающих моментов. На основании принципа суперпозиции

$$M^{(t)} = \bar{M}_1 Z_1 + M_{t_0} + M_{\Delta t}.$$

Строим эпюру $\bar{M}_1 Z_1$, умножая ординаты \bar{M}_1 на Z_1 (рисунок 9.52), и складываем ее с M_{t_0} и $M_{\Delta t}$. Получаем эпюру изгибающих моментов $M^{(t)}$ в заданной системе (рисунок 9.53, а).

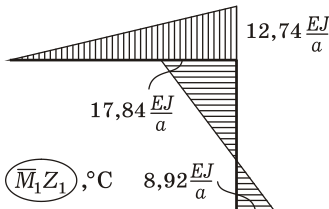


Рисунок 9.52

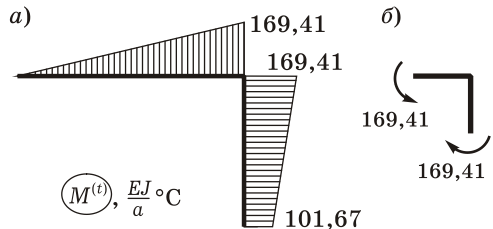


Рисунок 9.53

Если подставить значения $a = 1$ м; $EJ = 10^5$ кН·м²; $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$, то ординаты эпюры $M^{(t)}$ получатся в кН·м.

Проверка эпюры $M^{(t)}$. Вырезаем узел (рисунок 9.53, б) и проверяем его равновесие:

$$\sum M = 169,41 - 169,41 = 0.$$

Узел в равновесии.

Согласно (9.23) результат перемножения эпюр $M^{(t)}$ и \bar{M}_1 должен быть нулевым. Проверим это:

$$\int_s \frac{M^{(t)} \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{3a}{6EJ} \cdot 2 \cdot 169,41 \frac{\alpha EJ}{a} \cdot 1 \frac{EJ}{a} + \frac{2a}{6 \cdot 0,7EJ} (-2 \cdot 169,41 \cdot 1,4 + 2 \cdot 101,67 \cdot 0,7 + 169,41 \cdot 0,7 - 101,67 \cdot 1,4) \frac{\alpha EJ}{a} \frac{EJ}{a} = 0.$$

Следовательно, эпюра $M^{(t)}$ построена верно.

Построение эпюры поперечных сил Q . Эпюру поперечных сил построим по эпюре моментов. На участках АВ и ВС эпюра $M^{(t)}$ прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. Q положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой моментов ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. В соответствии с этим

$$Q_{AB} = -\frac{169,41 \alpha EJ / a}{3a} = -56,47 \frac{\alpha EJ}{a^2};$$

$$Q_{BC} = \frac{(169,41 - 101,67) \alpha EJ / a}{2a} = 33,87 \frac{\alpha EJ}{a^2}.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру Q (рисунок 9.54).

Построение эпюры продольных сил N . Эпюру продольных сил строим по готовой эпюре Q . Вырежем узел рамы, в сечении приложим поперечные и продольные силы (рисунок 9.55, а). Положительная поперечная сила вращает узел по часовой стрелке, отрицательная – против часовой стрелки. Продольные силы N считаем растягивающими.

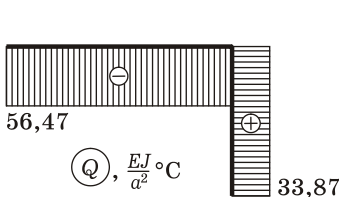


Рисунок 9.54

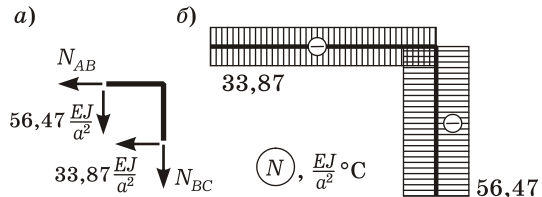


Рисунок 9.55

Из уравнений проекций сил на вертикальную и горизонтальную оси

$$N_{AB} = -33,87EJ / a^2; \quad N_{BC} = -56,47EJ / a^2.$$

Знак «минус» указывает на то, что стержни AB и BC сжаты. По полученным данным строим эпюру N (рисунок 9.55, б).

Если подставить значения $a = 1$ м; $EJ = 10^5$ кН·м²; $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$, то ординаты эпюры Q и N получатся в кН.

Статическая проверка равновесия рамы. Отсечем раму от опор (рисунок 9.56) и приложим внутренние усилия, взятые из эпюр.

Суммы проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси, очевидно, равны нулю. Подсчитаем сумму моментов всех сил относительно точки B :

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 56,47 \frac{EJ}{a^2} \cdot 3a - \\ &- 33,87 \frac{EJ}{a^2} \cdot 2a - 101,67 \frac{EJ}{a} = 0. \end{aligned}$$

Рама находится в равновесии, следовательно, внутренние усилия найдены верно.

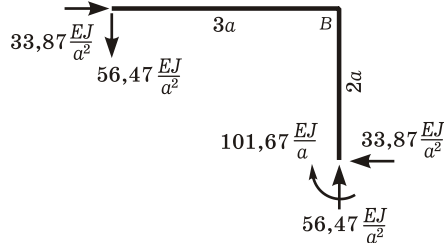


Рисунок 9.56

9.9 Расчет рам на смещение опор

9.9.1 Канонические уравнения метода перемещений при кинематическом воздействии (смещении связей). Как известно, в статически неопределимых системах смещение опорных связей, вызванное, например, просадкой или пучением грунтов, приводит к изгибу элементов (рисунок 9.57, а), а значит, появлению в конструкции дополнительных внутренних усилий. Принудительное смещение связей может применяться также в целях регулирования усилий в процессе монтажа или эксплуатации конструкции.

Общий порядок расчета при кинематических воздействиях остается таким же, как и при силовых. Основная система формируется так же, как и при силовом воздействии (рисунок 9.57, б). Система канонических уравнений отличается от системы (9.4) с формальной точки зрения лишь свободными членами:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1i}Z_i + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1c} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2i}Z_i + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2c} &= 0; \\ \dots & \\ r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{ki}Z_i + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kc} &= 0; \\ \dots & \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nc} &= 0, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где R_{kc} ($k = 1, \dots, n$) – реакция k -й дополнительной связи основной системы, возникающая от смещения опор.

9.9.2 Определение реакций в основной системе от кинематического воздействия. Удобно отдельно исследовать деформирование элементов основной системы от угловых и линейных смещений опорных закреплений.

Угловые смещения опорных связей основной системы. Предполагаем, что линейные смещения опор отсутствуют, заданы лишь углы поворота жестких заделок (состояние «φ») (рисунок 9.57, в). От этого воздействия необходимо построить эпюру M_φ по графе 1 таблиц Б.2, Б.3 приложения Б, домножив табличные значения на заданные углы поворота.

Линейные смещения опорных связей основной системы. Предполагаем, что повороты заделок отсутствуют, заданы лишь линейные смещения опор (состояние «δ») (рисунок 9.57, г). От этого воздействия необходимо построить эпюру M_δ по графе 2 таблиц Б.2, Б.3 приложения Б, домножив табличные значения на величины взаимных линейных смещений концов стержней.

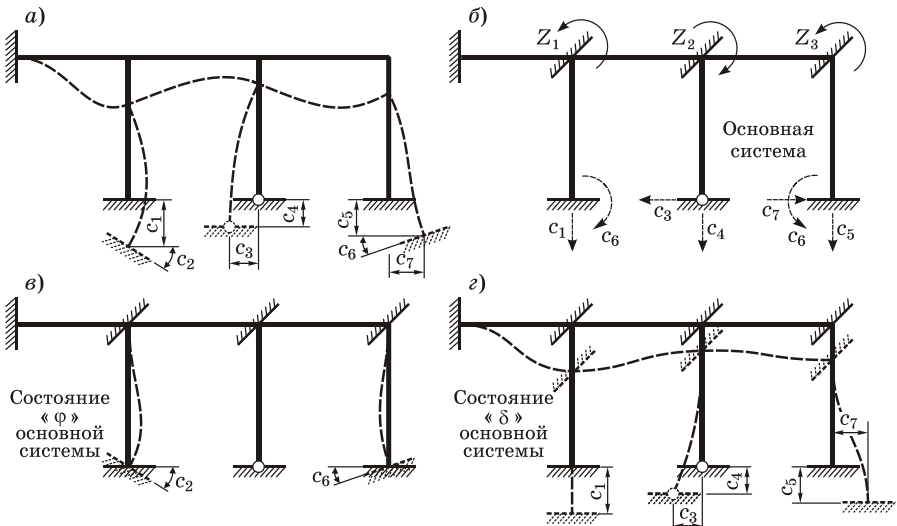


Рисунок 9.57

По принципу суперпозиции «кинематическая» реакция k -й связи определяется как сумма двух величин:

$$R_{kc} = R_{k\varphi} + R_{k\delta},$$

где $R_{k\phi}$, $R_{k\delta}$ – реакция k -й дополнительной связи основной системы соответственно от угловых и линейных смещений опорных закреплений.

Моментные реакции удобно определять из равновесия вырезанных узлов в двух эпюрах M_ϕ и M_δ . Силовые реакции при параллельных стойках находятся из равновесия отсеченной части рамы в состояниях « ϕ » и « δ ». В более сложных случаях они могут быть найдены перемножением эпюр:

$$R_{k\phi} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_\phi}{EJ} ds; \quad R_{k\delta} = \int_S \frac{\overline{M}_k M_\delta}{EJ} ds. \quad (9.25)$$

Доказываются формулы (9.25) аналогично зависимостям (9.21).

9.9.3 Определение внутренних усилий от кинематического воздействия и их проверка. Изгибающие моменты находятся по принципу суперпозиции аналогично моментам от силового и температурного воздействия:

$$M^{(c)} = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k Z_k + M_\phi + M_\delta. \quad (9.26)$$

Для полученной по формуле (9.26) эпюры изгибающих моментов могут быть выполнены статическая проверка (см. п. 9.5.3), а также проверка перемножением этой эпюры и суммарной единичной эпюры метода перемещений:

$$\int_S \frac{M^{(c)} \overline{M}_\Sigma}{EJ} ds = 0. \quad (9.27)$$

Результат перемножения эпюр $M^{(c)}$ и \overline{M}_Σ по формуле (9.27) должен получиться нулевым, в то время как аналогичная проверка моментов от силового воздействия (9.17) предполагает получение суммы грузовых реакций.

Поперечные силы Q вычисляются по значениям изгибающих моментов M , а продольные силы N – по значениям поперечных сил. Подробная методика расчета была изложена в п. 7.5.2. Для проверки правильности определения Q и N составляются уравнения статического равновесия конструкции в целом или отдельных ее частей.

Пример 9.7 Дана статически неопределимая рама, которая испытывает кинематическое воздействие: жесткая опора стойки сместилась вправо на $s_1 = 0,2a$, вниз на $s_2 = 0,3a$ и повернулась на $s_3 = 0,1$ рад (рисунок 9.58, а). Изгибные жесткости всех стержней EJ одинаковые. Требуется построить эпюру изгибающих моментов, выполнить необходимые проверки.

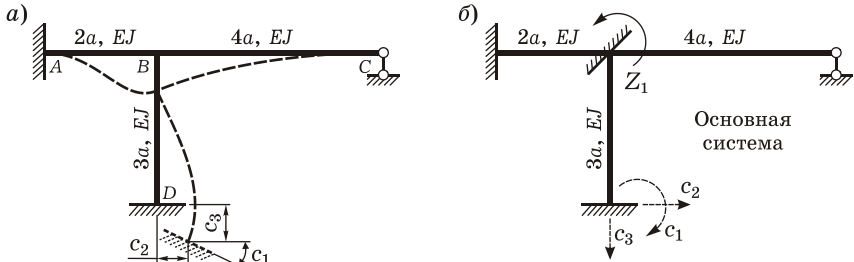


Рисунок 9.58

Определение количества неизвестных. Рама имеет один жесткий узел, угол поворота которого мы не знаем, поэтому $n_y = 1$. Неизвестные линейные перемещения отсутствуют (узел смещается вниз на известную величину c_2), поэтому $n_{\text{л}} = 0$. Таким образом, степень кинематической неопределенности $n_k = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 0 = 1$.

Основная система. Вводим в жесткий узел плавающую заделку и придаем ей угловое перемещение Z_1 . Получаем основную систему метода перемещений (рисунок 9.58, б).

Каноническое уравнение. Так как $n_k = 1$, составляем одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 + R_{1c} = 0.$$

Здесь r_{11} – реакция введенной плавающей заделки от ее единичного перемещения; R_{1c} – реакция введенной связи от кинематического воздействия, которую удобно искать как сумму двух составляющих:

$$R_{1c} = R_{1\phi} + R_{1\delta},$$

где $R_{1\phi}$, $R_{1\delta}$ – реакция введенной связи соответственно от угловых и линейных смещений опоры.

Единичное состояние основной системы. Задаем поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_1 (рисунок 9.59, а) и по таблице строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рисунок 9.59, б). Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии «1» (рисунок 9.59, в).

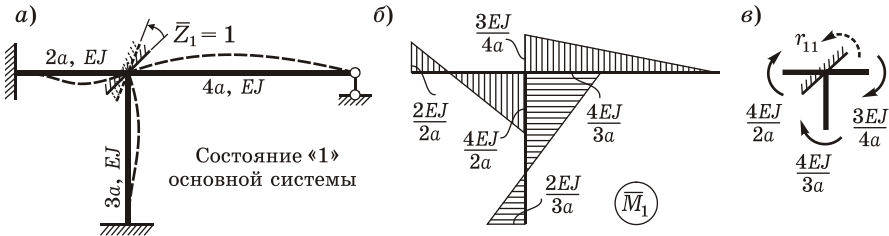


Рисунок 9.59

Из условия равновесия узла находим

$$r_{11} = \frac{4EJ}{2a} + \frac{4EJ}{3a} + \frac{3EJ}{4a} = 4,0833 \frac{EJ}{a}.$$

Угловое смещение опорной связи основной системы. Предполагаем, что задан лишь поворот жесткой заделки на угол $c_3 = 0,1$ рад (состояние «φ») (рисунок 9.60, а). Строим эпюру M_ϕ по графе 1 таблицы Б.3 приложения Б, домножая табличные значения на величину c_3 (рисунок 9.60, б).

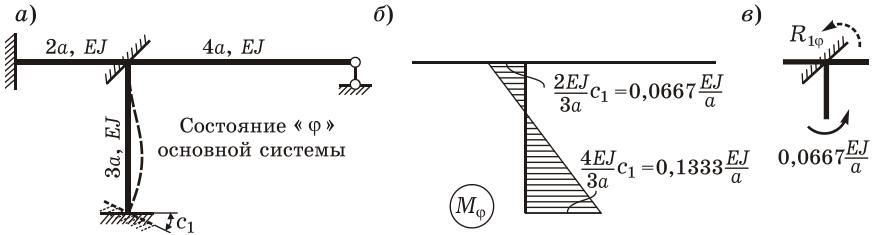


Рисунок 9.60

Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии «φ» (рисунок 9.60, в). Из условия равновесия узла находим

$$R_{1\phi} = -0,0667 \frac{EJ}{a}.$$

Линейные смещения опорной связи основной системы. Предполагаем, что заданы лишь линейные смещения опоры стойки на $c_1 = 0,2a$ и $c_2 = 0,3a$ (состояние «δ») (рисунок 9.61, а). От этого воздействия строим эпюру M_δ по графе 2 таблиц Б.2, Б.3 приложения Б, домножая табличные значения на величины взаимных линейных смещений концов стержней (рисунок 9.61, б).

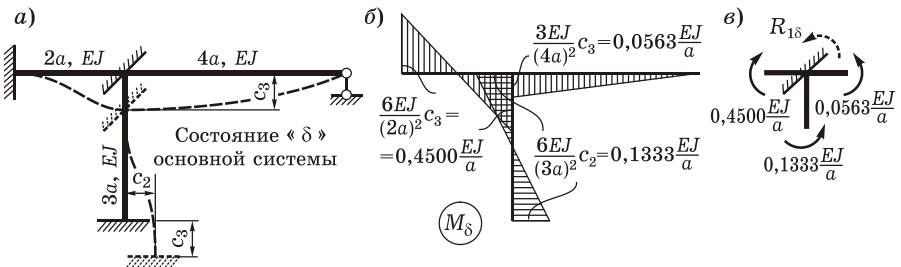


Рисунок 9.61

Вырезаем жесткий узел с введенной связью в состоянии «δ» (рисунок 9.61, в). Из условия равновесия узла находим

$$R_{1\delta} = 0,4500 \frac{EJ}{a} - 0,1333 \frac{EJ}{a} - 0,0563 \frac{EJ}{a} = 0,2604 \frac{EJ}{a}.$$

Вычисление «кинематической» реакции. Складывая значения $R_{1\phi}$ и $R_{1\delta}$, получаем

$$R_{1c} = R_{1\phi} + R_{1\delta} = -0,0667 \frac{EJ}{a} + 0,2604 \frac{EJ}{a} = 0,1937 \frac{EJ}{a}.$$

Решение канонического уравнения. Из канонического уравнения определяем неизвестное перемещение:

$$Z_1 = \frac{-R_{1c}}{r_{11}} = -0,1937 \frac{EJ}{a} \frac{a}{4,0833EJ} = -0,04745.$$

Построение эпюры изгибающих моментов. На основании принципа суперпозиции

$$M^{(c)} = \bar{M}_1 Z_1 + M_\phi + M_\delta.$$

Строим эпюру $\bar{M}_1 Z_1$, умножая ординаты \bar{M}_1 на Z_1 (рисунок 9.62), и складываем ее с M_ϕ и M_δ . Получаем эпюру изгибающих моментов $M^{(c)}$ в заданной системе (рисунок 9.63, а).

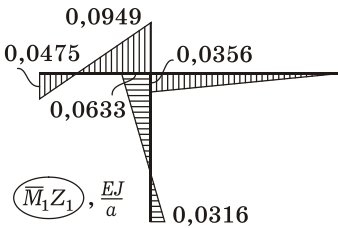


Рисунок 9.62

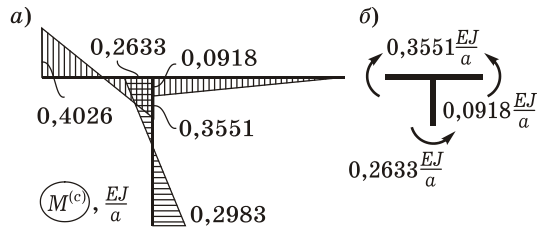


Рисунок 9.63

Проверка эпюры $M^{(c)}$. Вырезаем жесткий узел (рисунок 9.63, б) и проверяем его равновесие:

$$\sum M = 0,0918EJ/a + 0,2633EJ/a - 0,3551EJ/a = 0.$$

Узел в равновесии.

Согласно (9.27) результат перемножения эпюр $M^{(c)}$ и \bar{M}_1 должен быть нулевым. Проверим это:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{M^{(c)} \bar{M}_1}{EJ} ds &= \frac{2a}{6EJ} \left(2 \cdot 0,4026 \frac{EJ}{a} \frac{EJ}{a} + 2 \cdot 0,3551 \frac{EJ}{a} \frac{2EJ}{a} - 0,4026 \frac{EJ}{a} \frac{2EJ}{a} - \right. \\ &\quad \left. - 0,3551 \frac{EJ}{a} \frac{EJ}{a} \right) + \frac{3a}{6EJ} \left(-2 \cdot 0,2633 \frac{EJ}{a} \frac{4EJ}{3a} - 2 \cdot 0,2983 \frac{EJ}{a} \frac{2EJ}{3a} + \right. \\ &\quad \left. + 0,2633 \frac{EJ}{a} \frac{2EJ}{3a} + 0,2983 \frac{EJ}{a} \frac{4EJ}{3a} \right) + \frac{4a}{6EJ} \left(-2 \cdot 0,0918 \frac{EJ}{a} \frac{3EJ}{4a} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, эпюра $M^{(c)}$ построена верно.

9.10 Расчет неразрезных балок методом перемещений

9.10.1 Рекомендации по формированию основной системы.

Метод перемещений можно использовать и для расчета неразрезной балки, приняв в качестве неизвестных углы поворота Z_1, Z_2, \dots, Z_n ее опорных сечений (рисунок 9.64, а).

Чтобы получить основную систему, необходимо над промежуточными опорами ввести плавающие заделки и повернуть их на углы Z_1, Z_2, \dots, Z_n (рисунок 9.64, б).

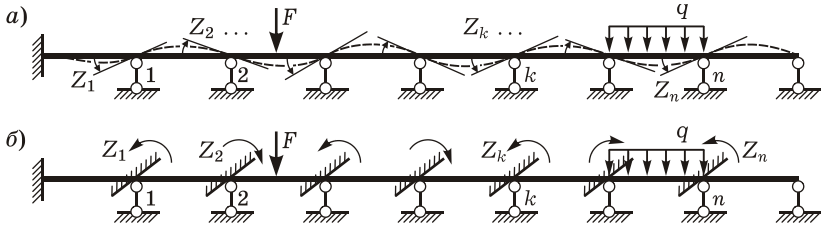


Рисунок 9.64

Если балка содержит консоли (рисунок 9.65, а), то основную систему можно сформировать двумя способами:

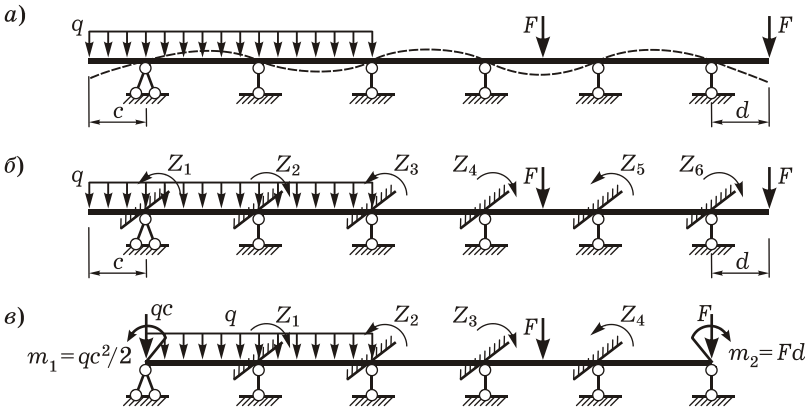


Рисунок 9.65

1) неизвестными считаются углы поворота над всеми опорами, где и вводятся плавающие заделки (рисунок 9.65, б);

2) консоли отбрасываются, нагрузка с них переносится на крайние опоры, неизвестными являются углы поворота над промежуточными опорами (рисунок 9.65, в). Полученные при этом

сосредоточенные силы «уходят» в опоры, а опорные моменты учитываются в крайних пролетах вместе с приложенной в них нагрузкой при построении грузовой эпюры M_p . Очевидное достоинство второго способа – меньшее количество неизвестных.

9.10.2 Канонические уравнения. Запишем k -е каноническое уравнение метода перемещений:

$$\begin{aligned} r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{k(k-1)}Z_{k-1} + r_{kk}Z_k + r_{k(k+1)}Z_{k+1} + \\ + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kcp} = 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Построив единичные эпюры в основной системе (рисунок 9.66) и определив единичные реакции k -й связи, можно убедиться, что ненулевыми будут только $r_{k(k-1)}$, r_{kk} и $r_{k(k+1)}$.

Уравнение (9.28) приобретает вид

$$r_{k(k-1)}Z_{k-1} + r_{kk}Z_k + r_{k(k+1)}Z_{k+1} + R_{kcp} = 0. \quad (9.29)$$

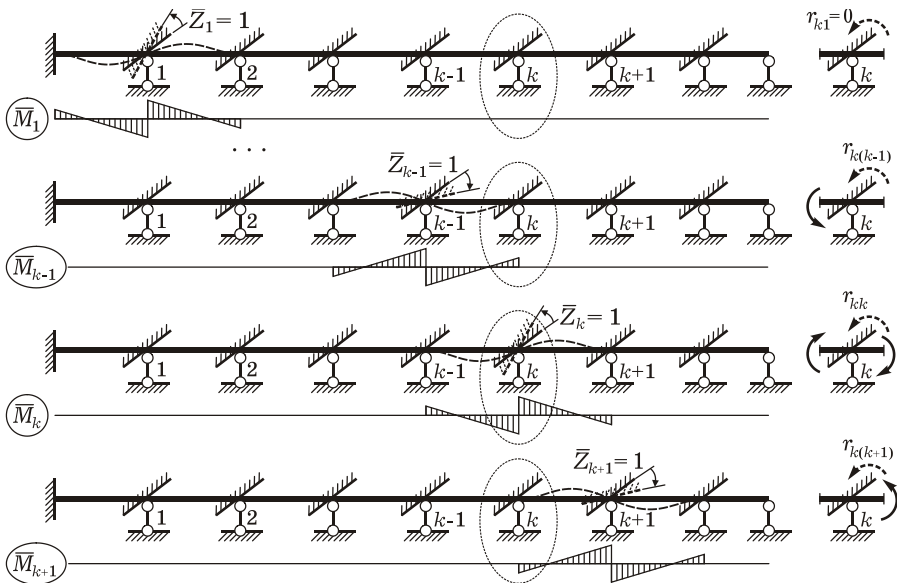


Рисунок 9.66

Соотношение (9.29) называется *уравнением трех углов поворота*, подобно уравнению трех моментов.

Таким образом, для неразрезной балки система канонических уравнений метода перемещений имеет трехчленную структуру независимо от количества уравнений.

Пример 9.8 Дана статически неопределимая балка (рисунок 9.67, а), у которой $l_1 = 6$ м; $l_2 = 5$ м; $l_3 = 4$ м; $c = 0,8$ м; $q = 7$ кН/м; $F = 16$ кН; $EJ_1 = EJ$; $EJ_2 = 2EJ$; $EJ_3 = 3EJ$. Требуется построить эпюру изгибающих моментов M ; сравнить результат с данными примера 8.3.

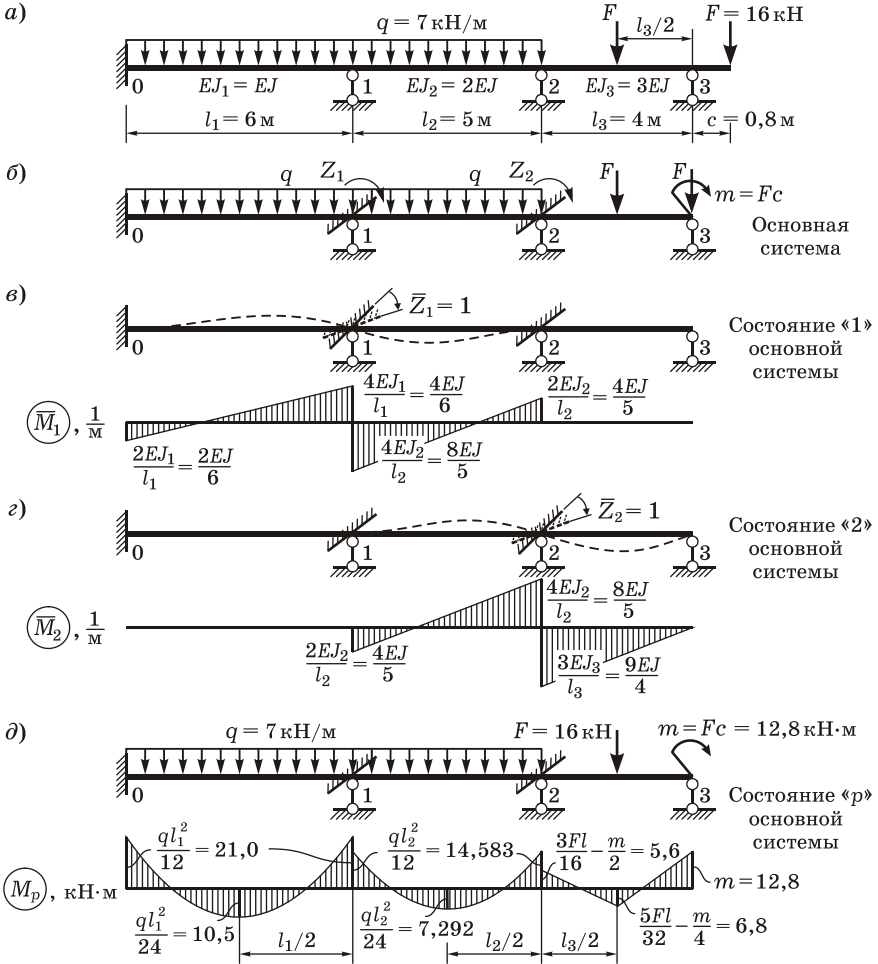


Рисунок 9.67

Определение количества неизвестных. Предварительно отбросим статически определимую консоль, а силу F с нее перенесем на опору 3, добавив момент $m = Fc$. Указанная сила полностью воспринимается опо-

рой 3, не влияя на моменты и поперечные силы, поэтому при построении эпюр в основной системе ее учитывать не будем.

Неизвестными будем считать углы поворота Z_1 и Z_2 опорных сечений 1 и 2. Таким образом, балка два раза кинематически неопределима.

Основная система. Вводим над опорами 1 и 2 плавающие заделки (связи 1 и 2) и придаем им угловые перемещения Z_1 и Z_2 . Получаем основную систему метода перемещений (рисунок 9.67, б).

Канонические уравнения. Составляем систему двух канонических уравнений:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0,$$

где r_{ik} ($i, k = 1, 2$) – реакция в i -й введенной связи от единичного перемещения k -й связи; R_{ip} – реакция i -й связи от внешней нагрузки.

Единичные и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояния «1» и «2» основной системы, поворачивая плавающие заделки на единичные углы в направлениях Z_1 и Z_2 (рисунок 9.67, в, г). По таблице строим единичные эпюры M_1 и M_2 .

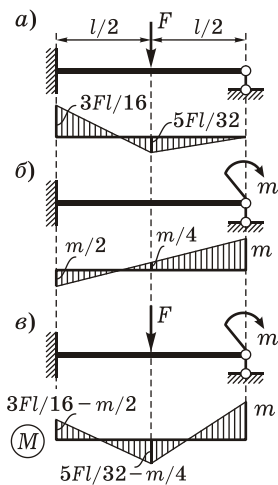


Рисунок 9.68

Далее формируем состояние «р» основной системы, прикладывая внешнюю нагрузку. Пользуясь таблицами, для отдельно взятых элементов – «балок» – строим эпюры изгибающих моментов. Изобразив их на общей базе, получаем эпюру M_p (рисунок 9.67, д).

Заметим, что в третьем пролете задана сила F и, кроме этого, приложен момент на опоре 3. Эпюру получим по принципу суперпозиции, построив и сложив эпюры от указанных воздействий (рисунок 9.68).

Вычисление единичных и грузовых реакций. Находим моментные реакции в плавающих заделках. Для этого вырезаем жесткие узлы с этими связями в состояниях «1», «2» и «р» (рисунок 9.69) и составляем уравнения равновесия $\sum M_{\text{узла}} = 0$ в каждом из состояний. В результате получаем:

$$r_{11} = \frac{4EJ}{6} + \frac{8EJ}{5} = 2,2667 \frac{EJ}{M};$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{4EJ}{5} = 0,8 \frac{EJ}{M}; \quad r_{22} = \frac{8EJ}{5} + \frac{9EJ}{4} = 3,85 \frac{EJ}{M};$$

$$R_{1p} = 21 - 14,5833 = 6,4167 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$R_{2p} = 14,5833 - 5,6 = 8,9833 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Рисунок 9.69

Решение системы канонических уравнений. Подставим найденные единичные и грузовые реакции в систему канонических уравнений:

$$2,2667EJ \cdot Z_1 + 0,8EJ \cdot Z_2 + 6,4167 = 0;$$

$$0,8EJ \cdot Z_1 + 3,85EJ \cdot Z_2 + 8,9833 = 0.$$

Решив систему, найдем перемещения

$$Z_1 = -2,1662/EJ \text{ (кН} \cdot \text{м}^2\text{)}; \quad Z_2 = -1,8832/EJ \text{ (кН} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов. Ординаты эпюры M в заданной системе находим по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p.$$

Умножаем ординаты \bar{M}_1, \bar{M}_2 на Z_1, Z_2 , складываем их, добавляем M_p (рисунок 9.70, а) и достраиваем эпюру на консоли (рисунок 9.70, б). Заметим, что эпюра M совпала с полученной в примере 8.3.

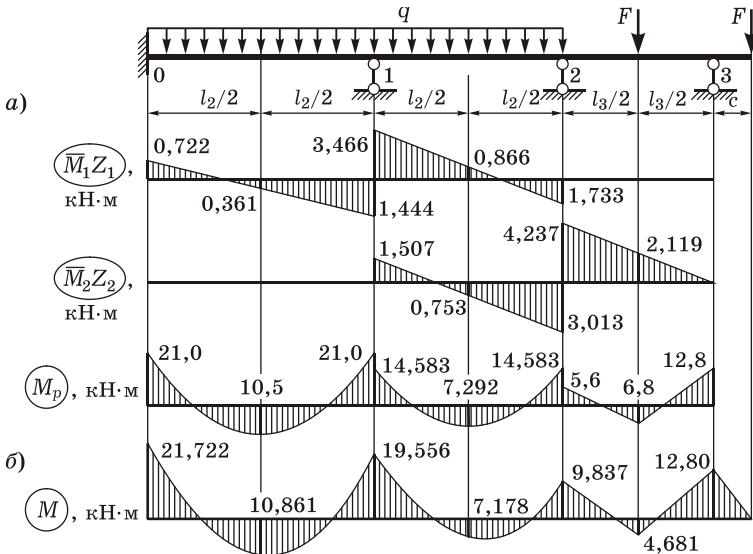


Рисунок 9.70

9.11 Упрощения при «ручных» расчетах рам методом перемещений

9.11.1 Использование основных систем с неполным числом наложенных связей. Указанный прием уменьшает количество неизвестных, но требует дополнительных исследований нестандартных элементов на нагрузку и перемещения узлов, которыми они примыкают к остальной части системы. Эти исследования можно выполнить как методом сил, так и методом перемещений.

Например, для рамы, показанной на рисунке 9.71, а, основная система с полным числом связей получается введением семи плавающих заделок и двух опорных стержней (рисунок 9.71, б).

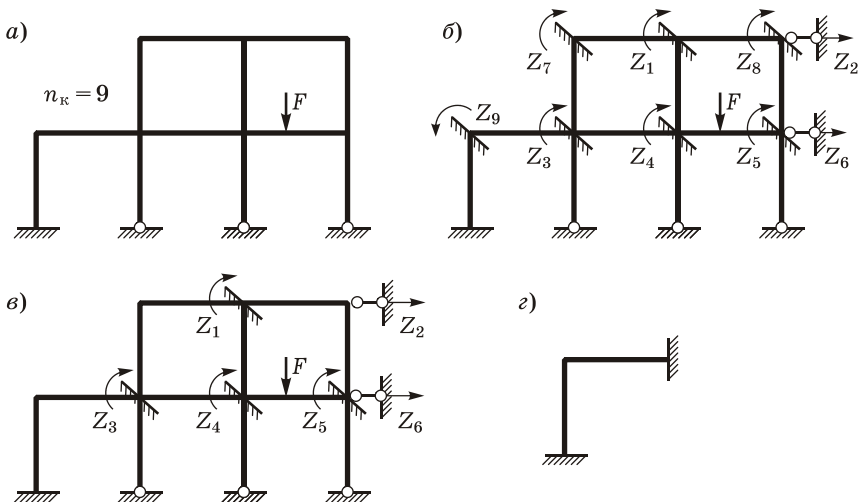


Рисунок 9.71

Для уменьшения количества неизвестных можно ввести всего четыре заделки и два стержня (рисунок 9.71, в). При этом Г-образный элемент (рисунок 9.71, г) должен быть предварительно рассчитан на угловые и линейные смещения связей.

9.11.2 Группировка неизвестных в симметричных системах. Как и в методе сил, при расчетах сложных симметричных систем методом перемещений в качестве неизвестных можно принимать *групповые перемещения*, представляющие симметричные и обратносимметричные составляющие полных перемещений. Это приводит к разделению канонических уравнений на две отдельные группы. Одна группа содержит симметричные, другая – обратносимметричные неизвестные.

Заметим, что неизвестные перемещения узлов, расположенные на оси симметрии, всегда обладают симметрией или обратной симметрией и поэтому не группируются.

Форма канонических уравнений при группировке неизвестных остается прежней. Однако значения коэффициентов и свободных членов приобретают иной смысл. Здесь r_{ik} и R_{ip} – обобщенные реакции, соответствующие обобщенному перемещению Z_i , от $Z_k = 1$ и от нагрузки. Эти обобщенные реакции определяются как алгебраические суммы простых реакций в связях, которые одновременно смещаются при групповом парном перемещении Z_i . Направления простых реакций, как и ранее, принимаются совпадающими с направлениями задаваемых перемещений.

На рисунке 9.72 показана симметричная рама и основная система для нее с применением группировки неизвестных.

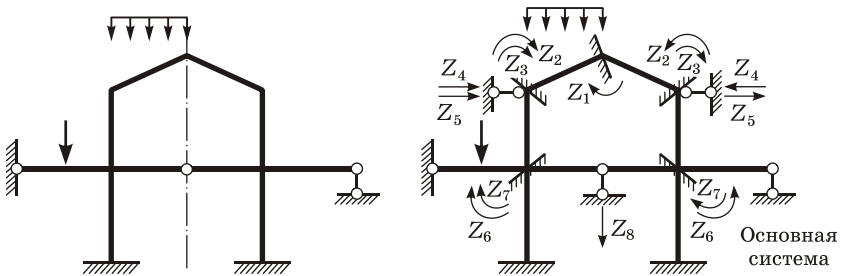


Рисунок 9.72

Общее количество неизвестных перемещений здесь $n_k = n_y + n_d = 5 + 3 = 8$. Перемещения Z_2, Z_4, Z_6, Z_8 являются симметричными неизвестными, Z_1, Z_3, Z_5 – обратносимметричными.

Пример 9.9 Для статически неопределимой рамы (рисунок 9.73, а) требуется построить эпюру изгибающих моментов M с применением группировки неизвестных. Длина $l = 5$ м, нагрузка $q = 10$ кН/м.

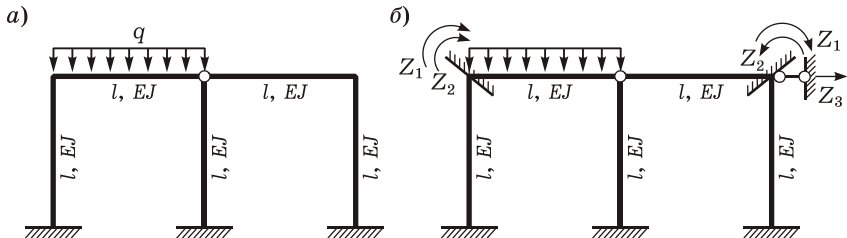


Рисунок 9.73

Определение количества неизвестных. Степень кинематической неопределимости рамы $n_k = n_y + n_x = 2 + 1 = 3$, т. е. неизвестны два угла поворота жестких узлов и горизонтальное смещение узлов.

Основная система. Используя условия симметрии, сгруппируем неизвестные углы поворота, т. е. угол поворота левого жесткого узла представим в виде суммы $Z_1 + Z_2$, правого – в виде разности $Z_1 - Z_2$. Горизонтальное перемещение Z_3 является обратнoсимметричным неизвестным, так как левый узел смещается к оси симметрии, а правый – от нее (рисунок 9.73, б).

Канонические уравнения. Для определения групповых неизвестных запишем систему трех канонических уравнений:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0;$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0.$$

Единичные и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояния «1», «2» и «3» основной системы, задавая единичные смещения в направлениях Z_1 , Z_2 и Z_3 , и состояние «р», прикладывая внешнюю нагрузку. Строим эпюры M_1 , M_2 , M_3 и M_p (рисунок 9.74).

Вычисление единичных и грузовых реакций. Реакции r_{11} , r_{12} , r_{13} , R_{1p} найдем как сумму моментных реакций левой и правой плавающих заделок, направленных так же, как перемещение Z_1 (рисунок 9.75, а):

$$r_{11} = r_{11}^{\text{лев}} + r_{11}^{\text{прав}} = 7EJ/l + 7EJ/l = 14EJ/l;$$

$$r_{12} = r_{12}^{\text{лев}} + r_{12}^{\text{прав}} = 7EJ/l - 7EJ/l = 0;$$

$$r_{13} = r_{13}^{\text{лев}} + r_{13}^{\text{прав}} = -6EJ/l^2 - 6EJ/l^2 = -12EJ/l^2;$$

$$R_{1p} = R_{1p}^{\text{лев}} + R_{1p}^{\text{прав}} = -ql^2/8 + 0 = -ql^2/8.$$

Аналогично определим реакции r_{21} , r_{22} , r_{23} , R_{2p} , направив моментные реакции левой и правой плавающих заделок так, как перемещение Z_1 (рисунок 9.75, б):

$$r_{21} = r_{21}^{\text{лев}} + r_{21}^{\text{прав}} = 7EJ/l - 7EJ/l = 0;$$

$$r_{22} = r_{22}^{\text{лев}} + r_{22}^{\text{прав}} = 7EJ/l + 7EJ/l = 14EJ/l;$$

$$r_{23} = r_{23}^{\text{лев}} + r_{23}^{\text{прав}} = -6EJ/l^2 + 6EJ/l^2 = 0;$$

$$R_{2p} = R_{2p}^{\text{лев}} + R_{2p}^{\text{прав}} = -ql^2/8 + 0 = -ql^2/8.$$

Реакции во введенном стержне r_{31} , r_{32} , r_{33} , R_{3p} найдем, отсекая раму от опор и проецируя все силы на горизонтальную ось (рисунок 9.75, в):

$$r_{31} = -6EJ/l^2 - 6EJ/l^2 = -12EJ/l^2; \quad r_{32} = -6EJ/l^2 + 6EJ/l^2 = 0;$$

$$r_{33} = 12EJ/l^3 + 3EJ/l^3 + 12EJ/l^3 = 27EJ/l^3; \quad R_{3p} = 0.$$

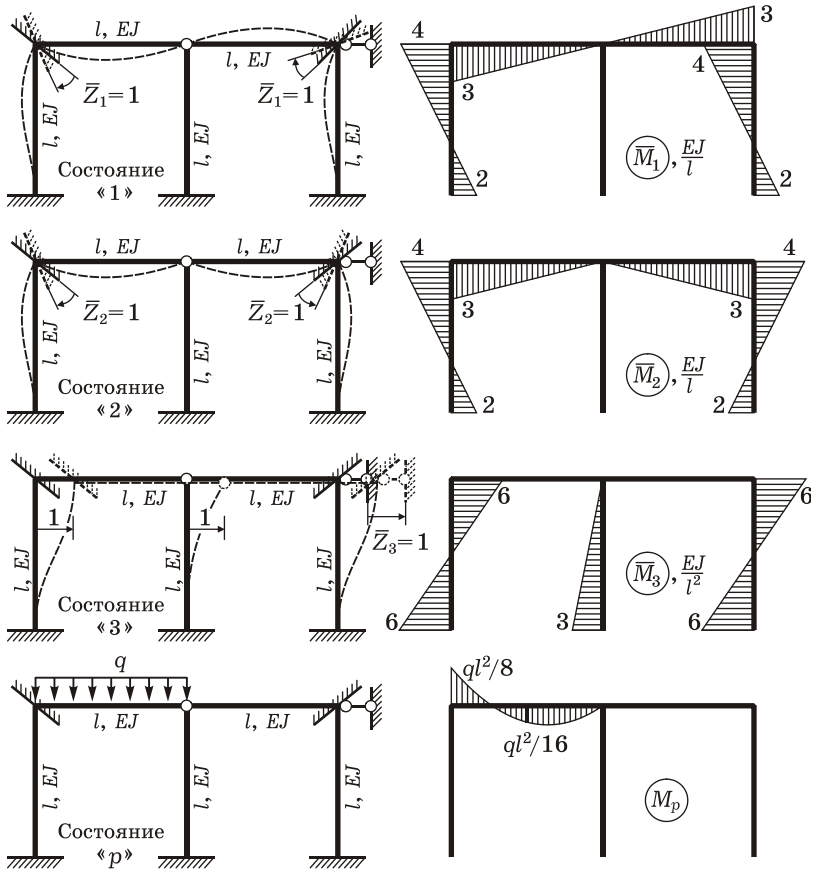


Рисунок 9.74

Решение системы канонических уравнений. Из-за равенства нулю четырех единичных реакций система канонических уравнений распадается на две независимые системы (точнее, систему двух уравнений и одно уравнение), которые в числовых значениях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{14EJ}{l} Z_1 - \frac{12EJ}{l^2} Z_3 &= \frac{ql^2}{8}; \\ -\frac{12EJ}{l^2} Z_1 + \frac{27EJ}{l^3} Z_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \frac{14EJ}{l} Z_2 = \frac{ql^2}{8}.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$Z_1 = \frac{3}{208} \frac{ql^3}{EJ}; \quad Z_2 = \frac{1}{112} \frac{ql^3}{EJ}; \quad Z_3 = \frac{1}{156} \frac{ql^4}{EJ}.$$

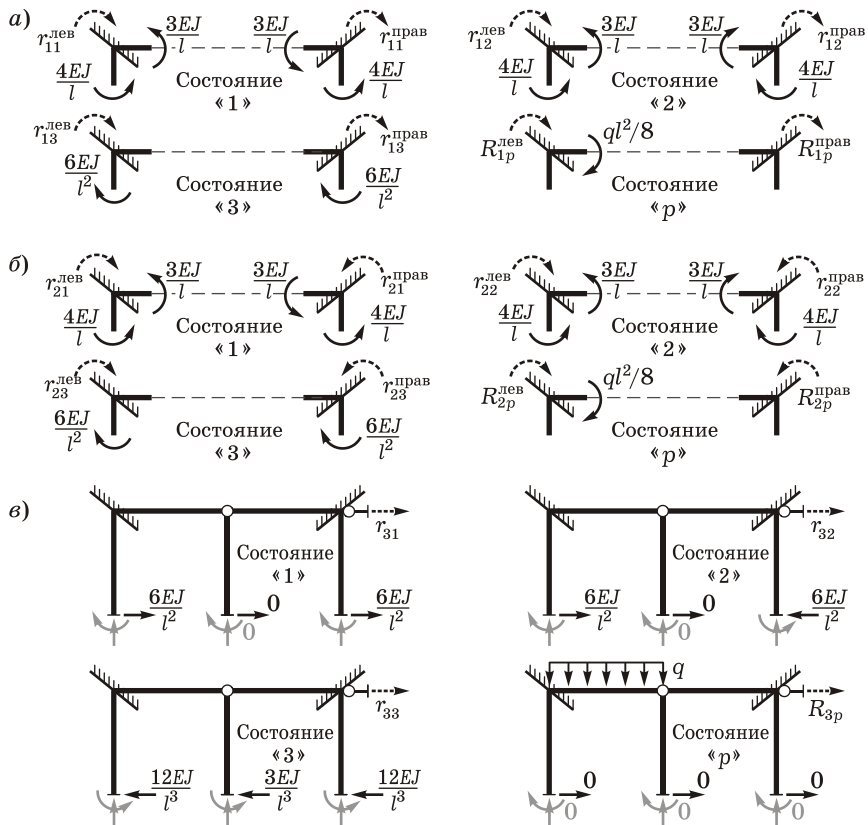


Рисунок 9.75

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов. Ординаты эпюры M в заданной системе находим по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_p .$$

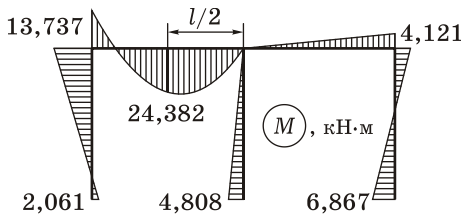


Рисунок 9.76

При этом учитываем, что $l = 5$ м, $q = 10$ кН/м. Полученная эпюра изображена на рисунке 9.76. Она отвечает условиям равновесия, что говорит о правильности расчетов.

10.1 Выбор метода расчета статически неопределимой системы

10.1.1 Сравнительный анализ метода сил и метода перемещений. Метод сил и метод перемещений – два основных метода определения внутренних усилий в статически неопределимых системах. В них можно выделить качественно одинаковые этапы.

Установление *количества неизвестных* – степени статической неопределимости в методе сил и степени кинематической неопределимости в методе перемещений – по трудоемкости практически одинаково.

Оба метода предполагают использование *основной системы*. В методе сил основную систему принимают в основном статически определимой путем удаления лишних связей. При этом для одной и той же системы можно предложить множество вариантов основной системы, удовлетворяющих всем необходимым требованиям. Поэтому выбор рациональной основной системы – одна из задач, решаемых при расчетах методом сил.

В расчетах методом перемещений основную систему формируют путем введения дополнительных связей, что повышает степень статической неопределимости, однако делает конструкцию кинематически определимой. Преимущество в том, что основная система практически единственная. Для многих рамных каркасов она позволяет получить неполные канонические уравнения и тем самым упростить расчет.

Канонические уравнения метода сил и метода перемещений по структуре одинаковые. Отличие лишь в физическом смысле этих уравнений и входящих в них величин. При большом числе неизвестных канонические уравнения метода перемещений неполные. В методе сил этого надо добиваться специальными приемами.

В обоих методах в основной системе строятся *единичные и грузовая эпюры* внутренних усилий. При расчете рам и балок, как правило, ограничиваются эпюрами изгибающих моментов. В методе перемещений их построить проще, так как можно использовать табличные решения.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений в методе перемещений из уравнений статики определить проще, чем аналогичные величины перемножением эпюр в методе сил.

Приемы построения *окончательных эпюр* внутренних усилий в обоих методах идентичны.

Анализируя вычислительные операции обоих методов при расчете рам, можно отметить, что в методе перемещений они несколько проще, чем в методе сил. Таким образом, метод перемещений обладает преимуществами перед методом сил.

10.1.2 Выбор метода расчета стержневой системы. Естественно, возникает вопрос, какой метод удобнее использовать для расчета данной конструкции. Как правило, предпочтение отдают методу с меньшим количеством неизвестных: если $n_c < n_k$, используют метод сил, если $n_c > n_k$ – метод перемещений. При равном количестве неизвестных ($n_c = n_k$) выбирают метод перемещений.

Однако метод перемещений удобен не для всех стержневых систем. Этот метод становится весьма сложным и утрачивает свои преимущества, если расчет ведется с учетом деформаций стержней от поперечных и продольных сил. Метод сил в этом случае осложняется гораздо меньше.

Например, для шарнирных ферм число неизвестных по методу перемещений всегда больше, чем по методу сил. Если система содержит криволинейные или другие нестандартные элементы, не рассмотренные в таблицах, построение эпюр в основной системе метода перемещений резко усложняется. Для этого в том или ином виде необходимо использовать метод сил. Поэтому для арок, где учитываются моменты, поперечные и продольные силы M , Q , N , также удобен метод сил.

Таким образом, выбор метода расчета определяется прежде всего числом основных неизвестных и применимостью того или иного метода к расчету стержневой системы данного типа.

Если же система в одной своей части удобна для расчета по методу сил, а в другой – по методу перемещений? Нельзя ли использовать сразу оба метода для уменьшения числа основных неизвестных? Это оказывается возможным при использовании смешанного или комбинированного метода.

10.2 Смешанный метод

Метод расчета статически неопределимых систем, в котором за неизвестные одновременно принимаются перемещения и усилия, был предложен в 1927 г. А. А. Гвоздевым.

10.2.1 Основная система. В одной части конструкции основная система смешанного метода образуется устранением связей, как в методе сил, в другой части – введением связей, как в методе перемещений. Соответственно, основными неизвестными яв-

ляются реакции отброшенных связей, а также угловые и линейные перемещения узлов.

Рассмотрим статически неопределимую раму (рисунок 10.1, а), которая в левой части содержит мало лишних связей, но каждый ее узел может смещаться линейно и поворачиваться. В правой части рама имеет много связей, но обладает малой подвижностью узлов.

Подсчитаем степень статической и кинематической неопределимости:

$$n_c = 3K - \text{III} = 3 \cdot 3 - 1 = 8; \quad n_k = n_y + n_l = 6 + 3 = 9.$$

Основные системы метода сил и метода перемещений показаны на рисунке 10.1, б, в. Они довольно сложные для расчета из-за большого количества неизвестных.

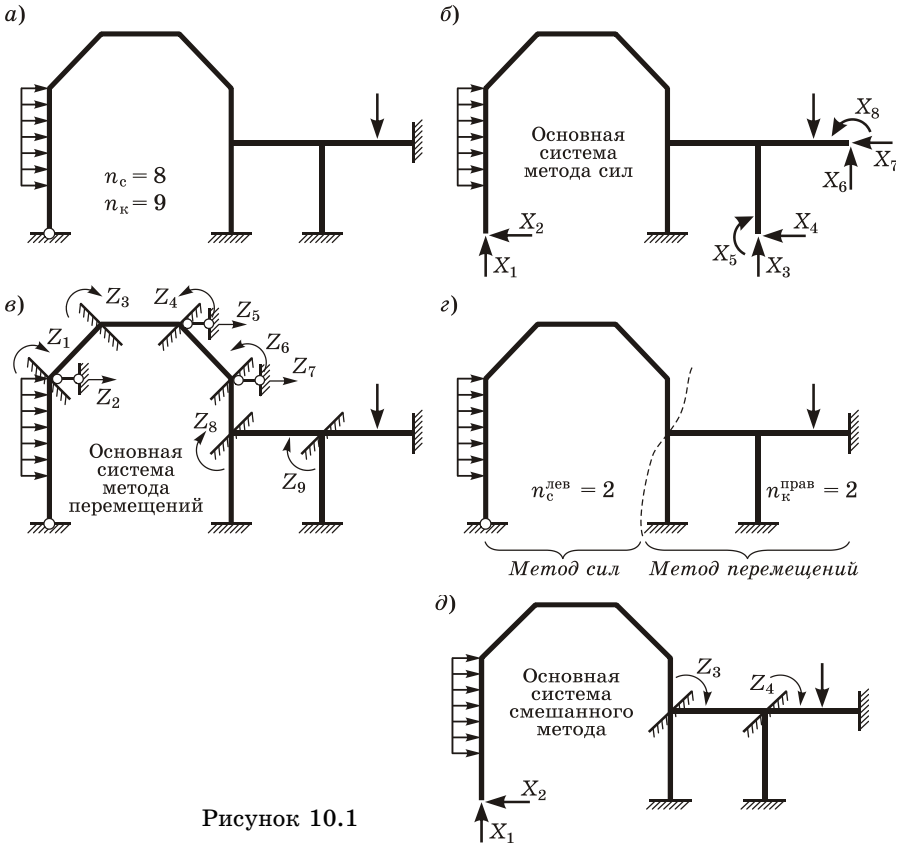


Рисунок 10.1

Если же левую часть рассчитывать методом сил, правую – методом перемещений, количество неизвестных будет значительно меньшим:

$$n = n_c^{\text{лев}} + n_k^{\text{прав}} = 2 + 2 = 4,$$

где $n_c^{\text{лев}} = (3K - III)^{\text{лев}} = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ – степень статической неопределимости левой части рамы; $n_k^{\text{прав}} = (n_y + n_d)^{\text{прав}} = 2 + 0 = 2$ – степень кинематической неопределимости правой части.

Основная система смешанного метода показана на рисунке 10.1, д. Здесь в левой части отброшены две лишние связи и заменены силами X_1, X_2 , в правой части введены две плавающие заделки и заданы углы их поворота Z_3, Z_4 . Заметим, что неизвестные нумеруются последовательно: сначала неизвестные метода сил, затем – метода перемещений.

10.2.2 Канонические уравнения. Как и неизвестные, канонические уравнения смешанного метода будут двух видов: уравнения метода сил и метода перемещений. Их количество определяется количеством неизвестных усилий и перемещений.

Например, для рамы на рисунке 10.1 система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta'_{13}Z_3 + \delta'_{14}Z_4 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta'_{23}Z_3 + \delta'_{24}Z_4 + \Delta_{2p} &= 0; \\ r'_{31}X_1 + r'_{32}X_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 + R_{3p} &= 0; \\ r'_{41}X_1 + r'_{42}X_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 + R_{4p} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь первое и второе уравнения составлены по методу сил, так как неизвестные X_1, X_2 – силы, третье и четвертое – по методу перемещений, так как Z_3, Z_4 – перемещения.

Во все уравнения входят оба вида основных неизвестных. При этом коэффициенты подразделяются на четыре типа:

δ_{ik} – «перемещение от силы»: перемещение по направлению усилия X_i , вызванное единичным усилием, приложенным в направлении X_k ;

δ'_{ik} – «перемещение от перемещения»: перемещение по направлению усилия X_i , вызванное единичным смещением связи k ;

r_{ik} – «реакция от перемещения»: реакция связи i от единичного смещения связи k ;

r'_{ik} – «реакция от силы»: реакция связи i , вызванная единичным усилием, приложенным в направлении X_k .

Коэффициенты δ , r в уравнениях (10.1) и свободные члены Δ , R вычисляются способами, изложенными в подразд. 7.4 и 9.4 при изучении методов сил и перемещений.

Реакции r' удобно находить, как и r , из равновесия вырезанных узлов или частей конструкции с введенными связями в соответствующих состояниях, вызванных единичными силами.

Перемещения δ' можно определить из геометрических соображений (рисунок 10.2). Однако их проще вычислять по теореме (6.34) о взаимности единичных реакций и перемещений в статически неопределимых системах (второй теореме Рэлея):

$$\delta'_{ik} = -r'_{ik}.$$

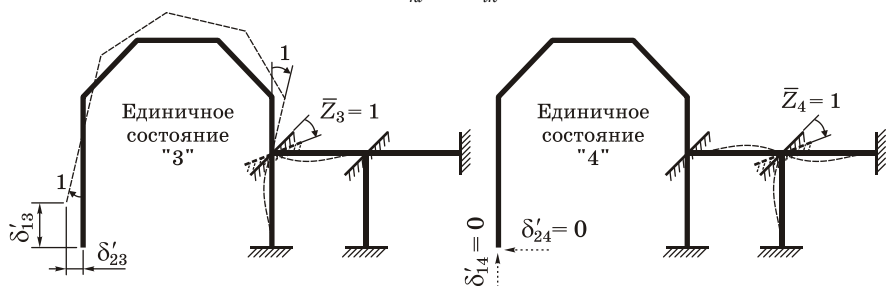


Рисунок 10.2

10.2.3 Построение окончательных эпюр внутренних усилий и их проверка. Решив систему канонических уравнений, находим усилия X и перемещения Z . Значения изгибающих моментов в заданной системе на основании принципа суперпозиции получаются по зависимости, аналогичной (7.19) и (9.16). Для рамы, изображенной на рисунке 10.1,

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 Z_3 + \bar{M}_4 Z_4 + M_p,$$

где \bar{M}_1, \bar{M}_2 — изгибающие моменты в основной системе смешанного метода от единичных усилий, приложенных по направлениям X_1, X_2 ; \bar{M}_3, \bar{M}_4 — то же от единичных перемещений 3-й и 4-й дополнительных связей; M_p — то же от внешней нагрузки.

При расчете рам и балок поперечные силы Q обычно вычисляются по значениям изгибающих моментов M , а продольные силы N — по значениям поперечных сил. Методика расчета была подробно изложена в п. 7.5.2.

Проверки построенных эпюр такие же, как и при расчетах методом сил: статическая и деформационная для эпюры изгибающих моментов; проверка равновесия системы в целом для установления правильности эпюр поперечных и продольных сил.

Пример 10.1 Для рамы, у которой $l = 6$ м; $q = 10$ кН/м; $F = 20$ кН (рисунок 10.3, а), требуется построить эпюру изгибающих моментов.

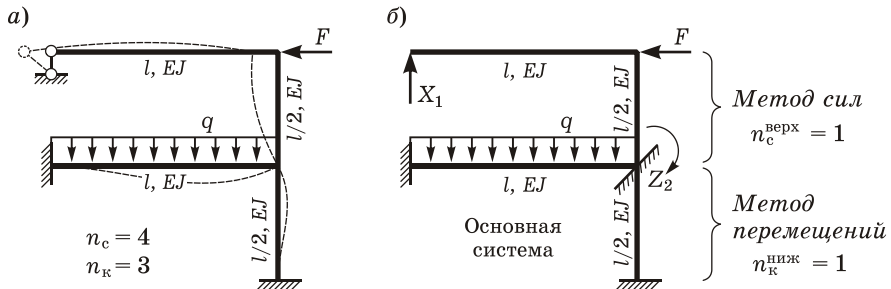


Рисунок 10.3

Определение количества неизвестных. Рама четырежды статически неопределима и трижды кинематически неопределима. В верхней части она содержит одну лишнюю связь, но имеет два независимых линейных перемещения узлов – линейное и угловое. В нижней части три лишние связи и одно неизвестное узловое перемещение – угол поворота Т-образного узла. Поэтому применим метод сил в верхней части и метод перемещений в нижней.

$$n = n_c^{\text{верх}} + n_k^{\text{ниж}} = 1 + 1 = 2.$$

Основная система. Заменяем шарнирно подвижную опору реакцией X_1 ; вводим плавающую заделку в жесткий узел и задаем угловое перемещение Z_2 (рисунок 10.3, б).

Канонические уравнения. Составляем два уравнения, причем первое – по методу сил, второе – по методу перемещений:

$$\delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$r'_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0,$$

где δ_{11} , δ'_{12} , Δ_{1p} – перемещения по направлению силы X_1 , вызванные единичной силой в данном направлении, поворотом плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_2 и внешней нагрузкой; r'_{21} , r_{22} , R_{2p} – реакции введенной связи от единичной силы в направлении X_1 , поворота плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_2 и внешней нагрузкой соответственно.

Единичные и грузовая эпюры в основной системе. Формируем состояние «1» основной системы, прикладывая по направлению X_1 единичную силу (рисунок 10.4, а). Строим единичную эпюру \bar{M}_1 .

Формируем состояние «2» основной системы, задавая поворот плавающей заделки на единичный угол в направлении Z_2 (рисунок 10.4, б). Пользуясь таблицей Б.3 приложения Б, строим единичную эпюру \bar{M}_2 .

Далее формируем состояние «р» основной системы, прикладывая к ней внешнюю нагрузку. Строим грузовую эпюру M_p (рисунок 10.4, в).

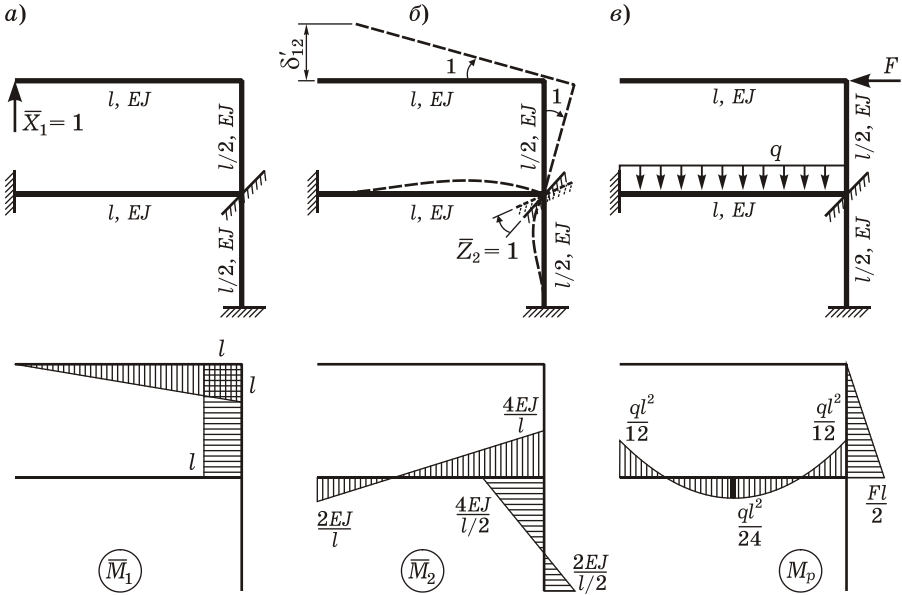


Рисунок 10.4

Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Перемещения находим, перемножая соответствующие эпюры:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot l \cdot l + \frac{l/2}{6EJ} (2 \cdot l \cdot l + 2 \cdot l \cdot l + l \cdot l + l \cdot l) = \\ &= \frac{5l^3}{6EJ} = \frac{5 \cdot 6^3}{6EJ} = \frac{180}{EJ} \text{ (м}^3\text{)}; \quad \Delta_{1p} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} ds = -\frac{l/2}{6EJ} \left(2 \cdot l \cdot \frac{Fl}{2} + l \cdot \frac{Fl}{2} \right) = \\ &= -\frac{Fl^3}{8EJ} = -\frac{20 \cdot 6^3}{8EJ} = -\frac{540}{EJ} \text{ (кН} \cdot \text{м}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Заметим, что перемещение δ'_{12} не равно результату перемножения эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , так как это произведение будет нулевым (эпюры находятся на разных участках). В то же время из рисунка 10.4, б видно, что указанное перемещение ненулевое.

Вырезаем жесткий узел и рассматриваем его равновесие в трех состояниях (рисунок 10.5). Составляя уравнение моментов, находим единичные и грузовую реакции:

$$\begin{aligned} r'_{21} &= -l = -6 \text{ м}; \\ r_{22} &= \frac{4EJ}{l} + \frac{4EJ}{l/2} = \frac{12EJ}{l} = \frac{12EJ}{6} = 2EJ \text{ (1/м)}; \end{aligned}$$

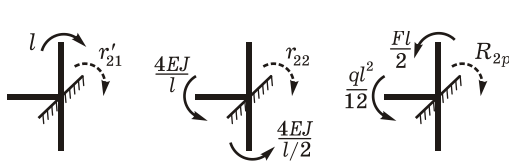


Рисунок 10.5

$$R_{2p} = \frac{ql^2}{12} + \frac{Fl}{2} = \frac{10 \cdot 6^2}{12} + \frac{20 \cdot 6}{2} = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения перемещения δ'_{12} воспользуемся 2-й теоремой Рэлея (6.34), согласно которой

$$\delta'_{12} = -r'_{21} = l = 6 \text{ м}.$$

Заметим, что величина δ'_{12} может быть найдена из геометрических соотношений по рисунку 10.4, б, однако это несколько сложнее.

Решение канонических уравнений. Подставив найденные величины в канонические уравнения, решим их и найдем X_1 и Z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{180}{EJ} X_1 + 6 Z_2 - \frac{540}{EJ} &= 0; \\ -6 X_1 + 2EJ \cdot Z_2 + 90 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$X_1 = 4,091 \text{ кН}; \quad Z_2 = -32,727/EJ \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M. На основании принципа суперпозиции

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p.$$

Строим «исправленные» единичные эпюры $\bar{M}_1 X_1$ и $\bar{M}_2 Z_2$, складываем их с M_p (рисунок 10.6). Получаем эпюру изгибающих моментов M в заданной системе (рисунок 10.7).

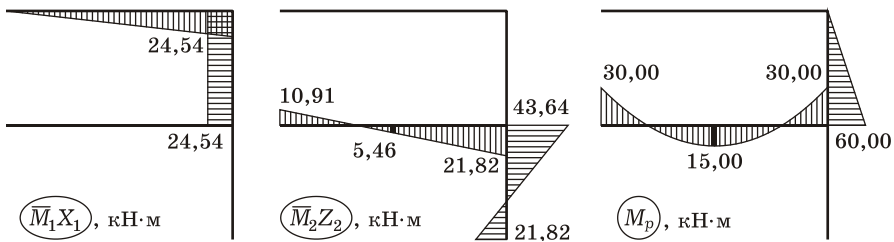


Рисунок 10.6

Статическая проверка эпюры M. Проверяем равновесие узла (рисунок 10.8):

$$\sum M_{\text{узла}} = 35,46 + 8,18 - 43,64 = 0.$$

Проверка выполняется.

Деформационная проверка эюры \underline{M} . Строим суммарную единичную эюру \underline{M}_Σ в статически определимой системе от единичных усилий, приложенных по направлениям реакций отброшенных связей (рисунок 10.9). Перемножая эюры M и \underline{M}_Σ , получаем:

$$\int_s \frac{M \underline{M}_\Sigma}{EJ} ds = \frac{l}{6EJ} \cdot 2 \cdot 24,54 \cdot 6 +$$

$$+ \frac{l/2}{6EJ} (2 \cdot 24,54 \cdot 6 - 2 \cdot 35,46 \cdot 6 + 24,54 \cdot 6 -$$

$$- 35,46 \cdot 6) + \frac{l}{6EJ} (-40,91 \cdot 1 + 4 \cdot 20,46 \cdot 4 - 8,18 \cdot 7) +$$

$$+ \frac{l/2}{6EJ} (-2 \cdot 43,64 \cdot 13 + 2 \cdot 21,82 \cdot 16 + 13 \cdot 21,82 - 43,64 \cdot 16) = 0.$$

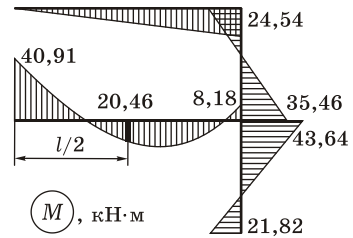


Рисунок 10.7

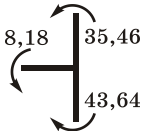


Рисунок 10.8

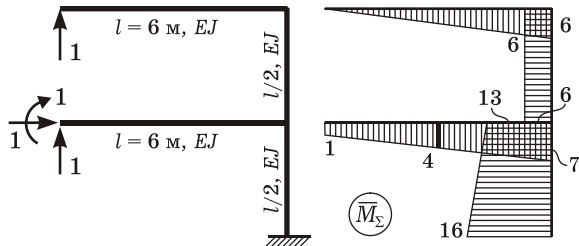


Рисунок 10.9

Проверка выполняется, следовательно, эюра изгибающих моментов построена верно.

10.3 Комбинированный метод расчета симметричных рам

В отличие от смешанного комбинированный метод расчета статически неопределимых систем предполагает применять методы сил и перемещений не одновременно, а последовательно.

10.3.1 Методика расчета. При определении усилий в симметричных рамах при действии несимметричной нагрузки удобно пользоваться следующей методикой:

- заданная нагрузка раскладывается на симметричную и обратносимметричную составляющие;
- на симметричное воздействие расчет ведется методом перемещений, на обратносимметричное – методом сил;
- результаты двух отдельных расчетов складываются.

Комбинированный метод расчета симметричных рам предполагает решение двух самостоятельных систем канонических уравнений. При этом общее число неизвестных иногда меньше, чем при раздельном применении методов сил и перемещений.

10.3.2 Пример расчета симметричной рамы. Рассмотрим симметричную раму, нагруженную несимметричной нагрузкой (рисунок 10.10, а). Степень статической неопределимости $n_c = 6$, кинематической неопределимости $n_k = 6$. При расчете этой рамы методом сил или перемещений придется решать систему шести канонических уравнений с шестью неизвестными. При наличии современной вычислительной техники это не является проблемой. Тем не менее, поищем способ сократить количество неизвестных.

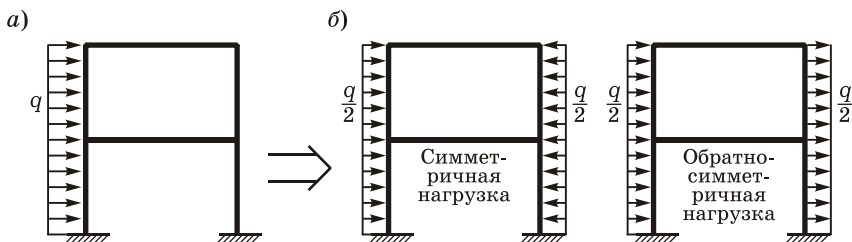


Рисунок 10.10

Разложим нагрузку на симметричную и обратносимметричную составляющие (рисунок 10.10, б).

Симметричное воздействие. Если использовать метод сил (рисунок 10.11, а), то количество неизвестных сократится с шести до четырех, так как обратносимметричные усилия X_1 и X_4 равны нулю (см. п. 7.9.2). Если же расчет вести методом перемещений, неизвестными являются углы поворота жестких узлов Z_1 и Z_2 (рисунок 10.11, б). Линейные перемещения узлов отсутствуют, а в силу симметрии $Z_3 = Z_1$ и $Z_4 = Z_2$. Поэтому в данном случае рационально выполнять расчет рамы *методом перемещений*.

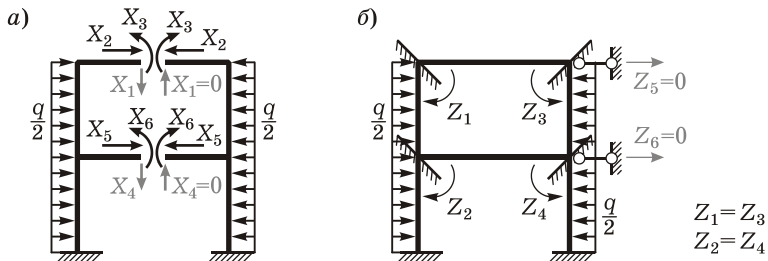


Рисунок 10.11

Обратносимметричное воздействие. Методом перемещений необходимо определить четыре неизвестных (два горизонтальных линейных и два угла поворота узлов). Два других связаны зависимостью $Z_3 = -Z_1$ и $Z_4 = -Z_2$ (рисунок 10.12, а). Если воспользоваться методом сил, то симметричные усилия будут равны нулю (см. п. 7.9.2), и останется всего два неизвестных X_1 и X_4 (рисунок 10.12, б). Поэтому при данном нагружении целесообразно расчет рамы выполнять *методом сил*.

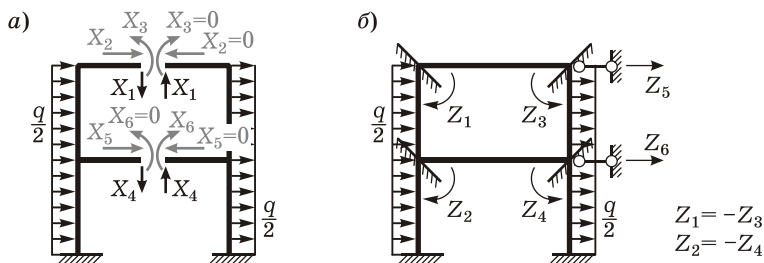


Рисунок 10.12

Далее необходимо построить эпюры изгибающих моментов от симметричного $M^{\text{симм}}$ и обратносимметричного $M^{\text{обр}}$ воздействий и сложить их. Получится эпюра M от заданной нагрузки:

$$M = M^{\text{симм}} + M^{\text{обр}}.$$

По готовой эпюре M строится эпюра Q , а по ней – N .

10.4 Комбинированный метод расчета рам в общем случае

10.4.1 Общие замечания. Для несимметричных рам, которые в одной части удобнее рассчитываются методом сил, в другой – методом перемещений, вместо смешанного можно применить комбинированный метод. При этом один из методов (сил или перемещений) является *главным*, другой – *вспомогательным*.

Общее число неизвестных в рассмотренном варианте комбинированного метода равно числу неизвестных смешанного метода. Поэтому для расчета подобных рам рациональным является и смешанный метод. Однако, особенно при «ручном» счете, комбинированный метод может оказаться более удобным, так как в нем главные неизвестные отделены от вспомогательных: вначале определяются вспомогательные, затем главные; при равном количестве неизвестных число совместно решаемых уравнений меньше.

Рассмотрим две разновидности комбинированного метода, применяемого для расчета несимметричных плоских рам.

10.4.2 Главный – метод сил, вспомогательный – метод перемещений. Если в качестве главного используется метод сил, то основная система статически неопределима, она образуется отбрасыванием лишних связей, но не всех. Для расчета ее статически неопределимой части на действие $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ... и нагрузки применяется метод перемещений.

Пример 10.2 Для рамы, у которой $l = 6$ м; $h = 4$ м; $F_1 = 50$ кН; $F_2 = 20$ кН (рисунок 10.13, а), требуется построить эпюру изгибающих моментов.

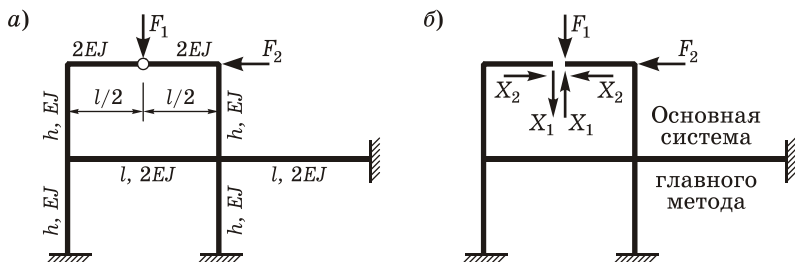


Рисунок 10.13

Определение количества неизвестных. Рама восемь раз статически неопределима и шесть раз кинематически неопределима. В верхней части удобно использовать метод сил, так как в ней две лишние связи, в нижней части – метод перемещений, так как здесь всего два неизвестных угла поворота узлов. Тогда количество неизвестных, как и по смешанному методу,

$$n = n_c^{\text{верх}} + n_k^{\text{ниж}} = 2 + 2 = 4.$$

Применим для расчета данной рамы комбинированный метод, выбрав в качестве главного метод сил, вспомогательного – метод перемещений.

Основная система. Удалим всего две лишние связи, разрезав раму по шарниру (рисунок 10.13, б). Приложим две неизвестные силы X_1 , X_2 . Полученная основная система статически неопределима. Для построения в ней эпюр M_1 , M_2 , M_p применим в качестве вспомогательного метод перемещений.

Канонические уравнения главного метода. Для определения двух неизвестных сил X_1 , X_2 составляем два канонических уравнения:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Единичная эпюра \bar{M}_1 в основной системе главного метода. Формируем состояние «1» основной системы, прикладывая по направлению X_1 единичную силу.

Считая эту силу внешней нагрузкой, решаем задачу методом перемещений. Его основная система показана на рисунке 10.14. Канонические уравнения имеют вид

$$r_{11}Z_1^{(1)} + r_{12}Z_2^{(1)} + R_{1p}^{(1)} = 0;$$

$$r_{21}Z_1^{(1)} + r_{22}Z_2^{(1)} + R_{2p}^{(1)} = 0.$$

Строим единичные и грузовую эпюры в основной системе вспомогательного метода (рисунок 10.15).

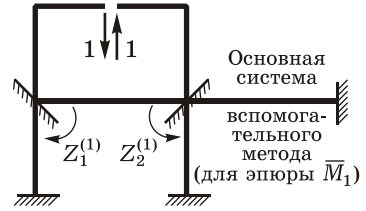


Рисунок 10.14

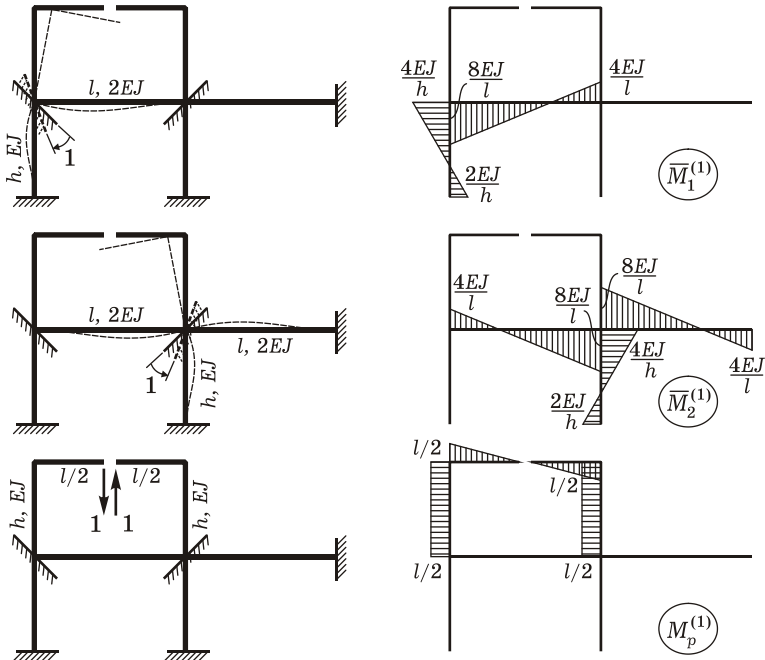


Рисунок 10.15

Вырезая узлы с введенными заделками и рассматривая их равновесие, находим реакции:

$$r_{11} = \frac{8EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = \frac{8EJ}{6} + \frac{4EJ}{4} = 2,333EJ \frac{1}{M};$$

$$r_{21} = r_{12} = -\frac{4EJ}{l} = -\frac{4EJ}{6} = -0,667EJ \frac{1}{M};$$

$$r_{22} = 2 \frac{8EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = 2 \frac{8EJ}{6} + \frac{4EJ}{4} = 3,667 EJ \frac{1}{m};$$

$$R_{1p}^{(1)} = -\frac{l}{2} = -3 \text{ м}; \quad R_{2p}^{(1)} = \frac{l}{2} = 3 \text{ м}.$$

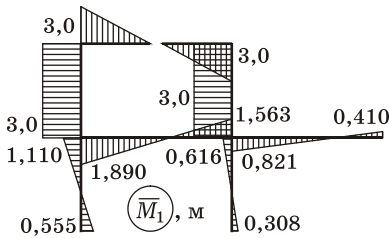


Рисунок 10.16

Из канонических уравнений

$$2,333Z_1^{(1)} - 0,667Z_2^{(1)} - 3/EJ = 0;$$

$$-0,667Z_1^{(1)} + 3,667Z_2^{(1)} + 3/EJ = 0$$

находим следующие значения вспомогательных неизвестных:

$$Z_1^{(1)} = \frac{1,110}{EJ} \text{ (м}^2\text{)}; \quad Z_2^{(1)} = -\frac{0,616}{EJ} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Далее строим эпюру \bar{M}_1 (рисунок 10.16) по зависимости

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_1^{(1)}Z_1^{(1)} + \bar{M}_2^{(1)}Z_2^{(1)} + M_p^{(1)}.$$

Единичная эпюра \bar{M}_2 в основной системе главного метода. Формируем состояние «2» основной системы, прикладывая по направлению X_2 единичную силу. Расчет ведем методом перемещений. Его основная система показана на рисунке 10.17. Канонические уравнения имеют вид

$$r_{11}Z_1^{(2)} + r_{12}Z_2^{(2)} + R_{1p}^{(2)} = 0;$$

$$r_{21}Z_1^{(2)} + r_{22}Z_2^{(2)} + R_{2p}^{(2)} = 0.$$

Единичные эпюры в основной системе вспомогательного метода сохраняют свой вид (см. рисунок 10.15):

$$\bar{M}_1^{(2)} = \bar{M}_1^{(1)}; \quad \bar{M}_2^{(2)} = \bar{M}_2^{(1)}.$$

Грузовая эпюра показана на рисунке 10.18.

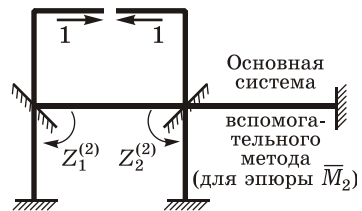


Рисунок 10.17

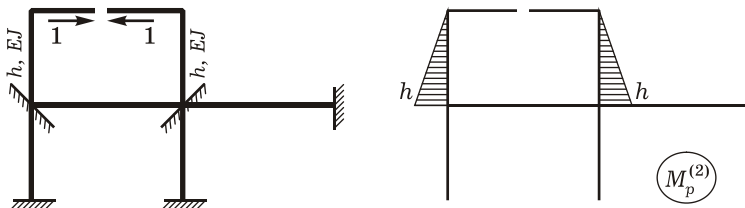


Рисунок 10.18

Единичные реакции сохраняют свои значения:

$$r_{11} = 2,333EJ \frac{1}{M}; \quad r_{21} = r_{12} = -0,667EJ \frac{1}{M}; \quad r_{22} = 3,667EJ \frac{1}{M}.$$

Грузовые реакции следующие: $R_{1p}^{(2)} = R_{2p}^{(2)} = -h = -4\text{ м}$.

Из канонических уравнений

$$2,333Z_1^{(2)} - 0,667Z_2^{(2)} - 4/EJ = 0;$$

$$-0,667Z_1^{(2)} + 3,667Z_2^{(2)} - 4/EJ = 0$$

находим следующие значения вспомогательных неизвестных:

$$Z_1^{(2)} = \frac{2,137}{EJ} (\text{м}^2); \quad Z_2^{(2)} = \frac{1,479}{EJ} (\text{м}^2).$$

Строим эпюру \bar{M}_2 (рисунок 10.19) по зависимости

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1^{(2)}Z_1^{(2)} + \bar{M}_2^{(2)}Z_2^{(2)} + M_p^{(2)}.$$

Грузовая эпюра M_p в основной системе главного метода. Формируем состояние «р» основной системы, прикладывая силы F_1 и F_2 . Расчет ведем методом перемещений. Его основная система показана на рисунке 10.20. Канонические уравнения следующие:

$$r_{11}Z_1^{(p)} + r_{12}Z_2^{(p)} + R_{1p}^{(p)} = 0;$$

$$r_{21}Z_1^{(p)} + r_{22}Z_2^{(p)} + R_{2p}^{(p)} = 0.$$

Единичные эпюры в основной системе вспомогательного метода сохраняют свой вид (см. рисунок 10.15):

$$\bar{M}_1^{(p)} = \bar{M}_1^{(1)}; \quad \bar{M}_2^{(p)} = \bar{M}_2^{(1)}.$$

Грузовая эпюра показана на рисунке 10.21.

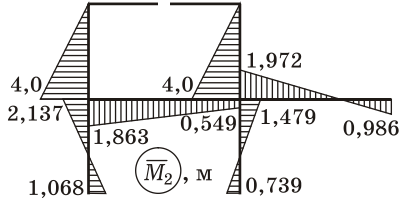


Рисунок 10.19

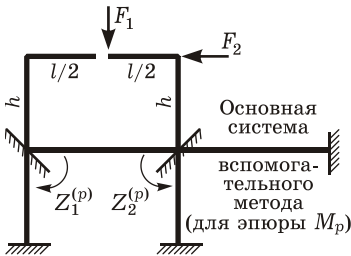


Рисунок 10.20

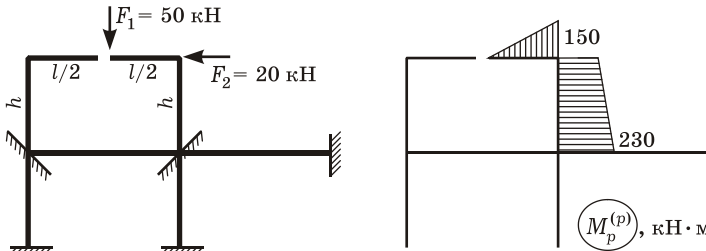


Рисунок 10.21

Единичные реакции сохраняют свои значения:

$$r_{11} = 2,333EJ \frac{1}{M}; \quad r_{21} = r_{12} = -0,667EJ \frac{1}{M}; \quad r_{22} = 3,667EJ \frac{1}{M}.$$

Грузовые реакции $R_{1p}^{(p)} = 0$; $R_{2p}^{(p)} = -230$ кН · м.

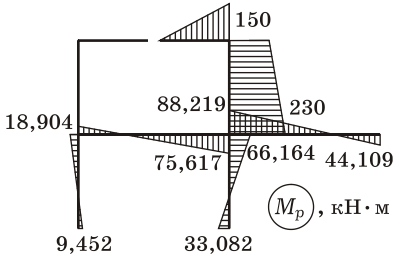


Рисунок 10.22

Канонические уравнения

$$2,333Z_1^{(p)} - 0,667Z_2^{(p)} = 0;$$

$$-0,667Z_1^{(p)} + 3,667Z_2^{(p)} - 230/EJ = 0$$

позволяют найти

$$Z_1^{(p)} = \frac{18,904}{EJ}; \quad Z_2^{(p)} = \frac{66,164}{EJ} \quad (\text{кН} \cdot \text{м}^3).$$

Строим эпюру M_p (рисунок 10.22) по зависимости

$$M_p = \bar{M}_1^{(p)}Z_1^{(p)} + \bar{M}_2^{(p)}Z_2^{(p)} + M_p^{(p)}.$$

Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Перемещения находим, перемножая соответствующие эпюры:

$$\delta_{11} = \int_S \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{86178}{EJ} \quad (\text{м}^3); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \int_S \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{1,973}{EJ} \quad (\text{м}^3);$$

$$\delta_{22} = \int_S \frac{\bar{M}_2^2}{EJ} ds = \frac{60,967}{EJ} \quad (\text{м}^3); \quad \Delta_{1p} = \int_S \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} ds = \frac{-264678}{EJ} \quad (\text{кН} \cdot \text{м}^3);$$

$$\Delta_{2p} = \int_S \frac{\bar{M}_2 M_p}{EJ} ds = \frac{196687}{EJ} \quad (\text{кН} \cdot \text{м}^3).$$

Решение канонических уравнений. Подставим найденные величины в канонические уравнения:

$$86,178X_1 + 1,973X_2 - 264678EJ = 0;$$

$$1,973X_1 + 60,967X_2 + 196687EJ = 0.$$

Отсюда

$$X_1 = 3148 \text{ кН}; \quad X_2 = -33,28 \text{ кН}.$$

Построение и проверка эпюры изгибающих моментов M . Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рисунке 10.23. Она построена по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p.$$

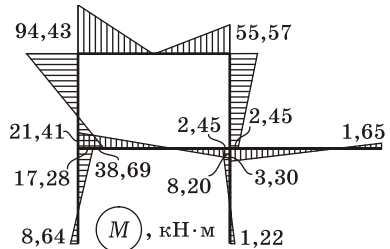


Рисунок 10.23

Правильность ее подтверждается деформационной проверкой:

$$\int_S \frac{M\bar{M}_1}{EJ} ds = 0; \quad \int_S \frac{M\bar{M}_2}{EJ} ds = 0.$$

10.4.3 Главный – метод перемещений, вспомогательный – метод сил. Если в качестве главного выбирается метод перемещений, то основная система кинематически неопределима, т. е. получается устранением не всех перемещений узлов. В этом случае основная система будет содержать нестандартные элементы (не рассмотренные в таблицах Б.1, Б.2 приложения Б), для расчета которых на действие $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1, \dots$ и нагрузки потребуется применение метода сил.

Пример 10.3 Рассмотрим раму (рисунок 10.24, а), которая шесть раз статически неопределима и четыре раза кинематически неопределима. Если в левой части использовать метод сил, в правой – метод перемещений, то будет три неизвестных.

Применим комбинированный метод, приняв основную систему по методу перемещений, устранив только два угла поворота узлов (рисунок 10.24, б).

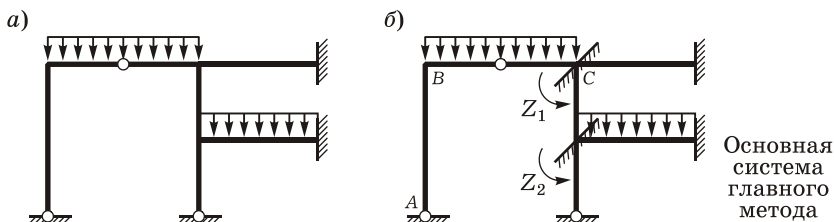


Рисунок 10.24

Основная система кинематически неопределима, так как содержит «нестандартный» элемент ABC . Для построения эпюр \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , M_p , необходимых для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, нельзя воспользоваться данными таблиц Б.2, Б.3 приложения Б. Нужно вначале рассчитать эту часть отдельно на приложенную к ней нагрузку и единичный поворот узла C (рисунок 10.25), используя метод сил как вспомогательный аппарат.

Дальнейший расчет ведется методом перемещений. Подробно этот пример рассмотрен в [11].

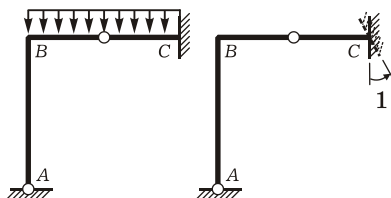


Рисунок 10.25

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Бернштейн, С. А.* Избранные труды по строительной механике / С. А. Бернштейн. – М.: Госстройиздат, 1961. – 452 с.
- 2 *Борисевич, А. А.* Строительная механика: учеб. пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
- 3 *Бурчаков, Ю. И.* Строительная механика: учеб. пособие для студентов вузов / Ю. И. Бурчаков, В. Е. Гнедин, В. М. Денисов. – М.: Высш. шк., 1983. – 255 с.
- 4 *Дарков, А. В.* Строительная механика: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
- 5 *Довнар, Е. П.* Строительная механика: учеб. для вузов по спец. «Строительство» / Е. П. Довнар, Л. И. Коршун. – Минск: Выш. шк., 1986. – 310 с.
- 6 *Киселев, В. А.* Строительная механика. Общий курс: учеб. для вузов / В. А. Киселев – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
- 7 *Лащеников, Б. Я.* Строительная механика: лекции для студентов строит. спец. Ч. 1 / Б. Я. Лащеников. – М.: РИО МИИТа, 1973. – 160 с.
- 8 *Леонтьев, Н. Н.* Основы строительной механики стержневых систем: учеб. / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
- 9 *Рабинович, И. М.* Курс строительной механики: учеб. для строительных вузов. Ч. II / И. М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1954.
- 10 *Ржаницын, А. Р.* Строительная механика: учеб. пособие для строит. спец. вузов / А. Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
- 11 Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): учеб. пособие для студентов вузов; под ред. Г. К. Клейна. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
- 12 *Самарский, А. А.* Численные методы: учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
- 13 *Смирнов, В. А.* Строительная механика: учеб. для вузов / В. А. Смирнов, С. А. Иванов, М. А. Тихонов. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
- 14 *Снитко, Н. К.* Строительная механика: учеб. для вузов / Н. К. Снитко. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.
- 15 *Старовойтов, Э. И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
- 16 *Старовойтов, Э. И.* Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.; М. : Физматлит, 2008. – 384 с.
- 17 Строительная механика. Основы теории с примерами расчета: учеб. / А. Е. Саргсян [и др.]; под ред. А. Е. Саргсяна. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
- 18 Строительная механика. Статика упругих систем / А. В. Александров [и др.]. – М.: Высш. шк., 2007. – 511 с.
- 19 Строительная механика. Стержневые системы: учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.]; под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
- 20 *Чирас, А. А.* Строительная механика: Теория и алгоритмы: учеб. для вузов / А. А. Чирас. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А (справочное)

ВРЕМЕННЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ ОТ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ

(по ТКП 45-3.03-232-2011 (02250) «Мосты и трубы.
Строительные нормы проектирования»)

Нормативную временную вертикальную нагрузку от подвижного состава железных дорог СК следует принимать (с учетом перспективы развития транспортных средств железных дорог) в виде объемлющих максимальных эквивалентных нагрузок v , кН/м пути, полученных от отдельных групп сосредоточенных грузов весом до 24,5К кН и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью 9,81К кН/м пути.

Показатель К означает класс устанавливаемой нагрузки, который принимается равным 14.

Интенсивность нормативной эквивалентной нагрузки v для загрузки однозначных и отдельных участков двузначных линий следует принимать согласно таблице А.1. При этом учитываются длина загрузки участка линии влияния λ (рисунок А.1) и относительное положение ее вершины $\alpha = a/\lambda$ (a – наименьшее расстояние от вершины линии влияния до ее нулевой точки).

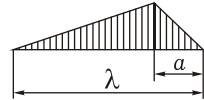


Рисунок А.1

Вес нагрузки, приходящийся на 1 м пути, следует принимать равным значениям v при $\alpha = a/\lambda = 0,5$, но не более 19,62К кН/м пути.

Временную вертикальную нагрузку от порожнего подвижного состава следует принимать равной 13,7 кН/м пути. Нормативную нагрузку для расчета мостов и труб на путях железных дорог промышленных предприятий, где предусмотрено обращение особо тяжелого железнодорожного подвижного состава, следует принимать с учетом его веса.

Усилия (рассматриваемого знака) по линиям влияния, состоящим из нескольких участков, следует определять суммированием результатов загрузки отдельных, рядом расположенных участков всей или части линии влияния.

В соответствии с очертанием линий влияния и значениями λ и α для участков следует загружать:

- два участка рассматриваемого знака, расположенные рядом или разделенные участком иного знака, – при общей длине этих (двух или трех) участков менее 80 м;
- один участок рассматриваемого знака – при длине 80 м и более;
- остальные участки того же знака – нагрузкой 9,81К кН/м пути.

Разделяющие участки иного знака следует загружать нагрузкой 13,73 кН/м пути, а при наличии таких участков длиной до 20 м один из них не загружают.

Таблица А.1 – Нормативная временная вертикальная нагрузка СК

Длина загрузки λ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки v , кН/(м пути), при			
	К = 1		К = 14	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$
1	49,03	49,03	686,5	686,5
1,5	39,15	34,25	548,1	479,5
2	30,55	26,73	427,7	374,2
3	24,16	21,14	338,3	296,0
4	21,69	18,99	303,7	265,8
5	20,37	17,82	285,2	249,5
6	19,50	17,06	272,9	238,8
7	18,84	16,48	263,7	230,7
8	18,32	16,02	256,4	224,4
9	17,87	15,63	250,2	218,9
10	17,47	15,28	244,5	214,0
12	16,78	14,68	234,9	205,5
14	16,19	14,16	226,6	198,3
16	15,66	13,71	219,3	191,8
18	15,19	13,30	212,7	186,0
20	14,76	12,92	206,6	180,8
25	13,85	12,12	193,9	169,7
30	13,10	11,46	183,4	160,5
35	12,50	10,94	175,0	153,2
40	12,01	10,51	168,2	147,2
45	11,61	10,16	162,6	142,2
50	11,29	9,875	158,0	138,3
60	10,80	9,807	151,1	137,3
70	10,47	9,807	146,6	137,3
80	10,26	9,807	143,6	137,3
90	10,10	9,807	141,4	137,3
100	10,00	9,807	140,0	137,3
110	9,944	9,807	139,3	137,3
120	9,895	9,807	138,6	137,3
130	9,865	9,807	138,1	137,3
140	9,846	9,807	137,9	137,3
150 и более	9,807	9,807	137,3	137,3

Примечания

1 Эквивалентные нагрузки, рассчитываемые при значениях параметров $1,5 \leq \lambda \leq 50$ м ($\alpha = 0$ и $\alpha = 0,5$) и $\lambda > 50$ м ($\alpha = 0$), найдены по формуле

$$v = \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04\lambda}} + \frac{43,149}{\lambda^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) K, \quad (\text{А.1})$$

где $e = 2,718$ — основание натуральных логарифмов.

2 Для промежуточных значений длины загрузки λ и промежуточных положений вершин линий влияния $\alpha \leq 0,5$ значения нагрузки v следует определять интерполяцией.

Приложение Б
(справочное)

ОПОРНЫЕ РЕАКЦИИ И ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ
В ОТДЕЛЬНЫХ ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ

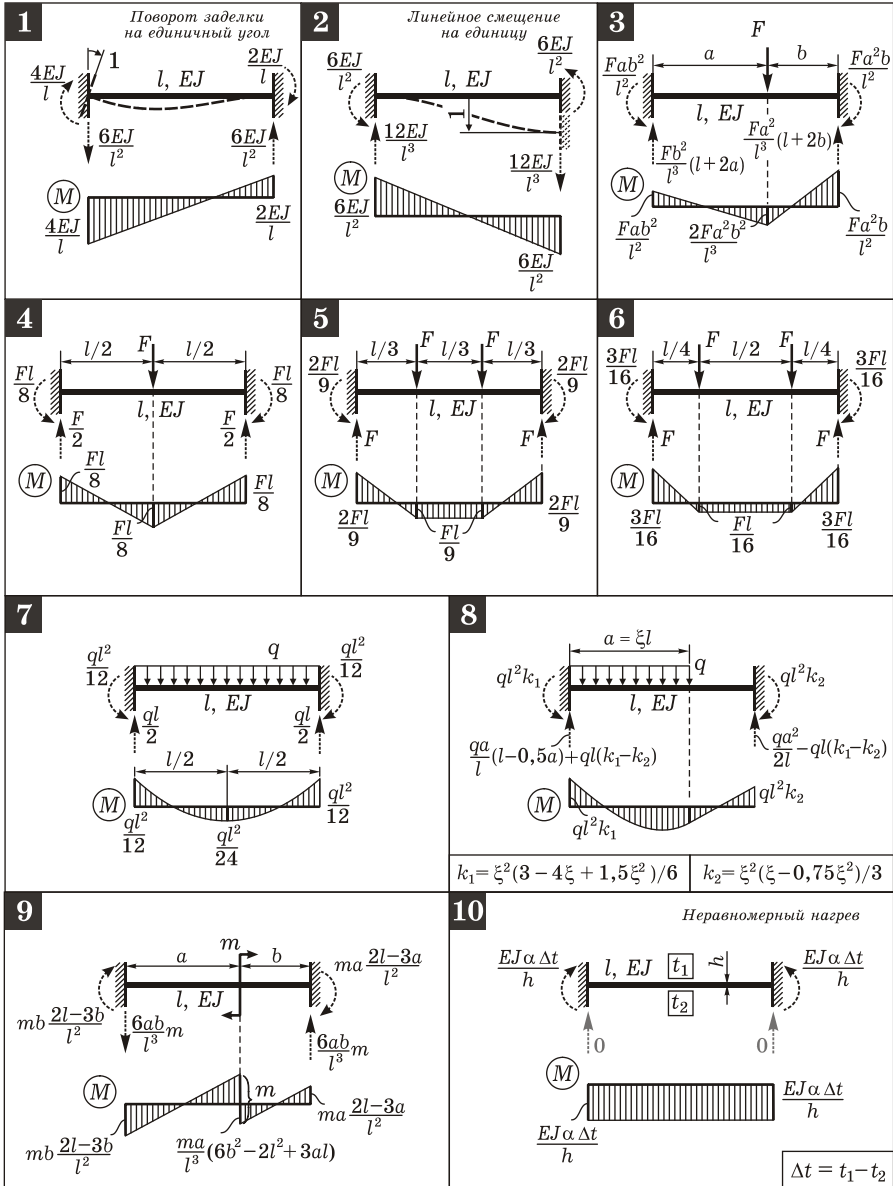
Таблица Б.1 – Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов
в статически определимых балках

<p>1</p> <p> Fb/l, F, a, b, l, Fa/l, Fab/l </p>	<p>2</p> <p> $l/2$, F, $l/2$, $F/2$, $F/2$, $Fl/4$ </p>	<p>3</p> <p> q, $ql/2$, $l/2$, $l/2$, $ql/2$, $ql^2/8$ </p>
<p>4</p> <p> l, a, b, q, $qa^2/(2l)$, $qa(b+0,5a)/l$, $qa^2b/(2l)$ </p>	<p>5</p> <p> a, m, b, l, m/l, m/l, ma/l, mb/l </p>	<p>6</p> <p> Fl, F, l, Fl </p>
<p>7</p> <p> $ql^2/2$, q, ql, $l/2$, $l/2$, $ql^2/2$, $ql^2/8$ </p>	<p>8</p> <p> m, 0, m, m </p>	<p>9</p> <p> l, c, F, Fc/l, $F(c+l)/l$, Fc </p>

Таблица Б.2 – Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов в статически неопределимых балках «заделка – шарнир»

<p>1 Поворот заделки на единичный угол</p>	<p>2 Линейное смещение на единицу</p>	<p>3</p>
<p>4</p>	<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p> <p>$k_1 = \xi^2(2 - \xi)^2/8$</p>	<p>9</p> <p>$k_2 = \xi^2(2 - \xi^2)/8$</p>
<p>10</p>	<p>11</p>	<p>12 Неравномерный нагрев</p> <p>$\Delta t = t_1 - t_2$</p>

Таблица Б.3 – Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов в статически неопределимых балках «заделка – заделка»



Учебное издание

ЯРОВАЯ Анна Владимировна

**Строительная механика.
Статика стержневых систем**

Учебное пособие

Редактор Н. А. Дашкевич
Технический редактор В. Н. Кучерова
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 20.02.2013 г. Формат $60 \times 84^{1/16}$
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,04. Уч.-изд. л. 24,18. Тираж 1000 экз.
Зак. № 641. Изд. № 135.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛП № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34