МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей ФБО**

Гомель 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей ФБО

Одобрено методической комиссией ФБО

Гомель 2009

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 1
В93

А в т о р ы: *А. Н. Жук, С. П. Новиков, А. В. Сементовский, Т. И. Васильева, В. А. Головня, Е. Е. Грибовская, С. А. Сафонов, И. И. Сосновский*

Р е ц е н з е н т – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики **И. П. Шабалина** (УО «БелГУТ»).

В93 **Высшая математика** Учеб.-метод. пособие для студентов техн. специальностей ФБО / *А. Н. Жук* [и др.]; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.– Гомель : БелГУТ, 2009. – 95 с.
ISBN 978-985-468-493-2

Содержит программу курса высшей математики и общие рекомендации по ее изучению. Приведены тексты всех контрольных работ и большое количество решенных типовых примеров.

Предназначено для студентов технических специальностей безотрывного обучения.

УДК 517 (075. 8)
ББК 22. 1

ISBN 978-985-468-493-2

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Основная форма обучения студента ФБО – самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь студентам ФБО университет организует чтение лекций, практические занятия и консультации. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации (обычно по субботам с 8-00 до 13-00, ауд. 1206, тел. 95-39-04). Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Чтение учебника

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, выполняя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые по их простоте опущены в учебнике), имеющиеся в учебнике чертежи.

Особое внимание следует обращать на определения основных понятий курса, которые отражают количественную сторону или пространственные свойства реальных объектов и процессов и возникают в результате абстракции из этих свойств и процессов. Без этого невозможно успешное изучение математики.

Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. п.

На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для письменной или устной консультации с преподавателем.

Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в порядке изложения. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных беспорядочных записей.

Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Решение задач

Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

При решении задач нужно обосновыватъ каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса.

Если студент видит несколько путей для решения задачи, то он должен сравнить их и выбрать из них самый удобный.

Полезно до начала вычислений составить краткий план решения задачи.

Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделять вспомогательные вычисления от основных. Ошибочные записи следует не стирать и не замазывать, а зачеркивать.

Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения, например при графической проверке решения, полученного путем вычислений, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если таковые даны) входящих в нее букв. В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. п.

Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику.

Важным критерием, усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать задачи является необходимым, но недостаточным условием хорошего знания теории.

Консультации

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешение которых самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), он может обратиться к преподавателю для получения от него указаний в виде письменной или устной консультаций.

В своих запросах студент должен точно указывать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику; то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

Контрольные работы

В процессе изучения курса высшей математики студент должен выполнить девять контрольных заданий, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти задания позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для консультации с преподавателем (письменной или устной).

Не следует приступать к выполнению контрольного задания до решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала, в результате чего студент не приобретает необходимые знания и может оказаться неподготовленным к устному экзамену или зачету.

Не рекомендуется присылать в университет одновременно работы по нескольким заданиям – это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует защитить. Без защищенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

Лекции и практические занятия, СУРС

Во время экзаменационных сессий для студентов ФБО организуются лекции и практические занятия по курсу высшей математики. Они носят обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела курса, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные программы, необходимые при изучении специальных дисциплин.

Для лучшего усвоения курса высшей математики на экзаменационных сессиях факультет безотрывного обучения организует самостоятельную управляемую работу студентов под руководством преподавателя (СУРС). Содержание занятий СУРС и соответствующий объем в часах приведен в таблице 1.

Таблица 1

Содержание занятия	Объем в часах
I КУРС (зимняя сессия)	
Прямая на плоскости	8 часов для специальностей А, Д, У, Т, М, В и ЭТ; 10 часов для специальностей П, Са и Сж
Поверхности второго порядка	
Полярная система координат. График функции в полярной системе координат	
Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования	
Правило Лопиталя	
I КУРС (летняя сессия)	
Решение уравнений с заданной точностью: методы половинного деления, хорд-касательных, итераций	8 часов для А, Д, У, Т, М, В и ЭТ; 10 часов для П, Са и Сж
Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области	
Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов	
Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона	
Решение задач на составление дифференциальных уравнений	
II КУРС (зимняя сессия)	
Нахождение статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции однородных плоских пластин	8 часов для А, Д, У, Т, М, В и ЭТ; 10 часов для П, Са и Сж
Разложение функций в ряд Фурье	

Производная по направлению. Градиент	
Вычисление дивергенции, циркуляции, ротора, потенциала векторного поля	
Теория функций комплексного переменного. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана	

Экзамены и зачеты

На экзаменах и зачетах выясняется, прежде всего, отчетливое усвоение всех теоретических и прикладных вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно выполняться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть аккуратной и четкой. Только при выполнении этих условий знания могут быть признаны удовлетворяющими требованиям, предъявляемым программой.

При подготовке к экзамену и зачету учебный материал рекомендуется повторять по учебнику и конспекту.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

Каждую контрольную работу выполняют в отдельной тетради чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 2,5 см.

На обложке тетради студенту следует разборчиво написать свои фамилию, инициалы, адрес; здесь же указать название учебного заведения и факультета, название дисциплины, учебный номер (шифр), номер контрольной работы.

Задачи контрольной работы выбирают по следующей схеме:

Задача	Вариант
Первая	Предпоследняя цифра учебного шифра (k)
Вторая	Последняя цифра учебного шифра (n)
Третья	$9-k$
Четвертая	$9-n$
Пятая	$\| k-n \|$

Решение задач необходимо приводить в порядке возрастания номеров. При этом **номер и условие задачи должны быть полностью переписаны перед ее решением.**

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения, делая необходимые рисунки. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не засчитываются. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты и явиться на кафедру для ее защиты.

При выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

ПРОГРАММА ОБЩЕГО КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

I СЕМЕСТР

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Матрицы. Сложение матриц и умножение матрицы на число. Вычитание матриц. Умножение матриц. Квадратные матрицы.

Системы линейных уравнений (основные понятия). Определители первого, второго и третьего порядков. Определители n-го порядка. Свойства определителей n-го порядка. Разложение определителя по элементам его строки (столбца). Обратная матрица. Теорема Крамера.

Понятие вектора (направленного отрезка). Сложение векторов и умножение вектора на число. Вычитание векторов. Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов. Понятие векторного пространства, простейшие свойства, примеры. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис векторного пространства. Координаты вектора. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Основные теоремы о ранге матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема Кронекера – Капелли. Базисы линейных пространств V_1, V_2, V_3. Ось. Величина вектора на оси. Угол между векторами. Единичный вектор. Теоремы о проекции вектора на ось. Координаты вектора и точки. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства.

Понятие уравнения линии. Окружность. Прямая на плоскости. Понятие уравнения поверхности. Сфера. Плоскость. Прямая в пространстве. Эллипс, гипербола. Вывод канонических уравнений и их исследование. Построение канонических уравнений эллипса и гиперболы. Парабола. Вывод и исследование канонического уравнения. Преобразование координат. Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными координатным осям. Уравнение поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, эллиптические параболоиды.

Введение в математический анализ

Элементы теории множеств и математической логики. Основные элементарные функции. Предел переменной. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие величины и их свойства. Предел функции в точке. Сравнение бесконечно малых. Непрерывность функций. Точки разрыва. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Элементы высшей алгебры

Векторная функция скалярного аргумента. Комплексные числа и операции над ними в различных формах. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Каноническое и нормальное разложения многочлена на множители. Выделение целой части и разложение дробно-рациональной функции на элементарные дроби.

После изучения вышеуказанных разделов студент выполняет контрольные работы № 1 и 2 из данного пособия или из пособия [12].

Производная и ее приложения

Производная. Геометрический и механический смысл. Производные от элементарных функций. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Касательная и нормаль к плоской кривой. Дифференциал. Приложение дифференциала в приближенных вычислениях. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теоремы Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функций. Точки экстремума. Необходимое и достаточное условие экстремума. Исследование на экстремум с помощью II производной. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

После изучения вышеуказанных разделов студент выполняет контрольную работу № 3 из данного пособия или из пособия [13].

Номера контрольных заданий приведены в таблице 2.

Таблица 2

Задача	Контрольная работа			Вариант
	первая	вторая	третья	
Первая	1–10	51–60	161–170	k
Вторая	11–20	81–90	181–190	n

Третья	21–30	91–100	191–200	$9-k$
Четвертая	31–40	121–130	201–210	9 – n
Пятая	41–50	141–150	211–220	$\| k-n \|$

II СЕМЕСТР

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования функций и построения графиков.

Действия с приближенными числами. Приближенные методы нахождения корней. Методы половинного деления, хорд-касательных и итераций.

Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Основные понятия. Дифференцирование функций многих переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Полный дифференциал. Экстремумы функций двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Экстремальные значения функции в замкнутой области.

После изучения вышеуказанных разделов студент выполняет контрольную работу № 4 из данного пособия или из пособия [13].

Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл. Основные свойства. Табличные интегралы. Интегрирование подстановкой. Интегрирование по частям. Интегралы от элементарных дробей. Интегрирование рациональных дробей. Интегралы от выражений, содержащих иррациональности. Интегралы от тригонометрических функций. Проблема интегрируемости.

Определенный интеграл и его приложения

Примеры, приводящие к определенному интегралу как пределу интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Связь с неопределенным интегралом. Методы вычисления определенных интегралов. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных и полярных координатах. Нахождение длины дуги, площадей и объемов тел вращения. Приложение определенного интеграла к задачам механики. Общая схема составления интегралъных сумм. Несобственные интегралы. Численное интегрирование.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения I порядка (с разделяющимися переменными, линейные, однородные). Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Моделирование с помощью дифференциальных уравнений некоторых технических задач. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка и некоторые свойства их решений. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Затем выполняют контрольные работы № 5 и 6 из данного пособия или из пособия [14].

Номера контрольных заданий приведены в таблице 3.

Таблица 3

Задача	Контрольная работа			Вариант
	Четвертая	пятая	шестая	
Первая	221(а)–230(а)	301–310	351–360	k
Вторая	231–240	311–320	361–370	n
Третья	251–260	321–330	371–380	$9-k$
Четвертая	271–280	331–340	381–390	$9-n$
Пятая	291–300	341–350	391–400	$\mid k-n \mid$

III СЕМЕСТР

Кратные интегралы

Двойной интеграл. Его вычисление сведением к повторному интегрированию. Замена переменной в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Решение задач механики с помощью двойных интегралов.

Тройной интеграл. Вычисление в цилиндрических координатах.

Криволинейные и поверхностные интегралы

Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. Вычисление криволинейного интеграла. Формула Грина. Нахождение функции по её полному дифференциалу. Площадь поверхности. Определение поверхностных интегралов, основные свойства и вычисление. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

Односторонние и двусторонние поверхности. Поток векторного поля через поверхность и его физический смысл. Теорема Остроградского – Гаусса. Дивергенция векторного поля, инвариантное определение дивергенции, физический смысл дивергенции.

Циркуляция поля. Теорема Стокса. Ротор векторного поля и его физический смысл.

Соленоидальные и потенциальные поля. Оператор Гамильтона и его приложение.

Числовые ряды

Последовательности и числовые ряды. Основные понятия. Признаки сходимости числовых рядов (знакоположительных).

Знакочередующиеся ряды. Абсолютная и относительная сходимости.

Функциональные и степенные ряды

Функциональные ряды. Область сходимости. Операции над рядами. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Остаточный член. Разложение в ряд элементарных функций. Биномиальный ряд. Методы получения разложений в ряд функций. Проблема приближенных вычислений с помощью рядов. Оценка погрешности.

Вычисление значений функций, интегралов и решение дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Ортогональные системы функций. Разложение в ряды Фурье на $(-\pi;\ \pi)$. Разложение четных и нечетных функций. Разложение в произвольном интервале.

Операционное исчисление

Понятие функции комплексной переменной. Преобразование Лапласа. Изображения элементарных функций. Основные теоремы операционного исчисления. Решение дифференциальных уравнений и их систем операционным методом.

Выполняют контрольные работы № 7, 8, 9 из данного пособия или из пособия [15].

Номера контрольных заданий приведены в таблице 4.

Таблица 4

Задача	Контрольная работа			Вариант
	седьмая	восьмая	девятая	
Первая	401–410	451–460	501–510	k
Вторая	411(а)–420(а)	461–470	511–520	n
Третья	421–430	471–480	521–530	$9-k$
Четвертая	431–440	481–490	–	$9-n$
Пятая	441–450	491–500	–	$\lvert k-n \rvert$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В задачах 1–10 даны вершины $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ треугольника ABC. Требуется найти: 1) длину стороны BC; 2) уравнение линии BC; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A; 4) длину высоты, проведенной из вершины A; 5) площадь треугольника ABC; 6) угол B в радианах с точностью до 2 знаков. Сделать чертеж.

1. $A(7;\ 1)$, $B(–5;\ –4)$, $C(–9;\ –1)$.
2. $A(0;\ 5)$, $B(12;\ 0)$, $C(18;\ 8)$.
3. $A(8;\ 0)$, $B(–4;\ –5)$, $C(–8;\ –2)$.
4. $A(1;\ 5)$, $B(13;\ 0)$, $C(19;\ 8)$.
5. $A(6;\ 1)$, $B(–6;\ –4)$, $C(–10;\ –1)$.
6. $A(–1;\ 5)$, $B(11;\ 0)$, $C(17;\ 8)$.
7. $A(6;\ 5)$, $B(–6;\ 0)$, $C(–10;\ 3)$.
8. $A(–2;\ 6)$, $B(10;\ 1)$, $C(–16;\ 9)$.
9. $A(10;\ –1)$, $B(–2;\ 6)$, $C(–6;\ –3)$.
10. $A(–1;\ 7)$, $B(11;\ 2)$, $C(17;\ 10)$.

11. Прямые $5x–3y + 14 = 0$ и $5x – 3y – 20 = 0$ являются сторонами ромба, а прямая $x – 4y – 4 = 0$ – его диагональю. Найти уравнения двух других сторон ромба.

12. Точки $A(4;\ 0)$ и $B(6;\ 8)$ являются вершинами треугольника, а точка $D(5;\ 1)$ – точка пересечения его высот. Найти третью вершину треугольника.

13. На прямой $4x +3y –5 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(1;\ 2)$ и $B(–1;\ –4)$.

14. Найти координаты точки, симметричной точке $A(2;-4)$ относительно прямой $4x + 3y + 1 = 0$.

15. Прямые $3x - 4y + 16 = 0$ и $5x - 2y - 6 = 0$ являются сторонами параллелограмма, а точка $P(4; -7)$ – точка пересечения его диагоналей. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

16. Прямая $5x - 3y + 4 = 0$ является одной из сторон треугольника, а прямые $4x - 3y + 2 = 0$ и $7x + 2y - 13 = 0$ – его высотами. Найти уравнения двух других сторон треугольника.

17. Точки $A(4; 5)$ и $C(2;-1)$ являются двумя противоположными вершинами ромба, а прямая $x - y + 1 = 0$ – одной из его сторон. Найти уравнения остальных сторон ромба.

18. Точки $A(3;-1)$ и $B(4; 0)$ являются вершинами треугольника, а точка $D(2; 1)$ – точка пересечения его медиан. Найти уравнение высоты, проходящей через третью вершину треугольника.

19. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и координаты вершины $C(4;-1)$ прямого угла.

20. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1)$ так, чтобы отрезок ее, заключенный между осями координат, делился в точке A пополам.

21. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $C(0; 2)$ и от прямой $y = 4$.

22. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2; 2)$ и от оси абсцисс.

23. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(3; 0)$, чем от оси ординат.

24. Составить уравнение и построить линию, для каждой точки которой отношение расстояния от начала координат к расстоянию до прямой $3x + 16 = 0$ равно 0,6.

25. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке $A(1; 0)$, чем к точке $B(-2; 0)$.

26. Составить уравнение и построить линию, для каждой точки которой расстояния от начала координат и от точки $A(0; 5)$ относятся как 3 : 2.

27. Составить уравнение и построить линию, для каждой точки которой расстояние от точки $A(0; 1)$ вдвое меньше расстояния от прямой $y = 4$.

28. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой равноудалена от точки $A(4;\ 2)$ и от оси ординат.

29. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой отстоит от точки $A(4;0)$ вдвое дальше, чем от прямой $x = 1$.

30. Составить уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояния которых до точек $A(3;\ 5)$ и $B(-1;\ 3)$ равна 5.

В задачах 31–40 дана функция $r = f(\varphi)$ на отрезке $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Требуется: 1) построить график функции в полярной системе координат по точкам, давая φ значения через промежуток $\pi/8$, начиная от $\varphi = 0$; 2) найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, и по уравнению определить, какая это будет линия.

31. $r = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$.

32. $r = \dfrac{6}{3+2\cos\varphi}$.

33. $r = \dfrac{4}{2+3\cos\varphi}$.

34. $r = \dfrac{2}{1-\sin\varphi}$.

35. $r = \dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$.

36. $r = \dfrac{3}{5+6\cos\varphi}$.

37. $r = \dfrac{5}{1+\sin\varphi}$.

38. $r = \dfrac{3}{2+\cos\varphi}$.

39. $r = \dfrac{6}{1-2\cos\varphi}$.

40. $r = \dfrac{4}{1+\cos\varphi}$.

В задачах 41–50 даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Требуется найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_3A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4

на грань $A_1A_2A_3$.

Сделать чертеж.

41. $A_1(3;1;4)$, $A_2(–1;6;1)$, $A_3(–1;1;6)$, $A_4(0;4;–1)$.
42. $A_1(3;3;9)$, $A_2(6;9;1)$, $A_3(1;7;3)$, $A_4(8;5;8)$.
43. $A_1(3;5;4)$, $A_2(5;8;3)$, $A_3(1;9;9)$, $A_4(6;4;8)$.
44. $A_1(2;4;3)$, $A_2(7;6;3)$, $A_3(4;9;3)$, $A_4(3;6;7)$.
45. $A_1(9;5;5)$, $A_2(–3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;9;2)$.
46. $A_1(0;7;1)$, $A_2(4;1;5)$, $A_3(4;6;3)$, $A_4(3;9;8)$.
47. $A_1(5;5;4)$, $A_2(3;8;4)$, $A_3(3;5;10)$, $A_4(5;8;2)$.
48. $A_1(6;1;1)$, $A_2(4;6;6)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;6)$.
49. $A_1(7;5;3)$, $A_2(9;4;4)$, $A_3(4;5;7)$, $A_4(7;9;6)$.
50. $A_1(6;6;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;8;0)$.

В задачах 51–60 доказать совместность данных систем и решить их двумя способами:

1) по формулам Крамера;
2) средствами матричного исчисления.

51. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 5x_1 + 3{,}5x_2 - 1{,}5x_3 = 4; \\ x_1 + 10x_2 - x_3 = 18; \\ 2x_1 + 5x_2 = 10. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 - x_3 = 3; \\ 3x_1 - 6x_2 + \dfrac{3}{5}x_3 = 0; \\ x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

54. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 33x_1 - 12x_2 + 10x_3 = 7; \\ 81x_1 - 52x_2 = -75; \\ 13x_1 + 11x_2 + 20x_3 = 66. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 5; \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2; \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$

57. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4; \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 5; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4; \\ 5x_1 + 3x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -5; \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$

В задачах 61–70 найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

61. $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

62. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

63. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

64. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

65. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

66. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

67. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

68. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

69. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

70. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

В задачах 71–80 найти, при каких действительных x и y справедливо равенство, если $z = x + iy$.

71. $\left(1-2i\right)^2 + \dfrac{4-3i}{2-i} = iz + 2i^9.$

72. $\left(-2+i\right)^2 + \dfrac{2-3i}{-5+i} + zi^3 = i^{10}.$

73. $i^7(3-4i) + \dfrac{2i-1}{3-i} + z(1-i)^2 = 0.$

74. $\left(1+i\right)\left(2-3i\right) - \dfrac{2-i}{2+i} + i^{20}\left(2-5i\right) = zi.$

75. $\left(1-2i\right)^2 - \dfrac{3+2i}{1-i} + zi^{27} + \dfrac{1}{i} = 0.$

76. $\dfrac{2i-5}{i} + \dfrac{1+5i}{1-2i} + i^9 z + \left(2-i\right)^2 = 0.$

77. $\left(1-i\right)^2 - \dfrac{3-4i}{2-i} + i^{30}\left(2-3i\right) = 0.$

78. $\left(4-3i\right)i^{15} + \left(-1+2i\right)^2 + \dfrac{3-2i}{i-1} + \dfrac{z}{i} = 0.$

79. $\left(2-i\right)^2-\frac{z}{i}+\frac{(4-i)i^7}{i-2}=0.$

80. $\left(2-3i\right)i^{13}+\frac{2-i}{3-i}+\frac{z}{\left(1+i\right)^2}=0.$

В задачах 81–90 дано комплексное число z. Требуется: 1) записать число z в алгебраической, тригонометрической и показательной формах; 2) найти все корни уравнения $w^5+z=0$.

81. $z=-1+i\sqrt{3}$.

82. $z=-\left(\sqrt{3}-i\right)$.

83. $z=-\frac{1}{1-i\sqrt{3}}$.

84. $z=\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$.

85. $z=\sqrt{3}+i$.

86. $z=-1-i$.

87. $z=\frac{1}{-1+i}$.

88. $z=\sqrt{3}-i$.

89. $z=\frac{1}{1-i}$.

90. $z=\frac{1}{1+i}$.

В задачах 91–100 даны комплексные числа z_0, z_1, z_3, z_4. Вычислить $z=\frac{z_0}{z_1+z_2}$, где $z_2=\frac{z_3 z_4}{z_3+z_4}$. Номера задач приведены в таблице:

Номер задачи	z_0	z_1	z_3	z_4
91	120	$85-i\cdot 60$	$40+i\cdot 75$	$-55+i\cdot 2{,}4$
92	220	$45-i\cdot 24$	$16+i\cdot 40$	$-250+i\cdot 15$
93	330	$50-i\cdot 32$	$80+i\cdot 125$	$-60+i\cdot 3{,}1$
94	660	$100-i\cdot 35$	$106+i\cdot 144$	$-102+i\cdot 7$
95	120	$25-i\cdot 18$	$40+i\cdot 65$	$-45+i\cdot 2$
96	220	$95-i\cdot 70$	$60+i\cdot 85$	$-50+i\cdot 1{,}4$
97	330	$38-i\cdot 20$	$65+i\cdot 100$	$-80+i\cdot 5$
98	660	$125-i\cdot 96$	$75+i\cdot 98$	$-98+i\cdot 4{,}1$
99	120	$160-i\cdot 75$	$75+i\cdot 85$	$90+i\cdot 3{,}5$
100	220	$30-i\cdot 95$	$30+i\cdot 45$	$25+i\cdot 1$

В задачах 101–110 дана функция $y=f(x)$. Требуется: 1) показать, что график функции состоит из дуг линий второго порядка, определив, на какой части данного отрезка, с какой линией второго порядка он совпадает; 2) построить график данной функции по точкам.

101. $y = 1 + 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}; -3 \le x \le 5.$

102. $y = 2x^2 + 4|x + 2|; -5 \le x \le 3.$

103. $y = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{|x^2 - 2x - 3|}; -4 \le x \le 4.$

104. $y = 2x^2 + x|x - 2| + 1; -3 \le x \le 5.$

105. $y = 2 - \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}; -4 \le x \le 4.$

106. $y = 3x^2 + 6|x - 1| + 2; -2 \le x \le 6.$

107. $y = 2\sqrt{|x^2 - x - 2|}; -3 \le x \le 5.$

108. $y = 3x^2 + x|x - 1| + 1; -4 \le x \le 4.$

109. $y = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}\ ;\ -4 \le x \le 4.$

110. $y = x^2 + 4|x - 2| + 2; -3 \le x \le 5.$

В задачах 111–120 построить графики функций $y = kf(mx)$, $y = f(x+a)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, преобразованием графиков функций: 1) $y = \log_2 x$; 2) $y = x^3$. Величины k, m, a приведены в таблице:

Параметр	Номер задания									
	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
k	2	3	0,5	1,5	4	2,5	2,4	2,75	3,2	3,5
m	2	1,5	3	2,5	3,5	4	0,5	0,2	0,75	2,75
a	–2	2	3	–3	1,5	–1,5	2,5	3,5	–3,5	–2,5

В задачах 121–130 найти указанные пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

121. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^6 - x + 5}{x^6 + 3x^2 + 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{3x^2 - 8x - 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 6x}{7x \sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(3x - 1) - \ln(3x - 2)\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x^4 + x^2 + x}$.

122. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+5}{3x^5+4x^2-x}$;   б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$;   г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$;   е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$.

123. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2+x+4}$;   б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;   г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$;   е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\ln^2(1+2x)}$.

124. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$;   б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;   г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;   е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 2x}{\operatorname{arctg}^2 5x}$.

125. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+1}$;   б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$;   г) $\lim\limits_{x\to0}\sin 7x\operatorname{ctg}5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$;   е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{x^3+x^2+x}$.

126. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;   г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x+x^2}$.

127. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9}{7x^2+10x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-72}{x^2-7x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{3x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}3x\left(\ln\left(x+4\right)-\ln x\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\ln\left(1-3x\right)}$.

128. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{6x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-11x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{1-\cos 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{5}{x}+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\ln\left(1+2x\right)}$.

129. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\left(x-1\right)}{3x^2-6x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin x\right)^{\frac{5}{\sin x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^2-x}$.

130. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+10x^2-3}{2x^5-x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{5x^2+5x-30}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^2 4x}{3x\sin 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\operatorname{arctg} x}{2x}$.

В задачах 131–140 заданы функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

131. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}; x_1=0, x_2=2.$

132. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}; x_1=1, x_2=3.$

133. $f(x)=12^{\frac{1}{x}}; x_1=0, x_2=2.$

134. $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}; x_1=2, x_2=4.$

135. $f(x)=8^{\frac{1}{5-x}}; x_1=3, x_2=5.$

136. $f(x)=10^{\frac{1}{7-x}}; x_1=5, x_2=7.$

137. $f(x)=14^{\frac{1}{6-x}}; x_1=4, x_2=6.$

138. $f(x)=15^{\frac{1}{8-x}}; x_1=6, x_2=8.$

139 $f(x)=11^{\frac{1}{4+x}}; x_1=-4, x_2=-2.$

140. $f(x)=13^{\frac{1}{5+x}}; x_1=-5, x_2=-3.$

В задачах 141–150 задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

141. $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ åñëè } x<-1, \\ x^2+2, \text{åñëè } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ åñëè } x\ge 1. \end{cases}$

142. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ åñëè } x\le -1, \\ x^2+1, \text{åñëè } -1< x\le 1, \\ -x+3, \text{ åñëè } x>1. \end{cases}$

143. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ åñëè } x\le 0, \\ -(x-1)^2, \text{åñëè } 0<x<2, \\ x-3, \text{ åñëè } x\ge 2. \end{cases}$

144. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{если } 0<x<1, \\ x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

145. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2, \text{ если } 0<x\le 2, \\ x+31, \text{ если } x>2. \end{cases}$

146. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ \sin x, \text{ если } 0<x\le \pi, \\ x-2, \text{ если } x>\pi. \end{cases}$

147. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), \text{ åñëè } x\le -1, \\ (x+1)^2, \text{åñëè } -1<x\le 0, \\ x, \text{ åñëè } x>0. \end{cases}$

148. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, \text{если } 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2, \text{ если } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

149. $f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ если } 0<x\le 1, \\ 2, \text{ если } x>1. \end{cases}$

150. $f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ если } x\le 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0<x<4, \\ 1, \text{ если } x\ge 4. \end{cases}$

В задачах 161–170 требуется найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

161. а) $y=\frac{5+x}{\sqrt{2-x}}$; б) $y=\left(\sqrt[3]{x^2}+3^{\sin 2x}\right)^3$; в) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+3}}$; д) $y=(x)^{\frac{1}{x}}$; е) $e^y(x+y)-e^x=0$.

162. а) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; б) $y=(4^{\operatorname{tg} x}-\operatorname{tg} x)^2$; в) $y=\ln\arcsin\sqrt{x}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{3x-4}{3x+4}}$; д) $y=(\sqrt{x})^{\sin x}$; е) $xe^y-ye^x=0$.

163. а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$; б) $y=(3^{\cos x}-\sin^2 x)^3$; в) $y=\ln\arcsin\frac{1}{x}$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$; д) $y=(\sin x)^{x^2}$; е) $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-xy=0$.

164. а) $y=\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; б) $y=(5^{x\sin x}+\cos x)^3$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2+5x}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{3x-2}{3x+2}}$; д) $y=(x)^{x^2}$; е) $e^y-\sin\frac{y}{x}=0$.

165. а) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2-5x+1}}$; б) $y=(3^{\sin x}-\sin x)^5$; в) $y=\arcsin\sqrt{5-4x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{4x-3}{4x+3}}$; д) $y=(x+1)^{\sqrt{x}}$; е) $x\ln y-y\ln x-1=0$.

166. а) $y=\frac{3+x}{\sqrt{1-x}}$; б) $y=(2^{\sin^2 x}-\cos 2x)^4$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$; д) $y=x^{\ln x}$; е) $\operatorname{arctg} y+x-y=0$.

167. а) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; б) $y = (2^{\operatorname{tg} x} + \arcsin 3x)^2$; в) $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{3x-1}{3x+1}}$; д) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$; е) $e^x - e^{-2y} + xy = 0$.

168. а) $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=(5^{\cos^3 x}-\sin x)^3$; в) $y = \arcsin \ln \cos x$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$; д) $y=(\cos x)^{x^2}$; е) $\cos (xy) -2x = 0$.

169. а) $y=\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; б) $y=(2^{x^2}-\cos 3x)^2$; в) $y=\arccos x\cdot x-\sqrt{1-x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$; д) $y = (\sin x + 1)^x$; е) $\operatorname{tg} y - xy = 0$.

170. а) $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; б) $y = (e^{\sin x} + 3x)^3$; в) $y=\ln \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

г) $y=\ln\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-2}}$; д) $y = (x + 1)^{\sin x}$; е) $y \sin x - x \cos y = 0$.

В задачах 171–180 требуется найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

171. а) $y = x \operatorname{arctg} x$; б) $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=b\sin^2 t. \end{cases}$

172. а) $y = \ln \sin^2 x$; б) $\begin{cases} x=t+\ln\sin t, \\ y=t-\ln\cos t. \end{cases}$

173. а) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$; б) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$

174 а) $y = y^{3x}\sin 3x$; б) $\begin{cases} x=t^2e^t, \\ y=3t^2+t^3. \end{cases}$

175. а) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$; б) $\begin{cases} x=t^2+\ln t, \\ y=2t^3+3t. \end{cases}$

176. а) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$; б) $\begin{cases} x = \sin t - \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

177. а) $y = \arcsin 2x$; б) $\begin{cases} x = \ln t - t^3, \\ y = 4t - 3t^4. \end{cases}$

178. а) $y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$; б) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

179. а) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

180. а) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; б) $\begin{cases} x = a\sec t, \\ y = b\operatorname{tg} t. \end{cases}$

В задачах 181–190 требуется найти приближенное значение указанных величин с помощью дифференциалов соответствующих функций с точностью до 0,001.

181. arcsin 0,54. 182. arctg 0,98. 183. cos 32^0. 184. sin 62^0. 185. $\sqrt[5]{31}$.
186. sin 31^0. 187. lg 11. 188. ln(e^2+0,2). 189. $\log_2 1{,}9$. 190. $2^{2,1}$.

В задачах 191–200 требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

191. $y = \frac{x}{1+x^2}$, [–2; 2].

192. $y = x + \cos 2x$, [0; π/3].

193. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 1$, [–2; 1].

194. $y = x + \sin 2x$, [π/2; π].

195. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x$, [– 4; 0].

196. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 1$, [–1; 3].

197. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$, [0; π/2].

198. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 15x$, [–2; 6].

199. $y = x + \cos 2x$, [π/3; π].

200. $y = x^3 - x^2 - x + 1$, [–2; 2].

Задачи 201–210 являются задачами о наибольших и наименьших значениях функции.

201. Требуется сделать открытый сверху ящик с квадратным дном и максимальной вместимости. Каковы должны быть линейные

размеры ящика, если на его изготовление имеется S = 12 м^2 материала?

202. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется S = = 9,42 м^2 материала ($S \approx 3\pi$)?

203. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется S = 18,84 м^2 материала ($S \approx 6\pi$)?

204. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема V = 85 м^3 ($\approx 27\pi$). Каковы должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности шло минимальное количество материала?

205. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы вместимость коробки была максимальной?

206. Требуется изготовить открытый сверху ящик с квадратным дном и максимальной вместимости. Каковы должны быть линейные размеры ящика, если на его изготовление имеется S = 6,75 м^2 материала?

207. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется S =
= 2,355 м^2 материала ($S \approx (3/4)\pi$)?

208. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), если на его изготовление имеется S = 4,71 м^2 материала (S $\approx (3/2)\pi$)?

209. Прямоугольный лист жести имеет длину 96 см и ширину 60 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны

быть стороны вырезанных квадратов, чтобы вместимость коробки была максимальной?

210. Требуется вырыть яму цилиндрической формы с круглым основанием и вертикальной боковой поверхностью заданного объема $V = 25$ м^3 ($V \approx 8\pi$). Каковы должны быть линейные размеры ямы (радиус R и высота H), чтобы на облицовку ее дна и боковой поверхности пошло минимальное количество материала?

В задачах 211–220 требуется с помощью правила Лопиталя вычислить пределы функции.

211. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$;б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\operatorname{tg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$.

212. а) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

213. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

214. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x}{\ln(2-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

215. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-4x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x}{x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 2x)\operatorname{ctg} x$.

216. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

217. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\operatorname{ctg} x}}{e^{\frac{1}{x}}}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

218. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln x}{e^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

219. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+\ln\operatorname{ctg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{\ln(2(x-1))}}$.

220. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\ \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{e^x}+x}{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} 2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

В задачах 221–230 требуется, используя методы дифференциального исчисления, исследовать функцию и построить её график.

221. а) $y=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$; б) $y=x^3e^x$.

222. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $y=e^{-x^2}$.

223. а) $y=\dfrac{x^2+8x-6}{x}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

224. а) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$; б) $y=x\ e^{-x}$.

225. а) $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{\frac{x^2}{3}}$.

226. а) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

227. а) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $y=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$.

228. а) $y=\dfrac{x^2}{x+4}$; б) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

229. а) $y=\dfrac{1}{1-x}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

230. а) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

В задачах 231–240 требуется отделить действительные корни уравнения $F(x)=0$ и, применяя метод половинного деления, найти их приближенное значение с точностью до 0,001.

231. $x^3+7x-6=0$; 232. $x^3+3x+2=0$; 233. $x^3+7x-1=0$;
234. $x^3+3x+1=0$; 235. $x^3+2x-1=0$; 236. $x^3+7x+5=0$;

237. $x^3+3x+8=0$; 238. $x^3+2x-5=0$; 239. $x^3+7x+9=0$;
240. $x^3+2x-4=0$.

В задачах 241–250 требуется найти уравнение касательной и уравнение нормальной плоскости кривой $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точке t_o.

241. $\bar{r}(t)=\frac{e^t\sin t}{\sqrt{2}}\bar{i}+\bar{j}+\frac{e^t\cos t}{\sqrt{2}}\bar{k};t_0=0$.

242. $\bar{r}(t)=\cos t\bar{i}+\sin t\bar{j}+\sqrt{3}t\bar{k};t_0=\frac{\pi}{2}$.

243. $\bar{r}(t)=\sin^2 t\bar{i}+\sin t\cos t\bar{j}+\cos^2 t\bar{k};t_0=\frac{\pi}{4}$.

244. $\bar{r}(t)=3\sqrt{t}\bar{i}+(t^2-1)\bar{j}+(3t^2+t)\bar{k};t_0=1$.

245. $\bar{r}(t)=e^t\bar{i}+e^t\cos t\bar{j}+e^t\sin t\bar{k};t_0=0$.

246. $\bar{r}(t)=(t^3-3)\bar{i}+(t^4+3)\bar{j}+\ln t\bar{k};t_0=12$.

247. $\bar{r}(t)=(t^4-3t^2)\bar{i}+(t^3+2t)\bar{j}+\frac{4}{t}\bar{k};t_0=-1$.

248. $\bar{r}(t)=\sqrt{10-t^2}\bar{i}+(t^3-2t)\bar{j}+(4t-3t^2)\bar{k};t_0=3$.

249. $\bar{r}(t)=\cos 2t\bar{i}-3\sin 2t\bar{j}+2ctgt\bar{k};t_0=\frac{\pi}{4}$.

250. $\bar{r}(t)=t^2\bar{i}-e^{-t}\bar{j}+e^t\bar{k};t_0=0$.

В задачах 251–260 дана функция $z=f(x,y)$, требуется: 1) найти полный дифференциал; 2) определить частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

251. $z=xe^{\frac{y}{x}}$. 252. $z=e^{3xy}+x^3+y^3$.

253. $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$. 254. $z=\ln(x^2+y^2-xy)$.

255. $z=\ln(x^2+y^2)$. 256. $z=\frac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

257. $z=\frac{x}{y}$. 258. $z=\sin(x^2+y^2)$.

259. $z=\dfrac{y}{x^2-y^2}$. 260. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x}$.

Задачи 261–270 являются задачами на приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

261. Найти приближенное значение $\sqrt{(4{,}03)^3+(1{,}96)^5+4}$, исходя из значения функции $z=\sqrt{x^3+y^5+4}$ при $x=4$, $y=2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

262. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{(2{,}03)^3+(1{,}94)^3}$, исходя из значения функции $z=\sqrt[4]{x^3+y^3}$ при $x=2$, $y=2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

263. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{(3{,}95)^2+(3{,}03)^2+2}$, исходя из значения функции $z=\sqrt[3]{x^2+y^2+2}$ при $x=4$, $y=3$, заменяя ее приращение дифференциалом.

264. Найти приближенное значение $\dfrac{10}{(4{,}02)^3+(1{,}97)^5+4}$, исходя из значения функции $z=\dfrac{10}{x^3+y^5+4}$ при $x=4$, $y=2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

265. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{(2{,}95)^3+(2{,}03)^2+1}$, исходя из значения функции $z=\sqrt[5]{x^3+y^2+1}$ при $x=3$, $y=2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

266. Найти приближенное значение $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$, исходя из значения функции $z=\sin x\ \operatorname{tg} y$ при $x=30^\circ, y=45^\circ$, заменяя ее приращение дифференциалом.

267. Найти приближенное значение $\sqrt{(3{,}02)^2-(2{,}004)^2+11}$, исходя из значения функции $z=\sqrt{x^2-y^2+11}$ при $x=3, y=2$, заменяя ее приращение дифференциалом.

268. Найти приближенно значение $0{,}97^{1{,}05}$, исходя из значения функции $z = y^x$ при $x = 1,\ y = 1$, заменяя ее приращение дифференциалом.

269. Найти приближенное значение $\dfrac{2{,}03^2}{\sqrt{(2{,}03)^3 + (1{,}05)^3 + 7}}$, исходя из значения функции $z = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + y^3 + 7}}$ при $x = 2,\ y = 1$, заменяя ее приращение дифференциалом.

270. Найти приближенное значение $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} + 2\right)$, исходя из значения функции $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} + 2)$ при $x = 1,\ y = 1$, заменяя ее приращение дифференциалом.

В задачах 271–280 требуется найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.

271. $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$, $\quad 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 3$.
272. $z = x^2 + 2y^2 + 1$, $\quad x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3$.
273. $z = 3 - 2y^2 - xy - y^2$, $\quad x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x$.
274. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $\quad x \ge 1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
275. $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, $\quad -1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2$.
276. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $\quad x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.
277. $z = 10 + 2xy - x^2$, $\quad 0 \le y \le 4 - x^2$.
278. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, $\quad x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \ge 0$.
279. $z = x^2 + xy - 2$, $\quad 4x^2 - 4 \le y \le 0$.
280. $z = x^2 + xy$, $\quad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$.

В задачах 281–290 дана функция $z = z(x; y)$, точка $A(x_0; y_0)$ и линия L, проходящая через A. Требуется найти **grad** z и производную от функции z в точке A в направлении линии L в сторону возрастания координаты x.

281. $z = \ln(x + y)$, $\quad A(1; 3)$, $\quad L: y^2 = 9x$.
282. $z = x e^y$, $\quad A(2; 2)$, $\quad L: xy = 4$.
283. $z = \operatorname{arctg}(y/x)$, $\quad A(1; 1)$, $\quad L: x^2 + y^2 - 2x = 0$.
284. $z = \operatorname{arctg}(yx)$, $\quad A(1; 1)$, $\quad L: y = x$
285. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\quad A(1; 3)$, $\quad L: x^2 + y^2 = 2$.
286. $z = x^2 + y^2$, $\quad A(4; 4)$, $\quad L: y^2 = 4x$.

287. $z = x^2 + y^2$, $A(6; 8)$, $L: x^2 + y^2 = 100$.
288. $z = x^2 + y^2 + xy$, $A(3; 1)$, $L: 4x - 3y - 9 = 0$.
289. $z = \mathrm{arctg}(yx)$, $A(1; -1)$, $L: y = -x$.
290. $z = \arcsin(x/(x+y))$, $A(5; 5)$, $L: y^2 = 5x$.

Задачи 291–300. Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента x, которые записаны в таблице:

Задачи	x	1	2	3	4	5
291	y	4,9	3,4	3,9	5,9	3,0
292	y	2,9	5,0	3,3	3,9	5,8
293	y	6,9	3,2	5,1	2,5	6,2
294	y	6,1	2,2	5,5	2,1	3,8
295	y	4,1	2,0	5,3	2,3	2,4
296	y	5,3	4,0	2,1	5,9	6,0
297	y	4,7	3,6	5,7	5,5	4,0
298	y	2,7	2,4	4,3	5,3	5,8
299	y	4,5	3,8	3,5	6,3	6,4
300	y	3,1	4,4	3,8	6,5	4,6

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $Y = aX + b$, выражающую приближенно (аппроксимирующую) функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $Y = aX + b$.

В задачах 301–310 требуется найти указанные неопределенные интегралы. Полученные результаты проверить дифференцированием.

301. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}}$; б) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

302. а) $\int \frac{\ln(tgx)}{\sin x \cos x} dx$; б) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

303. а) $\int \frac{3^{arctgx}}{1 + x^2} dx$; б) $\int x^2 \sin 4x dx$.

304. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}$; б) $\int \cos(\ln x) dx$.

305. а) $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx$; б) $\int x^2 5^{\frac{x}{2}} dx$.

306. а) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$ б) $\int x^3 e^{-x^2}dx.$

307. а) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ б) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx.$

308. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{3\sin^2 x+4};$ б) $\int x^2\cos 6x dx.$

309. а) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1};$ б) $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx.$

310. а) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$ б) $\int e^{3x}\sin x dx.$

В задачах 311–320 требуется найти указанные неопределенные интегралы.

311. а) $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}dx;$ б) $\int \frac{e^x dx}{(2+e^{-x}+e^x)^2}.$

312. а) $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^3-2x+1}dx;$ б) $\int \sin 5x\cos 7x dx.$

313. а) $\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx;$ б) $\int tg^4\frac{2}{3}x dx.$

314. а) $\int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+4}dx;$ б) $\int \frac{\sin 2x dx}{7+3\cos^2 2x}.$

315. а) $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x}.$

316. а) $\int \frac{x dx}{x^3+x^2+2x+2};$ б) $\int ctg^4\frac{x}{2}dx.$

317. а) $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2}dx;$ б) $\int \frac{e^x-1}{3e^{2x}+1}dx.$

318. а) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{3+5\cos 2x}.$

319. а) $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1}dx;$ б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$

320. а) $\int \frac{x^2dx}{x^3-3x-2}$; б) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+1}$.

В задачах 321–330 требуется вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

321. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$ 322. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$

323. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$ 324. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}.$

325. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$ 326. $\int\limits_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}.$

327. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}.$ 328. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}.$

329. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$ 330. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

В задачах 331–340 требуется вычислить указанные числовые характеристики геометрических фигур при помощи определенного интеграла.

331. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

332. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ и осью Ox.

333. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\varphi)$.

334. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\varphi$.

335. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

336. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy.

337. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

338. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$.

339. Вычислить длину кардиоиды $r = 3(1-\cos\varphi)$.

340.Вычислить длину одной арки циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Задачи 341–350 требуется решить с помощью определенного интеграла.

341. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка конической формы, радиус основания которой равен 1,2 м, а высота – 1 м? Удельный вес песка 2 г/см^3 (песок поднимают с поверхности земли).

342. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140 м, ребро основания (квадрата) 200 м. Удельный вес камня, из которого она сделана, приблизительно равен 2,5 г/см^3. Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

343. Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой H = 5 м, имеющий в основании круг радиуса R = 3 м.

344. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса d из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса, высота которого равна H, а радиус основания – R.

345. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический сосуд радиусом R = = 0,6 м.

346. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания R = 2 м, глубина котла H = 4 м. Он наполнен жидкостью, удельный вес которой d = 0,8 г/см^3. Определить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

347. Определить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее a = 60 см, а высота b = 25 см.

348. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой a = 6,4 м, нижнее b = 4,2 м, а высота h = 3 м.

349. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности жидкости. Как велика сила давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина погруженной полуоси эллипса равна a, а удельный вес жидкости – d?

350. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого S = 4000 см^2, а высота H = 50 см, плавает на поверхности воды. Удельный вес дерева d = 0,8 г/см^3. Какую работу нужно произвести, чтобы вытащить поплавок из воды?

В задачах 351–360 требуется найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

351. $y'\cos x = y\sin x + \sin x$.

352. $e^{-y}(1+y') = 1$.

353. $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$.

354. $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$.

355. $y' + xy = x^3$.

356. $x^2y' = 2xy + 3$.

357. $xy' = 3y - x^4y^2$.

358. $(1-x^2)y' + xy = 1$.

359. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x$.

360. $y' - y = e^x$.

В задачах 361–370 требуется найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

361. $xy'' - y' = e^x x^2$.

362. $y'' + 2x(y')^2 = 0$.

363. $y''tgx = y' + 1$.

364. $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$.

365. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

366. $2yy'' = (y')^2$.

367. $2yy'' = 1 + (y')^2$

368. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

369. $y''(1+y) = 5(y')^2$.

370. $y''y^3 = 1$.

В задачах 371–380 требуется найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

371. $y'' - y = 2(1-x);\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

372. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x;\ y(0) = 4;\ y'(0) = 0.$

373. $y'' - 3y' = x + \cos x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = -\dfrac{1}{9}.$

374. $y'' - 4y' + 4y = e^{3x} + 25\sin x;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 0.$

375. $y'' - y = 9xe^{2x};\ y(0) = 0;\ y'(0) = -5.$

376. $y'' + 2y' + y = 9e^{2x} + x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$

377. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x};\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

378. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$

379. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x);\ y(0) = 0;\ y'(0) = -1.$

380. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3-4x);\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0.$

В задачах 381–390 требуется найти общее решение системы уравнений (рекомендуется решать с помощью характеристического уравнения).

381. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$

382. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

383. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

384. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

385. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

386. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

387. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

388. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

389. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

390. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

Задачи 391–400 решаются при помощи составления и решения дифференциального уравнения.

391. Найти кривую, проходящую через точку (2,0) и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

392. Найти все кривые, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

393. Материальная точка массой 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 20 м/с, а сила – 10 дин. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

394. Материальная точка движется прямолинейно, причем так, что ее кинетическая энергия в момент t прямо пропорциональна средней скорости движения в интервале времени от 0 до t. Известно, что при $t = 0$ путь $S = 0$. Показать, что движение равномерно.

395. Найти кривую, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

396. Найти кривую, у которой длина радиуса-вектора любой ее точки M равняется расстоянию между точкой пересечения касательной в точке M с осью Oy и началом координат.

397. Найти кривую, у которой начальная ордината любой касательной равна абсциссе точки касания.

398. Найти кривую, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

399. Найти кривую, у которой площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки и касательной в этой точке, равна половине квадрата абсциссы.

400. Найти кривую линию, все касательные к которой проходят через данную точку (x_0; y_0).

В задачах 401–410 требуется: а) построить на плоскости Oxy область интегрирования заданного интеграла; б) изменить порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядках интегрирования.

401. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\ln x} dy$.

402. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx$.

403. $\int\limits_1^{e^2} dy \int\limits_{-\frac{1}{2}\ln y}^{\ln y} dx$.

404. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} dy$.

405. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dy$.

406. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy$.

407. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} dy$.

408. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy$.

409. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{\frac{4}{x}} dy$.

410. $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} dy$.

В задачах 411–420 требуется: а) вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Изобразить на чертеже данное тело и его проекцию на плоскость Oxy; б) найти статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции однородных плоских пластин (M_x, M_y, x_C, y_C, J_x, J_y), заданных на рисунках.

411. а) $z = 1 - y^2$, $2y + x - 2 = 0$, $x = 2$, $x \geq 0$, $z = 0$; б) рисунок 1.
412. а) $z = y^2$, $z - 2 + y^2 = 0$, $x = 0$, $x = 4$; б) рисунок 2.
413. а) $z = x^2 + y^2$, $x = y^2$, $x = 1$, $z = 0$; б) рисунок 3.
414. а) $x^2 = 2z$, $y = 0$, $z = 0$, $2y + 3x = 6$; б) рисунок 4.
415. а) $x + y + z = 5$, $5x + 2y - 10 = 0$, $y = 0$, $z = 0$; б) рисунок 5.
416. а) $z = 1 - y^2$, $2y + x - 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; б) рисунок 6.
417. а) $y = 2x^2$, $2x + y + z = 4$, $z = 0$, $y = 0$; б) рисунок 7.
418. а) $y = 2x^2$, $2x + y + z = 4$, $z = 0$, $x \geq 0$, $x = 0$; б) рисунок 8.
419. а) $z = 1 - y^2$, $y = x^2$, $x = 0$, $z = 0$; б) рисунок 9.
420. а) $z = 16 - x^2$, $2x + y = 8$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$; б) рисунок 10.

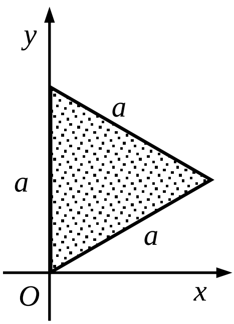


Рисунок 4

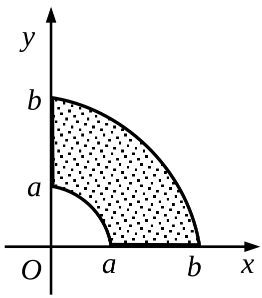


Рисунок 5

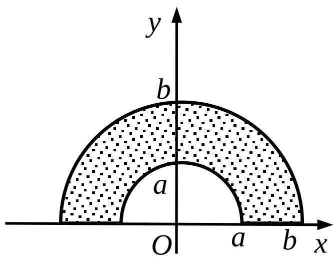


Рисунок 6

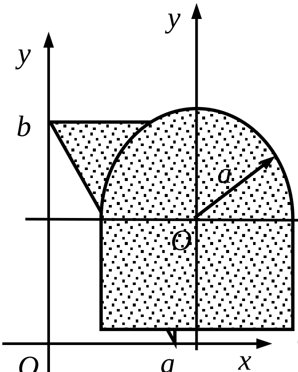


Рисунок 7

Рисунок 1

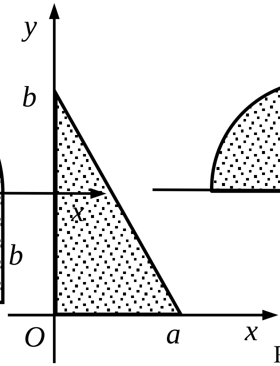


Рисунок 2

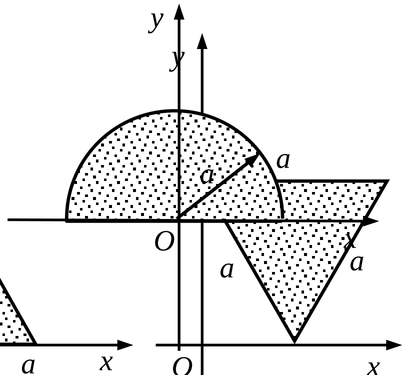


Рисунок 8

Рисунок 3

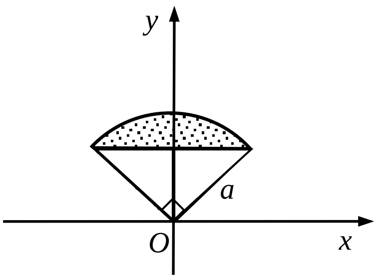


Рисунок 9

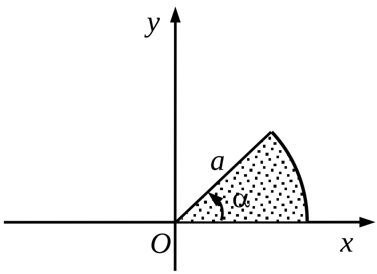


Рисунок 10

В задачах 421–430 требуется с помощью криволинейного интеграла вычислить работу силового поля $\vec{F}$ при перемещении точки вдоль дуги кривой L от точки A до точки B. Сделать чертеж L.

421. $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - 2y\vec{j}$, L – прямая, $A(0;1)$, $B(2;5)$.

422. $\vec{F} = 3x^2y\vec{i} + (x^3+2y)\vec{j}$, L: $y = 2x^2$, $A(0;0)$, $B(2;8)$.

423. $\vec{F} = 2y\vec{i} + (3x-y)\vec{j}$, L: $y = \sqrt{x}$, $A(1;1)$, $B(4;2)$.

424. $\vec{F} = (x^2-2xy)\vec{i} + (y^2-2xy)\vec{j}$, L: $y = x^2$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$.

425. $\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (x^2-y)\vec{j}$, L: $y = |x|$, $A(-1;1)$, $B(2;2)$.

426. $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+3e^{x^2}\vec{j}$, L: $y = x^2$, $A(1;1)$, $B(0;0)$.

427. $\vec{F}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, L – прямая, $A(2;5)$, $B(1;3)$.

428. $\vec{F}=(x^2-y)\vec{i}-(x-y^2)\vec{j}$, L – ломаная ACB, $A(1;2)$, $C(3;2)$, $B(3;5)$.

429. $\vec{F}=(x^2+y)\vec{i}+(y^2+x)\vec{j}$, L – ломаная ACB, $A(2;1)$, $C(5;1)$, $B(5;3)$.

430. $\vec{F}=xy\vec{i}+5y^2\vec{j}$, $L:\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$ $A(3;0)$, $B(0;2)$.

В задачах 431–440 даны векторное поле $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ и плоскость P: $Ax + By + Cz + D = 0$, которая с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее ее плоскости P; λ – контур, ограничивающий σ; $\vec{n}$ – нормаль σ, направленная вне пирамиды V. Требуется: 1) сделать чертеж пирамиды; 2) вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$; 3) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ, применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью $\vec{n}$.

431. $\vec{F}=(2y+z)\vec{j}$, P: $x + 3y + z = 6$.

432. $\vec{F}=(x-3z)\vec{i}$, P: $x - y + z = 2$.

433. $\vec{F}=(x-y-z)\vec{j}$, P: $2x - y + 2z = 2$.

434. $\vec{F}=(x+y-z)\vec{j}$, P: $x + y + z = 4$.

435. $\vec{F}=(z+7x)\vec{k}$, P: $x - 2y + z = 4$.

436. $\vec{F}=(x+y-z)\vec{k}$, P: $x - y - 2z = 4$.

437. $\vec{F}=(2x-y-z)\vec{k}$, P: $x + y + z = 2$.

438. $\vec{F}=(x+y+3z)\vec{k}$, P: $3x + 6y + z = 6$.

439. $\vec{F}=(x-2y+z)\vec{i}$, P: $-x + y + z = 1$.

440. $\vec{F}=(x+3y-z)\vec{j}$, P: $-x - y + z = 1$.

В задачах 441–450 требуется проверить, является ли векторное поле $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал $u = u\,(x;\, y;\, z)$.

441. $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$.

442. $\vec{F} = (4x + yz)\vec{i} + (-2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$.

443. $\vec{F} = (-2x - yz)\vec{i} + (6y - xz)\vec{j} + (-2z - xy)\vec{k}$.

444. $\vec{F} = (y + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (-4z + xy)\vec{k}$.

445. $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (-2z + xy)\vec{k}$.

446. $\vec{F} = (2x - yz)\vec{i} + (6y - xz)\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$.

447. $\vec{F} = (z + yz)\vec{i} + (8y + xz)\vec{j} + (x + 6z + xy)\vec{k}$.

448. $\vec{F} = (8x - y + z)\vec{i} + (-x)\vec{j} + (8z + x)\vec{k}$.

449. $\vec{F} = (8x - y)\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + (2y + 1)\vec{k}$.

450. $\vec{F} = 2x\vec{i} + (6y + z + 1)\vec{j} + y\vec{k}$.

В задачах 451–460 требуется исследовать числовой ряд на сходимость, определив сначала общий член ряда.

451. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{4}-3} + \ldots.$

452. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{6} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{7}{12} + \ldots.$

453. $\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{6}} + \ldots.$

454. $2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{9}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{16}\right)^4 + \ldots.$

455. $\dfrac{1}{1+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \dfrac{1}{3^2+1} + \ldots.$

456. $3 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{9}{4}\right)^4 + \ldots.$

457. $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots.$

458. $\frac{10}{1}+\frac{100}{1\cdot 2}+\frac{1000}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$.

459. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}+\ldots$.

460. $\sqrt{\frac{1}{101}}+\sqrt{\frac{2}{201}}+\sqrt{\frac{3}{301}}+\ldots$.

В задачах 461–470 требуется найти область сходимости степенного ряда.

461. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^{n+1}}{n+1}$.

462. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

463. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

464. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$.

465. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x)^n}{\sqrt{2^n}}$.

466. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

467. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!n}$.

468. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n^3+1)^n}$.

469. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$.

470. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{3^n}}{(n+1)!}x^n$.

В задачах 471–480 требуется вычислить определенный интеграл $\int_0^b f(x)dx$ с точностью 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

471. $f(x) = \cos x^2$, $b = 1$.

472. $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $b = 1/2$.

473. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $b = 1/2$.

474. $f(x) = \sqrt{x}\cos x^2$, $b = 1/2$.

475. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x^2}$, $b = 1/2$.

476. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, $b = 1/2$.

477. $f(x) = \sqrt{1-x^3}$, $b = 1$.

478. $f(x) = e^{-x^2/4}$, $b = 1/5$.

479. $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $b = 1$.

480. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$, $b = 1/2$.

В задачах 481–490 требуется найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям.

481. $y'' - e^y + x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
482. $y'' - xy^2 + x^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
483. $y'' - y^2 + \sin x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
484. $y'' - x^2 - \cos y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
485. $y'' + xy' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
486. $y'' - 2e^x + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
487. $y'' - \cos x + 0{,}5y^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
488. $y'' + x^2y' - xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
489. $y'' + xy' + x^3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
490. $y'' - 2y' + xy = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

В задачах 491–500 требуется разложить данную периодическую функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-l;\ l)$.

491. $f(x) = x^2$, $x \in (-3;\ 3)$.

492. $f(x) = \begin{cases} -x-4, & -4 < x < 0, \\ -x+4, & 0 \le x < 4. \end{cases}$

493. $f(x) = \dfrac{2-x}{3}$, $x \in (-2;\ 2)$.

494. $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0, \\ x-1, & 0 \le x < 5. \end{cases}$

495. $f(x) = 3 - \dfrac{x}{2}$, $x \in (-6;\ 6)$.

496. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0, \\ 2 - \dfrac{2}{3}x, & 0 \le x < 3. \end{cases}$

497. $f(x) = |x|,\ x \in (-5;\ 5).$ 498. $f(x) = 2 - \dfrac{x}{2},\ x \in (-4;\ 4).$

499. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{4},\ x \in (-4;\ 4).$ 500. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}, & -2 < x \le 0, \\ -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}, & 0 < x < 2. \end{cases}$

В задачах 501–510 дана функция $w = f(z)$ комплексной переменной $z = x + yi$. Требуется: а) представить функцию в виде $w = u(x;y) + v(x;y)i$; б) проверить выполнение условий Коши – Римана; в) найти производную $f'(z)$; г) вычислить значения $f(z_o)$, $f'(z_o)$ в заданной точке z_o.

501. $f(z) = e^{3z} - \dfrac{z}{i}$, $z_o = 1 - i$.

502. $f(z) = e^{-3z} + \dfrac{z}{(1+i)}$, $z_o = 1 - i$.

503. $f(z) = e^{-2z} - \dfrac{z}{(1-i)}$, $z_o = 1 + i$.

504. $f(z) = e^{-2z} - \dfrac{5z}{(1+i)}$, $z_o = 2 - i$.

505. $f(z) = e^{iz} - \dfrac{iz}{(3+2i)}$, $z_o = -i$.

506. $f(z) = e^{iz} + \dfrac{3z}{(1-i)}$, $z_o = -2 + i$.

507. $f(z) = e^{-iz} + \dfrac{z}{(1-2i)}$, $z_o = -2 - i$.

508. $f(z) = e^{3z} - \dfrac{2z}{(1+2i)}$, $z_o = 3 + i$.

509. $f(z)=e^{-3z}+\dfrac{2z}{(2-2i)}$, z_o = –3– i.

510. $f(z)=e^{4z}+\dfrac{3z}{(2+2i)}$, z_o = 2 – 3i.

В задачах 511–520 требуется методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям.

511. $x''' + x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

512. $x'' + 2x' + x = \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

513. $x'' + 2x' = t\sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

514. $x'' - x' = t\, e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

515. $x''' + x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

516. $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

517. $x'' + x = 2\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

518. $x'' - 4x = t - 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.

519. $x'' - 2x' + x = t - \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

520. $x'' + 2x' + 5x = 3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

В задачах 521–530 требуется методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям.

521. $\begin{cases} x'+y'=0, \\ x'-2y+x=0, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

522. $\begin{cases} x'+2x+2y=0, \\ y'+2x-y=0, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

523. $\begin{cases} x' + x - 3y = 0, \\ y' - x - y = e^t, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

524. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = e^t, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

525. $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

526. $\begin{cases} x' - x + y = 0, \\ y' - x - y = 0, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

527. $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

528. $\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

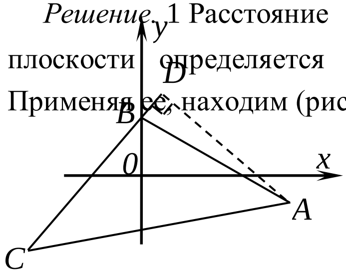
529. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

530. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$ $\qquad x(0) = 2,\ y(0) = 4.$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1 (задачи 1–10). Даны вершины треугольника $A(12; -5)$, $B(0; 5)$, $C(-12; -11)$. Найти: 1) длину стороны BC; 2) уравнение линии BC; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A; 4) длину высоты, проведенной из вершины A; 5) площадь треугольника ABC; 6) угол B в радианах с точностью до двух знаков.

Решение. 1 Расстояние d между точками $B(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$ плоскости определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Применяя ее, находим (рисунок 11):



$BC=\sqrt{(-12-0)^2+(-11-5)^2}=$
$=\sqrt{(-12)^2+(-16)^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20.$

2 Сторона BC проходит через две точки, поэтому воспользуемся уравнением прямой $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

Рисунок 11

$$\frac{y-5}{-11-5}=\frac{x-0}{-12-0};\quad -12y+60=-16x;\quad 16x-12y+60=0;$$

$$4x-3y+15=0 \text{ – уравнение BC.}$$

3 Чтобы составить уравнение высоты AD, проведенной из вершины A на сторону BC, необходимо знать угловой коэффициент этой высоты, который определим с помощью соотношения $k_{BC}k_{AD}=-1$.

$$k_{BC}=-\frac{4}{-3}=\frac{4}{3};\ k_{AD}=-\frac{3}{4}.$$

Составляем уравнение высоты AD, используя уравнение

$$y-y_A=k_{AD}(x-x_A);$$

$$y-(-5)=-\frac{3}{4}(x-12);\ (y+5)\cdot 4=-3(x-12);$$

$$4y+20=-3x+36;\ 3x+4y-16=0.$$

4 Для определения длины высоты AD воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой:

$$|AD|=\left|\frac{4\cdot 12-3\cdot(-5)+15}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{48+15+15}{5}\right|=\left|\frac{78}{5}\right|=15{,}6.$$

5 Для вычисления площади треугольника ABC используем формулу

$$S=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)],\text{ т. е.}$$

$$S=\frac{1}{2}[12(5+11)+0\cdot(-11+5)+(-12)\cdot(-5-5)]=156\text{ ед}^2.$$

Но площадь треугольника ABC в данном случае можно было найти так;

$$S=\frac{1}{2}CB\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15{,}6=156\text{ ед}^2.$$

6 Чтобы определить угол B, необходимо знать угловые коэффициенты сторон BC и BA, которые образуют этот угол:

$$k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11-5}{-12-0} = \frac{-16}{-12} = \frac{4}{3};$$

$$k_{BA} = \frac{-5-5}{12-0} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6}.$$

Используем формулу угла между прямыми, отсчитывая его против хода часовой стрелки (наличие чертежа, выполненного с учетом координат вершин, позволяет найти внутренний угол B):

$$\mathrm{tg}\angle CBA = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-5/6 - 4/3}{1 + (4/3)(-5/6)} = \frac{-13/6}{-1/9} = 19{,}5;$$

$$\angle CBA = \mathrm{arctg}\, 19{,}5 \approx 1{,}5021 \approx 1{,}50 \text{ рад}.$$

Пример 2 (задачи 11–20). Даны две смежные вершины $A(2;5)$ и $B(5;3)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(-2;0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Для вершины A (рисунок 12) противоположной является вершина C, для B – вершина D. Точка M делит отрезки AC и BD пополам. Поэтому координаты точек C и D можно найти, воспользовавшись формулами деления отрезка пополам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

С одной стороны, из равенства $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ получим:

$$-2 = \frac{2 + x_C}{2}; \ -4 = 2 + x_C, \text{ откуда}$$

$$x_C = -6, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}; \ 0 = \frac{5 + y_C}{2}; \ y_C = -5 \text{ и } C(-6;-5).$$

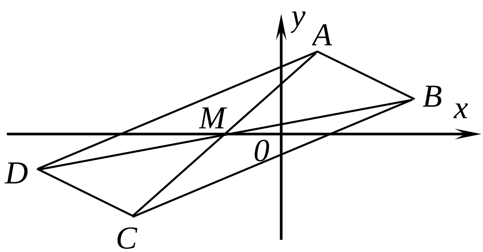


Рисунок 12

С другой стороны,

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2};\ -2 = \frac{5 + x_D}{2};$$

$$-4 = 5 + x_D;\ x_D = -9.$$

$y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$, откуда $0 = \dfrac{3 + y_D}{2}$; $y_D = -3$; $D(-9;-3)$. Зная теперь все вершины параллелограмма и воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки, можем составить уравнения сторон параллелограмма.

Уравнение AB: $\dfrac{y-3}{5-3} = \dfrac{x-5}{2-5}$, $2x + 3y - 19 = 0$.

Уравнение BC: $\dfrac{y+5}{3+5} = \dfrac{x+6}{5+6}$, $8x - 11y - 7 = 0$.

Уравнение CD: $\dfrac{y+5}{-3+5} = \dfrac{x+6}{-9+6}$, $2x + 3y + 27 = 0$.

Уравнение AD: $\dfrac{y-5}{-3-5} = \dfrac{x-2}{-9-2}$, $8x - 11y + 39 = 0$.

Пример 3 (задачи 21–30). Составить уравнение линии – геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $A(8;0)$ и до прямой $x = 12{,}5$ равно числу 4/5. Полученное уравнение привести к простейшему виду.

Решение. Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка искомой линии. Опустим перпендикуляр MB на данную прямую $x = 12{,}5$ и определим координаты точки B. Очевидно, ордината точки B равна ординате точки M, а абсцисса точки B равна 12,5, т. е. $B(12{,}5;\ y)$. По условию задачи $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{5}$ (рисунок 13). Следовательно,

$$\frac{\sqrt{(x-8)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-12,5)^2+(y-y)^2}}=\frac{4}{5}\text{, или}$$

$$\frac{x^2-16x+64+y^2}{x^2-25x+156,25}=\frac{16}{25},$$

$$9x^2 + 25y^2 = 900, \quad \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

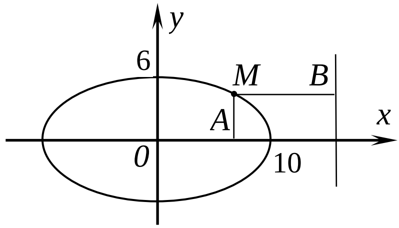


Рисунок 13

Полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса, полуоси которого a = 10 и b = 6. Как видно, данная точка A(8;0) является одним из фокусов этого эллипса.

Пример 4 (задачи 31–40). Линия задана уравнением $r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$.

Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от φ = 0 до φ = 2π, придавая φ значения через промежуток π/8;

2) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

Решение. 1 Построим линию по точкам, предварительно заполнив таблицу значений r и φ. Используя данные таблицы, строим линию в промежутке от φ = 0 до φ = π так, как показано на рисунке 14. Для построения линии в нижней полуплоскости, т. е. в промежутке от φ = π до φ = 2π, используем свойство симметрии графика функции относительно полярной оси (т. к. $r(-\varphi) = r(\varphi)$).

Номер	φ	cos φ	2 + cos φ	r =10/(2+ cos φ)
1	0	1,000	3,000	3,333
2	π/8	0,924	2,924	3,420
3	π/4	0,707	2,707	3,694
4	3π/8	0,383	2,383	4,197
5	π/2	0,000	2,000	5,000
6	5π/8	–0,383	1,617	6,183
7	3π/4	–0,707	1,293	7,734
8	7π/8	–0,924	1,076	9,293
9	π	–1,000	1,000	10,000

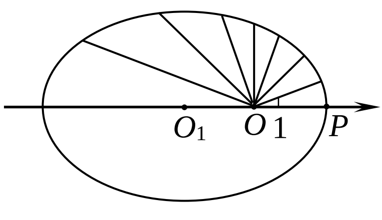


Рисунок 14

2 Перейдем в заданном уравнении линии $r = \dfrac{10}{2+\cos\varphi}$ от полярных координат к декартовым, используя формулы перехода $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{10}{2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Преобразуем это соотношение:

$$2\sqrt{x^2+y^2} + x = 10,\ 2\sqrt{x^2+y^2} = 10 - x,\ 4(x^2+y^2) = (10-x)^2,$$

$$4x^2 + 4y^2 = 100 - 20x + x^2,\ 3x^2 + 20x + 4y^2 - 100 = 0.$$

Выделив полный квадрат по переменным x и y, получим:

$$3\left(x^2 + 2\cdot\frac{10}{3}x + \left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2\right) + 4y^2 = 100,$$

$$3\left(x+\frac{10}{3}\right)^2 + 4y^2 = 100 + \frac{100}{3};\ 3\left(x+\frac{10}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{400}{3}.$$

Разделим обе части равенства на $\dfrac{400}{3}$:

$$\frac{\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2}{\dfrac{400}{9}} + \frac{y^2}{\dfrac{100}{3}} = 1,\ \frac{\left(x+\dfrac{10}{3}\right)^2}{\left(\dfrac{20}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1.$$

Получили уравнение эллипса с центром в точке $O_1\left(-\dfrac{10}{3};0\right)$ и полуосями $a = \dfrac{20}{3}$, $b = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

Пример 5 (задачи 41–50). Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 4;\ 1)$, $C(7;\ 6;\ 3)$, $D(4;\ -3;\ -1)$. Найти: 1) длину ребер $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; 2) площадь грани ABC; 3) угол между ребрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$; 4) объем пирамиды; 5) длину высоты, опущенной на грань ABC.

Решение. 1 Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2-1)\cdot\vec{i} + (4-2)\cdot\vec{j} + (-3+1)\cdot\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\overrightarrow{AC} = (7-1)\cdot\vec{i} + (6-2)\cdot\vec{j} + (3-3)\cdot\vec{k} = 6\vec{i} + 4\vec{j};$$

$$\overrightarrow{AD} = (4-1)\cdot\vec{i} + (-3-2)\cdot\vec{j} + (-1-3)\cdot\vec{k} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Найдем длины этих векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

2 Площадь грани ABC будет равна половине модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, на которых построена грань:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|8\vec{i} - 12\vec{j} - 24\vec{k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 12^2 + (-24)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64+144+576} = \frac{1}{2}\sqrt{784} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 28 = 14 \text{ ед.}^2$$

3 Угол между ребрами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3\cdot 6 + (-5)\cdot 4 - 4\cdot 0}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{18-20}{10\sqrt{26}} = \frac{-1}{5\sqrt{26}}.$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right) \approx \arccos(-0{,}039) \approx 1{,}61 \text{ рад.}$$

4 Объем пирамиды равен шестой части абсолютного значения смешанного произведения векторов, исходящих из одной вершины пирамиды, например, из вершины A:

$$V = \mathrm{mod}(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) .$$

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left((-3)\cdot(-16) - 2\cdot(-24) - 2\cdot(-42)\right) = \frac{1}{6}\cdot 180.$$

Итак, $V = 30$ ед^3.

5 Длину высоты h, опущенной на грань ABC, можно найти, исходя из формулы $V_{\text{ïèð}} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h$, откуда $h = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 30}{14} = \frac{3\cdot 15}{7} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$ ед. длины. Можно было искать h как расстояние от точки B до плоскости ABC.

Пример 6 (задачи 51–60). Дана система $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) по формулам Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

Решение 1 Проверим совместность системы, найдя ее определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель разложением его по элементам первой строки:

$$\Delta = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6+5) + 4\cdot(-18-3) - 2\cdot(-15-3) = -1 - 84 + 36 = -49.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то заданная система уравнений совместна и имеет единственное решение. Для этого вычислим определители Δ_j, получающиеся из определителя системы Δ путем замены в нем столбца, состоящего из коэффициентов при x_j, столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -1\cdot\left(1(-6)-(-5)\cdot 1\right) + 4\cdot\left(2\cdot(-6)-(-3)\cdot 1\right) -$$

$$-2\cdot\left(2\cdot(-5)-(-3)\cdot 1\right) = -1\cdot(-6+5) + 4\cdot(-12+3) - 2\cdot(-10+3) =$$

$$= 1 - 36 + 14 = -21;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-12+3) + 1\cdot(-18-3) - 2\cdot(-9-6) = -30+30 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3+10) + 4\cdot(-9-6) - 1\cdot(-15-3) = -35.$$

Отсюда, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{3}{7}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{5}{7}$.

2 Найдем алгебраические дополнения элементов определителя матрицы системы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -14;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -18;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -7;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Составляем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-1 & -14 & -2\\ 21 & 0 & -7\\ -18 & -7 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{49} & \frac{2}{7} & \frac{2}{49}\\ -\frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7}\\ \frac{18}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{49}\end{pmatrix}.$$

Найдем теперь решение заданной системы из равенства:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{49} & \frac{2}{7} & \frac{2}{49}\\ -\frac{3}{7} & 0 & \frac{1}{7}\\ \frac{18}{49} & \frac{1}{7} & -\frac{13}{49}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{49}+ & \frac{4}{7}- & \frac{6}{49}\\ +\frac{3}{7}+ & 0- & \frac{3}{7}\\ -\frac{18}{49}+ & \frac{2}{7}+ & \frac{39}{49}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\ 0\\ \frac{5}{7}\end{pmatrix}$$, отсюда, $x_1=\frac{3}{7}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{5}{7}$.

Пример 7 (задачи 81–90). Решить уравнение $z^3+27i=0$.

Решение. Имеем $z=\sqrt[3]{-27i}$. Представим число $z_1=-27i$ в показательной форме $|z_1|=27$, $\arg z_1=-\frac{\pi}{2}$, $z_1=27e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}$. Тогда

$z_k=\sqrt[3]{27}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}}$, где $k=0, 1, 2$.

$$z_0 = 3e^{-i\cdot\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right),$$

$$z_1 = 3e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i,$$

$$z_2 = 3e^{i\cdot\frac{7}{6}\pi} = 3\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Пример 8 (задачи 91–100). Даны комплексные числа $z_0 = 290$; $z_1 = 30 - i\cdot 95$; $z_3 = 30 + i\cdot 45$; $z_4 = -25 + i\cdot 1$. Вычислить $z = \dfrac{z_0}{z_1 + z_2}$, где $z_2 = \dfrac{z_3 z_4}{z_3 + z_4}$

*Решение***.** Находим $z_3 + z_4 = 30 + i\cdot 45 + (-25) + i\cdot 1 = 5 + i\cdot 46$.

Переведем это число в показательную форму

$$z_3 + z_4 = \sqrt{5^2 + 46^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\frac{46}{5}} \approx \sqrt{2141}\cdot e^{i\cdot 83,8^\circ}.$$

Переводим z_3 и z_4 в показательную форму:

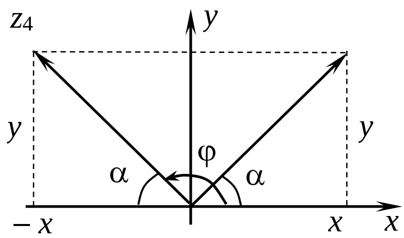


Рисунок 15

$$z_3 = \sqrt{30^2 + 45^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\frac{45}{30}} \approx 54,08e^{i\cdot 56,3^\circ}$$

.

$$z_4 = \sqrt{(-25)^2 + 1^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{25}\right)} \approx 25,02e^{i\left(180^\circ - \mathrm{arctg}\,0,04\right)} \approx 25,02e^{i\cdot 177,7^\circ}$$

($\varphi = \arg z_4 = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{y}{x}\right) = \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, рисунок 15).

Перемножаем:

$$z_3 z_4 \approx (54,08\cdot 25,02)\cdot e^{i(56,3^\circ + 177,7^\circ)} \approx 1353,08\ e^{i\cdot 234^\circ}.$$

Получаем: $z_2 \approx \dfrac{1353,08e^{i\cdot 234^\circ}}{46,27e^{i\cdot 83,8^\circ}} \approx 29,24e^{i\cdot 150,2^\circ} \approx -25,37 + 14,53i$.

$$z_1 + z_2 = 30 - i\cdot 95 - 25,37 + i\cdot 14,53 = 4,63 - i\cdot 80,47 =$$

$= \sqrt{4,63^2+80,47^2}\cdot e^{i\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{80,47}{4,63}\right)} \approx 80,6e^{i\left(-86,7^\circ\right)}$ (число z_1 + z_2 располагается в IV четверти).

Итак, $z = \dfrac{220e^{i\cdot 0}}{80,6e^{i\cdot\left(-86,7^\circ\right)}} \approx 2,73e^{i\cdot 86,7^\circ} \approx 0,16+2,72i$.

Пример 9 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+2}{x^2-x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+2}{x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\infty$.

Пример 10 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Имеет место неопределенность 0/0, причем числитель содержит иррациональность. Надо преобразовать дробь так, чтобы в числителе выделился множитель *x*. С этой целью перенесем иррациональность в знаменатель, умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т. е. $\sqrt{1+x}+1$. Будем иметь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 11 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Выполним очевидные здесь преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}.$$

Если ввести новую переменную $y = \dfrac{x}{2}$, $y \to \infty$ при $x \to \infty$, то воспользовавшись вторым замечательным пределом, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\cdot 2} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{2} = e^2 .$$

Последний переход можно объяснить двумя обстоятельствами: во-первых, при возведении степени в степень показатели перемножаются; во-вторых, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$.

Пример 12 (задачи 121–130). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$.

Решение. При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби есть функции бесконечно малые. Пользуясь эквивалентностью бесконечно малых, из утверждения $\ln(1 + 3x) \sim 3x$ при $x \to 0$ и из утверждения $\sin 4x \sim 4x$ получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} .$$

Пример 13 (задачи 141–150). Дана функция:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{если } -\infty < x \le 1; \\ 4-2x, \text{если } 1 < x < 3 \\ \dfrac{x^2}{3} + 2, \text{если } 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

Найти точки разрыва, если они существуют; найти скачок функции в каждой точке разрыва и построить график.

Решение. График функции приведен на рисунке 16. Функция задана на трех промежутках различными аналитическими выражениями. Каждое из этих выражений представляет собой элементарную функцию, которая является непрерывной. Поэтому функция может иметь разрывы лишь в точках, где меняется ее аналитическое выражение. Исследуем функцию на непрерывность в каждой из этих точек.

1) $x = 1$, находим $f(1) = (2x)_{x=1} = 2$;

2) находим односторонние пределы $f(x)$ при стремлении x к 1 слева и справа. При $x \le 1$ функция $f(x) = 2x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1-0} 2x = 2.$$

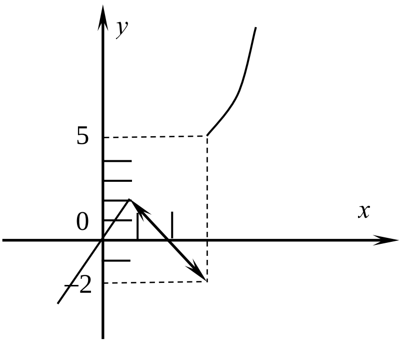


Рисунок 16

При $3 > x > 1$ функция $f(x)$ задана выражением $f(x) = 4 - 2x$, следовательно,

$$\lim_{x\to 1+0} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1+0} \left(4-2x\right) = 2;$$

3) таким образом, односторонние пределы в точке $x = 1$ равны между собой и равны значению функции в точке $x = 1$, т. е.

$$\lim_{x\to 1-0} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1-0} \left(4-2x\right) = -2.$$

Значит, в точке $x = 1$ функция непрерывна. Рассмотрим точку $x = 3$: $f(3) = \left.\left(\dfrac{x^2}{3} + 2\right)\right|_{x=3} = 3 + 2 = 5;$

при $1 < x < 3$ имеем $f(x) = 4 - 2x$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3-0} \left(4-2x\right) = -2$, а при $x \ge 3$ имеем $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + 2$,

следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3+0} \left(\dfrac{x^2}{3} + 2\right) = 5$.

Мы получили, что в точке $x = 3$ левый и правый пределы функции $f(x)$ конечны, но не одинаковы, значит в точке $x = 3$ имеет место разрыв первого рода. Скачок в точке разрыва:

$$\lim_{x\to 3+0} f\left(x\right) - \lim_{x\to 3-0} f\left(x\right) = 5 - \left(-2\right) = 7.$$

Пример 14 (задачи 161–170). Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = (x^2 + 1)^{2x}$.

Решение. 1 Логарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln y = 2x \ln(x^2 + 1).$$

2 Дифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\ln(x^2+1) + x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right) = \frac{2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))}{x^2+1}.$$

3 Находим производную:

$$y' = (x^2+1)^{2x} \cdot \frac{2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))}{x^2+1} =$$

$$= 2(2x^2 + (x^2+1)\ln(x^2+1))(x^2+1)^{2x-1}.$$

Пример 15 (задачи 161–170). Найти производную y'_x от неявной функции $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2e^y y' = 0.$$

Решая полученное уравнение как линейное относительно y'_x, находим требуемую производную:

$$y' \frac{1 - x^2ye^y}{y} = 2xe^y - 3x^2,$$

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2ye^y}.$$

Пример 16 (задачи 181–190). Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до трех знаков после запятой.

Решение. Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. За x_0 принимаем число, близкое к числу x_1, при котором легко вычисляется $f(x_0)$.

Пусть $x_0 = 16$, тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$;

$$f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-3/4}\bigg|_{x_0=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32};\ dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя эти значения в формулу

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,\ \text{получим:}$$

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

Пример 17 (задачи 191–200). Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2 \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Решение. 1 Находим критические точки: $y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x$. Если $y' = 0$, то $2 \cos x - 2 \sin 2x = 0$, $2 \cos x(1 - 2 \sin x) = 0$. Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + k\pi$; если же $1 - 2 \sin x = 0$, то $\sin x = 0{,}5$.

Решая это уравнение, получим $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$.

Из всех найденных критических точек только $x = \pi/6$ лежит внутри отрезка $[0; \pi/2]$: $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$.

2 Вычислим значения функции на концах отрезка $[0; \pi/2]$:

$$y(0) = 1; \; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$$

3 Сравним полученные значения: наибольшего значения данная функция на отрезке $[0; \pi/2]$ достигает в точке $x = \frac{\pi}{6}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5$, а наименьшего – в точках $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$, $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Пример 18 (задачи 201–210). Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна y. Тогда $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, т. е. $y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right)$.

Объем цилиндра

$$V = V(x) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3 \cdot$$

Заметим, что x может изменяться от 0 до ∞.

Найдем производную $V'(x) = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ и решим уравнение $V'(x) = 0$: $\frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0$, откуда $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ – единственная критическая точка. Исследуем ее на экстремум. Найдем вторую производную: $V'' = -6\pi x$. Так как при $x = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ выполняется условие $V'' < 0$, то в этой точке – максимум функции. Объем имеет наибольшее значение, причем

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot \dfrac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x,$$

т. е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом.

Пример 19 (задачи 211–220). Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение. При $x \to 1$ имеем неопределенность 0/0. Применим правило Лопиталя для раскрытия этой неопределенности:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 20 (задачи 221–230). Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Решение. 1 Областью определения функции служит вся числовая ось, за исключением двух точек $x = \pm\sqrt{3}$, в которых знаменатель функции обращается в нуль. Поэтому

$$D(y) = (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty).$$

Отсюда следует, что график функции будет состоять из трех частей.

2 Функция терпит разрыв в точках $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, так как функция элементарная и в этих точках не определена:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} y = \lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\sqrt{3}+0} y = \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой разрыва II рода.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y = \lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} y = \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Точка $x = \sqrt{3}$ является точкой разрыва II рода.

Полученные пределы одновременно характеризуют поведение функции в окрестности точек разрыва, что учтем при построении графика.

3 Функция нечетная, так как выполняется условие $y(-x) = -y(x)$:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = -\frac{x^3}{3-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат. Функция не периодическая.

4 Кривая пересекает оси координат в одной точке O(0; 0). В интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(0; \sqrt{3})$ функция положительна, а в интервалах $(-\sqrt{3}; 0)$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ – отрицательна.

5 Найдем асимптоты графика функции:

а) так как $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} y = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} y = \infty$, то прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами кривой;

б) уравнения наклонных асимптот ищем в виде $y = kx + b$. Определим значения коэффициентов k и b:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{3}{x^2}-1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{3-x^2} + x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3/x}{3/x^2 - 1} = 0.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты $y = -x$.

При $x \to -\infty$ для k и b получаем те же значения.

6 Найдем точки экстремума и интервалы монотонности. Для этого найдем первую производную и критические точки:

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2) + 2x \cdot x^3}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Если $y' = 0$, то $x^2(9 - x^2) = 0$ или $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = 3$. y' не существует в точках $x_4 = -\sqrt{3}$ и $x_5 = \sqrt{3}$, но они не являются критическими, так как не принадлежат области определения функции. Составляем следующую таблицу, включающую критические точки и точки разрыва:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;\ -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y'	–	0	+	Не сущ.	+	0	+	Не сущ.	+	0	–
y	↘	4,5 min	↗	Не сущ.	↗	Экстр. нет	↗	Не сущ.	↗	-4,5 max	↘

$$y_{\min} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{3-(-3)^2} = \frac{-27}{-6} = 4{,}5;$$

$$y_{\max} = y(3) = \frac{3^3}{3-3^2} = \frac{27}{-6} = -4{,}5.$$

7 Найдем интервалы выпуклости, вогнутости кривой и точки перегиба. Для этого надо знать вторую производную функции

$$y'' = \left(\frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2}\right)' = \frac{(18x - 4x^3)(3-x^2)^2 - (9x^2 - x^4)\cdot 2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4} =$$

$$= \frac{54x - 12x^3 - 18x^3 + 4x^5 + 36x^3 - 4x^5}{(3-x^2)^3} = \frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}.$$

В точках перегиба $y'' = 0$ (если $x = 0$) или y'' не существует (если $x = \pm\sqrt{3}$). Последние являются точками разрыва функции, поэтому точкой перегиба может быть только $x = 0$. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
y''	+	Не сущ.	–	0	+	Не сущ.	–
y	$\cup$	Не сущ.	$\cap$	0 перегиб.	$\cup$	Не сущ	$\cap$

$y(0) = 0$; точка $O(0;\ 0)$ есть точка перегиба.

8. Используя результаты исследования, строим график функции: (рисунок 17).

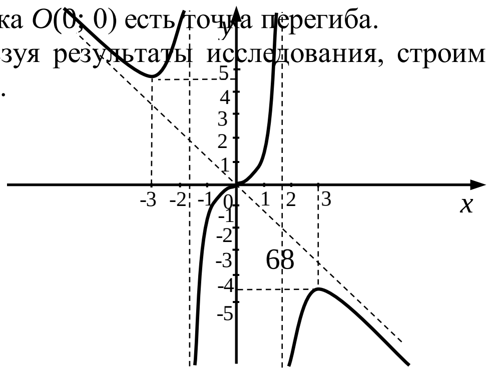


Рисунок 17

Пример 21 (задачи 231–240). Отделить действительные корни уравнения $x^3 + 6x + 3 = 0$ и найти их приближенное значение с точностью до 0,01 методом половинного деления.

Решение. Для определения числа действительных корней и их отделения применяем геометрический метод. Преобразуем данное уравнение к виду $x^3 = -6x - 3$ и построим кривые $y = x^3$ и $y = -6x - 3$ в одних и тех же координатах и при одной и той же единице масштаба (рисунок 18).

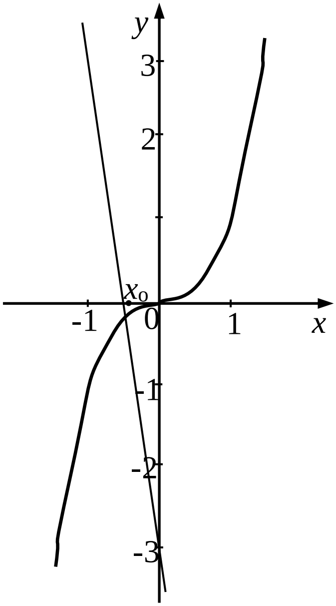


Рисунок 18

Из рисунка заключаем, что данное алгебраическое уравнение имеет только один действительный корень, содержащийся на отрезке [–0,5; –0,4].

Проверим правильность отделения корня аналитическим методом. Определим функцию $f(x) = x^3 + 6x + 3$:

$f(-0,5) = (-0,5)^3 + 6(-0,5) + 3 = -0,125;$

$f(-0,4) = (-0,)^3 + 6(-0,4) + 3 = 0,536.$

Итак,

1) $f(-0,5)\cdot f(-0,4) < 0;$

2) $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ в любой точке. Условия 1) и 2) выполнены, следовательно, на $[-0,5; -0,4]$ находится единственный корень этого уравнения:

$$c = \frac{(-0,5)+(-0,4)}{2} = -0,45\,;$$

$$f(c) = (-0,45)^3 + 6(-0,45) + 3 = 0,208 > 0;$$

$$f(a)\cdot f(c) = f(-0,5)\cdot f(-0,45) < 0.$$

Принимаем $a_1 = a = -0,5$, $b_1 = c = -0,45$. Переходим к отрезку $[a_1;b_1] = [-0,5;-0,45]$.

$$|a_1 - b_1| = |-0,5 + 0,45| = 0,05 > 0,001=\delta.$$

$$c_1 = \frac{(-0,5)+(-0,45)}{2} = -0,475\,;\ f(c_1) = (-0,475)^3+6(-0,475)+3=0,043>0;$$

$$f(a_1)\cdot f(c_1) = f(-0,5)\cdot f(-0,75) < 0;\ a_2 = a = -0,5;\ b_2 = c_1 = -0,475;$$

$[a_2; b_2] = [–0,5; –0,475]$; $| a_2 – b_2 | = |–0,5 + 0,475| = 0,025 > 0,01$.

$$c_2 = \frac{(-0,5)+(-0,475)}{2} = -0,4875\,;$$

$$f(c_2) = (-0,4875)^3 + 6(-0,4875) + 3 = -0,041 < 0;$$

$$f(a_2)\cdot f(c_2) = f(-0,5)\cdot f(-0,4875) > 0;\ a_3 = c_2 = -0,4875;\ b_3 = b_2 = -0,475;$$

$$[a_3; b_3] = [-0,4875; -0,475];\ |a_3 - b_3| = |-0,4875+0,475| = 0,0125 > 0,01.$$

Взяв $c_3 = \dfrac{-0,4875-0,475}{2} = -0,48125$ – середину отрезка $[a_3; b_3]$ за приближенное значение корня, допускаем погрешность

$$\Delta = \left|\frac{a_3 - b_3}{2}\right| = \frac{0,00125}{2} < 0,01 = \delta\,.$$

Ответ: $x_o = -0,48 \pm 0,01$.

Пример 22 (задачи 251–260). Дана функция $z = \ln(x^3 + 3y^2)$. Требуется найти: 1) полный дифференциал; 2) частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 3) показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение. 1 Находим частные производные первого порядка данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(x^3 + 3y^2)\right)'_x = \frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}\,.$$

Заметим, что при нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ переменная y считается постоянной величиной:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(x^3 + 3y^2)\right)'_y = \frac{6y}{x^3 + 3y^2}\,.$$

В данном случае переменная x принималась за постоянную величину.

По формуле $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ полный дифференциал функции

$$dz = \frac{3x^2}{x^3 + 3y^2}dx + \frac{6y}{x^3 + 3y^2}dy = \frac{3}{x^3 + 3y^2}(x^2 dx + 2y dy)\,.$$

2 Найдем частные производные второго порядка данной функции как частные производные от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(\frac{3x^2}{x^3+3y^2}\right)'_x = \frac{6x(x^3+3y^2) - 3x^2 \cdot 3x^2}{(x^3+3y^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^4 + 18xy^2 - 9x^4}{(x^3+3y^2)^2} = \frac{18xy^2 - 3x^4}{(x^3+3y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_y = \left(\frac{6y}{x^3+3y^2}\right)'_y = \frac{6(x^3+3y^2) - 6y \cdot 6y}{(x^3+3y^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 18y^2 - 36y^2}{(x^3+3y^2)^2} = \frac{6x^3 - 18y^2}{(x^3+3y^2)^2}.$$

3 Покажем, что смешанные производные равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{3x^2}{x^3+3y^2}\right)'_y = 3x^2 \frac{-6y}{(x^3+3y^2)^2} = \frac{-18x^2 y}{(x^3+3y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{6y}{x^3+3y^2}\right)'_x = 6y \frac{-3x^2}{(x^3+3y^2)^2} = \frac{-18x^2 y}{(x^3+3y^2)^2}.$$

Видим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример 23 (задачи 271–280). Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y - 12 \leq 0$.

Решение. Сделаем чертеж области D.

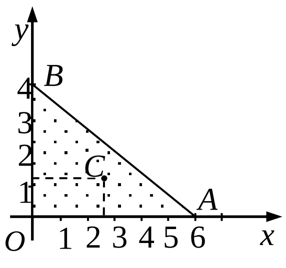


Рисунок 19

1 Найдем стационарные точки, расположенные внутри области D:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y.$$

Составляем систему и решаем ее:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 3y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}, \\ x = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Получили точку $C(8/3;\ 4/3)$, лежащую внутри области D (рисунок 19).

$$z(C) = z(8/3;4/3) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{3} = \frac{64}{9} - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} - \frac{32}{3} =$$

$$= \frac{64-32+16-96}{9} = -\frac{48}{9} = -\frac{16}{3}.$$

2 Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области. Эта задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной.

а) на линии OA: $y = 0$; $z(x) = x^2 - 4x$; $x \in [0; 6]$;

$$z'(x) = 2x - 4;\ z'(x) = 0, \text{ если } x = 2;$$

$$z(2) = 2^2 - 4\cdot 2 = -4 = z(-2; 0);$$

$$z(0) = 0;\ z(6) = 6^2 - 4\cdot 6 = 36 - 24 = 12.$$

На отрезке OA $z_{\text{наиб}} = 12 = z(6; 0)$; $z_{\text{наим}} = -4 = z(2; 0)$;

б) на линии AB: $y = \frac{1}{3}(12-2x)$.

$$z(x) = x^2 - x\cdot\frac{1}{3}(12-2x) + \left(\frac{1}{3}(12-2x)\right)^2 - 4x =$$

$$= x^2 - \frac{12}{3}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{144}{9} - \frac{48}{9}x + \frac{4}{9}x^2 - 4x =$$

$$= \frac{19}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16,\ x \in [0,6];$$

$$z'(x) = \frac{38}{9}x - \frac{40}{3};\ z'(x) = 0;\ \text{ если } x = \frac{60}{19};$$

$$z\left(\frac{60}{19}\right) = \frac{19}{9}\left(\frac{60}{19}\right)^2 - \frac{40}{3}\cdot\frac{60}{19} + 16 = -\frac{96}{19};$$

$$z(0) = 16 = z(0; 4);\ z(6) = \frac{19}{9}\cdot 6^2 - \frac{40}{3}\cdot 6 + 16 = 12 = z(6;0).$$

На линии AB $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$; $z_{\text{наим}} = -\frac{96}{19}$;

в) на линии OB: $x = 0$; $z(y) = y^2$; $y \in [0; 4]$;

$$z'(y) = 2y;\ z'(y) = 0, \text{ если } y = 0;$$

$$z(0) = 0 = z(0; 0);\ z(4) = 16 = z(0;4).$$

На линии OB $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$; $z_{\text{наим}} = 0 = z(0; 0)$.

Из всех найденных значений выбираем самое меньшее и самое большее: $z_{\text{наим}} = -16/3 = z(8/3; 4/3)$, $z_{\text{наиб}} = 16 = z(0; 4)$.

Пример 24 (задачи 291–300). Экспериментально получены пять значений функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице:

x_i	0	1	1,5	2,1	3
y_i	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Методом наименьших квадратов найти функцию вида $y = ax + b$, выражающую приближенную функцию $y = f(x)$. Сделать чертеж, на котором в декартовой прямоугольной системе координат построить экспериментальные точки и график аппроксимирующей функции $y = ax + b$.

Решение. Параметры a и b найдем из системы уравнений и составим таблицу:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5} x_i + 5b = \sum_{i=1}^{5} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i. \end{cases}$$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	2,9	0,00	0,00
2	1,0	6,3	1,00	6,30
3	1,5	7,9	2,25	11,85
4	2,1	10,0	4,41	21,00
5	3,0	13,2	9,00	39,60
$\sum$	7,6	40,3	16,66	78,75

Составляем систему:

$$\begin{cases} 7{,}6a + 5b = 40{,}3, \\ 16{,}66a + 7{,}6b = 78{,}75, \end{cases}$$

решая которую, например, по формулам Крамера, находим $a = 3{,}42$, $b = 2{,}86$. Таким образом, $y = 3{,}42x + 2{,}86$.

Сделаем чертеж (рисунок 20).

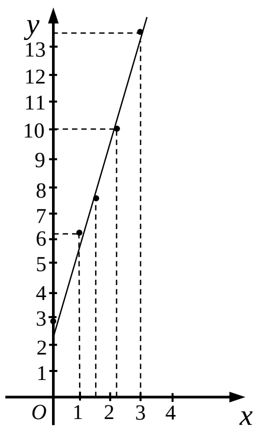


Рисунок 20

Пример 25 (задачи 301–310). Найти интеграл $\int (3\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{x})dx$.

Решение.

$$\int (3\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{x})dx = \int 3\sqrt{x}dx + \int x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx =$$

$$= 3\int \sqrt{x}dx + \int x^2 dx + 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{3/2}}{1{,}5} + \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C =$$

$$= 2x^{3/2} + \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C.$$

Пример 26 (задачи 301–310). Найти

интеграл $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Применим подстановку $x=\sin t$, тогда $dx=\cos tdt$. Имеем

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos tdt=\int ctg^2 tdt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-ctgt-t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x+C.$$

Пример 27 (задачи 301–310).

$$\int x\sin xdx=\begin{bmatrix} u=x; du=dx \\ dv=\sin xdx; v=-\cos x \end{bmatrix}=-x\cos x+\int\cos xdx=$$

$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

Пример 28 (задачи 311–320). Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x-3}$; 2) $\int \frac{8dx}{(x+1)^9}$; 3) $\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx$; 4) $\int \frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}dx$.

Решение. 1) $\int \frac{dx}{x-3}=\int \frac{d(x-3)}{x-3}=\ln|x-3|+C$;

2) $$\int \frac{8dx}{(x+1)^9}=8\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^9}=8\int (x+1)^{-9}d(x+1)=8\frac{(x+1)^{-8}}{-8}+C=$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^8}+C;$$

3) $$\int \frac{6x^3-7x^2+3x-1}{2x-3x^2}dx==\int\left(-2x+1+\frac{x-1}{2x-3x^2}\right)dx=-2\int xdx+$$

$$+\int dx+\int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx=-x^2+x+\int\left(\frac{1}{2-3x}+\frac{1}{3x^2-2x}\right)dx=$$

$$-x^2+x-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2/3}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1/3)^2-1/9}=-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|x-2/3|+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\frac{1}{3}} ln\left|\frac{x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\right|+C=-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|x-2/3|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right|+$$

$$+C=-x^2+x+\frac{1}{6}\ln|x-2/3|-\frac{1}{2}\ln|x|+C;$$

4) для нахождения интеграла $\int\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}dx$ выделим из неправильной рациональной дроби $\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}$ многочлен и правильную рациональную дробь: $\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}=3x^2+\frac{1}{x^4+3x^2}$.

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=$$
$$=\frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}.$$

Приравняем числители дробей:

$$1=(C+B)x^3+(A+D)x^2+3Bx+3A.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$\begin{cases}C+B=0,\\A+D=0,\\3B=0,\\3A=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}C=0,\\D=-1/3,\\B=0,\\A=1/3,\end{cases}$$

$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}$. Таким образом, $\int\frac{3x^6+9x^4+1}{x^4+3x^2}dx=$

$$= \int \left(3x^2 + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx = 3\int x^2 dx + \frac{1}{3}\int x^{-2} dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3} =$$

$$= x^3 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C \cdot$$

Пример 29 (задачи 321–330). Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$.

Интеграл расходится.

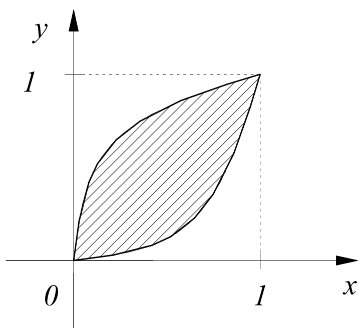
2. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty} arctg(x+1)\Big|_a^0 +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} arctg(x+1)\Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty} \left(arctg 1 - arctg(a+1) \right) +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} \left(arctg(b+1) - arctg 1 \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$ Интеграл сходится.

Пример 30 (задачи 331-340). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.



Решение. Очевидно, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ пересекаются в точках (0;0) и (1;1) (рисунок 21). Тогда

$$S = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Рисунок 21

Пример 31 (задачи 331–340). Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

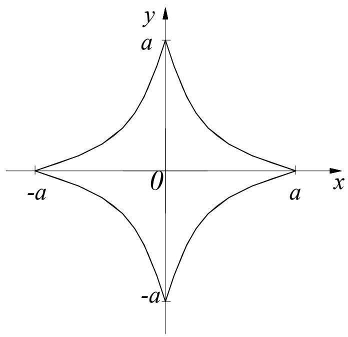


Рисунок 22

Решение. Вычислим ¼ часть длины кривой, так как астроида симметрична относительно осей Ox и Oy (рисунок 22):

$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,$$

$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt==3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=3a\frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}.$$ Откуда $l=6a$.

Пример 32 (задачи 341–350). Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной кверху конуса, высота которого равна H, а радиус основания – R.

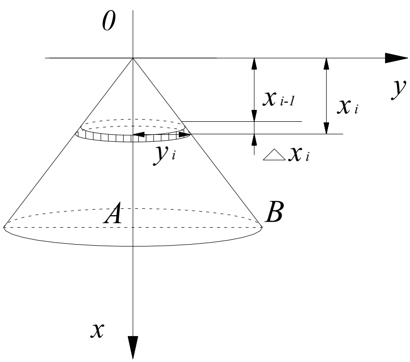


Рисунок 23

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат. Начало поместим в вершине конуса и расположим оси, как показано на рисунке 23. Ось Оx совместим с осью симметрии конуса (положительное направление – от вершины к основанию).

Разобьем отрезок [0; H] произвольно на n частей точками $0 = x_0$, x_1, x_2, …, x_{n-1}, $x_n = H$ и проведем плоскости $x = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, …, $x = x_{n-1}$, $x = H$. Они разбивают конус на слои высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, \ldots, n$.

Приближенное выражение работы, затрачиваемой на поднятие жидкости, заполняющей выделенный элементарный объем (слой считаем за цилиндр с радиусом основания y_i) $\Delta A_i \approx \pi\gamma y_i^{\,2} x_i \Delta x_i$, где $\pi y_i^{\,2}\Delta x_i$ – объем элементарного слоя, x_i – высота поднятия. Из подобия треугольников определим y_i:

$\dfrac{R}{H} = \dfrac{y_i}{x_i}$. Откуда $y_i = \dfrac{R}{H} x_i$. Поэтому $\Delta A_i \approx \pi\gamma \dfrac{R^2}{H^2} x_i^{\,3} \Delta x_i$.

Суммируя величины работы, соответствующие всем элементарным слоям и, переходя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, находим, что искомая работа

$$A = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \frac{1}{4} \pi\gamma R^2 H^2 .$$

Пример 33 (задачи 351–360). Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+e^x)yy' = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение есть ДУ с разделяющимися переменными. Имеем

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x .$$

Разделив переменные, получаем:

$$ydy = \frac{e^x dx}{1+e^x} .$$

Интегрируем: $\int ydy = \int \dfrac{e^x}{1+e^x} dx$. Вычислив интегралы обеих частей равенства, получим общий интеграл

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+e^x| + C .$$

Полагая в последнем выражении $x = 0$ и $y = 1$, будем иметь $\frac{1}{2} = \ln 2 + C$, отсюда $C = \frac{1}{2} - \ln 2$. Подставив в общий интеграл найденное значение C, получим частное решение

$$y^2 = 1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2,$$

откуда

$$y = \sqrt{1 + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2}.$$

Пример 34 (задачи 361–370). Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = -\frac{(y')^2}{2y}$.

Решение. Полагая в данном ДУ $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$, где $p = p(y)$, имеем $2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$ или $p\left(2y\frac{dp}{dy} + p\right) = 0$. Приравнивание первого множителя к нулю приводит к частному решению $y = C$, а из уравнения $2y\frac{dp}{dy} + p = 0$ находим, разделяя переменные, $2ydp = -pdy$, $2\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$.

Интегрируя, получим:

$$2\ln|p| = -\ln|y| + \ln C_1,\ p^2 = \frac{C_1}{y},\ p = \frac{C_2}{\sqrt{y}}.$$

Производя обратную замену $p = y'$, имеем ДУ $\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{\sqrt{y}}$. Разделив переменные и интегрируя, получим: $\int\sqrt{y}dy = \int C_2 dx$,

$\frac{y^{3/2}}{3/2} = C_2 x + C_3$, $y^{3/2} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{C_3}{C_2}\right)C_2$, $y = C_1^*\left(x + C_2^*\right)^{2/3}$.

Пример 35 (задачи 371–380). Найти общее решение ДУ $y''+4y=\cos 2x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y''+4y=0$, а $r^2+4=0$ – его характеристическое уравнение. Так как $r_{1,2}=0\pm 2i$ – корни характеристического уравнения, то общее решение однородного ДУ имеет вид

$y^*=e^{0\cdot x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$, т. к. $\alpha=0$ и $\beta=2$.

Частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения будет (s = 1; β = 2):

$$
\begin{aligned}
4\ \ &|\ \overline{y}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)\\
+\,0\ &|\ \overline{y'}=A\cos 2x+B\sin 2x+x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)\\
1\ \ &|\ \overline{y''}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x+\\
&\qquad +x(-4A\cos 2x-4B\sin 2x),
\end{aligned}
$$

$y''+4y=-4A\sin 2x+4B\cos 2x\equiv 1\cos 2x+0\sin 2x$.

Отсюда $-4A=0$, $4B=1$, т. е. $A=0$, $B=\frac{1}{4}$. Частное решение исходного неоднородного уравнения $\overline{y}=\frac{1}{4}x\sin 2x$.

Общее решение данного уравнения будет:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Пример 36 (задачи 381–390). Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (рекомендуется решать при помощи характеристического уравнения):

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}-6x-3y-3z=0,\\
\dfrac{dy}{dt}+8x+5y+4z=0,\\
\dfrac{dz}{dt}+x+y+2z=0.
\end{cases}
$$

Решение. Перепишем систему в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y + 3z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - y - 2z. \end{cases} \qquad (1)$$

Ищем частное решение системы (1) в виде $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$, $z = \gamma e^{kt}$. Подставив эти функции и их производные в систему (1) и сократив на $e^{kt} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} (6-k)\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0, \\ -8\alpha + (-5-k)\beta - 4\gamma = 0, \\ -\alpha - \beta + (-2-k)\gamma = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Составим характеристическое уравнение системы (1)

$$\begin{vmatrix} 6-k & 3 & 3 \\ -8 & -5-k & -4 \\ -1 & -1 & -2-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Раскроем этот определитель по правилу треугольника:

$(6-k)(-5-k)(-2-k) + 12 + 24 - 3(5+k) - 4(6-k) - 24(2+k) = 0,$

$k^3 + k^2 - 9k - 9 = 0,$

$k^2(k+1) - 9(k+1) = 0,$

$(k+1)(k^2 - 9) = 0,$

$k_1 = -1, k_2 = 3, k_3 = -3.$

Для этих корней из системы (2) ищем соответствующие α, β, γ.

Пусть в системе (2) $k_1 = -1$, тогда

$$\begin{cases} (6+1)\alpha_1 + 3\beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \\ -8\alpha_1 + (-5+1)\beta_1 - 4\gamma_1 = 0, \\ -\alpha_1 - \beta_1 + (-2+1)\gamma_1 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7\alpha_1 + 3\beta_1 + 3\gamma_1 = 0, \\ -8\alpha_1 - 4\beta_1 - 4\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0. \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ 2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Положим $\beta_1 = 1$, тогда $\begin{cases} \alpha_1 + \gamma_1 = -1, \\ 2\alpha_1 + \gamma_1 = -1. \end{cases}$ и $\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \gamma_1 = -1. \end{cases}$

Для корня $k_1 = -1$ частное решение системы (1) будет $x^{(1)} = 0e^{-t}$, $y^{(1)} = 1e^{-t}$, $z^{(1)} = -1e^{-t}$.

Пусть $k_2 = 3$, тогда из (2) получим:

$$\begin{cases} (6-3)\alpha_2 + 3\beta_2 + 3\gamma_2 = 0, \\ -8\alpha_2 + (-5-3)\beta_2 - 4\gamma_2 = 0, \\ -\alpha_2 - \beta_2 + (-2-3)\gamma_2 = 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ 2\alpha_2 + 2\beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 + 5\gamma_2 = 0. \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \\ -\gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 + 5\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\gamma_2 = 0$. Положим $\beta_2 = 1$, то $\alpha_2 = -\beta_2 = -1$ и частные решения будут $x^{(2)} = -1e^{3t}$, $y^{(2)} = 1e^{3t}$, $z^{(2)} = 0e^{3t}$.

Пусть $k_3 = -3$, тогда после подстановки в (2) имеем:

$$\begin{cases} (6+3)\alpha_3 + 3\beta_3 + 3\gamma_3 = 0, \\ -8\alpha_3 + (-5+3)\beta_3 - 4\gamma_3 = 0, \\ -\alpha_3 - \beta_3 + (-2+3)\gamma_3 = 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ 4\alpha_3 + \beta_3 + 2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3 = 0. \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} -\alpha_3 - \gamma_3 = 0, \\ 3\alpha_3 + 3\gamma_3 = 0, \end{cases} \text{ то}$$

$\alpha_3 = -\gamma_3$, $\beta_3 = \gamma_3 - \alpha_3 = \gamma_3 + \gamma_3 = 2\gamma_3$, пусть $\gamma_3 = 1$, то $\alpha_3 = -1$, $\beta_3 = 2$ и частные решения будут $x^{(3)} = -1e^{-3t}$, $y^{(3)} = 2e^{-3t}$, $z^{(3)} = 1e^{-3t}$.

Общее решение исходной системы запишется в виде:

$$x = -C_2 e^{3t} - C_3 e^{-3t},$$
$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + 2C_3 e^{-3t},$$
$$z = -C_1 e^{-t} + C_3 e^{-3t}.$$

Пример 37 (задачи 391–400). Найти кривую, проходящую через точку (2;3) и обладающую тем свойством, что отрезок касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $M_0(x_0;y_0)$ – точка касания (рисунок 24). Уравнение касательной к кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$ запишется так:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

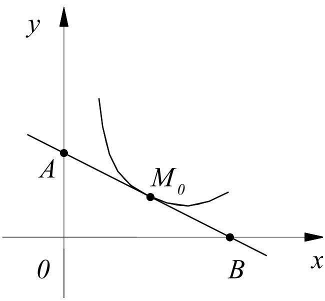


Рисунок 24

Точки $A(0;\ y_A)$ и $B(x_B;\ 0)$ – точки пересечения этой касательной с осями координат. Найдем координаты точки A, решив совместно уравнение касательной и оси Oy:

$$\begin{cases} y - y_0 = y_0'(x - x_0); \\ x = 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$y_A - y_0 = -y_0'x_0;\ y_A = y_0 - y_0'x_0.$$

По условию задачи $\dfrac{y_A + y_B}{2} = y_{M_0}$ или $\dfrac{y_A + 0}{2} = y_0$, или $y_A = 2y_0$. Подставим это в последнее уравнение: $2y_0 = y_0 - y_0'x_0$, или $y_0 = -y_0'x_0$.

Так как точка $M_0(x_0;y_0)$ на кривой была выбрана произвольно, то полученная зависимость характерна для всех точек данной кривой. Поэтому можно записать $y'x = -y$, или $\dfrac{dy}{dx}\cdot x = -y$, $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$, то $\int\dfrac{dy}{y} = -\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C, C > 0$, $y = \dfrac{C}{x}$.

Кривая должна проходить через точку (2;3), поэтому $3 = \dfrac{C}{2}$ и $C = 6$.

Следовательно, уравнение искомой кривой $xy = 6$ (гипербола).

Пример 38 (задачи 401–410). Построить на плоскости *Оху* область интегрирования двойного интеграла $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} xy dy$, изменить порядок интегрирования и вычислить площадь области при заданном и измененном порядках интегрирования.

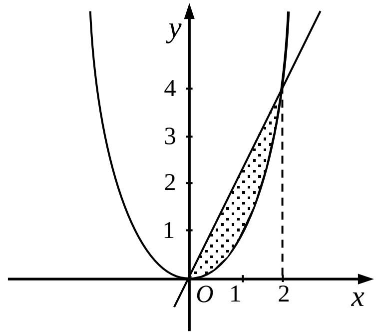


Рисунок 25

Решение. На плоскости *Оху* построим кривые $x = 0$, $x = 2$, $y = 2x$, $y = x^2$. Они ограничивают область, заштрихованную на рисунке 25.

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} xy dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(y^2 x\right)\Big|_{x^2}^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (4x^3 - x^5) dx = \frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(16 - \frac{64}{6}\right) = 2\frac{2}{3}.$$

Изменив порядок интегрирования, получим $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} xy dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} xy dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 x^2 y \,\Big|_{y/2}^{\sqrt{y}} dy =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 (y^2 - \frac{y^3}{4}) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 16\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Пример 39 (задачи 411а–420а). Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (рисунок 26). Объем тела находим, используя цилиндрические координаты:

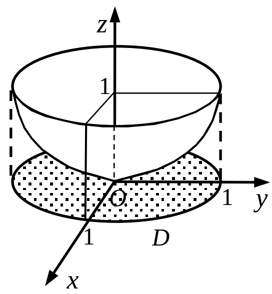


Рисунок 26

$$V=\iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho\int\limits_{\rho^2}^1 dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho(1-\rho^2)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{4}\varphi\,\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Пример 40 (задачи 421–430). С помощью криволинейного интеграла вычислить работу силового поля $\vec{F}=4x^2\vec{i}+xy\vec{j}$ при перемещении точки вдоль дуги кривой L : $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(2;8)$. Сделать чертеж L.

Решение. Чертеж изображен на рисунке 27. Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы:

$$A=\int\limits_L Pdx+Qdy\,.$$

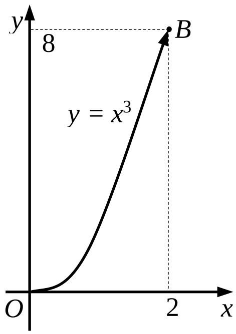


Рисунок 27

Для данного случая по этой формуле получим

$$A=\int\limits_L 4x^2dx+xydy=\int\limits_0^2(4x^2+xx^3\cdot 3x^2)dx=$$

$$=\int\limits_0^2(4x^2+3x^6)dx=$$

$$=\left(\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{7}x^7\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}+\frac{384}{7}=65\frac{11}{21}\,.$$

Пример 41 (задачи 431– 440). Дано векторное поле $\vec{F}=(x-y+2z)\vec{j}$ и плоскость P: $x+y+z=1$, которая с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее ее плоскости P; λ – контур, ограничивающий σ; $\vec{n}$ – нормаль σ, направленная вне пирамиды V. Требуется: 1) сделать чертеж пирамиды; 2) вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$; 3) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ, применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью $\vec{n}$.

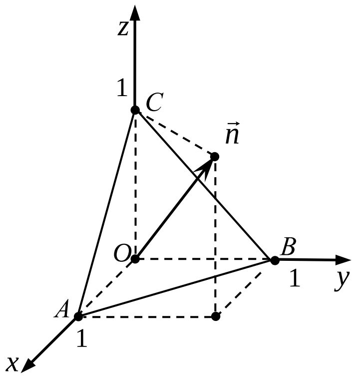


Рисунок 28

Решение. 1 Чертеж пирамиды *OABC* изображен на рисунке 28. Поверхность σ – треугольник *ABC*. 2 Преобразуем уравнение плоскости *P* к виду $y = 1 - x - z$. Спроектируем поверхность σ на плоскость *xOz* (рисунок 29). Найдем требуемый поток векторного поля $\vec{F}$:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (x - y + 2z) \cdot \vec{j} \cdot \overrightarrow{d\sigma} =$$

$$= + \iint_{\sigma_{xz}} (x - (1 - x - z) + 2z) dxdz.$$

Перед знаком двойного интеграла поставлен знак «+», так как вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью *Oy* острый угол. Далее

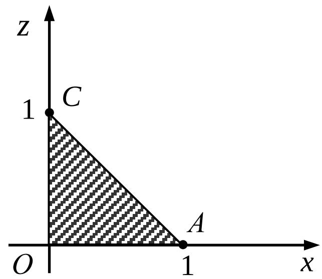


Рисунок 29

$$\Pi = \iint_{\sigma_{xz}} (2x + 3z - 1) dxdz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x + 3z -$$

$$-1)dz = \int_0^1 (2xz + \frac{3z^2}{2} - z)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 (-0{,}5x^2 + 0{,}5)dx = -\frac{0{,}5}{3} + 0{,}5 = \frac{1}{3}.$$

3 Находим ротор поля

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (x - y + 2z) & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(x - y + 2z)}{\partial z} \right] \vec{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial(0)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} \right] \vec{j} + \left[\frac{\partial(x - y + 2z)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y} \right] \vec{k} = -2\vec{i} + \vec{k}.$$

Так как уравнение плоскости треугольника *ABC* имеет вид $x + y + z = 1$, то ее единичный нормальный вектор

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Используя формулу Стокса, находим циркуляцию вектора $\vec{F}$:

$$\text{Ц} = \oint\limits_{ABCA} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint\limits_{G} \left(\operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}_0\right) dG = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{G} dG,$$

где G – верхняя сторона треугольника *ABC*.

Вычисляем полученный поверхностный интеграл. Так как уравнение поверхности G имеет вид $z = 1 - x - y$, то

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Тогда получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{G} dG = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{S} \sqrt{3} dS = -\iint\limits_{S} dS = -S = -1/2,$$

поскольку S (площадь треугольника *AOB*) равна 1/2. Итак,

$$\text{Ц} = \oint\limits_{ABCA} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -1/2.$$

Пример 42 (задачи 441–450). Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M) = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал $u = u(x; y; z)$.

Решение. Имеем

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz - 2x & xz - 2y & xy \end{vmatrix} = (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0}.$$

Значит, поле вектора $\vec{F}$ потенциальное.

Так как $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = -2-2+0 = -4 \neq 0$, то поле $\vec{F}$ не является соленоидальным.

Найдем потенциал U, выбирая в качестве фиксированной точки начало координат, т. е. $x_o = y_o = z_o = 0$. Так как

$$P(x; y_o; z_o) = -2x,\ Q(x; y; z_o) = -2y,\ R(x; y; z) = xy, \text{ то}$$

$$U(x; y; z) = \int_0^x (-2\chi)d\chi + \int_0^y (-2\xi)d\xi + \int_0^z xyd\zeta + C = -x^2 - y^2 + xyz + C.$$

Пример 43 (задачи 451–460). Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$.

Решение. Сравним данный ряд, общий член которого $a_n = \frac{3^n}{1+3^{2n}}$, с рядом $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^k} + \ldots$, для которого $b_n = \frac{1}{3^n}$.

Поскольку $\frac{3^n}{1+3^{2n}} \leq \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{3}$, то на основании первого признака сравнения заключаем, что данный ряд также сходится.

Пример 44 (задачи 461–470). Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Решение. Это степенной ряд, все коэффициенты его, за исключением a_o, отличны от нуля. Найдем радиус и интервал сходимости данного ряда. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, радиус сходимости $R = 1$ и ряд сходится на интервале $(-1;1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, а при $x=-1$ – ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1;1)$ и расходится вне его.

Пример 45 (задачи 471–480). Вычислить определенный интеграл $\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Применить для вычисления этого интеграла формулу Ньютона - Лейбница мы не можем, так как первообразная от e^{-x^2} хотя и существует, но не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots.$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси. Следовательно, его можно почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке [0;1/3]:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx=\int_0^{1/3}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=x\Big|_0^{1/3}-\frac{x^3}{3\cdot 1!}\Big|_0^{1/3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}\Big|_0^{1/3}-$$

$$-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\Big|_0^{1/3}+\ldots=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 3\cdot 1!}+\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{3^7\cdot 7\cdot 1!}+\ldots.$$

Искомый интеграл равен сумме знакочередующегося ряда. Так как

$$\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2!}=\frac{1}{2430}<0,001,\text{ а }\frac{1}{3^3\cdot 3\cdot 1!}=\frac{1}{81}>0,001,$$

то с точностью до 0,001 необходимо найти сумму двух членов разложения

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\approx 0,3333-0,0123=0,3210\,.$$

Итак,

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx\approx 0,321.$$

Пример 46 (задачи 481–490). Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y\,(x)$ дифференциального уравнения $y'' + xy = 0$, удовлетворяющего данным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Данное уравнение разрешимо относительно второй производной

$$y'' = -xy, \tag{4}$$

поэтому его решение удобно искать в виде ряда Маклорена (так как $a = 0$). Искомое решение в данном случае будет выглядеть:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{5}$$

В соответствии с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$, полагая в уравнении (4) $x = 0$ и $y = 1$, получаем $y''(0) = 0$. Чтобы найти значение третьей производной, продифференцируем уравнение (4):

$$y''' = -(y + xy'),$$

$$y'''(0) = -(1 + 0\cdot 2) = -1.$$

Подставим найденные значения в (5)

$$y(x) \approx 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2.$$

Пример 47 (задачи 491–500). Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l = 2$, заданную на отрезке $[-1; 1]$ формулой $f\,(x) = x - 1$.

Решение. Находим по формулам коэффициенты Фурье, полагая $l = 1$:

$$a_o = \int_{-1}^{1}(x-1)dx = \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = -2\,;$$

$$a_m = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos m\pi x dx = \int_{-1}^{1}x\cos m\pi x dx - \int_{-1}^{1}\cos m\pi x dx =$$

$$= \left.\frac{x\sin m\pi x}{m\pi}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin m\pi x}{m\pi}dx - \left.\frac{\sin m\pi x}{m\pi}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{m^2\pi^2}\cos m\pi x\Big|_{-1}^{1} = 0;$$

$$b_m = \int_{-1}^{1}(x-1)\sin m\pi x dx = \int_{-1}^{1}x\sin m\pi x dx - \int_{-1}^{1}\sin m\pi x dx =$$

$$= -\frac{x\cos m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos m\pi x}{m\pi}dx + \frac{\cos m\pi x}{m\pi}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{m\pi}[\cos m\pi + \cos(-m\pi)] +$$

$$+\frac{\sin m\pi x}{m^2\pi^2}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{m\pi}[\cos m\pi - \cos(-m\pi)] = -\frac{2(-1)^m}{m\pi}.$$

Итак,

$$a_o = -2;\ a_k = 0;\ b_m = -\frac{2(-1)^m}{m\pi}.$$

В частности, $b_1 = -\frac{2}{1\pi}$, $b_2 = -\frac{2}{2\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}, \ldots$.

Итак, ряд Фурье для функции $f(x) = x - 1$ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{1} + b_n\sin\frac{n\pi x}{1}\right) =$$

$$= -1 + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\pi x}{1} - \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin n\pi x}{n} + \ldots\right].$$

Пример 48 (задачи 501–510). Дана функция $f(z) = e^{2z} + \frac{z}{i}$ комплексной переменной $z = x + yi$. Требуется: 1) представить функцию в виде $w = u(x;y) + v(x;y)i$; 2) проверить выполнение условий Коши – Римана; 3) найти производную $f'(z)$, вычислить значения $f(z_o)$, $f'(z_o)$ в заданной точке $z_o = 1 - i$.

Решение. 1 Найдем вначале $u(x;y)$ и $v(x;y)$. Для этого подставим $z = x + yi$, получим:

$$f(z) = f(x+iy) = e^{2(x+iy)} + \frac{x+iy}{i}.$$

Используя определения показательной функции и умножая числитель и знаменатель дроби на $(-i)$, имеем:

$$f(z) = e^{2(x+iy)} + \frac{x+iy}{i} = e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y - ix + y =$$

$$= e^{2x}\cos 2y + y + i(e^{2x}\sin 2y - x).$$

Следовательно,

$$u(x,y) = e^{2x}\cos 2y + y,\ v(x,y) = e^{2x}\sin 2y - x$$

и

$$f(z)=f(x+iy)=e^{2x}\cos 2y+y+i(e^{2x}\sin 2y-x).$$

2 Проверим выполнение условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y+1\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y-1\,.$$

Условия Коши – Римана выполнены.

3 Используя одну из формул

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ \ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\ \ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$

найдем производную

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y+i(2e^{2x}\sin 2y-1)\,.$$

Найдем $f(z_o)$, $f'(z_o)$ при $z_o = 1-i$. Так как $x_o = 1$, $y_o = -1$, получим:

$$f(z_o)=f(x_o+iy_o)=e^2\cos 2-1+i(-e^2\sin 2+1)\approx -4{,}07-5{,}72i\ ;$$

$$f'(z_o)=f'(x_o+iy_o)=2e^2\cos 2+i(-2e^2\sin 2-1)\approx -6{,}15-14{,}44i\ .$$

Пример 49 (задачи 511–520). Решить дифференциальное уравнение $x''+x'-2x=e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.

Решение. Переходим к изображающему уравнению, полагая

$$x \leftarrow\!\div\ \bar{x}(p)\,,\ \ x' \leftarrow\!\div\ \bar{x}(p)-x(0)=p\,\bar{x}(p)\ +1,$$

$$x'' \leftarrow\!\div\ p^2\,\bar{x}(p)-px(0)-x'(0)=p^2\,\bar{x}(p)\ +p,\ e^t \leftarrow\!\div\ \frac{1}{p-1}.$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$p^2\bar{x}(p)+p+p\bar{x}(p)+1-2\bar{x}(p)=\frac{1}{p-1}\,.$$

Решаем изображающее уравнение

$$(p^2+p-2)\bar{x}(p)=\frac{1}{p-1}-p-1,$$

$$\bar{x}(p)=\frac{-p^2+2}{(p-1)(p^2+p-2)}=\frac{2-p^2}{(p-1)(p+2)(p-1)}=\frac{2-p^2}{(p-1)^2(p+2)}.$$

Разложим $\bar{x}(p)$ на элементарные слагаемые дроби

$$\frac{2-p^2}{(p-1)^2(p+2)}=\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+2}.$$

Освобождаемся от знаменателей:

$$2-p^2=A(p+2)+B(p-1)(p+2)+C(p-1)^2=$$

$$=Ap+2A+Bp^2+Bp-2B+Cp^2-2Cp+C.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p в правой и левой частях полученного тождества и составляем систему линейных уравнений для определения коэффициентов A, B и C:

$$\begin{array}{l} p^2 \\ p \\ p^o \end{array}\left|\begin{cases} B+C=-1, \\ A+B-2C=0, \\ 2A-2B+C=2, \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} B+C=-1, \\ A+B-2C=0, \\ 4B-5C=-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9B=-7, \\ B+C=-1, \\ A+B-2C=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\dfrac{7}{9}, \\ C=-\dfrac{2}{9}, \\ A=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Подставляя значения A, B и C в схему разложения, получаем:

$$\bar{x}(p)=\frac{1}{3}\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{7}{9}\frac{1}{p-1}-\frac{2}{9}\frac{1}{p+2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем решение уравнения

$$x(t)=\frac{1}{3}te^t-\frac{7}{9}e^t-\frac{2}{9}e^{-2t}.$$

Пример 50 (задачи 521–530). Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\begin{cases} x'-x-y=t, \\ y'+4x+3y=2t, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Решение. Так как

$$x \leftarrow\!\!\div\ \bar{x}(p),\ y \leftarrow\!\!\div\ \bar{y}(p),\ x' \leftarrow\!\!\div\ p\,\bar{x}(p)-x(0)=p\,\bar{x}(p),$$

$$y' \leftarrow\!\!\div\ \bar{y}(p)-y(0)=p\,\bar{y}(p),\ t \leftarrow\!\!\div\ \frac{1}{p^2},\ 2t \leftarrow\!\!\div\ \frac{2}{p^2},$$

то изображающая система имеет вид:

$$\begin{cases} p\bar{x}(p) - \bar{x}(p) - \bar{y}(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ 4\bar{x}(p) + p\bar{y}(p) + 3\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p^2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (p-1)\bar{x}(p) - \bar{y}(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ 4\bar{x}(p) + (p+3)\bar{y}(p) = \dfrac{2}{p^2}. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 4 & p+3 \end{vmatrix} = p^2 + 2p - 3 + 4 = p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p^2} & -1 \\ \dfrac{2}{p^2} & p+3 \end{vmatrix} = \frac{p+3}{p^2} + \frac{2}{p^2} = \frac{p+5}{p^2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{1}{p^2} \\ 4 & \dfrac{2}{p^2} \end{vmatrix} = \frac{2(p-1)}{p^2} - \frac{4}{p^2} = \frac{2(p-3)}{p^2}.$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2}, \; \bar{y}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2}.$$

Разложим $\bar{x}(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$\bar{x}(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p+1};$$

$$p+5 = A(p+1)^2 + Bp(p+1)^2 + Cp^2 + Dp^2(p+1) =$$

$$= Ap^2 + 2Ap + A + Bp^3 + 2Bp^2 + Bp + Cp^2 Dp^3 + Dp^2;$$

$$\begin{array}{c|l} p^3 & \\ p^2 & \\ p & \\ p^o & \end{array}\begin{cases} B + D = 0, \\ A + 2B + C + D = 0, \\ 2A + B = 1, \\ A = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 5, \\ B = -9, \\ D = 9 \\ C = 4. \end{cases} \qquad \bar{x}(p) = \frac{5}{p^2} - \frac{9}{p} + \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{9}{p+1}.$$

Разлагаем $\bar{y}(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$\frac{2(p-3)}{p^2(p+1)^2} = \frac{A_1}{p^2} + \frac{B_1}{p} + \frac{C_1}{(p+1)^2} + \frac{D_1}{p+1};$$

$$2p-6=A_1p^2+2A_1p+A_1+B_1p^3+2B_1p^2+B_1p+C_1p^2+D_1p^3+D_1p^2.$$

$$\begin{array}{c|l} p^3 & \\ p^2 & \\ p & \\ p^o & \end{array}\begin{cases} B_1+D_1=0, \\ A_1+2B_1+C_1+D_1=0, \\ 2A_1+B_1=2, \\ A_1=-6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-6, \\ B_1=14, \\ D_1=-14, \\ C_1=-8. \end{cases}$$

$$\bar{y}(p)=\frac{14}{p}-\frac{6}{p^2}-\frac{8}{(p+1)^2}-\frac{14}{p+1}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение системы

$$\begin{cases} x=5t-9+4te^{-t}+9e^{-t}, \\ y=14-6t-8te^{-t}-14e^{-t}. \end{cases}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Гурский, Е. И.* Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия / Е. И. Гурский. – Минск : Вышэйшая школа, 1982. – 272 с.

2 *Беклемишев, Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

3 *Шнейдер, В. Е* .Краткий курс высшей математики /В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий. – М. : Высшая школа, 1978. – Т.1. – 384 с; Т.2. – 328 с.

4 *Холод, Н. И.* Пособие к решению задач по линейной алгебре и линейному программированию / Н. И. Холод. – Минск : БГУ, 1971. – 176 с.

5 *Гусак, А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск : Тетрасистемс, 2001. – 287 с.

6 *Рубан, П. И.* Руководство к решению задач по аналитической геометрии / П. И. Рубан, Г. Е. Гармаш. – М. : Высшая школа, 1963. – 314 с.

7 *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1970, 1985 – т. 1. – 456 с.; Т. 2. – 560 с.

8 *Бугров, Я. С.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980, 1984.

9 *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для втузов. В 2 ч. – 5-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1999 – Ч. I. – 304 с.; Ч. II. – 416 с.

10 *Запорожец, Г. И* . Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 459 с.

11 Руководство к решению задач по высшей математике /Е. И. Гурский [и др.]. – Минск, 1989. – Ч. I. – 400 с; Ч. II. – 348 с.

12 *Головня, В. А*. Высшая математика : пособие и контрольные задачи для студентов I курса техн. специальностей ФБО БелГУТа. – Гомель: БелГУТ, 2001. – Ч.1. – 84 с.

13 *Жук, А. Н.* Высшая математика : пособие и контрольные задания для студентов I курса техн. специальностей ФБО БелГУТа / А. Н. Жук, С. А. Сафонов, И. И. Сосновский / Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель, 2002. – Ч. II. – 54 с.

14 *Васильева, Т. Н.* Высшая математика : пособия и контрольные задания для студентов I курса БелГУТа / Т. И. Васильева, В. А. Головня, Е. Е. Грибовская. – Гомель : БелГУТ, 2004. – Ч. III. – 63 с.

15 *Жук, А. Н.* Высшая математика : пособия и контрольные задания для студентов II курса техн. специальностей ФБО БелГУТа / А. Н. Жук, С. А. Сафонов, И. И. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2005. – Ч. IV. – 75 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие рекомендации ……….. ………………………..……………………………3
Программа общего курса высшей математики ……...…………………………..… .9
Задачи для контрольных работ………………………………………………………13
Примеры решения задач…………………………………………………………....49
Список рекомендуемой литературы…………………………..……………………..94