$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4} \delta_{mki}\zeta_{mi} \qquad \left(\sum_{i=1}^{4} \delta_{mik}^2 = 1\right),$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \tag{5}$$

где ω_{mi} – частоты собственных колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения (5) можно принять в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + \frac{1}{\omega_{mi}}\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau)d\tau .$$

В качестве примера рассматриваются колебания трехслойного стержня под действием различного вида поверхностных нагрузок, приложенных к внешней плоскости первого слоя:

1. На стержень действует динамическая импульсная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная до сечения $x = b \le 1$. Ее можно представить в аналитическом виде с помощью функции Хевисайда $H_0(x)$ и дельта-функции Дирака $\delta(t)$.

2. На стержень действует синусоидальная импульсная нагрузка.

3. На стержень действует параболическая импульсная нагрузка.

Проведен численный анализ полученных решений.

УДК 539.3

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

С. А. СТАРОВОЙТОВ

Белорусский государственный университет транспорта

Широкое применение трехслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности и строительстве вызывает необходимость разработки методов их расчета. В данной работе рассматривается изгиб подобного стержня под действием локальных нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводятся в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета принята гипотеза «ломаной нормали»: в тонких несущих слоях *1, 2* справедливы гипотезы Бернулли, в более толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. На границах склейки слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Действие упругого основания на стержень описывается моделью Винклера: реакция основания пропорциональна прогибу стержня. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня l. Деформации малые.

На внешние слои стержня действует внешняя распределенная нагрузка, проекции которой $q(x)$ и $p(x)$, а также реакция упругого основания $q_r(x)$. В качестве искомых величин приняты: прогиб $w(x)$, дополнительный угол поворота $\psi(x)$ и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя $u(x)$.

Уравнения равновесия трехслойного стержня на упругом основании получены из вариационного принципа Лагранжа. В перемещениях они имеют вид

$$a_1 u,_{xx} + a_2\psi,_{xx} - a_3 w,_{xxx} = p\,;\; a_2 u,_{xx} + a_4\psi,_{xx} - a_6 w,_{xxx} - a_5\psi = 0\,;$$
$$a_3 u,_{xxx} + a_6\psi,_{xxx} - a_7 w,_{xxxx} + \kappa w = q\,, \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_7$ – параметры, зависящие от механических свойств материалов и геометрических характеристик слоев стержня; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система (1) сведена к нелинейному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно прогиба стержня:

$$w_{,xxxxxx} + \alpha_1 w_{,xxxx} + \alpha_2 w_{,xx} + \alpha_3 w = f(x), \tag{2}$$

где $f(x) = \alpha_4 q + \alpha_5 q_{,xx} + \alpha_6 p_{,x} + \alpha_7 p_{,xxx}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ – коэффициенты, определяемые через параметры $a_1, \ldots, a_7$.

Решение уравнения (2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения неоднородного уравнения $w_p(x)$:

$$w(x) = w_0(x) + w_p(x). \tag{3}$$

Для реальных физико-механических параметров материалов слоев, геометрических размеров стержня, жесткости упругого основания, при которых остаются справедливыми принятые гипотезы, необходимо рассматривать три решения: для оснований малой, средней и высокой жесткости.

Частные решения строятся при помощи ядра Коши $K(x,s)$ для каждого типа основания и вида внешней нагрузки:

$$w_p(x) = \int_0^x K(x,s) f(s) ds, \tag{4}$$

где $f(s) = \alpha_4 q(s) + \alpha_5 q_{,xx}(s) + \alpha_6 p_{,x}(s) + \alpha_7 p_{,xxx}(s)$.

1. Пусть на стержень действует поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри отрезка $[b; a]$. Тогда проекции $q(x)$, $p(x)$ представимы в виде

$$q(x) = q_0(H_0(a-x) - H_0(b-x)), \quad p(x) = p_0(H_0(a-x) - H_0(b-x)), \tag{5}$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда нулевого порядка: $H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Прогиб стержня получим, подставив (5) в (4), а результат в (3).

2. Действие сосредоточенной силы. Пусть ранее рассмотренные распределенные поверхностные нагрузки $q(x)$, $p(x)$ действуют в некоторой малой окрестности точки с координатой $x = a$. Обозначив радиус этой окрестности через ξ, распределенные нагрузки $q(x)$, $p(x)$ можно записать следующим образом:

$$q(x) = q_0(H_0(a+\xi-x) - H_0(a-\xi-x)); \quad p(x) = p_0(H_0(a+\xi-x) - H_0(a-\xi-x)).$$

Представим внешние усилия в виде

$$q(x) = \frac{Q}{2\xi}\,(H_0(a+\xi-x) - H_0(a-\xi-x)); \quad p(x) = \frac{Q}{2\xi}\,(H_0(a+\xi-x) - H_0(a-\xi-x)), \tag{6}$$

где $Q = 2q_0\xi$; $P = 2p_0\xi$.

Подставив (6) в (4) и устремив величину ξ к нулю, оставив величины Q и P постоянными, получим частное решение $w_p(x)$ уравнения (2). Прогиб стержня найдем, подставив $w_p(x)$ в (3).

Искомые перемещения $\psi(x)$ и $u(x)$ выражаются через прогиб $w(x)$ из уравнений (2).

Константы интегрирования определяются из условий закрепления стержня:

– при шарнирном опирании обоих концов стержня

$$\text{при } x = 0,\ 1 \quad w(x) = \psi(x) = u(x) = M(x) = 0;$$

– для стержня, защемленного с двух сторон, необходимо потребовать, чтобы

$$\text{при } x = 0,\ 1 \quad w(x) = \psi(x) = u(x) = H(x) = 0;$$

– для стержня, свободно лежащего на упругом основании

$$\text{при } x = 0,\ 1 \quad Q(x) = H(x) = u(x) = M(x) = 0,$$

где $M(x)$, $H(x)$, $Q(x)$ – суммарные внутренние моменты и сила в поперечном сечении стержня.

Численная реализация полученных аналитических решений проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т. Построены кривые изменения перемещений при действии указанных видов внешних нагрузок в зависимости от жесткости упругого основания, геометрических и механических параметров слоев стержня.

Таким образом, полученные решения позволяют описывать деформированное состояние упругого трехслойного стержня с жестким заполнителем, покоящимся на упругом основании, при действии локальных поверхностных нагрузок и сосредоточенных сил. Для любых сочетаний из этих усилий соответствующие решения могут быть получены комбинацией приведенных решений.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ
Белорусский государственный университет транспорта

А. Г. ГОРШКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (технический университет)

Направления развития современной техники связаны с созданием новых конструкций, отвечающих требованиям надежности, безопасности и экономичности. Наиболее острыми эти проблемы становятся в случае воздействия импульсных нагрузок. В данной работе рассмотрим осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине трехслойной пластины круговой под действием импульсной нагрузки.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат, связанной со срединной поверхностью заполнителя. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Заполнитель считаем легким, т. е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты ϕ: $q = q(r, t)$. На жестко заделанном или шарнирно опертом контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи искомое решение не зависит от координаты ϕ. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0.

При описании вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомый прогиб $w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд по *системе собственных ортонормированных функций* $v_n \equiv v(\beta_n, r)$ [4]:

$$q(r,t) = M\sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad w(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad v_n \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)\right]. \tag{1}$$

Здесь

$$q_n(t) = \frac{1}{M}\int_0^1 q(r,t) v_n r\,dr, \quad \int_0^1 v_m v_n r\,dr = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}. \tag{2}$$

Функция $T_n(t)$ в этом случае будет следующей:

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n (t-\tau) q_n(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где ω_n – частота собственных колебаний.

Для удобства представления нагрузки воспользуемся системой функций Хевисайда H_n и функцией Дирака $\delta(t)$, которую формально можно рассматривать как производную ступенчатой функции Хевисайда $H_0(t)$: