

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. Ю. СОКОЛЬСКИЙ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Гомель 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра высшей математики

И. М. ДЕРГАЧЁВА, А. Ю. СОКОЛЬСКИЙ

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

*Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета*

Гомель 2012

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143

Д36

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики
А. М. Щербо (УО «БелГУТ»).

Дергачёва, И. М.

Д36 Линейная и векторная алгебра : учеб.-метод. пособие по выполнению расчетно-графической работы / И. М. Дергачёва, А. Ю. Сокольский ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2012. – 40 с.
ISBN 978-985-468-984-5

Изложен краткий теоретический материал, который необходим для выполнения расчетно-графической работы по таким разделам курса высшей математики, как «Линейная и векторная алгебра». Разобрано большое количество типовых примеров. Приведены индивидуальные задания для данной расчетно-графической работы.

Предназначено для студентов всех специальностей.

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143

ISBN 978-985-468-984-5

© Дергачёва И. М., Сокольский А. Ю., 2012

© Оформление. УО «БелГУТ», 2012

Если определитель неоднородной системы отличен от нуля, т. е. $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (1.2)$$

где Δ_i ($i=1, 2, \dots, n$) – определитель, полученный из определителя исходной системы заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Пример 1.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 15. \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= (-5)(-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 10(5+5) = 100. \end{aligned}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы его найти, вычислим определители Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 и Δ_4 :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & -2 & 3 & -3 \\ 5 & 9 & 4 & 4 \\ 15 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 4 \\ 0 & -29 & -9 & -15 \\ 0 & -30 & -10 & -14 \end{vmatrix} = 10 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -29 & -9 & -15 \\ 15 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\
&= -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix} = (-10)2(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 40 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 40(40 - 35) = 40 \cdot 5 = 200;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 15 & 3 & -3 \\ 9 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 15 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 15 & 1 & -5 \\ 9 & 5 & -5 & -5 \\ 3 & 15 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5(-5)1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -25 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-25)1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-25)4 = -100;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 15 & -3 \\ 9 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 15 & -5 \\ 9 & 0 & 5 & -5 \\ 3 & -6 & 15 & -5 \end{vmatrix} = (-2)5(-5)1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 50 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 50 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} (0 - (-2)) = 50 \cdot 2 = 100;
\end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 15 \\ 9 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & -1 & 15 \end{vmatrix} = (-2)5 \cdot 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -10(-30 + 3 + 0 + 45 + 2 - 0) = (-10)20 = -200.$$

По формулам (1.2) находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{200}{-200} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{100}{-200} = 0.5;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{100}{-200} = -0.5; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-200}{-200} = 1.$$

Матричный метод

Пусть для системы (1.1) матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

невырожденная, т. е. $\Delta A \neq 0$. Тогда для A существует единственная

обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические

дополнения элементов матрицы A ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$).

Введем в рассмотрение вектор-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1.1) можно записать в матричной форме $AX = B$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1} , получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, откуда $X = A^{-1}B$ или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Пример 1.2. Решить систему уравнений (см. пример 1.1) матричным методом.

Решение. Имеем $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 9 & 9 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$,

$\Delta A = 100$.

Находим алгебраические дополнения A_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 16 - 36 - 54 - 36 + 16 + 54 = -40;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-16 + 36 - 54 + 36 - 16 + 54) = -40;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -36 - 24 + 81 + 81 + 24 - 36 = 90;$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -(36 - 24 - 81 - 81 + 24 + 36) = 90;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-8 - 12 + 18 + 12 - 8 + 18) = -20;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 12 + 18 - 12 - 8 + 18 = 20;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-18 + 12 - 27 - 27 + 12 + 18) = 30;$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 12 - 27 - 27 + 12 - 18 = -30;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 9 - 4 + 9 + 6 - 4 = 10;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 9 + 4 - 9 + 6 + 4) = 10;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 9 - 6 + 6 - 9 + 4 = -10;$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 + 9 - 6 + 6 + 9 - 4) = -10;$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 27 - 8 - 27 + 12 + 8) = 30;$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 27 + 8 - 27 + 12 - 8 = -30;$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 9 & 9 & 4 \end{vmatrix} = -(-8 - 27 + 18 + 18 + 27 - 8) = -20;$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 27 + 18 + 18 - 27 - 8 = 20.$$

$$\text{Обратная матрица } A^{-1} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -40 & -20 & 10 & 30 \\ -40 & 20 & 10 & -30 \\ 90 & 30 & -10 & -20 \\ 90 & -30 & -10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Находим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -40 & -20 & 10 & 30 \\ -40 & 20 & 10 & -30 \\ 90 & 30 & -10 & -20 \\ 90 & -30 & -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{100} \begin{pmatrix} -40 \cdot 0 + (-20)15 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 15 \\ -40 \cdot 0 + 20 \cdot 15 + 10 \cdot 5 + (-30)15 \\ 90 \cdot 0 + 30 \cdot 15 + (-10)5 + (-20)15 \\ 90 \cdot 0 + (-30)15 + (-10)5 + 20 \cdot 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 200 \\ -100 \\ 100 \\ -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$ – решение данной системы.

Метод Гаусса

Пусть дана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n :

нуля. *Базисным минором матрицы* A называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Для того, чтобы система (1.4) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

системы (1.4) и ранг так называемой расширенной матрицы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

системы были равны, т.е. $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = r$. Если $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$ и $r = n$, то система (1.4) имеет единственное решение; если $r < n$, то система (1.4) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n - r)$ неизвестных (переменных).

Для однородной системы уравнений $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$, поэтому она всегда совместна. Если $r < n$, система имеет бесконечное множество решений; если $r = n$, она имеет единственное (нулевое) решение.

Переменные, коэффициенты при которых составляют базисный минор основной матрицы A системы (1.4), называются *базисными (главными)*. Переменные, коэффициенты при которых не входят в базисный минор, называются *свободными*. Свободные переменные не могут выражаться через базисные и принимают произвольные значения.

Пример 1.3. Решить систему (см. пример 1.1) методом Гаусса.

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 15 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 15 \end{array} \right).$$

Умножая первую строку матрицы поочередно на (-2) , (-9) , (-3) и прибавляя соответственно ко второй, третьей и четвертой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & -1 & -5 & 15 \end{array} \right).$$

Умножив вторую строку полученной матрицы на $\left(-\frac{6}{4}\right)$ и прибавив к четвертой строке, получим новую матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \end{array} \right).$$

Умножив третью строку последней матрицы на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и прибавив к четвертой строке, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{array} \right).$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_2 + x_3 - 5x_4 = 15, \\ -5x_3 - 5x_4 = 5, \\ 5x_4 = -10. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -2$, третье уравнение даёт $x_3 = -\frac{1}{5}(5 + 5x_4) = 1$, второе — $x_2 = -\frac{1}{4}(15 + 5x_4 - x_3) = -1$, а первое — $x_1 = 2$.

Пример 1.4. Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее решение и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Проверим совместность системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

В расширенной матрице

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right)$$

умножим первую строку на (-2) , затем на (-5) и сложим соответственно со второй и четвёртой строками, из третьей строки вычтем первую:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array} \right).$$

Далее умножим вторую строку на (-2) , затем на (-3) и сложим соответственно с третьей и четвертой строками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ясно, что $\text{rang}(A) = \text{rang}(\tilde{A}) = 2 < n$ ($n = 4$), следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Так как $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмём x_1 и x_2 .

Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = -1 - 5x_3 + 7x_4,$$

$$x_1 = 3 + 2x_4 - 5x_3 - 3x_2 = 3 + 2x_4 - 5x_3 - 3(-1 - 5x_3 + 7x_4) = 6 - 26x_3 + 17x_4.$$

Общее решение системы: $\bar{x} = (6 - 26x_3 + 17x_4, -1 + 7x_3 - 5x_4, x_3, x_4)$, $x_3, x_4 \in R$.

Пусть, например, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$. Тогда $\bar{x}_4 = (-11, 4, 0, -1)$ – частное решение этой системы.

2 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Вектором называется направленный отрезок. Если даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2.1)$$

Длина вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.2)$$

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

При сложении (вычитании) векторов, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты складываются (вычитаются), т. е. если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \quad (2.3)$$

При умножении вектора на число его координаты нужно умножить на это число: $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$.

Проекцией вектора \vec{a} на ось l называется число

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \quad (2.4)$$

где φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора \vec{a} .

Линейной комбинацией векторов \vec{a}_i называется вектор \vec{a} , определяемый по формуле $\vec{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$, где λ_i – некоторые числа.

Если для системы n векторов \vec{a}_i равенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0 \quad (2.5)$$

верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется *линейно независимой*. В противном случае она называется *линейно зависимой*. Систему упорядоченных линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в пространстве V_n называют *базисом*. Любой вектор \vec{a} в пространстве можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, т.е. представить в виде $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$, где x_1, x_2, \dots, x_n – координаты вектора \vec{a} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 , называется число λ , удовлетворяющее равенству $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x; y; z)$, точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и числом λ задаётся равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам ($\lambda = 1$), то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} определяется формулами

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \operatorname{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{пр}_b \vec{a}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В частности,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (2.7)$$

Работа A силы \vec{F} , произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|\vec{s}|$, определяемом \vec{s} , вычисляется по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos(\vec{F}, \vec{s}). \quad (2.8)$$

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трём условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

В частности,

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (2.9)$$

и

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{пар.}}, \quad (2.10)$$

где $S_{\text{пар.}}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и

\vec{b} . И, значит, $S_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Координаты векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (2.11)$$

Вращающий момент \vec{M} силы \vec{F} , приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A ,

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}. \quad (2.12)$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

В частности,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарны.} \quad (2.14)$$

Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды, построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, соответственно равны

$$V_{\text{параллелеп.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \quad \text{и} \quad V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (2.15)$$

Пример 2.1. В некотором базисе даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис, и найти координаты вектора \vec{e} в этом базисе.

$$\vec{a} = (1; 2; 9; 3), \quad \vec{b} = (1; -2; 9; -3), \quad \vec{c} = (1; 3; 4; 2), \quad \vec{d} = (1; -3; 4; -2), \\ \vec{e} = (0; 15; 5; 15).$$

Решение. Вычисляем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 9 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-5)1(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 10(-10 + 0 + 3 + 15 - 0 + 2) = 100 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис и вектор \vec{e} линейно выражается через базисные векторы:

$$\vec{e} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} + x_4\vec{d},$$

т.е.

$$(0; 15; 5; 15) = x_1(1; 2; 9; 3) + x_2(1; -2; 9; -3) + x_3(1; 3; 4; 2) + x_4(1; -3; 4; -2).$$

Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 15, \\ 9x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$$

Решая систему (см. примеры 1.1–1.3), получим: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$. Поэтому

$$\vec{e} = (2; -1; 1; -2) = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d}.$$

Пример 2.2. Даны векторы $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$; $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти: а) $(2\vec{m} - 5\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 4\vec{n})$; б) $\text{пр}_{\vec{n}}(\vec{m} + 4\vec{n})$;

в) $\cos(\vec{m}, 4\vec{n})$.

Решение. Воспользуемся формулами (2.4) и (2.6).

а) Вычисляем:

$$\begin{aligned} 2\vec{m} - 5\vec{n} &= 2(\vec{a} - 2\vec{b}) - 5(3\vec{a} + 4\vec{b}) = -13\vec{a} - 24\vec{b}, \\ \vec{m} + 4\vec{n} &= (\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(3\vec{a} + 4\vec{b}) = 13\vec{a} + 14\vec{b}, \\ (2\vec{m} - 5\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 4\vec{n}) &= (-13\vec{a} - 24\vec{b}) \cdot (13\vec{a} + 14\vec{b}) = -169\vec{a}^2 - 494\vec{a}\vec{b} - \\ &- 336\vec{b}^2 = -169|\vec{a}|^2 - 494|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) - 336|\vec{b}|^2 = \\ &= -169 \cdot 4^2 - 494 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2}\right) - 336 \cdot 2^2 = -2072. \end{aligned}$$

б) Пусть $\vec{c} = \vec{m} + 4\vec{n} = (\vec{a} - 2\vec{b}) + 4(3\vec{a} + 4\vec{b}) = 13\vec{a} + 14\vec{b}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\vec{n}}\vec{c} &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}, \\ \vec{c} \cdot \vec{n} &= (13\vec{a} + 14\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}) = 39\vec{a}^2 + 94\vec{a}\vec{b} + 56\vec{b}^2 = \\ &= 39|\vec{a}|^2 + 94|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 56|\vec{b}|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 39 \cdot 4^2 + 94 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 56 \cdot 2^2 = 472; \\
|\vec{n}| &= \sqrt{\vec{n}^2} = \sqrt{(3\vec{a} + 4\vec{b})^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 + 24|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 16|\vec{b}|^2} = \\
&= \sqrt{9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 16 \cdot 2^2} = \sqrt{112}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\vec{n}}(\vec{m} + 4\vec{n}) = \frac{472}{\sqrt{112}}.$$

$$\text{в) } \cos(\vec{m}, 4\vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot 4\vec{n}}{|\vec{m}||4\vec{n}|}.$$

$$\text{Пусть } 4\vec{n} = 4(3\vec{a} + 4\vec{b}) = 12\vec{a} + 16\vec{b}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\vec{m} \cdot 4\vec{n} &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (12\vec{a} + 16\vec{b}) = 12\vec{a}^2 - 8\vec{a}\vec{b} - 32\vec{b}^2 = \\
&= 12|\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) - 32|\vec{b}|^2 = 12 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2} \right) - 32 \cdot 2^2 = 96;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{m}| &= \sqrt{\vec{m}^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 4 \cdot 2^2} = 4\sqrt{3}; \\
|4\vec{n}| &= \sqrt{(12\vec{a} + 16\vec{b})^2} = 4\sqrt{9\vec{a}^2 + 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2} = \\
&= 4\sqrt{9|\vec{a}|^2 + 24|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 16|\vec{b}|^2} = \\
&= 4\sqrt{9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 \cdot 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 16 \cdot 2^2} = 4\sqrt{112}.
\end{aligned}$$

В результате получим:

$$\cos(\vec{m}, 4\vec{n}) = \frac{96}{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{112}} \approx 0,33.$$

Пример 2.3. Даны векторы $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 2)$, $\vec{a}_3 = (3; 5; 0)$. Необходимо: а) проверить компланарность векторов \vec{a}_1 , $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$; б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы \vec{a}_1 , \vec{a}_3 ; в) вычислить скалярное произведение векторов $2\vec{a}_1$ и $3\vec{a}_2$ и найти модуль их векторного произведения; г) найти проекцию вектора \vec{a}_1 на вектор $2\vec{a}_2$ и $\cos(\vec{a}_1, 2\vec{a}_2)$.

Решение. Воспользуемся формулами (2.6), (2.7), (2.9), (2.11), (2.13) и (2.14):

а) векторы \vec{a}_1 , $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$ компланарны, если $\vec{a}_1(2\vec{a}_2)(-\vec{a}_3) = 0$.

Вычисляем:

$$\vec{a}_1(2\vec{a}_2)(-\vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 40 + 72 + 80 - 0 = 192 \neq 0, \quad \text{т.е.}$$

векторы \vec{a}_1 , $2\vec{a}_2$, $-\vec{a}_3$ не компланарны;

б) так как $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $\vec{a}_3 = (3; 5; 0)$ и $\frac{4}{3} \neq \frac{0}{5} \neq \frac{4}{0}$, то векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_3 не коллинеарны. Поскольку $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 12 \neq 0$, то векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_3 не ортогональны;

в) находим: $2\vec{a}_1 = (8; 0; 8)$, $3\vec{a}_2 = (-3; 9; 6)$,

$$2\vec{a}_1 \cdot 3\vec{a}_2 = 8(-3) + 0 \cdot 9 + 8 \cdot 6 = 24.$$

Векторное произведение

$$2\vec{a}_1 \times 3\vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 8 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} \vec{i}; - \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \vec{j}; \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} \vec{k} \right) = -72\vec{i} - 72\vec{j} + 72\vec{k};$$

$$|2\vec{a}_1 \times 3\vec{a}_2| = \sqrt{(-72)^2 + (-72)^2 + 72^2} = 72\sqrt{3};$$

$$\text{г) пр}_{2\vec{a}_2} \vec{a}_1 = \frac{\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2}{|2\vec{a}_2|}, \quad \cos(\vec{a}_1, 2\vec{a}_2) = \frac{\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2}{|\vec{a}_1| |2\vec{a}_2|}.$$

Так как $\vec{a}_1 = (4; 0; 4)$, $2\vec{a}_2 = (-2; 6; 4)$, то

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad |2\vec{a}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{14},$$

$$\vec{a}_1 \cdot 2\vec{a}_2 = 4(-2) + 0 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 8.$$

Тогда

$$\text{пр}_{2\vec{a}_2} \vec{a}_1 = \frac{8}{2\sqrt{14}} = \frac{2}{7}\sqrt{14}; \quad \cos(\vec{a}_1, 2\vec{a}_2) = \frac{8}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \approx 0,19.$$

Пример 2.4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2; 3; 4)$, $B(4; 7; 3)$, $C(2; 1; 2)$ и $D(0; 4; -5)$.

Вычислить: а) площадь грани ABD ; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра CD и вершины A и B ; в) объем пирамиды $ABCD$; г) сделать чертёж.

а) Из формулы (2.10) следует, что

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AD}|. \quad \text{Находим:}$$

$$\overline{AB} = (2; 4; -1), \quad \overline{AD} = (-2; 1; -9),$$

$$\overline{AB} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -35\vec{i} + 20\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \sqrt{(-35)^2 + 20^2 + 10^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1725} \text{ кв. ед.}$$

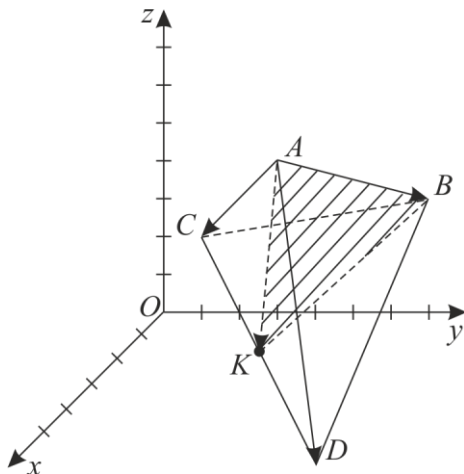


Рисунок 2.1

б) Середина ребра CD находится в точке $K(1; 2, 5; -1, 5)$,
 $\left(x_K = \frac{2+0}{2} = 1; y_K = \frac{1+4}{2} = 2,5; z_K = \frac{2-5}{2} = -1,5\right)$.

Далее,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} |\overline{AK} \times \overline{AB}|, \quad \overline{AK} = (-1; -0,5; -5,5),$$

$$\overline{AK} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -0,5 & -5,5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 22,5\vec{i} - 12\vec{j} - 3\vec{k},$$

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \sqrt{22,5^2 + (-12)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{659,25} \text{ кв. ед.}$$

в) На основании (2.15) $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} |\overline{ABADAC}|$. Поскольку $\overline{AC} = (0; -2; -2)$,

$$\overline{ABADAC} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -60,$$

то

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} |-60| = 10 \text{ куб. ед.}$$

г) Чертеж пирамиды приведен на рисунке 2.1.

Пример 2.5. Даны три силы:

$$\vec{F}_1 = (2; 3; -5), \quad \vec{F}_2 = (4; -3; -4),$$

$$\vec{F}_3 = (0; 7; 2), \quad \text{приложенные к точке } A(1; 4; 6). \text{ Вычислите:}$$

а) работу, производимую

равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь

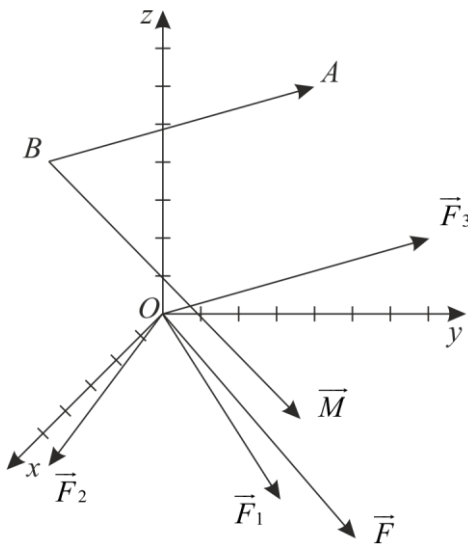


Рисунок 2.2

прямолинейно, перемещается в точку $B(2; -3; 4)$; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B ; в) сделать чертёж.

Решение. Воспользуемся формулами (2.1), (2.8), (2.12).

а) Так как $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (6; 7; -7)$, $\overline{AB} = \vec{s} = (1; -7; -2)$, то $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 6 \cdot 1 + 7(-7) + (-7)(-2) = -29$.

б) Момент силы $\overline{M} = \overline{BA} \times \vec{F}$, $BA = (-1; 7; 2)$,

$$\overline{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 7 & 2 \\ 6 & 7 & -7 \end{vmatrix} = -63\vec{i} + 5\vec{j} - 49\vec{k}.$$

Следовательно,

$$|\overline{M}| = \sqrt{(-63)^2 + 5^2 + (-49)^2} = \sqrt{6395}.$$

в) Чертеж приведен на рисунке 2.2.

3 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ “ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА”

Задача 1

Решить систему линейных уравнений:

- а) по формулам Крамера;
- б) матричным методом;
- в) методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = -7. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -3. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -11. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 11, \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -21, \\ 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 20, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 22. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = -3, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 4x_4 = -17, \\ x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 23. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 11, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 5, \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 20 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 11 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - 40 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 37 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 8. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 24, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9, \\ 8x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 = 18. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = -11, \\ -4x_1 - 6x_2 - 7x_3 + x_4 = -23. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -4, \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -6, \\ -8x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -1, \\ 7x_1 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 16x_4 = 18. \end{cases}$$

Задача 2

Исследовать систему на совместность. В случае совместности найти общее и одно частное решения:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 11. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 4x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 2, \\ 9x_1 - 3x_2 - 8x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1, \\ 8x_1 + x_2 - 11x_3 + 13x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 2, \\ 4x_3 - x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 - 9 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 8x_4 = -5, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_3 + 3x_4 + 1 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 4 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 7 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -2, \\ 5x_1 - 16x_2 - 4x_3 - 9x_4 = -16, \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -7. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \quad 32. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 9, \\ 2x_1 - x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -6. \end{cases}$$

Задача 3

В некотором базисе даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ образуют базис, и найти координаты вектора \vec{e} в этом базисе.

Вариант	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	\vec{d}	\vec{e}
1	5; 4; 1; 1	-3; 5; 2; 3	2; -1; 3; 2	7; -23; 4; -3	14; 0; 8; 4
2	2; -1; 4; 2	-3; 0; -2; 1	4; 5; -3; 2	0; 11; 14; 2	0; 33; 14; 8
3	-1; 1; 2; -1	2; -3; -5; 2	6; 3; -1; -1	28; 19; 7; 1	8; 0; 0; 9
4	1; 3; 4; 3	-2; 5; 0; 2	3; -2; -4; 4	-13; 5; -4; 8	26; -10; 0; 8
5	1; -1; 1; 2	-5; -3; 1; 1	2; -1; 0; 1	15; 10; 5; -3	15; 10; 15; 0
6	3; 1; 2; -1	-7; -2; -4; 1	-4; 0; 3; 1	16; 8; 15; 2	16; 6; 15; -3
7	-3; 0; 1; 2	2; -7; -3; -1	0; -3; 5; 1	16; -33; -13; 1	16; -66; 0; 6
8	5; 1; 2; 2	-2; 1; -3; 1	4; -3; 5; 4	-15; -15; 24; 10	-30; 48; 13
9	0; 2; -3; 1	4; -3; -2; -1	-5; -4; 0; -1	19; -5; 4; -1	19; -15; 4; -2
10	3; -1; 2; 1	-2; 3; 1; 1	4; -5; -3; 1	-3; 2; -3; 2	-9; 6; -9; 6
11	5; 3; 1; 3	-1; 2; -3; -1	3; 4; 2; -1	-9; 34; 20; -3	-18; 28; 0; 4

Вариант	\vec{a}	\vec{b}	\vec{c}	\vec{d}	\vec{e}
12	3; 1; -3; 1	-2; 4; 1; 2	1; -2; 5; 1	-1; 12; 20; -1	2; 0; -40; 2
13	6; 1; -3; 2	-3; 2; 1; 2	-1; -3; 4; -1	15; -6; 17; -1	0; 12; -34; 2
14	4; 2; 3; 1	-3; 1; -8; 3	2; -4; 5; 2	-12; 14; -31; 1	12; -14; 31; -2
15	-2; 1; 3; 3	3; -6; 2; -1	-5; -3; -1; 1	-31; -6; -22; 2	-31; -18; -22; 4
16	1; 3; 6; 1	-3; 4; -5; 2	1; -7; 2; 1	-2; -17; 5; 3	-4; 0; 10; 6
17	7; 2; 1; 2	5; 1; -2; -1	-3; 4; 5; 2	26; -11; -1; 1	0; 22; 2; 2
18	3; 5; 4; 3	-2; 7; -5; 1	6; -2; 1; -1	-6; 9; -22; -1	-6; 9; -22; 2
19	5; 3; 2; 1	2; -5; 1; -2	-7; 4; -3; 1	36; -1; -15; 3	0; 2; 30; -3
20	11; 1; 2; 3	-3; 3; 4; 1	-4; -2; 7; 1	-5; -11; 15; 2	-15; -11; 15; 0
21	9; 5; 3; 1	-3; 2; 1; 2	4; -7; 4; -2	10; -13; -8; -1	-20; 0; 16; 2
22	7; 2; 1; 2	3; -5; 6; 1	-4; 3; -4; 1	-1; -18; -16; -5	-2; 0; -32; 1
23	1; 2; 3; 1	-5; 3; -1; 5	-6; 4; 5; 2	-4; 11; -20; 2	-12; 33; -20; 6
24	-2; 5; 1; 2	3; 2; -7; 1	4; -3; 2; 4	4; 22; 13; 3	-8; 0; -26; 1
25	3; 1; 2; 1	-4; 3; -1; 5	2; 3; 4; 1	14; 14; -20; -2;	28; 28; 0; 4
26	3; -1; 2; 3	-2; 4; 1; 1	4; -5; -1; 2	-5; -11; 1; -1	-15; -11; 3; 4
27	4; 5; 1; 1	1; 3; 1; -1	-3; -6; 7; 5	19; 33; 0; 3	38; 66; 0; -3
28	1; -3; 1; 2	-2; -4; 3; 2	0; -2; 3; 1	8; -10; -13; 5	-16; 0; 26; -1
29	5; 7; -2; 1	-3; 1; 3; -1	1; -4; 6; 3	-14; 9; -1; 1	0; 18; -2; 7
30	-1; 4; 3; 1	3; 2; -4; 5	-2; -7; 1; 4	6; -20; -3; 2	18; -20; -9; 2
31	0; 3; 6; -1	1; -1; 1; 2	1; 9; -1; 5	-5; -1; 7; -16	6; 0; -6; 18
32	1; -8; 7; 9	-1; 3; 0; -1	5; -1; 2; 0	2; 4; -1; 2	-6; -1; 5; 7

Задача 4

Даны векторы $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\vec{n} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$, где $|\vec{a}| = k$, $|\vec{b}| = l$,

$(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Найти: а) $(\lambda\vec{m} + \mu\vec{n}) \cdot (\nu\vec{m} + \tau\vec{n})$; б) $\text{pr}_{\vec{n}}(\nu\vec{m} + \tau\vec{n})$; в) $\cos(\vec{m}, \tau\vec{n})$.

Вариант	α	β	γ	δ	k	l	φ	λ	μ	ν	τ
1	-5	-4	3	6	3	5	$\frac{5\pi}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	1	2
2	-2	3	4	-1	1	3	π	3	2	-2	4
3	5	-2	-3	-1	4	5	$\frac{4\pi}{3}$	2	3	-1	5
4	5	2	-6	-4	3	2	$\frac{5\pi}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3
5	3	-2	-4	5	2	3	$\frac{\pi}{3}$	2	-3	5	1
6	2	-5	-3	4	2	4	$\frac{2\pi}{3}$	3	-4	2	3
7	3	2	-4	-2	2	5	$\frac{4\pi}{3}$	1	-3	0	$-\frac{1}{2}$
8	5	2	1	-4	3	2	π	1	-2	3	-4
9	-3	-2	1	5	3	6	$\frac{4\pi}{3}$	-1	2	1	1
10	5	-3	4	2	4	1	$\frac{2\pi}{3}$	2	$-\frac{1}{2}$	3	0
11	-2	3	3	-6	6	3	$\frac{5\pi}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$	1	2
12	-2	-4	3	1	3	2	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	3	1	2
13	4	3	-1	2	4	5	$\frac{3\pi}{2}$	2	-3	1	2
14	-2	2	5	1	2	5	2π	-3	4	2	3
15	4	-3	5	2	4	7	$\frac{4\pi}{3}$	-3	2	2	-1

Вариант	α	β	γ	δ	k	l	φ	λ	μ	ν	τ
16	-5	3	2	4	5	4	π	-3	$\frac{1}{2}$	-1	1
17	5	-2	3	4	2	5	$\frac{\pi}{2}$	2	3	1	-2
18	7	-3	2	6	3	4	$\frac{5\pi}{3}$	3	$-\frac{1}{2}$	2	1
19	4	-5	-1	3	6	3	$\frac{2\pi}{3}$	2	-5	1	2
20	3	-5	-2	3	1	6	$\frac{3\pi}{2}$	4	5	1	-2
21	-5	-6	2	7	2	7	π	-2	5	1	3
22	-7	2	4	6	2	9	$\frac{\pi}{3}$	1	2	-1	3
23	5	4	-6	2	2	9	$\frac{2\pi}{3}$	3	2	1	$-\frac{1}{2}$
24	-5	-7	-3	2	2	11	$\frac{3\pi}{2}$	-3	4	-1	2
25	5	-8	-2	3	4	3	$\frac{4\pi}{3}$	2	-3	1	2
26	-3	5	1	7	4	6	$\frac{5\pi}{3}$	-2	3	3	-2
27	-3	4	5	-6	4	5	π	2	3	-3	-1
28	6	-7	-1	-3	2	6	$\frac{4\pi}{3}$	3	-2	1	4
29	5	3	-4	-2	6	3	$\frac{5\pi}{3}$	-2	$-\frac{1}{2}$	3	2
30	4	-3	-2	6	4	7	$\frac{\pi}{3}$	2	$-\frac{1}{2}$	3	2
31	1	1	3	-1	3	6	$\frac{\pi}{4}$	-2	$\frac{1}{2}$	1	3
32	2	1	3	1	2	5	$\frac{3\pi}{4}$	-1	1	2	$\frac{1}{2}$

Задача 5

Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Необходимо : а) проверить, будут ли компланарны векторы $\alpha\vec{a}_1, \beta\vec{a}_2, \gamma\vec{a}_3$; б) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы \vec{a}_i, \vec{a}_j ; в) вычислить скалярное произведение векторов $m\vec{a}_k$ и $n\vec{a}_l$ и найти модуль их векторного произведения; г) найти проекцию вектора $\delta\vec{a}_1$ на вектор $\mu\vec{a}_2$ и $\cos(\delta\vec{a}_1, \mu\vec{a}_2)$.

Вариант	\vec{a}_1	\vec{a}_2	\vec{a}_3	α	β	γ	i	j	m	n	k	l	δ	μ
1	2; -3; 1	0; 1; 4	5; 2; -3	1	2	3	1	3	1	-4	2	3	1	3
2	3; 4; 1	1; -2; 7	3; -6; 21	2	-3	1	2	3	1	1	1	3	5	2
3	2; -4; -2	7; 3; 0	3; 5; -7	3	2	3	1	3	1	-2	3	1	1	2
4	-7; 0; 2	2; -6; 4	1; -3; 2	2	4	3	1	3	2	-7	1	3	1	-2
5	-4; 2; -1	3; 5; -2	0; 1; 5	1	6	3	1	2	1	-4	1	3	1	6
6	3; -2; 1	0; 2; -3	-3 2; -1	5	4	3	1	3	-2	4	1	2	1	-3
7	4; -1; 3	2; 3; -5	7; 2; 4	7	2	5	2	3	2	4	2	3	7	-4
8	4; 2; -3	2; 0; 1	-12; -6; 9	2	3	-4	1	3	1	-4	2	3	2	3
9	-1; 0; 5	-3; 2; 2	-2; -4; 1	7	2	-3	2	3	2	3	2	1	3	-4
10	6; -4; 6	9; -6; 9	1; 0; -8	3	-4	-9	1	2	3	-5	1	3	2	-4
11	5; -3; 4	2; -4; -2	3; 5; -7	1	-2	6	2	3	-3	6	1	3	1	-4
12	-4; 3; -7	4; 6; -2	6; 9; -3	-2	4	7	2	3	5	-3	1	2	-2	1
13	-5; 2; -2	7; 0; -5	2; 3; -2	8	-3	11	1	3	8	-6	1	3	2	4
14	-4; -6; 2	2; 3; -1	-1; 5; -3	3	7	-2	1	2	3	-7	1	3	5	7
15	-4; 2; -3	0; -3; 5	6; 6; -4	3	-9	4	1	3	3	9	1	2	5	-1
16	-3; 8; 0	2; 3; -2	8; 12; -8	4	-6	9	2	3	3	-8	2	3	4	-6
17	2; -4; -2	-9; 0; 2	3; 5; -7	7	5	-1	1	3	3	-8	2	3	7	5
18	9; -3; 1	3; -15; 21	1; -5; 7	2	-7	4	2	3	5	7	2	1	2	-7
19	-2; 4; -3	5; 1; -2	7; 4; -1	1	-6	5	1	2	-9	7	1	3	1	-6
20	-9; 4; -5	1; -2; 4	-5; 10; -20	-2	7	4	2	3	9	4	1	3	-2	7
21	2; -7; 5	-1; 2; -6	3; 2; -4	7	-4	3	2	3	7	-4	1	2	-3	6

Вариант	\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	α	β	γ	i	j	m	n	k	l	δ	μ
22	7; -4; -5	1; -11; 3	5; 5; 3	-4	2	6	1	3	-4	-5	1	3	3	-7
23	4; -6; -2	-2; 3; 1	3; -5; 7	-5	3	4	1	2	-5	4	1	3	6	3
24	3; -1; 2	-1; 5; -4	6; -2; 4	6	-7	-2	1	3	-2	5	1	2	4	-7
25	-3; -1; -5	2; -4; 8	3; 7; -1	2	5	-6	2	3	5	-6	2	3	2	-1
26	-3; 2; 7	1; 0; 5	6; 4; -1	-2	3	7	1	3	3	1	2	3	-2	1
27	3; -1; 5	2; -4; 6	1; -2; 3	-3	4	-5	2	3	1	4	1	3	-3	4
28	4; -5; -4	5; -1; 0	2; 4; -3	-3	4	8	1	3	8	-3	3	1	1	7
29	-9; 0; 4	2; -4; 6	3; -6; 9	3	6	-4	2	3	-2	8	1	3	3	-5
30	5; -6; -4	4; 8; -7	0; 3; -4	5	4	-2	1	2	7	-2	1	3	5	3
31	1; 2; 3	0; -1; 1	5; 2; 1	1	2	1	1	2	1	-3	2	3	1	-1
32	-2; 0; 1	1; 1; 9	-1; 1; 7	2	1	2	2	3	2	-2	1	-2	-1	1

Задача 6

Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C, D .

Вычислить:

- площадь указанной грани;
- площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды;
- объем пирамиды $ABCD$;
- сделать чертеж.

Вариант	A	B	C	D	Грань	l	Две вершины
1	(3; 4; 5)	(1; 2; 1)	(-2; -3; 6)	(3; -6; -3)	ACD	AB	C и D
2	(-7; -5; 6)	(-2; 5; -3)	(3; -2; 4)	(1; 2; 2)	BCD	CD	A и B
3	(1; 3; 1)	(-1; 4; 6)	(-2; -3; 4)	(3; 4; -4)	ACD	BC	A и D
4	(2; 4; 1)	(-3; -2; 4)	(3; 5; -2)	(4; 2; -3)	ABD	AC	B и D
5	(-5; -3; -4)	(1; 4; 6)	(3; 2; -2)	(8; -2; 4)	ACD	BC	A и D
6	(3; 4; 2)	(-2; 3; -5)	(4; -3; 6)	(6; -5; 3)	ABD	BD	A и C
7	(-4; 6; 3)	(3; -5; 1)	(2; 6; -4)	(2; 4; -5)	ACD	AD	B и C
8	(7; 5; 8)	(-4; -5; 3)	(2; -3; 5)	(5; 1; -4)	BCD	BC	A и D
9	(3; -2; 6)	(-6; -2; 3)	(1; 1; -4)	(4; 6; -7)	ABD	BD	A и C
10	(-5; -4; -3)	(7; 3; -1)	(6; -2; 0)	(3; 2; -7)	BCD	AD	B и C
11	(3; -5; -2)	(-4; 2; 3)	(1; 5; 7)	(-2; -4; 5)	ACD	BD	A и C

Вариант	A	B	C	D	Грань	l	Две вершины
12	(7; 4; 9)	(1; -2; -3)	(-5; -3; 0)	(1; -3; 4)	ABD	AB	C и D
13	(-4; -7; -3)	(-4; -5; 7)	(2; -3; 3)	(3; 2; 1)	BCD	BC	A и D
14	(-4; -5; -3)	(3; 1; 2)	(5; 7; -6)	(6; -1; 5)	ACD	BC	A и D
15	(5; 2; 4)	(-3; 5; -7)	(1; -5; 8)	(9; -3; 5)	ABD	BD	A и C
16	(-6; 4; 5)	(5; -7; 3)	(4; 2; -8)	(2; 8; -3)	ACD	AD	B и C
17	(5; 3; 6)	(-3; -4; 4)	(5; -6; 8)	(4; 0; -3)	BCD	BC	A и D
18	(5; -4; 4)	(-4; -6; 5)	(3; 2; -7)	(6; 2; -9)	ABD	BD	A и C
19	(-7; -6; -5)	(5; 1; -3)	(8; -4; 0)	(3; 4; -7)	BCD	AD	B и C
20	(7; -1; -2)	(1; 7; 8)	(3; 7; 9)	(-3; -5; 2)	ACD	BD	A и C
21	(5; 2; 7)	(7; -6; -9)	(-7; -6; 3)	(1; -5; 2)	ABD	AB	C и D
22	(-2; -5; -1)	(-6; -7; 9)	(4; -5; 1)	(2; 1; 4)	BCD	BC	A и D
23	(-6; -3; -5)	(5; 1; 7)	(3; 5; -1)	(4; -2; 9)	ACD	BC	A и D
24	(7; 4; 2)	(-5; 3; -9)	(1; -5; 3)	(7; -9; 1)	ABD	BD	A и C
25	(-8; 2; 7)	(3; -5; 9)	(2; 4; -6)	(4; 6; -5)	ACD	AD	B и C
26	(4; 3; 1)	(2; 7; 5)	(-4; -2; 4)	(2; -3; -5)	ACD	AB	C и D
27	(-9; -7; 4)	(-4; 3; -1)	(5; -4; 2)	(3; 4; 4)	BCD	CD	A и B
28	(3; 5; 3)	(-3; 2; 8)	(-3; -2; 6)	(7; 8; -2)	ACD	BD	A и C
29	(4; 2; 3)	(-5; -4; 2)	(5; 7; -4)	(6; 4; -7)	ABD	AD	B и C
30	(-4; -2; -3)	(2; 5; 7)	(6; 3; -1)	(6; -4; 1)	ACD	BC	A и D
31	(2; 3; 4)	(4; 7; 3)	(1; 2; 2)	(-2; 0; -4)	ABC	AB	C и D
32	(4; 3; 2)	(7; 4; 3)	(1; 2; -2)	(-2; 0; -1)	BCD	AB	C и D

Задача 7

Даны три силы: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, приложенные к точке A . Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B ;

в) сделать чертеж.

Вариант	\vec{F}_1	\vec{F}_2	\vec{F}_3	A	B
1	(9; -3; 4)	(5; 6; -2)	(-4; -2; 7)	(-5; 4; -2)	(4; 6; -5)
2	(5; -2; 3)	(4; 5; -3)	(-1; -3; 6)	(7; 1; -5)	(2; -3; -6)
3	(3; -5; 4)	(5; 6; -3)	(-7; -1; 8)	(-3; 5; 9)	(5; 6; -3)
4	(-10; 6; 5)	(4; -9; 7)	(5; 3; -3)	(4; -5; 9)	(4; 7; -5)

Вариант	\bar{F}_1	\bar{F}_2	\bar{F}_3	A	B
5	(5; -3; 1)	(4; 2; -6)	(-5; -3; 7)	(-5; 3; 7)	(3; 8; -5)
6	(-5; 8; 4)	(6; -7; 3)	(3; 1; -5)	(2; -4; 7)	(0; 7; 4)
7	(7; -5; 2)	(3; 4; -8)	(-2; -4; 3)	(-3; 2; 0)	(6; 4; -3)
8	(3; -4; 2)	(2; 3; -5)	(-3; -2; 4)	(5; 3; -7)	(4; -1; -4)
9	(4; -2; -5)	(5; 1; -3)	(-6; 2; 5)	(-3; 2; -6)	(4; 5; -3)
10	(7; 3; -4)	(9; -4; 2)	(-6; 1; 4)	(-7; 2; 5)	(4; -2; 11)
11	(9; -4; 4)	(-4; 6; -3)	(3; 4; 2)	(5; -4; 3)	(4; -5; 9)
12	(6; -4; 5)	(-4; 7; 8)	(5; 1; -3)	(-5; -4; 2)	(7; -3; 6)
13	(5; 5; -6)	(7; -6; 6)	(-4; 3; 4)	(-9; 4; 7)	(8; -1; 7)
14	(7; -6; 2)	(-6; 2; -1)	(1; 6; 4)	(3; -6; 1)	(6; -2; 7)
15	(4; -2; 3)	(-2; 5; 6)	(7; 3; -1)	(-3; -2; 5)	(9; -5; 4)
16	(7; 3; -4)	(3; -2; 2)	(-5; 4; 3)	(-5; 0; 4)	(4; -3; 5)
17	(3; -2; 4)	(-4; 4; -3)	(3; 4; 2)	(1; -4; 3)	(4; 0; -2)
18	(2; -1; -3)	(3; 2; -1)	(-4; 1; 3)	(-1; 4; -2)	(2; 3; -1)
19	(-1; -4; 2)	(6; -6; 5)	(0; 7; 2)	(3; 4; -6)	(2; 6; 5)
20	(4; 5; 6)	(-1; -3; -8)	(-6; -1; -7)	(6; -3; 5)	(9; 5; -7)
21	(1; -3; 2)	(5; 8; -1)	(-4; 14; -5)	(5; 3; 4)	(6; -4; -1)
22	(3; -5; 2)	(-3; 4; -8)	(-4; 6; -1)	(4; -2; 3)	(7; 0; -3)
23	(1; -2; -1)	(-6; 8; 5)	(9; 5; -10)	(3; 5; 1)	(4; -2; -3)
24	(8; -6; 5)	(-3; 2; -4)	(-2; -1; 6)	(2; 3; -5)	(0; 4; 3)
25	(11; -8; -3)	(2; 5; 6)	(-8; 7; 8)	(6; 1; -5)	(4; 2; -6)
26	(2; 5; -6)	(8; -3; 12)	(-19; 3; 1)	(1; 6; -3)	(4; -3; 5)
27	(-1; 2; -3)	(0; 9; -7)	(7; -6; 3)	(7; -6; 4)	(4; 9; -6)
28	(2; -3; 4)	(-3; 2; 2)	(-4; 5; -2)	(3; 7; -5)	(2; -4; 1)
29	(5; 2; -8)	(-2; -4; 2)	(1; 9; 3)	(5; -4; 2)	(8; 5; -4)
30	(4; -3; -4)	(-3; 6; 6)	(1; -1; 7)	(4; 2; -3)	(2; 4; 0)
31	(0; 1; 9)	(5; 6; -2)	(-4; -2; 8)	(-5; -2; 4)	(4; 6; 1)
32	(9; -4; 3)	(3; 4; 2)	(0; 1; 6)	(4; 7; 5)	(2; 8; 13)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гурский, Е. И.** Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Мн. : Выш. шк., 1982. – 272 с.

2 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Е. И. Гурский [и др.]. – Мн. : Выш. шк., 1989. – 350 с.

3 **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра : справ. пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Мн. : ТетраСистемс, 2008. – 287 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

5 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатёнок [и др.]; под ред. В. Т. Воднева. – Мн. : Выш. шк., 1986. – 271 с.

6 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч.1 / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 2008. – 303 с.

7 **Васильева, Т. И.** Матрицы и определители / Т. И. Васильева, С. П. Новиков. – Гомель : БелГУТ, 1997. – 34 с.

8 **Задорожник, Е. А.** Векторы / Е. А. Задорожник. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 49 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	3
2 Элементы векторной алгебры	16
3 Индивидуальные задания для расчетно-графической работы “Линейная и векторная алгебра”	25
Список литературы	39

Учебное издание

ДЕРГАЧЁВА Ирина Михайловна
СОКОЛЬСКИЙ Александр Юрьевич

Линейная и векторная алгебра

Учебно-методическое пособие
по выполнению расчетно-графической работы

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 12.01.2012 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,32 Уч.-изд. л. 1,60 Тираж 1200 экз.
Зак № . Изд № 170

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34