МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

Д. Н. ШЕВЧЕНКО

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей

Под редакцией *Л. А. Сосновского*

Одобрено методическими комиссиями
строительного и механического факультетов

Гомель 2010

УДК 62-192 (075.8)
ББК 34.41
Ш37

Рецензент – зав. кафедрой «Сельскохозяйственные машины» УО «ГГТУ им. П. О. Сухого» канд. техн. наук, доцент *Б. В. Попов*.

Шевченко, Д. Н.

Ш37 Основы теории надежности : учеб.-метод. пособие для студ. техн. спец. / Д. Н. Шевченко ; под ред. Л. А. Сосновского ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 250 с.

ISBN 978-985-468-781-0

Изложены основные разделы теории надежности, предусмотренные учебной программой специальностей: 1–37 02 03 «Техническая эксплуатация погрузочно-разгрузочных, путевых, дорожно-строительных машин и оборудования» по дисциплине «Математические модели анализа работоспособности путевых и дорожно-строительных машин», 1–70 03 01 «Автомобильные дороги», 1–37 02 05 «Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство» по дисциплине «Основы теории надежности».

Приведены терминология, основные модели, методы расчета и статистической оценки показателей надежности технических систем. Даны примеры анализа надежности с использованием пакетов MathCAD, Statgraphics Centurion XV, а также двух оригинальных пакетов автоматизации количественного анализа деревьев отказов (FDiTA) и имитационного моделирования надежности.

Предназначено для студентов технических специальностей. Может быть использовано также аспирантами и научными работниками, занимающимися надежностью технических систем.

УДК 62-192 (075.8)
ББК 34.41

ISBN 978-985-468-781-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

1.1 Предмет и задачи теории надежности

Одним из ключевых понятий, используемым в теории надежности, является понятие **системы** – упорядоченной совокупности взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, образующих единое функциональное целое (предназначенное для решения определенных задач), обладающей новым свойством, отличным от свойств ее элементов. **Элемент системы –** часть системы, выполняющая определенные функции, не делимая на составные части при данном уровне рассмотрения.

В дальнейшем, говоря о системе или ее элементе, будем иметь в виду абстрактный объект. Каждый объект характеризуется рядом выходных параметров, допустимые значения которых в процессе эксплуатации оговорены в нормативно-технической (стандарты, технические условия) и (или) конструкторской (проектной) документации.

Предметом теории надежности является изучение закономерностей изменения показателей качества объектов во времени и разработка методов, позволяющих с минимальной затратой времени и ресурсов обеспечить необходимую продолжительность и эффективность их работы.

Можно выделить следующие основные **задачи теории надежности:**

- анализ значений показателей надежности объектов, а также динамики их изменения во времени;
- синтез систем по заданным критериям надежности;
- обеспечение и повышение надежности объектов.

Исторически наука о надежности развивалась по двум основным направлениям. *Математическое направление* возникло в радиоэлектронике и связано с развитием математических методов оценки надежности, разработкой методов статистической обработки информации о надежности, обоснованием структур систем, обеспечивающих высокий уровень надежности. Теоретической базой этого направления являются: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, математическое моделирование и другие разделы математики.

Физическое направление возникло в машиностроении и связано с изучением природы отказов, разработкой методов расчета на прочность, износостойкость, теплостойкость и др. Теоретической базой этого направления являются естественные науки, изучающие различные аспекты разрушения, старения и изменения свойств материалов: теории упругости, пластичности и ползучести, теория усталостной прочности, механика разрушения, трибология, трибофатика, физико-химическая механика материалов и др.

В настоящее время наблюдается процесс активного синтеза перечисленных направлений, взаимного перенесения рациональных идей из одной области в другую и формирование на этой основе единой науки о надежности.

1.2 Основные понятия теории надежности

1.2.1 Надежность

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования [15].

Надежность – комплексное свойство, которое в зависимости от назначения объекта и условий его применения может включать в себя безотказность, долговечность, ремонтопригодность, сохраняемость, другие свойства или их сочетания (рисунок 1.1).

Рисунок 1.1 – Составляющие надежности по ГОСТ 27.002-89

1.2.2 Состояния объекта. События, связанные с отказами и восстановлением

Перед рассмотрением основных составляющих надежности рассмотрим технические состояния, в которых могут находиться объекты (с позиции надежности): исправное, неисправное, работоспособное, неработоспособное и предельное.

Исправное состояние – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

Если хотя бы по одному из требований объект не соответствует нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации, состояние объекта считается **неисправным**.

Работоспособное состояние – состояние объекта, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять заданные функции, соответствует требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации.

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта при сохранении работоспособного состояния (рисунок 1.2).

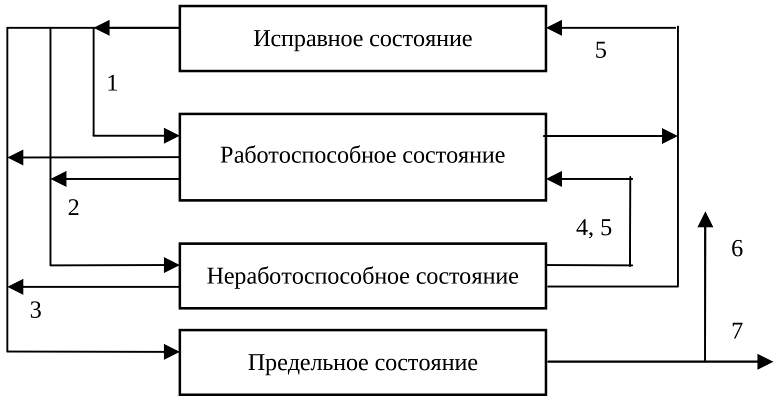


Рисунок 1.2 – Схема основных состояний и событий в объекте:
1 – повреждение; 2 – отказ; 3 – ресурсный отказ; 4 – восстановление;
5 – ремонт; 6 – капитальный ремонт; 7 – списание

Состояние объекта, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации, называется **неработоспособным.**

Для сложных объектов возможно наличие нескольких работоспособных состояний, отличающихся уровнем эффективности применения объекта. Возможно также наличие нескольких неработоспособных состояний, при этом из всего множества неработоспособных состояний выделяют частично неработоспособные состояния, при которых объект способен частично выполнять требуемые функции.

Отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта, определяемое некоторыми формальными критериями (см. рисунок 1.2).

Критерий отказа – признак или совокупность признаков неработоспособного состояния объекта, установленных в нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации. Типичными критериями отказов являются, например:

- прекращение выполнения объектом заданных функций (отказ функционирования);
- снижение качества функционирования по одному или нескольким параметрам (производительность, мощность, точность и др.) за пределы допускаемого уровня;
- внешние проявления, связанные с наступлением или предпосылками наступления неработоспособного состояния (шум, вибрации, перегрев и др.).

Процесс перевода объекта из неработоспособного в работоспособное состояние называется восстановлением. Комплекс операций по восстановлению исправного или работоспособного состояния с восполнением ресурса объекта или его элементов называется ремонтом (см. рисунок 1.2).

Ресурсный отказ – событие, в результате которого объект достигает предельного состояния (см. рисунок 1.2).

Предельное состояние – состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна, либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно (см. рисунок 1.2).

Предельное состояние обусловлено физической невозможностью дальнейшей эксплуатации объекта либо недопустимым снижением его эффективности, либо требованиями безопасности и определяется установленными критериями предельного состояния.

Критерий предельного состояния – признак или совокупность признаков предельного состояния объекта, установленные нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документацией. Типичные критерии предельных состояний:

- отказ одной или нескольких составных частей, восстановление или замена которых на месте эксплуатации не предусмотрены документацией (должны выполняться на предприятии-изготовителе или на специализированном ремонтном предприятии);
- механический износ ответственных деталей (узлов) или снижение физических свойств материалов до предельно допустимого уровня;
- снижение наработки на отказ (повышение интенсивности отказов) ниже (выше) допустимого уровня;
- повышение установленного уровня текущих (суммарных) затрат на техническое обслуживание и ремонт или другие признаки, определяющие экономическую нецелесообразность дальнейшей эксплуатации объекта.

1.2.3 Составляющие надёжности

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки.

Наработка – продолжительность или объем работы объекта. Наработка определяется видом объекта и особенностями его применения, например, наработка двигателя измеряется в моточасах, автомобиля – в километрах пробега, станка-автомата – количеством обработанных деталей, реле – количеством циклов срабатывания и т. п. Наработка может определяться до отказа, между отказами, до наступления предельного состояния или до некоторого фиксированного момента времени.

Долговечность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Основное отличие понятий «безотказность» и «долговечность» состоит в том, что понятие «безотказность» предполагает работу объекта, абстрагированную от вмешательства извне для поддержания его работоспособности. Понятие «долговечность» предполагает рассмотрение работоспособности объекта за весь период его эксплуатации и учитывает, что длительное функционирование объекта (особенно сложного) невозможно без проведения мероприятий по поддержанию и восстановлению его работоспособности, утрачиваемой в процессе эксплуатации.

Показатели долговечности могут выражаться через ресурс или срок службы. Наработка объекта от начала эксплуатации (или ее возобновления после ремонта) до перехода в предельное состояние называется ресурсом (техническим ресурсом). Ресурс невосстанавливаемого объекта определяется через его наработку до отказа, а восстанавливаемого объекта – равен его суммарной наработке до *ресурсного отказа* (периоды функционирования чередуются с периодами восстановления работоспособности). Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации объекта от начала его применения (возобновления эксплуатации после ремонта) до наступления предельного состояния.

Назначенный ресурс – суммарная наработка, при достижении которой эксплуатация объекта должна быть прекращена независимо от его технического состояния. Аналогично определяется понятие «назначенный срок службы». По истечении назначенного ресурса (назначенного срока службы) объект должен быть изъят из эксплуатации и должно быть принято решение, предусмотренное соответствующей нормативно-технической документацией: направление в ремонт, списание, уничтожение, проверка и установление нового назначенного срока (ресурса) и т. д. Указанные временные понятия применяются по отношению к объектам, предельные состояния которых приводят к большим экономическим потерям, угрожают безопасности человека или приводят к вредному воздействию на окружающую среду.

Остаточный ресурс (остаточный срок службы) – суммарная наработка (календарная продолжительность эксплуатации) объекта от момента контроля его технического состояния до перехода в предельное состояние.

Ремонтопригодность – свойство объекта, заключающееся в его приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, а также поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Ремонтопригодность объекта характеризуется оперативной продолжительностью (трудоемкостью) операций обнаружения отказа, поиска и устранения причин и последствий отказа. При этом полная продолжительность восстановления работоспособного состояния объекта, кроме оперативной продолжительности (времени, затрачиваемого непосредственно на операции по восстановлению работоспособности объекта), включает в себя время, затрачиваемое на организационные мероприятия (поиск ремонтной документации, доставка запасных частей и т. п.), продолжительность которых не связана с уровнем ремонтопригодности объекта.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способность объекта выполнять требуемые функции, в течение и после хранения и (или) транспортирования.

Это свойство особенно важно для объектов, эксплуатируемых сезонно (сельскохозяйственные, асфальтоукладочные, снегоуборочные машины) или которые применяют по назначению в аварийных или особых условиях (противопожарная техника, средства аварийной сигнализации и т. п.).

1.3 Основные показатели надежности, их взаимосвязь

1.3.1 Показатели безотказности невосстанавливаемых объектов

Вероятность безотказной работы $P(t)$ – вероятность того, что в пределах заданной наработки $t > 0$ отказ объекта не возникнет:

$$P(t) = P(\xi > t) = 1 - P(\xi \le t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x)dx, \qquad (1.1)$$

где ξ – наработка объекта до отказа; $F(t)$ – вероятность отказа в течение заданной наработки t (функция распределения случайной величины ξ); $f(x)$ – функция плотности распределения случайной величины ξ.

Из формулы (1.1) следует, что вероятность отказа $F(t)$ и вероятность безотказной работы $P(t)$ равны площадям криволинейных трапеций, ограниченных функцией плотности распределения $f(t)$ и осью абсцисс на интервалах $[0, t]$ и (t, ∞) соответственно (рисунок 1.3).

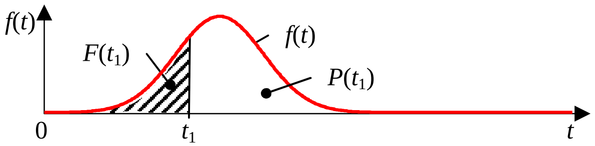


Рисунок 1.3 – Графическая интерпретация
вероятности безотказной работы и вероятности отказа

С ростом наработки вероятность безотказной работы невосстанавливаемого объекта $P(t)$ монотонно уменьшается от 1 при $t = 0$, асимптотически приближаясь к 0 при $t \to \infty$, а вероятность отказа $F(t)$ возрастает от 0 до 1 (рисунок 1.4).

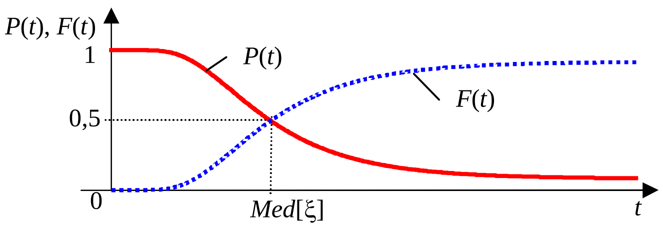


Рисунок 1.4 – Зависимость вероятности безотказной работы
и вероятности отказа объекта от наработки

Вероятность безотказной работы объекта в интервале наработки $(t, t + \Delta t)$ есть условная вероятность $P(t, t + \Delta t)$ того, что на этом интервале наработки отказ объекта не наступит, определяемая при условии, что объект сохранил работоспособность к началу этого интервала t:

$$P(t, t + \Delta t) = P(\xi > t + \Delta t | \xi > t) = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)} = \int_{t+\Delta t}^{\infty} f(x)dx \Big/ \int_{t}^{\infty} f(x)dx \,, \qquad (1.2)$$

где $P(t + \Delta t)$ – вероятность безотказной работы объекта на интервале наработки $(0, t + \Delta t)$; $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта на интервале наработки $(0, t)$.

Средняя наработка до отказа $\bar{t}$ – математическое ожидание наработки объекта до отказа:

$$\bar{t} = M[\xi] = \int_0^{\infty} t\, f(t)dt = \int_0^{\infty} t\, dF(t) = \int_0^{\infty} P(t)dt \,. \qquad (1.3)$$

Последнее равенство можно доказать, если взять по частям первый интеграл. Таким оо разом, *средняя наработка до отказа равна площади криволинейной трапеции, ограниченной функцией вероятности безотказной работы $P(t)$ от наработки объекта и осью абсцисс* (см. рисунок 1.4).

Гамма-процентная наработка до отказа t_γ – наработка до отказа, которая обеспечивается для $\gamma \cdot 100\ \%$ объектов рассматриваемого типа:

$$P(t_\gamma) = \int_{t_\gamma}^{\infty} f(t)dt = \gamma \,. \qquad (1.4)$$

Вероятность отказа (функция распределения случайной величины ξ – наработки объекта до отказа) в течение наработки t_γ составляет (рисунок 1.5)

$$F(t_\gamma) = 1 - P(t_\gamma) = \int_0^{t_\gamma} f(t)dt = 1 - \gamma \,, \qquad (1.5)$$

т. е. гамма-процентная наработка до отказа есть квантиль распределения случайной величины ξ уровня $(1 - \gamma)$; соответственно $(1 - \gamma) \cdot 100\ \%$ есть процент объектов, для которых отказы в течение наработки t_γ в среднем имеют место.

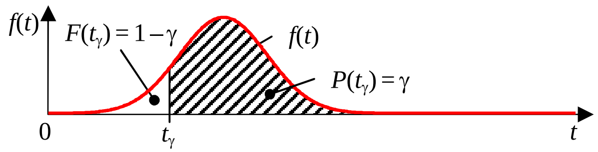


Рисунок 1.5 – Графическая интерпретация
гамма-процентной наработки до отказа

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ в момент наработки t – предел отношения вероятности отказа объекта в полуинтервале наработки $(t, t + \Delta t]$ при условии, что к моменту t отказ еще не наступил, к величине интервала Δt при его стремлении к нулю, т. е.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < \xi \le t + \Delta t \,|\, \xi > t)}{\Delta t} \,. \qquad (1.6)$$

Преобразуем выражение (1.6), применяя к условной вероятности в числителе теорему умножения для зависимых событий $\{t<\xi\le t+\Delta t\}$ и $\{\xi>t\}$:

$$P(t<\xi\le t+\Delta t\,|\,\xi>t)=\frac{P(\{t<\xi\le t+\Delta t\}\cap\{\xi>t\})}{P(\xi>t)}=$$

$$=\frac{P(t<\xi\le t+\Delta t)}{P(\xi>t)}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{P(\xi>t)}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1.6), получим

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{P(\xi>t)\,\Delta t}=\frac{1}{P(\xi>t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}.$$

Выражая вероятность $P(\xi>t)$ через функцию распределения $F(t)$ наработки объекта до отказа ξ,

$$P(\xi>t)=1-P(\xi\le t)=1-F(t),$$

и, учитывая взаимосвязь функции распределения $F(t)$ и функции плотности распределения $f(t)$ наработки до отказа ξ

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=F'(t)=f(t),$$

получим следующее выражение для интенсивности отказов:

$$\lambda(t)=\frac{1}{P(\xi>t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{f(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{P(t)}. \qquad (1.7)$$

Несложно показать, что

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{d(1-P(t))}{dt}=-\frac{dP(t)}{dt}. \qquad (1.8)$$

Следовательно,

$$\lambda(t)=-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}=-\frac{d}{dt}[\ln P(t)]. \qquad (1.9)$$

Умножая обе части этого равенства на $(-dt)$ и интегрируя в пределах от 0 до t, получаем

$$-\int_0^t\lambda(t)dt=\int_0^t d[\ln P(t)]=\ln P(t)\Big|_0^t=\ln P(t)-\ln P(0)=\ln P(t)-\ln(1)=\ln P(t).$$

Потенцируя последнее равенство, получаем выражение, которое называют **основной формулой надежности**:

$$P(t)=\exp\left(-\int_0^t\lambda(t)dt\right). \qquad (1.10)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ невосстанавливаемых технических объектов (рисунок 1.6), как правило, определяется суммой интенсивности отказов объекта вследствие наличия скрытых дефектов изготовления $\lambda_1(t)$ (см. рисунок 1.6), интенсивности внезапных отказов объекта $\lambda_2(t)$ и интенсивности износных и деградационных отказов $\lambda_3(t)$ (см. рисунок 1.6). На этой кривой $\lambda(t)$ выделяют три характерных участка: период приработки, период нормальной эксплуатации и период старения (см. рисунок 1.6).

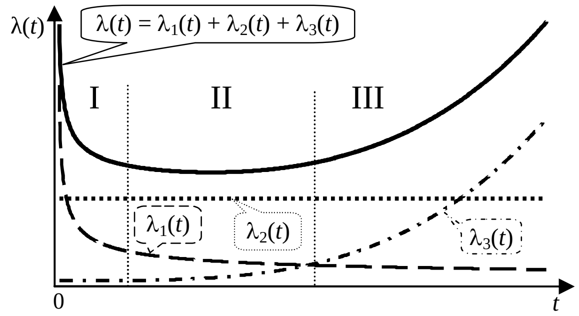


Рисунок 1.6 – Зависимость интенсивности отказов технических объектов от наработки:
I – период приработки; II – период нормальной эксплуатации;
III – период старения

Начальный период эксплуатации (период приработки). Повышенный уровень интенсивности отказов на этом участке объясняется наличием скрытых дефектов изготовления, которые проявляются в начальный период эксплуатации объекта. Функция интенсивности отказов объектов вследствие наличия скрытых дефектов изготовления представлена на рисунке 1.6 кривой $\lambda_1(t)$.

Контроль качества материалов и элементов, приработочные испытания и другие специальные мероприятия позволяют существенно уменьшить интенсивность отказов системы в этот период. Поэтому обычно в расчетах надежности данный период игнорируется.

Пример 1.1. Допустим, интенсивность отказов объекта описывается степенной функцией вида (рисунок 1.7)

$$\lambda(t)=\alpha\,\beta^{-\alpha}t^{\alpha-1}. \qquad (1.11)$$

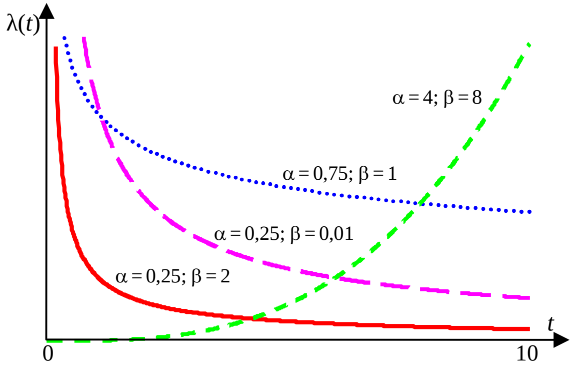


Рисунок 1.7 – Интенсивность отказов, описываемая степенной функцией

Тогда, в соответствии с основной формулой надежности (1.10) и выражением (1.7)

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha\, x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}dx\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad (1.12)$$

$$f(t) = \lambda(t)P(t) = \frac{\alpha\, t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}\exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right). \quad (1.13)$$

Таким образом, при условии (1.11) наработка объекта до отказа подчиняется распределению Вейбулла (приложение А, п. А.3).

Период нормальной эксплуатации. В течение этого периода, когда уровень накопленных износных повреждений еще не настолько высок, чтобы вызвать ухудшение выходных качественных параметров объекта, интенсивность отказов обычно имеет стабильно низкое значение, уровень которого определяется особенностями вида объекта, его исходным качеством, режимами и условиями эксплуатации. Обычно на этом периоде эксплуатации наблюдается несколько характерных для объекта видов внезапных отказов (поломки мелкоразмерного инструмента технологических систем обработки материалов резанием, поломки деталей предохранительных устройств и т. п.), которые в совокупности определяют уровень интенсивности отказов на этом участке. Функция интенсивности отказов объектов вследствие внезапных отказов представлена на рисунке 1.6 кривой $\lambda_2(t)$.

Пример 1.2. В частном случае, при $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$ (рисунок 1.8) в соответствии с (1.10) наработка объекта до отказа подчиняется экспоненциальному закону распределения (см. приложение А, п. А.3), который широко используется для моделирования внезапных отказов элементов и систем [13, 23, 24].

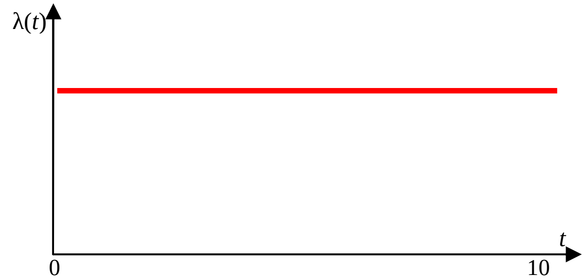


Рисунок 1.8 – Постоянная интенсивность отказов

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right) = \exp\left(-\int_0^t \lambda dt\right) = e^{-\lambda t}; \quad (1.14)$$

$$F(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad (1.15)$$

$$f(t) = \lambda(t)P(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}. \quad (1.16)$$

Заключительный период эксплуатации (период старения). В течение этого периода эксплуатации происходит прогрессивное ухудшение выходных параметров объекта, вызванное накопленными износными и деградационными повреждениями, что вызывает монотонное возрастание интенсивности отказов. Функция интенсивности отказов объектов вследствие износных отказов представлена на рисунке 1.6 кривой $\lambda_3(t)$.

Пример 1.3. Пусть интенсивность отказов может быть описана линейно возрастающей функцией вида (рисунок 1.9)

$$\lambda(t) = c\,t\,. \quad (1.17)$$

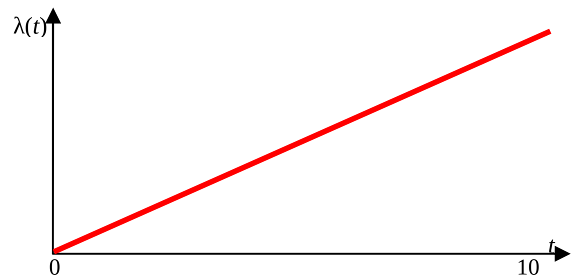


Рисунок 1.9 – Линейно возрастающая интенсивность отказов

Тогда в соответствии с основной формулой надежности (1.10) и выражением (1.7)

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t c\,t\,dt\right) = \exp\left(-\frac{c\,t^2}{2}\right), \tag{1.18}$$

$$f(t) = \lambda(t)P(t) = c\,t \cdot \exp\left(-\frac{c\,t^2}{2}\right). \tag{1.19}$$

Таким образом, при условии (1.17), наработка объекта до отказа имеет распределение Рэлея (где $c = \beta^{-2}$, см. приложение А, п. А.3).

Типичная кривая функции интенсивности отказов $\lambda(t)$ организационных систем и программного обеспечения ЭВМ приведена на рисунке 1.10.

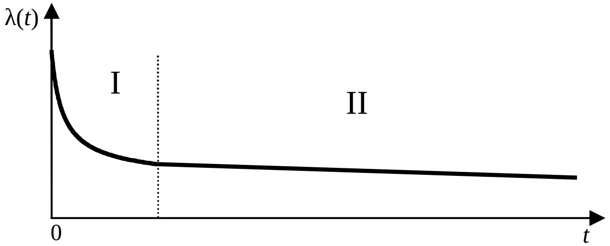


Рисунок 1.10 – Функция интенсивности отказов организационных систем и программного обеспечения ЭВМ:
I – период приработки; II – нормальной эксплуатации

В таблице 1.1 представлены сведения об интенсивности отказов некоторых объектов [7, 9, 27, 55].

Таблица 1.1 – **Интенсивности отказов некоторых объектов**

Объект / система	Интенсивность отказов, 1/ч
Зубчатые передачи цилиндрические одноступенчатые	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$
То же червячные	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$
» цилиндрические коробок передач	$6{,}8 \cdot 10^{-3}$
Валы трансмиссий	$3{,}2 \cdot 10^{-7}$
1000 км нефтепровода	$4{,}6 \cdot 10^{-5}$
Пассажирский самолет	10^{-4}
Станционное электронное оборудование ADM-16/1, используемое в волоконно-оптических системах связи	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$
Лазер 1550 мкм волоконно-оптических систем связи	$2 \cdot 10^{-5}$
Изоляция 1 км кабеля	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$

Объект / система	Интенсивность отказов, 1/ч
Жилы 1 км кабеля	$0{,}8 \cdot 10^{-6}$

Важной характеристикой обслуживаемых объектов является **остаточная наработка до отказа** ξ_τ – наработка объекта от момента контроля технического состояния τ до момента отказа ξ (рисунок 1.11):

$$\xi = \tau + \xi_\tau \text{ (при условии } \{\xi > \tau\}). \qquad (1.20)$$

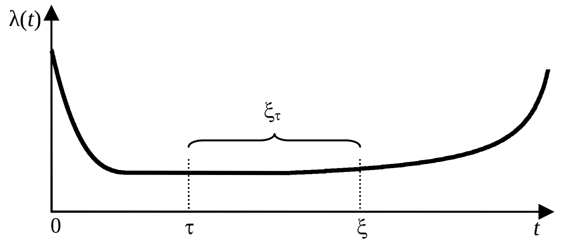


Рисунок 1.11 – Интерпретация остаточной наработки объекта до отказа

Вероятность безотказной работы объекта, определяемая по его остаточной наработке, отсчитываемой с момента контроля технического состояния объекта τ,

$$P_\tau(t) = P(\xi_\tau > t | \xi > \tau) = P(\xi > \tau + t | \xi > \tau), \qquad (1.21)$$

где условие $\{\xi > \tau\}$ указывает на то, что в момент контроля τ объект находился в работоспособном состоянии.

В соответствии с выражениями (1.2) и (1.10) получаем

$$P_\tau(t) = P(\xi > \tau + t | \xi > \tau) = \frac{P(\tau + t)}{P(\tau)} =$$
$$= \exp\left(-\int_0^{\tau+t} \lambda(z)dz\right) / \exp\left(-\int_0^{\tau} \lambda(z)dz\right) = \exp\left(-\int_\tau^{\tau+t} \lambda(z)dz\right), \qquad (1.22)$$

из чего следует, что вероятность безотказной работы объекта, определяемая по его остаточной наработке, не зависит от интенсивности отказов объекта на интервале (0, τ), т. е. до момента контроля технического состояния объекта.

Функция плотности распределения остаточной наработки до отказа $f_\tau(t)$ (случайной величины ξ_τ) определяется в соответствии с (1.8) выражением

$$f_\tau(t) = -\frac{dP_\tau(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{P(\tau + t)}{P(\tau)}\right] = -\frac{1}{P(\tau)}\frac{dP(\tau + t)}{dt} = \left|\begin{matrix} u = \tau + t \\ du = dt \end{matrix}\right| = \qquad (1.23)$$

$$= -\frac{1}{P(\tau)}\frac{dP(u)}{du} = \frac{f(u)}{P(\tau)} = \frac{f(\tau + t)}{P(\tau)},$$

где f – функция плотности распределения наработки объекта до отказа.

Средняя остаточная наработка до отказа – математическое ожидание величины ξ_τ

$$M[\xi_\tau] = \int_0^\infty t\, f_\tau(t)dt = \int_0^\infty t \frac{f(\tau + t)}{P(\tau)}dt = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^\infty t\, f(\tau + t)dt. \qquad (1.24)$$

Установленная наработка до отказа $t_у$ **–** наработка объекта, в течение которой отказ объекта считается невозможным событием. Данный показатель предполагает, что $f(t) = 0$ при $t < t_у$ (рисунок 1.12).

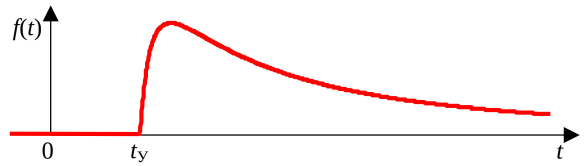


Рисунок 1.12 – К определению понятия установленной наработки до отказа

Для оценки безотказности высоконадежных объектов, подверженных параметрическим отказам (см. разд. 2), когда основные показатели малоинформативны (например, вероятность безотказной работы $P(t) \approx 1$), может использоваться **запас надежности** объекта $K_н$ [53]:

$$K_н = \frac{X_{max}}{X_{ex}}, \qquad (1.25)$$

где X_{max} – максимально допустимое значение выходного параметра X объекта (например, износа), соответствующее наступлению отказа; X_{ex} – наибольшее эксплуатационное значение выходного параметра X по всей совокупности объектов рассматриваемого типа.

На интервале наработки (0, $t_у$) запас надежности объекта $K_н > 1$; при наработке $t \geq t_у$ (см. рисунок 1.12) запас надежности объекта считается исчерпанным ($K_н \leq 1$), а отказы физически возможны.

1.3.2 Пример определения показателей безотказности невосстанавливаемых объектов в пакете MathCAD*

Предполагая, что время наработки до отказа кривошипно-шатунного механизма поршневой машины подчиняется распределению Вейбулла с параметрами $\alpha = 1{,}5$ и $\beta = 2500$ ч, определить следующие показатели безотказности функционирования объекта:

1) построить график функции плотности распределения наработки объекта до отказа;

2) вероятность безотказной работы в течение наработки 2000 ч;

3) вероятность безотказной работы объекта в интервале наработки от 1000 до 3000 ч;

4) среднюю наработку до отказа $\bar{t}$;

5) гамма-процентную наработку до отказа t_γ для $\gamma = 95$ %;

6) определить и построить график функции интенсивности отказов $\lambda(t)$;

7) вероятность безотказной работы объекта, определяемую по его остаточной наработке (интересующая наработка – 1000 ч, момент технического осмотра – 2000 ч);

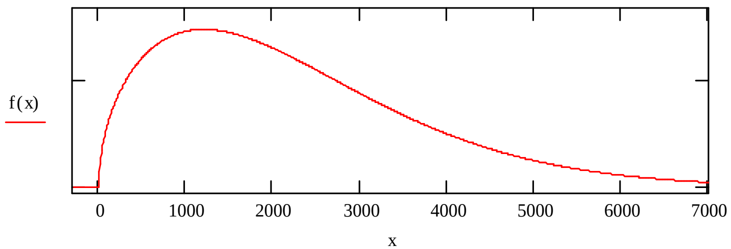
8) среднюю остаточную наработку до отказа (момент технического осмотра – 2000 ч).

Задание функции плотности распределения времени наработки объекта до отказа (в соответствии с распределением Вейбулла)

$\beta := 2500 \qquad \alpha := 1.5$

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции плотности распределения наработки объекта до отказа, ч

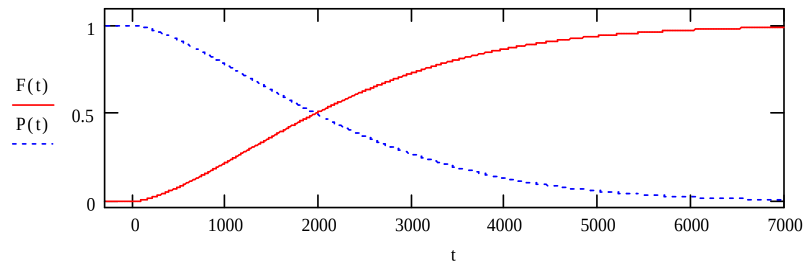


Определение и иллюстрация зависимости вероятности отказа F(t) и вероятности безотказной работы P(t) объекта от наработки t

* Копия экрана с вычислениями в пакете компьютерной математики MathCAD представлена в пособии шрифтом Arial и помещена в рамке.

$$F(t) := \int_0^t f(x)\,dx$$

$$P(t) := 1 - F(t)$$



Вероятность безотказной работы объекта в течение 2000 ч

$P(2000) = 0.4889265$

Вероятность безотказной работы объекта в интервале наработки от 1000 до 3000 ч

$$PP := \frac{P(3000)}{P(1000)}$$

$PP = 0.345918$

Средняя наработка объекта до отказа, ч

$$T := \int_0^{9990000} x \cdot f(x)\,dx$$

$T = 2.256863 \times 10^{3}$

Определение гамма-процентной наработки, ч (γ = 0,95)

$t\gamma := 2000$

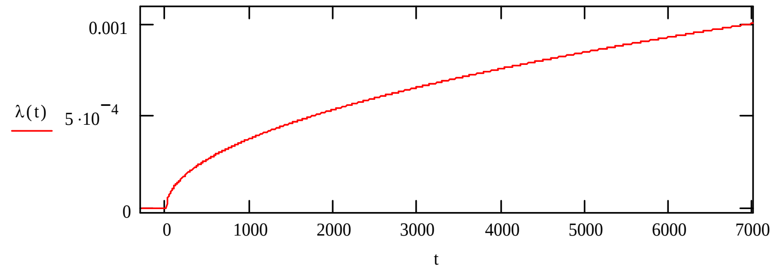
Given

$F(t\gamma) = 1 - 0.95$

$\text{Find}(t\gamma) = 345.125226$

Определение и иллюстрация функции интенсивности отказов

$$\lambda(t) := \frac{f(t)}{P(t)}$$



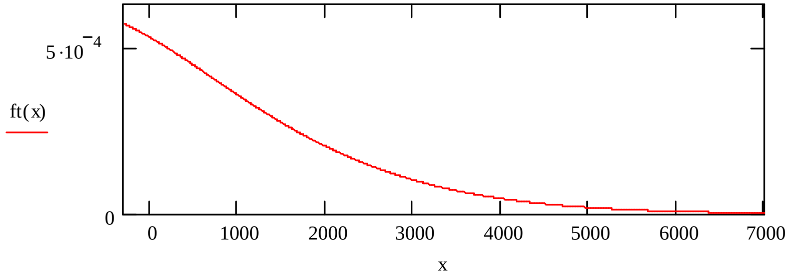
Вероятность безотказной работы объекта, определяемая по остаточной наработке

$$Pt := \frac{P(2000 + 1000)}{P(2000)}$$

$Pt = 0.549365$

Определение функции плотности распределения остаточной наработки до отказа

$$ft(x) := \frac{f(2000 + x)}{P(2000)}$$



Определение средней остаточной наработки до отказа

$$Tt := \int_0^{9900000} x \cdot ft(x)\,dx \qquad Tt = 1.474072 \times 10^3$$

Вывод:

- вероятность безотказной работы объекта в течение наработки 2000 ч равна 0,4889265;
- вероятность безотказной работы объекта в интервале наработки от 1000 до 3000 ч составляет 0,345918;
- средняя наработка объекта до отказа – 2256,863 ч;
- гамма-процентная наработка до отказа для $\gamma = 95$ % составляет 345,125226 ч;
- вероятность безотказной работы объекта, определяемая по остаточной наработке 1000 ч (с момента технического осмотра – 2000 ч), составляет 0,549365;
- средняя остаточная наработка до отказа (с момента технического осмотра 2000 ч) равна 1474,072 ч.

1.3.3 Показатели безотказности восстанавливаемых объектов

Для характеристики безотказности восстанавливаемых объектов при рассмотрении периода до первого отказа или между двумя последовательными отказами могут использоваться те же показатели, что и для невосстанавли-

ваемых объектов. Ниже приведены специфические показатели безотказности восстанавливаемых объектов.

Средняя наработка на отказ $T(t)$ – отношение суммарной наработки t восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки:

$$T(t) = \frac{t}{M[r(t)]}, \tag{1.26}$$

где t – суммарная наработка объекта; $r(t)$ – число отказов объекта, наступивших в течение суммарной наработки t.

В таблице 1.2 представлены сведения о показателях безотказности некоторых восстанавливаемых объектов [7].

Таблица 1.2 – **Показатели безотказности некоторых объектов**

Объект	Средняя наработка на отказ
Кормоуборочный комбайн КСК-100 («Гомсельмаш», 1980 г.)	7 моточасов
Зерноуборочный комбайн КЗР-10 («Гомсельмаш»)	70 моточасов
Универсальное энергетическое средство УЭС-2-250А «Полесье»	80 моточасов
Армейский грузовой автомобиль США грузоподъемностью 2,5 т	5 тыс. км пробега
То же 5 т	4,5 тыс. км пробега
Тягач (США)	7 тыс. км пробега

Математическое ожидание числа отказов восстанавливаемого объекта в течение суммарной наработки t также называют **ведущей функцией потока отказов**:

$$\Omega(t) = M[r(t)]. \tag{1.27}$$

Параметр потока отказов $\omega(t)$ – отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за достаточно малую его наработку к значению этой наработки. Иными словами, параметр потока отказов есть производная по наработке от ведущей функции потока отказов:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[r(t+\Delta t) - r(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[r(t+\Delta t)] - M[r(t)]}{\Delta t} = \Omega'(t). \tag{1.28}$$

В свою очередь, ведущая функция потока отказов может быть выражена через параметр потока отказов:

$$\Omega(t) = \int_0^t \omega(t)dt. \tag{1.29}$$

Математическое ожидание числа отказов объекта на интервале наработки (t_1, t_2):

$$M[r(t_2)-r(t_1)] = M[r(t_2)] - M[r(t_1)] = \Omega(t_2) - \Omega(t_1) = \int_{t1}^{t2} \omega(t)dt\,. \qquad (1.30)$$

Осредненный параметр потока отказов $\omega(t_1, t_2)$ – отношение математического ожидания числа отказов восстанавливаемого объекта за конечную наработку к значению этой наработки:

$$\omega(t_1,\ t_2) = \frac{M[r(t_2)-r(t_1)]}{t_2 - t_1}\,. \qquad (1.31)$$

1.3.4 Показатели долговечности

Гамма-процентный ресурс $t_{р\gamma}$ – наработка, в течение которой объект не достигает предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах (рисунок 1.13):

$$\int_{t_{р\gamma}}^{\infty} f_р(t)dt = \gamma\,, \qquad (1.32)$$

где $f_р(t)$ – функция плотности распределения случайной величины $\xi_р$ – ресурса объекта.

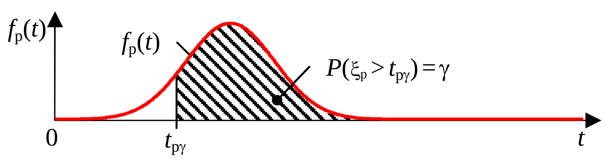


Рисунок 1.13 – Графическая интерпретация гамма-процентного ресурса

Средний ресурс $\overline{t_р}$ – математическое ожидание ресурса объекта:

$$\overline{t_р} = M[\xi_р] = \int_0^{\infty} t\ f_р(t)dt\,. \qquad (1.33)$$

Гамма-процентный срок службы $t_{с\gamma}$ – календарная продолжительность эксплуатации, в течение которой объект не достигает предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах:

$$\int_{t_{с\gamma}}^{\infty} f_с(t)dt = \gamma\,, \qquad (1.34)$$

где $f_с(t)$ – функция плотности распределения случайной величины $\xi_с$ – срока службы объекта.

Средний срок службы $\overline{t_с}$ – математическое ожидание срока службы объекта:

$$\overline{t_с} = M[\xi_с] = \int_0^{\infty} t\ f_с(t)dt\,. \qquad (1.35)$$

В таблицах 1.3 и 1.4 представлены сведения о показателях долговечности и безотказности некоторых объектов [7].

Таблица 1.3 – **Показатели долговечности некоторых объектов**

Объект	90-гамма-процентный ресурс
Подшипники качения бытовых приборов	0,5–4,0 тыс. ч
То же автомобилей	1–10 тыс. ч
» шахтных насосов	100 тыс. ч
Зубчатые передачи турбогенераторов	100 тыс. ч
Автомобиль МАЗ-200 (выпуска 1964 г.)	120 тыс. км пробега
Современный МАЗ-5440	800 тыс. км пробега
Трактор «Беларус» МТЗ-5 (выпуска 1957 г.)	2 тыс. моточасов
Трактор МТЗ-80 (выпуска 1974 г.)	9 тыс. моточасов
Рекомендация стандарта ASAE	
Гусеничный трактор	16 тыс. моточасов
Прицепной зерноуборочный комбайн	2 тыс. моточасов
Самоходный зерноуборочный комбайн	3 тыс. моточасов
Картофелеуборочный комбайн	2,5 тыс. моточасов
95-гамма-процентный ресурс	
Самолет	40 тыс. летных ч
Грузовой и магистральный тепловоз	1,8 млн км пробега
90-гамма-процентный срок службы	
Судовые механизмы	20 лет

Таблица 1.4 – **Заданные в ТУ значения показателей долговечности и безотказности колесных тракторов «Беларус»**

Класс трактора	Средний срок службы, лет	Средняя наработка до отказа, моточас
0,6	10	300
1,4	10	500–700
2,0	10	600
3,0	10	550
5,0	12–15	750

1.3.5 Пример определения показателей долговечности объектов в пакете MathCAD

Предполагая, что ресурс полимерных уплотнительных элементов гидроустройства подчиняется гамма-распределению с параметрами $\alpha = 2$ и $\beta = 2500$ моточасов, а срок службы – логнормальному распределению с параметрами $\mu = 9$ и $\sigma = 2$, определить следующие показатели долговечности объекта:

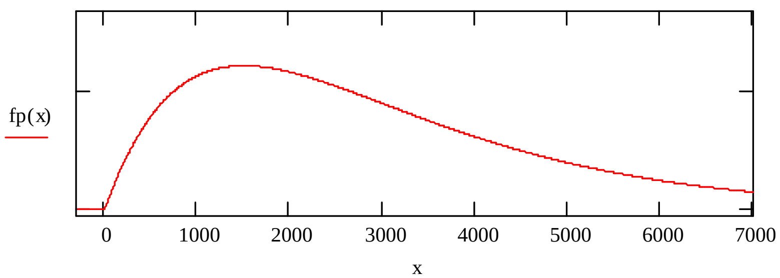
1) график функции плотности распределения ресурса объекта;
2) средний ресурс объекта $\overline{t_{\text{р}}}$;
3) гамма-процентный ресурс объекта $t_{\text{р}\gamma}$ для $\gamma = 90$ %;
4) гамма-процентный ресурс объекта $t_{\text{р}\gamma}$ для $\gamma = 95$ %;
5) график функции плотности распределения срока службы объекта;
6) гамма-процентный срок службы объекта $t_{\text{с}\gamma}$ для $\gamma = 95$ %;
7) средний срок службы объекта $\overline{t_{\text{с}}}$.

Задание функции плотности распределения ресурса объекта (в соответствии с гамма-распределением)

$\beta := 1500$ $\alpha := 2$

$$fp(x) := \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha,0)}\cdot\exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции плотности распределения ресурса объекта



Средний ресурс объекта, моточас,

$$Tp := \int_0^{9990000} x\cdot fp(x)\,dx$$

$Tp = 3\times 10^{3}$

Определение гамма-процентного ресурса, моточас ($\gamma = 0{,}9$),

$tp\ \gamma\_9 := 3000$

Given

$$\int_0^{tp\ \gamma\_9} fp(x)\,dx = 1 - 0.9$$

$Find(tp\gamma\_9) = 797.717025$

Определение гамма-процентного ресурса, моточас ($\gamma = 0{,}95$),

$tp\ \gamma\_95 := 3000$

Given

$$\int_0^{tp\ \gamma\_95} fp(x)\,dx = 1 - 0.95$$

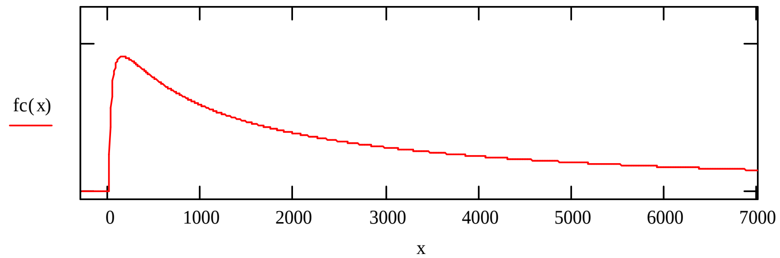
$Find(tp\gamma\_95) = 533.041274$

Задание функции плотности распределения срока службы объекта (в соответствии с логнормальным распределением)

$\mu := 9$ $\sigma := 2$

$$fc(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\dfrac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right] & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции плотности распределения срока службы объекта



Средний срок службы объекта, ч,

$$Tc := \int_0^{9990000} x\cdot fc(x)\,dx$$

$Tc = 5.630843\times 10^{4}$

Определение гамма-процентного срока службы, ч ($\gamma = 0{,}95$),

$tc\ \gamma := 3000$

Given

$$\int_0^{tc\ \gamma} fc(x)\,dx = 1 - 0.9$$

$Find(tc\gamma) = 624.466426$

Вывод:

- средний ресурс объекта $\overline{t_р} = 3$ тыс. моточасов;
- 90-гамма-процентный ресурс объекта $t_{рγ}$ составляет 797,72 моточасов;
- 95-гамма-процентный ресурс объекта $t_{рγ}$ составляет 533,04 моточасов;
- средний срок службы объекта $\overline{t_с} = 56{,}31$ тыс. ч;
- 95-гамма-процентный срок службы объекта $t_{сγ}$ составляет 624,47 ч.

1.3.6 Показатели ремонтопригодности

Вероятность восстановления $P_в(t)$ – вероятность того, что время восстановления объекта не превысит заданное значение t:

$$P_в(t) = P(\xi_в \le t) = \int_0^t f_в(t)dt\,, \qquad (1.36)$$

где $f_в(t)$ – функция плотности распределения случайной величины $\xi_в$ – времени восстановления работоспособного состояния объекта (рисунок 1.14).

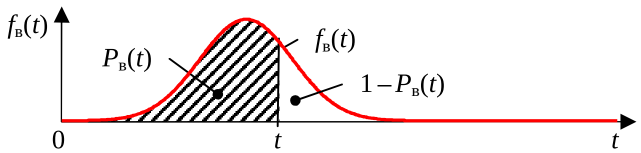


Рисунок 1.14 – Графическая интерпретация вероятности восстановления

Гамма-процентное время восстановления $t_{вγ}$ – время, необходимое для восстановления объекта с заданной вероятностью $γ$, выраженной в процентах (рисунок 1.15):

$$P_в(t_{вγ}) = P(\xi_в \le t_{вγ}) = \int_0^{t_{вγ}} f_в(t)dt = γ\,. \qquad (1.37)$$

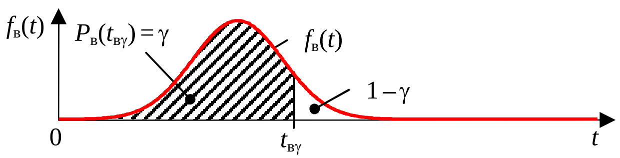


Рисунок 1.15 – Графическая интерпретация гамма-процентного времени восстановления

Среднее время восстановления $\overline{t_в}$ – математическое ожидание времени восстановления работоспособности объекта:

$$\overline{t_в} = M[\xi_в] = \int_0^\infty t\, f_в(t)dt\,. \qquad (1.38)$$

Интенсивность восстановления $\mu(t)$ – предел отношения вероятности восстановления работоспособного состояния объекта в полуинтервале времени $(t, t + \Delta t]$ при условии, что к моменту t восстановление еще не завершено, к величине интервала Δt при его стремлении к нулю, т. е.

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < \xi_в \le t + \Delta t \mid \xi_в > t)}{\Delta t} = \frac{f_в(t)}{1 - P_в(t)}\,. \qquad (1.39)$$

Вывод выражения справа аналогичен приведенному в (1.6)–(1.7) выводу выражения для интенсивности отказов.

1.3.7 Пример определения показателей ремонтопригодности объектов в пакете MathCAD

Предполагая, что время восстановления работоспособности гигросистемы комбайна подчиняется распределению Рэлея с параметром $\beta = 5$ ч, определить следующие показатели ремонтопригодности объекта:

1) график функции плотности распределения времени восстановления работоспособности гигросистемы;

2) среднее время восстановления $\overline{t_в}$;

3) вероятность восстановления в течение 8 ч, $P_в(8)$;

4) гамма-процентное время восстановления $t_{вγ}$ для $γ = 95$ %;

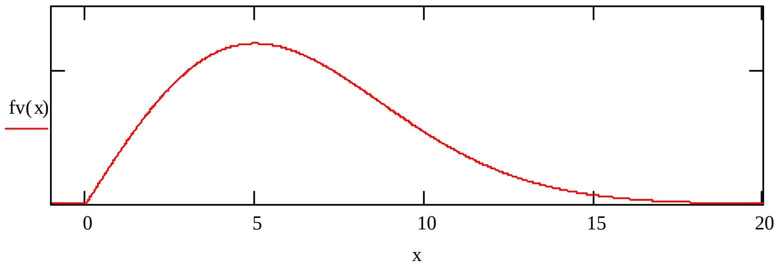
5) график функции интенсивности восстановления гигросистемы $\mu(t)$.

Задание функции плотности распределения времени восстановления работоспособности гигросистемы (в соответствии распределением Рэлея)

$\beta := 5$

$$fv(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{\beta^2} \cdot \exp\left(-\dfrac{x^2}{2 \cdot \beta^2}\right) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции плотности распределения времени восстановления работоспособности гигросистемы



Среднее время восстановления работоспособности, ч,

$$Tv := \int_0^{1000} x \cdot fv(x)\,dx \qquad Tv = 6.266571$$

Вероятность восстановления работоспособности гигросистемы в течение 8 ч

$$Pv(t) := \int_0^{t} fv(x)\,dx \qquad Pv(8) = 0.721963$$

Определение гамма-процентного времени восстановления работоспособности, ч ($\gamma = 0{,}95$)

$tv\gamma := 5$

Given

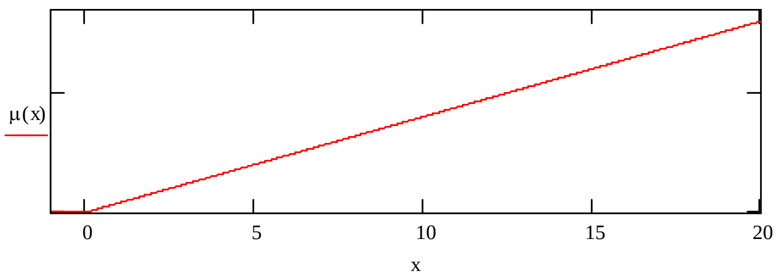
$$\int_0^{tv\gamma} fv(x)\,dx = 0.95$$

$\mathrm{Find}(tv\gamma) = 12.238755$

Определение функции интенсивности восстановления работоспособности гигросистемы

$$\mu(x) := \begin{cases} \dfrac{fv(x)}{1 - Pv(x)} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции интенсивности восстановления работоспособности гигросистемы



Вывод:

- среднее время восстановления работоспособности гигросистемы комбайна $\overline{t_в} = 6{,}27$ ч;
- вероятность восстановления гигросистемы в течение 8 ч составляет 0,722;
- 95-гамма-процентное время восстановления $t_{в\gamma}$ составляет 12,24 ч, т. е. с вероятностью 0,95 время восстановления гигросистемы комбайна не превысит 12,24 ч.

1.3.8 Показатели сохраняемости

Гамма-процентный срок сохраняемости $t_{сх\gamma}$ – срок сохраняемости, достигаемый объектом с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах (рисунок 1.16):

$$\int_{t_{сх}}^{\infty} f_{сх}(t)dt = \gamma\,, \qquad (1.40)$$

где $f_{сх}(t)$ – функция плотности распределения случайной величины $\xi_{сх}$ – срока сохраняемости объекта.

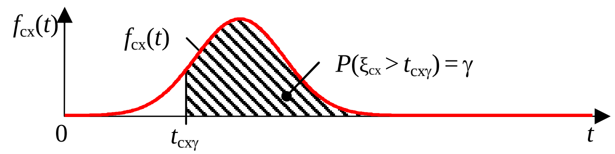


Рисунок 1.16 – Графическая интерпретация гамма-процентного срока сохраняемости

Средний срок сохраняемости $\overline{t_{сх}}$ – математическое ожидание срока сохраняемости:

$$\overline{t_{сх}} = M[\xi_{сх}] = \int_0^{\infty} t\, f_{сх}(t)dt\,. \qquad (1.41)$$

Назначенный срок хранения – срок хранения, по достижении которого хранение объекта должно быть прекращено независимо от его технического состояния.

1.3.9 Комплексные показатели надежности

Коэффициент готовности $K_г(t)$ – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени t, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается (например, профилактика, техническое обслуживание, ожидание использования по назначению и т. д.). Коэффициент готовности является комплексным показателем надежности, отражающим свойства безотказности и ремонтопригодности. Низкие значения $K_г(t)$ свидетельствуют о том, что мероприятия по техническому обслуживанию не полностью выполняют свою роль.

Значение коэффициента готовности для *стационарного процесса функционирования* объектов (когда $K_г(t) = K_г$, т. е. не изменяется во времени) можно определить из выражения [49]

$$K_г = \frac{T}{T + \overline{t_в}}, \qquad (1.42)$$

где T – средняя наработка на отказ восстанавливаемого объекта, определяемая выражением (1.26); $\overline{t_в}$ – среднее время восстановления, определяемое выражением (1.38).

В таблице 1.5 представлены нормируемые значения коэффициента готовности некоторых объектов.

Таблица 1.5 – **Нормируемые значения коэффициента готовности некоторых систем**

Объект	Коэффициент готовности
100 км волоконно-оптических линий связи	0,99989
Микропроцессорная централизация стрелок и сигналов	0,9995

Коэффициент оперативной готовности $K_{ог}(t, t+\Delta t)$ – вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени t, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается, и, начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного интервала времени $(t, t+\Delta t)$. Показатель определяется выражением

$$K_{ог}\left(t, t+\Delta t\right) = K_г\left(t\right) P\left(t, t+\Delta t\right), \qquad (1.43)$$

где $K_{ог}(t)$ – значение коэффициента готовности объекта в момент времени t; $P(t, t+\Delta t)$ – вероятность безотказной работы объекта в интервале наработки $(t, t+\Delta t)$, определяемая выражением (1.2).

Коэффициент оперативной готовности характеризует надежность объекта, необходимость в применении которого возникает в произвольный момент времени и требуется непрерывно в течение заданного интервала времени.

Коэффициент технического использования $K_{ти}$ – отношение математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период эксплуатации к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период (при этом не учитываются простои по организационным причинам). Он характеризует долю времени нахождения объекта в работоспособном состоянии относительно общей продолжительности эксплуатации и обычно оценивается за д л и т е л ь н ы й период эксплуатации (от начала эксплуатации до капитального ремонта, между капитальными ремонтами, за весь период эксплуатации):

$$K_{ти} = \frac{T_{раб}}{T_{раб} + T_{рем}}, \qquad (1.44)$$

где $T_{раб}$ – суммарное время пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый длительный период эксплуатации; $T_{рем}$ – суммарное время восстановлений, ремонтов и технического обслуживания за этот же период эксплуатации.

Коэффициент технического использования можно рассматривать как вероятность того, что в данный, произвольно взятый момент времени, объект работоспособен, а не находится в ремонте.

2 ОТКАЗЫ. МОДЕЛИ ОТКАЗОВ

2.1 Источники и причины отказов объектов

Во время эксплуатации объект подвергается внешним и внутренним воздействиям, которые с течением времени приводят к потере работоспособности объекта. Выделяют [45, 50, 53] три источника воздействий:

1) действие энергии окружающей среды (включая человека, выполняющего функции оператора и ремонтника);

2) внутренние источники энергии, связанные с рабочими процессами, протекающими в объекте;

3) накопленная потенциальная энергия материалов, из которых изготовлен объект (внутренние напряжения в отливках, монтажные напряжения и т. п.).

Различные виды энергии (механическая, тепловая, электромагнитная и проч.), действуя на объект, инициируют в его составных частях процессы, изменяющие свойства или состояние материалов. Эти процессы связаны, как правило, со сложными физико-химическими явлениями и приводят к деформации, износу, поломке и другим видам повреждений (отклонений контролируемых свойств материалов от их первоначального уровня). Накопление повреждений, в свою очередь, влечет за собой изменение выходных качественных параметров объекта, что, в конечном счете, приводит к отказу.

Процессы, снижающие работоспособность объекта, по признаку скорости протекания можно разделить на три группы [50, 51]:

1) быстропротекающие имеющие периодичность изменения, составляющую малую долю продолжительности рабочего цикла объекта. К ним можно отнести:

- вибрации деталей и узлов;
- изменения сил трения в подвижных сопряжениях;
- колебания уровня рабочих нагрузок и другие процессы, искажающие рабочий цикл объекта;

2) средней скорости, имеющие периодичность, сравнимую с длительностью рабочего цикла объекта. Они приводят к монотонному изменению выходных параметров объекта. Например:

- необратимый процесс изнашивания режущего инструмента (интенсивность изнашивания инструмента значительно превосходит интенсивность изнашивания деталей подвижных сопряжений);
- обратимые процессы тепловых деформаций, обусловленные как диссипацией энергии рабочих процессов, так и суточными колебаниями температуры окружающей среды.

Обратимые процессы (в отличие от необратимых) временно изменяют выходные параметры объекта без тенденции прогрессивного ухудшения. Следует отметить, что в ряде случаев обратимый процесс может инициировать необратимый процесс, приводящий к накоплению повреждений, например, тепловая деформация шпинделя металлорежущего станка может привести к возрастанию нагрузки на подшипники и их ускоренному износу или поломке, т. е. отказу;

3) медленные с периодичностью, сравнимой с длительностью межремонтного периода. К ним можно отнести:

- процессы изнашивания деталей подвижных сопряжений;
- перераспределение внутренних напряжений в деталях вследствие процесса старения материалов;
- ползучесть материалов;
- процессы коррозии;
- загрязнение трущихся поверхностей деталей.

Обычными методами борьбы с последствиями медленных процессов являются периодические ремонты и технические обслуживания.

Виды повреждений объектов и их составных частей и соответствующие им отказы можно разбить на две группы:

- допустимые, возникающие при нормальных условиях эксплуатации (износ режущего инструмента, поломки деталей предохранительных устройств и т. п.). Полностью устранить этот вид повреждений невозможно, но можно замедлить их проявление;
- недопустимые, возникающие вследствие наличия дефектов или случайных неконтролируемых внешних причин, непосредственно не связанных с техническим состоянием рассматриваемого объекта (аварии, стихийные бедствия и т. п.).

Под **дефектом** понимается каждое отдельное несоответствие объекта установленным требованиям нормативно-технической и (или) конструкторской (проектной) документации, снижающее его уровень надежности. Следует отметить, что объект, имеющий дефект, может находиться в работоспособном состоянии. Дефект рассматривается как возможная причина возникновения отказа, но наличие дефекта не означает, что отказ произошел.

По стадии происхождения дефекты можно разделить на три группы:

1) дефекты (ошибки) проектирования, например:

• недостаточная защищенность узлов трения;

• наличие концентраторов напряжений на деталях;

• неправильный расчет несущей способности деталей (приводит к их статическому разрушению или малоцикловой усталости);

• неправильный выбор материалов;

• неправильное определение предполагаемого уровня эксплуатационных нагрузок и т. п.;

2) дефекты изготовления (производственные):

• заготовок (пористость, инородные включения и т. п.);

• механической обработки (заусенцы, избыточная локальная пластическая деформация и т. п.);

• сварки (трещины, остаточные напряжения, термические повреждения и т. п.);

• термообработки (перегрев, закалочные трещины, поводка, коробление, обезуглероживание поверхностного слоя);

• сборки (повреждения поверхностей, задиры, перекосы, внесение абразива и т. п.);

3) дефекты эксплуатации:

• нарушение условий применения;

• неправильное техническое обслуживание и ремонт;

• наличие перегрузок;

• применение некачественных эксплуатационных материалов.

2.2 Классификация отказов

Как уже указывалось, отказ – событие, заключающееся в нарушении работоспособного состояния объекта. Можно дать классификацию отказов по ряду критериев [44, 45, 50, 53].

1 **Характер изменения выходного параметра** объекта до момента возникновения отказа. По этому признаку различают следующие виды отказов:

• внезапные, возникающие в результате сочетания неблагоприятных факторов и случайных внешних воздействий, превышающих возможности объекта к их восприятию. Они характеризуются скачкообразным характером зависимости степени повреждения объекта от наработки. Скорость процесса повреждения при внезапном отказе стремится к бесконечности.

Для внезапных отказов зачастую характерна независимость интенсивности отказов от наработки объекта [$\lambda(t) = \lambda$], т. е. вероятность отказа на малом интервале Δt наработки объекта зависит только от длины этого интервала и не зависит от предыдущей наработки объекта (не связана с накоплением повреждений). Время наработки объектов до внезапного отказа, как правило, подчиняется экспоненциальному закону распределения (см. приложение А, п. А.3);

• постепенные (износные), которые возникают в результате постепенного протекания того или иного процесса повреждения, прогрессивно ухудшающего выходные параметры объекта. Основным признаком постепенного отказа является монотонно возрастающий характер зависимости интенсивности отказов от наработки объекта. К постепенным относятся отказы, связанные с процессами изнашивания, коррозии, усталости и ползучести материалов;

• сложные – отказы, которые включают особенности двух предыдущих. Скорость процесса повреждения при сложном отказе является конечной (не стремящейся к ∞). Например, недопустимые воздействия на раму кузова автомобиля инициируют процесс возникновения и развития усталостных трещин. Скорость этого процесса конечна, но имеет тенденцию к увеличению. В некоторый момент усталостные трещины достигают критического размера, и происходит отказ функционирования объекта – разрушение рамы.

2 **Возможность дальнейшего функционирования** объекта после возникновения отказа. По этому признаку различают отказы:

• функционирования, при которых объект перестает выполнять свои функции (в результате поломок, заклинивания и т. п.);

• параметрические, характеризующиеся отклонением хотя бы одного рабочего параметра объекта за пределы допуска. При этом у технологических систем в результате параметрического отказа сохраняется функционирование, но происходит выход одного или нескольких показателей качества и (или) ритма выпуска за пределы, допускаемые в документации.

3 **Возможность последующего использования** объекта после возникновения отказа. По этому признаку отказы бывают:

• полные – отказы, после которых использование объекта по назначению невозможно (для восстанавливаемых объектов использование невозможно до восстановления);

• частичные – отказы, после возникновения которых объект может быть использован по назначению, но с меньшей эффективностью или когда вне допустимых пределов находятся значения не всех, а одного или нескольких выходных параметров объекта.

4 **Связь между отказами** объекта. По этому признаку различают отказы:

• независимые – отказы, не обусловленные другими отказами или повреждениями объекта;

• зависимые – отказы, обусловленные другими отказами или повреждениями объекта.

5 **Устойчивость состояния неработоспособности**. По этому признаку отказы могут быть:

• устойчивые, которые можно устранить только путем восстановления (ремонта);

• самоустраняющиеся, устраняемые без операций восстановления путем регулирования или саморегулирования;

• перемежающиеся – многократно возникающие самоустраняющиеся отказы одного и того же характера;

• сбои – самоустраняющиеся отказы или однократные отказы, устраняемые незначительным вмешательством оператора.

6 **Наличие внешних проявлений** отказа. По этому признаку бывают отказы:

• явные, обнаруживаемые визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования при подготовке объекта к применению или в процессе его применения по назначению;

• скрытые, не обнаруживаемые визуально или штатными методами и средствами контроля и диагностирования, но выявляемые при проведении технического обслуживания или специальными методами диагностики. Большинство параметрических отказов относятся к категории скрытых.

7 В зависимости от **причины возникновения** различают отказы:

• конструктивные, возникающие по причинам, связанным с несовершенством или нарушением установленных правил и (или) норм проектирования и конструирования;

• производственные, происходящие из-за несовершенства или нарушения установленного процесса изготовления или ремонта, выполняемого на ремонтном предприятии;

• эксплуатационные, связанные с нарушением установленных правил и (или) условий эксплуатации;

• деградационные, обусловленные естественными процессами старения, изнашивания, коррозии и усталости при соблюдении всех установленных правил и (или) норм проектирования, изготовления и эксплуатации.

8 **Природа происхождения** отказа. По этому признаку различают отказы:

• искусственные, вызываемые преднамеренно, например, с исследовательскими целями или с целью необходимости прекращения функционирования объекта;

• естественные, происходящие без преднамеренной организации.

9 **Время возникновения** отказа. В этом случае могут происходить отказы:

• при испытаниях;

• приработочные (см. рисунок 1.6);

• периода нормальной эксплуатации (см. рисунок 1.6);

• периода старения (см. рисунок 1.6).

10 **Возможность устранения** отказа. По этому признаку отказы бывают:

• устранимые;

• неустранимые.

11 **Критичность** отказа (уровень прямых и косвенных потерь, трудоемкость восстановления). По этому признаку различают отказы:

• критические (существенные);

• некритические (несущественные).

2.3 Модели отказов

2.3.1 Общие сведения

В литературе наиболее изученными являются следующие модели отказов.

1 Модель мгновенных повреждений (внезапные отказы). Если предположить, что отказ элемента происходит при превышении нагрузкой (или иным входным воздействием) допустимого уровня, то вследствие случайного характера изменения нагрузки момент отказа также является случайным и не зависит от того, сколько времени элемент уже находился в эксплуатации [29].

2 Модель накапливающихся изменений (постепенные отказы). Постепенное старение и (или) износ элементов приводит к изменению значений их рабочих параметров. Постепенно ухудшается качество функционирования всего изделия. Выход показателей качества функционирования системы за нижний допустимый предел влечет за собой отказ изделия [45, 50].

3 Модель релаксации. Эта схема наблюдается в тех случаях, когда старение и (или) износ могут явиться косвенной причиной отказа. Если, например, допустимые пределы на параметры элементов не установлены, то постепенное изменение параметров может привести к скачкообразному изменению состояния изделия. Например, отказ резервных электронных элементов приводит иногда к перегрузке основных элементов и к отказу системы.

4 Модель действия нескольких независимых причин. Три перечисленных выше способа часто реализуются в сочетании друг с другом.

5 Модель действия нескольких зависимых причин. В четвертой и пятой схемах совокупность зависимых (или независимых) причин возможно (хотя и сложно) заменить одной «эквивалентной».

Рассмотрим две первые, наиболее простые, схемы отказов.

2.3.2 Модели внезапных отказов

2.3.2.1 Нагрузка случайна, а допустимый уровень нагрузки фиксирован. Пусть на элемент системы действует нагрузка X (внешнее воздействие: давление, импульс, электрическое напряжение и т. п.), уровень которой подчиняется некоторому закону распределения с функцией плотности $f_н(x)$ и функцией распределения $F_н(x)$. При этом допустимый уровень данной нагрузки (предел прочности, предел текучести и т. п.) составляет $X_д$. Тогда вероятность безотказной работы элемента равна вероятности того, что нагрузка X не превысит допустимого уровня $X_д$:

$$R = P(X \le X_д) = F_н(X_д) = \int_{-\infty}^{X_д} f_н(x)dx = P(X_д - X \ge 0). \qquad (2.1)$$

На рисунке 2.1 заштрихована криволинейная трапеция, площадь которой равна вероятности безотказной работы элемента.

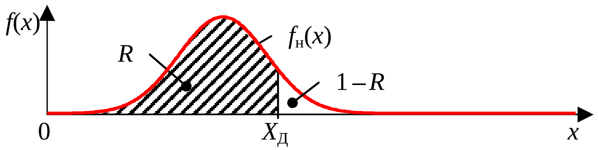


Рисунок 2.1 – Графическая интерпретация
вероятности безотказной работы и вероятности отказа объекта

2.3.2.2 Определение вероятности безотказной работы при случайной нагрузке с фиксированным допустимым уровнем в пакете MathCAD. Определим вероятность безотказной работы пальца гусеницы трактора, если предполагается, что нагрузка, прикладываемая к пальцу, подчиняется логнормальному распределению с математическим ожиданием 20 МПа и стандартным отклонением 10 МПа, а предел прочности пальца составляет 40 МПа.

Задание математического ожидания Mn и стандартного отклонения σn величины нагрузки, а также предела прочности σp пальца

$Mn := 20 \qquad \sigma n := 10 \qquad \sigma p := 40$

Определение параметров μ и σ функции логнормального распределения величины нагрузки решением системы уравнений

$\mu := 20 \qquad \sigma := 1$

Given

$$Mn = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \qquad \sigma n = \sqrt{\exp(2\cdot\mu + \sigma^2)\cdot(\exp(\sigma^2) - 1)}$$

$$\mathrm{Find}(\mu,\sigma) = \begin{pmatrix} 2.88416 \\ 0.472381 \end{pmatrix}$$

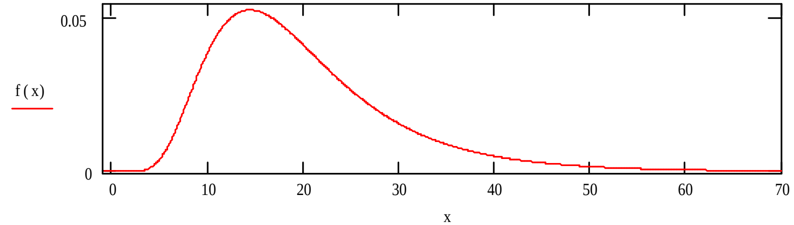
Система уравнений решена, параметры μ и σ определены

$\mu := 2.88416 \qquad \sigma := 0.472381$

Задание функции плотности логнормального распределения величины нагрузки

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[\dfrac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right] & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Иллюстрация функции плотности распределения величины нагрузки



Определение вероятности безотказной работы пальца

$$R := \int_0^{\sigma p} f(x)\,dx \qquad R = 0.955766$$

Вывод: вероятность безотказной работы пальца гусеницы трактора составляет 0,955766.

2.3.2.3 Нагрузка и ее допустимый уровень случайны. Пусть (как и прежде) на элемент системы действует нагрузка X, уровень которой подчиняется некоторому закону распределения с функцией плотности $f_н(x)$ и функцией распределения $F_н(x)$. В силу различных причин (анизотропия материала, отступления от технологии изготовления, изменение условий эксплуатации) допустимый уровень нагрузки Y также является случайной величиной с функцией плотности $f_д(x)$ и функцией распределения $F_д(x)$ (рисунок 2.2). Тогда вероятность безотказной работы элемента равна вероятности того, что нагрузка X не превысит допустимого уровня Y:

$$R = P(X \le Y) \qquad (2.2)$$

или

$$R = P(Y - X \ge 0). \qquad (2.3)$$

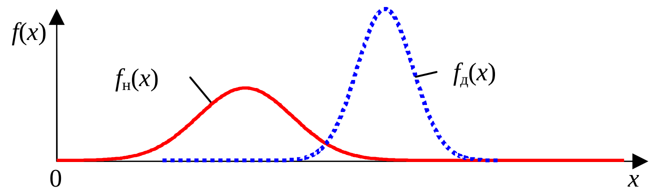


Рисунок 2.2 – Графическая интерпретация работы элемента
при случайной нагрузке и случайном значении ее допустимого уровня

Применяя к выражению (2.2) формулу полной вероятности, получим

$$R = P(X \le Y) = \sum_x P(X = x)\, P(x \le Y | X = x), \qquad (2.4)$$

где x – некоторое произвольное значение действующей нагрузки X; $P(X = x)$ – вероятность того, что нагрузка окажется равной значению x; $P(x \le Y | X = x)$ – условная вероятность того, что действующее значение нагрузки x не превысит допустимый уровень Y, при условии, что нагрузка X равна значению x, определяемая выражением

$$P(x \le Y | X = x) = \int_x^{\infty} f_д(y | X = x) dy = 1 - F_д(x | X = x). \qquad (2.5)$$

Вероятность того, что значение нагрузки X окажется в некотором полуинтервале $(x, x + dx]$ при $dx \to 0$, определяется через функцию плотности распределения $f_н(x)$

$$P(x < X \le x + dx) \approx f_н(x) dx. \qquad (2.6)$$

Подставляя выражения (2.5) и (2.6) в формулу (2.4), получим

$$R = P(X \le Y) = \sum_x \left[P(X = x)\, P(x \le Y | X = x)\right] \approx$$

$$\approx \sum_x \left[P(x < X \le x + dx)\, P(x \le Y | X = x)\right] = \sum_x \left[f_н(x) dx \int_x^{\infty} f_д(y | X = x) dy \right]. \qquad (2.7)$$

В пределе $dx \to 0$ сумма в выражении (2.7) преобразуется в интеграл:

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_н(x) \left[\int_x^{\infty} f_д(y | X = x) dy \right] dx . \qquad (2.8)$$

В предположении, что нагрузка X и ее допустимое значение есть независимые величины, выражение (2.8) преобразуется следующим образом:

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_н(x) \left[\int_x^{\infty} f_д(y) dy \right] dx , \qquad (2.9)$$

или, в соответствии с выражением (2.5),

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_н(x) [1 - F_д(x)] dx . \qquad (2.10)$$

Выражениям (2.9) и (2.10) тождественны равенства [29, с. 145]

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_д(y) \left[\int_{-\infty}^{y} f_н(x) dx \right] dy , \qquad (2.11)$$

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_д(y) [F_н(y)] dy , \qquad (2.12)$$

а в случае, когда X и Y – неотрицательные независимые случайные величины, то и выражение

$$R = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_д(y + x) f_н(x) dx\, dy . \qquad (2.13)$$

2.3.2.4 Вероятность безотказной работы при показательно распределенных нагрузке и ее допустимом уровне. Пусть нагрузка X, действующая на элемент системы, и ее допустимый уровень Y независимы и подчиняются показательному распределению с параметрами λ_X и λ_Y соответственно. Требуется определить вероятность безотказной работы элемента R.

Воспользуемся выражением (2.10):

$$R = P(X \le Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) [1 - F_Y(x)] dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_X \exp(-\lambda_X x) [1 - (1 - \exp(-\lambda_Y x))] dx =$$

$$= \lambda_X \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_X x) \exp(-\lambda_Y x) dx = \lambda_X \int_0^{\infty} \exp(-(\lambda_X + \lambda_Y) x) dx = \qquad (2.14)$$

$$= \lambda_X \left(\frac{\exp(-(\lambda_X + \lambda_Y) x)}{-(\lambda_X + \lambda_Y)} \right) \Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{-\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} [\exp(-(\lambda_X + \lambda_Y)\infty) - \exp(-(\lambda_X + \lambda_Y)0)] =$$

$$= \frac{-\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} (0 - 1) = \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}.$$

2.3.2.5 Вероятность безотказной работы при нормально распределенных нагрузке и ее допустимом уровне. Пусть нагрузка X, действующая на элемент системы, и ее допустимый уровень Y независимы и подчиняются нормальному распределению с параметрами μ_X, σ_X и μ_Y, σ_Y соответственно. Требуется определить вероятность безотказной работы элемента.

Воспользуемся выражением (2.3). Известно, что случайная величина $Z = Y - X$, равная разности нормально распределенных величин, также подчиняется нормальному закону распределения [10] с параметрами

$$\mu = M[Y - X] = M[Y] - M[X] = \mu_Y - \mu_X$$

и

$$\sigma = \sigma[Y - X] = \sqrt{\sigma^2[Y] + \sigma^2[X]} = \sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}\ .$$

Таким образом,

$$R = P(Y - X > 0) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \le 0) = 1 - F_Z(0) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0 - (\mu_Y - \mu_X)}{\sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}}\right)\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\mu_Y - \mu_X}{\sqrt{\sigma_Y^2 + \sigma_X^2}}\right), \qquad (2.15)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа (приложение Б).

2.3.2.6 Пример определения вероятности безотказной работы объекта при случайной нагрузке и случайном ее допустимом уровне в пакете MathCAD. Определим вероятность безотказной работы оси мобильной машины, предполагая, что нагрузка на ось подчиняется гамма-распределению с математическим ожиданием 20 МПа и стандартным отклонением 6 МПа, а предел прочности оси мобильной машины подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 40 МПа и стандартным отклонением 5 МПа.

Задание математических ожиданий и стандартных отклонений величины нагрузки (Mn, σn), а также предела прочности оси мобильной машины (Mp, σp)

$Mn := 20$ $\sigma n := 6$ $Mp := 40$ $\sigma p := 5$

Определение параметров α и β функции гамма-распределения величины нагрузки решением системы уравнений

$\alpha := 20$ $\beta := 1$

Given

$Mn = \alpha \cdot \beta$

$\sigma n = \sqrt{\alpha} \cdot \beta$

$$\mathrm{Find}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 11.111111 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

Система уравнений решена, параметры α и β определены

$\alpha := 11.11111$ $\beta := 1.8$

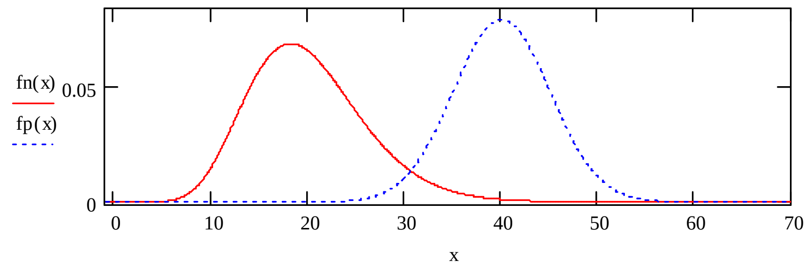
Задание функции плотности гамма-распределения величины нагрузки

$$fn(x) := \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha, 0)} \cdot \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Задание функции плотности нормального распределения предела прочности

$$fp(x) := \frac{1}{\sigma p \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left[\frac{-(x - Mp)^2}{2 \cdot \sigma p^2}\right]$$

Иллюстрация функции плотности распределения нагрузки fn(x) и предела прочности fp(x)



Определение вероятности безотказной работы оси мобильной машины

$$R := \int_0^{1000} fn(x) \cdot \left(\int_x^{1000} fp(y)\, dy\right) dx$$

$R = 0.990466$

Вывод: вероятность безотказной работы оси мобильной машины составляет 0,990466.

2.3.3 Двумерная модель внезапного отказа. Пример определения показателей безотказности металл-полимерной силовой системы

2.3.3.1 Случай независимых воздействий. В п. 2.3.2 были рассмотрены модели внезапных отказов элементов систем, учитывающие только один воздействующий фактор. В действительности таких факторов может быть несколько.

Рассмотрим пример построения модели и определения показателей безотказности простейшей металл-полимерной силовой системы [59, с. 296, 60] типа вал – подшипник скольжения. Требуется определить вероятность отказа системы при совместном действии нормального и фрикционного напряжений. Величины действующих напряжений X и Y детерминированы и известны. Значения предела выносливости вала σ_{-1}, выполненного из нормализованной стали 45, заданы функцией распределения Вейбулла в виде

$$F_{\sigma_{-1}}(X)=P(\sigma_{-1}\le X)=\begin{cases}1-\exp\left(-\eta_\sigma\left(\dfrac{X-\sigma_{-1\min}}{\sigma_w}\right)^{m_V}\right), & X>\sigma_{-1\min},\\ 0, & X\le\sigma_{-1\min},\end{cases} \quad (2.16)$$

где η_σ – коэффициент, учитывающий форму тела и схему его циклического деформирования (0,016); $\sigma_{-1\min}$ – минимальное значение предела выносливости вала (150 МПа); σ_w – параметр напряжений Вейбулла (160 МПа); m_V – параметр механической неоднородности стали (16,4). Данная функция имеет смысл вероятности отказа вала по критерию сопротивления механической усталости при напряжении X.

Значения предела фрикционной усталости контртела τ_f (вкладыша подшипника скольжения), выполненного из полимера BKV-30H, заданы функцией распределения Фреше в виде

$$F_{\tau_f}(Y)=P(\tau_f\le Y)=\begin{cases}1-\exp\left(-\eta_\tau\left(\dfrac{\tau_{tf}^{(1)}\,\Delta T}{\tau_d-Y}\right)^{m_S}\right), & Y<\tau_d,\\ 1, & Y\ge\tau_d,\end{cases} \quad (2.17)$$

где η_τ – коэффициент, учитывающий форму контртела и схему его контактного взаимодействия с телом в процессе трения, принимает значение (0,12); $\tau_{tf}^{(1)}$ – единичное термофлуктуационное напряжение (0,21 МПа); ΔT – приращение температуры при заданном термодинамическом состоянии полимера (40 °С); τ_d – верхняя граница предельных напряжений (49,5 МПа); m_S – параметр механической неоднородности полимера (4,6). Данная функция имеет смысл вероятности отказа полимерного контртела по критерию сопротивления фрикционной усталости при напряжении Y.

Отказ рассматриваемой силовой системы (вал – подшипник) происходит при разрушении хотя бы одного элемента, поэтому вероятность безотказной работы будем определять как вероятность совместного выполнения двух событий:

- $\{X<\sigma_{-1}\}$ – действующее значение нормального напряжения X на вал меньше предела выносливости вала σ_{-1};
- $\{Y<\tau_f\}$ – действующее значение фрикционного напряжения Y меньше предела фрикционной усталости контртела τ_f, т. е.

$$R=P(\{X<\sigma_{-1}\}\cap\{Y<\tau_f\}). \quad (2.18)$$

Предполагая, что воздействия нормального и фрикционного напряжений независимы и влекут разрушение соответствующего элемента,

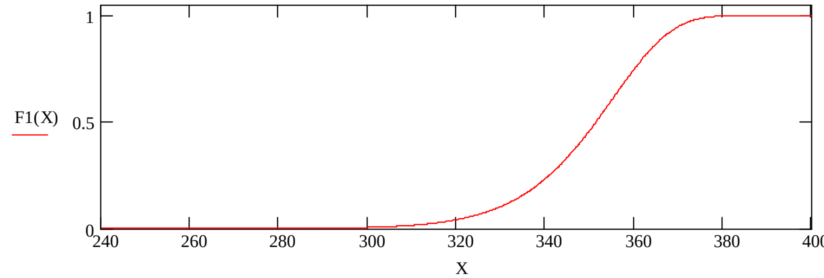
$$R=P(\{X<\sigma_{-1}\}\cap\{Y<\tau_f\})=P(X<\sigma_{-1})\,P(Y<\tau_f)=$$
$$=[1-P(\sigma_{-1}\le X)][1-P(\tau_f\le Y)]=[1-F(X)][1-F(Y)]. \quad (2.19)$$

Расчеты показателей безотказности металл-полимерной силовой системы выполним в пакете MathCAD.

Задание функции распределения предела выносливости вала выражением (2.16)

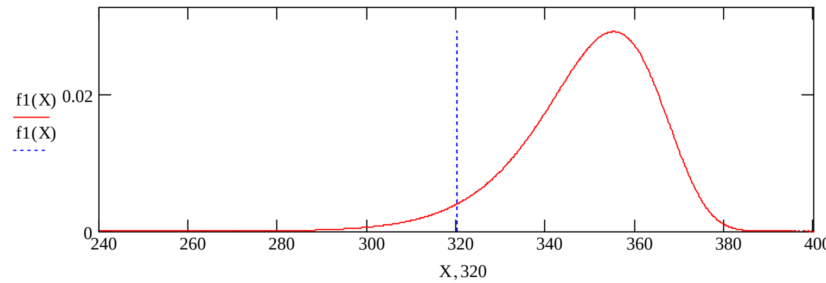
mv := 16.4 σw := 160 σmin := 150 ησ := 0.016

$$F1(X) := \begin{cases}1-\exp\left[-\eta\sigma\cdot\left(\dfrac{X-\sigma\min}{\sigma w}\right)^{mv}\right] & \text{if } X>\sigma\min\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



Определение плотности распределения предела выносливости вала и иллюстрация вероятности безотказной работы вала при воздействии нормального напряжения в 320 МПа (см. площадь криволинейной трапеции справа от прямой X = 320)

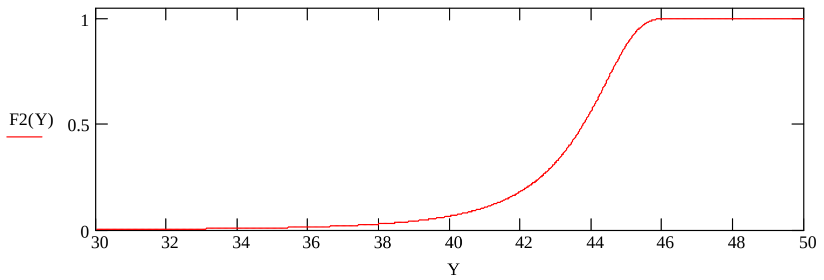
$$f1(X) := \frac{d}{dX}F1(X)$$



Задание функции распределения предела фрикционной усталости контртела выражением (2.17)

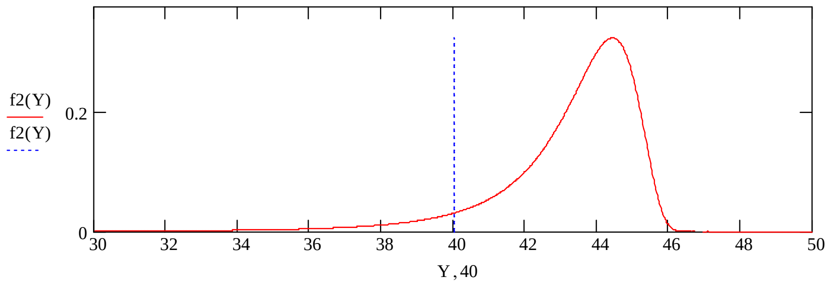
ητ := 0.12 τd := 49.5 ms := 4.6 ΔT := 40 τtf := 0.21

$$F2(Y) := \begin{cases} 1-\left[\exp\left[-\eta\tau\cdot\left(\dfrac{\tau tf\cdot\Delta T}{\tau d - Y}\right)^{ms}\right]\right] & \text{if } Y < \tau d \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Определение плотности распределения предела фрикционной усталости контртела и иллюстрация вероятности безотказной работы контртела при фрикционном напряжении в 40 МПа (см. площадь криволинейной трапеции справа от прямой Y = 40)

$$f2(Y) := \frac{d}{dY}F2(Y)$$



Определение вероятности безотказной работы (R) силовой системы, как вероятности безотказной работы по каждому из двух воздействий X и Y в соответствии с выражением (2.19)

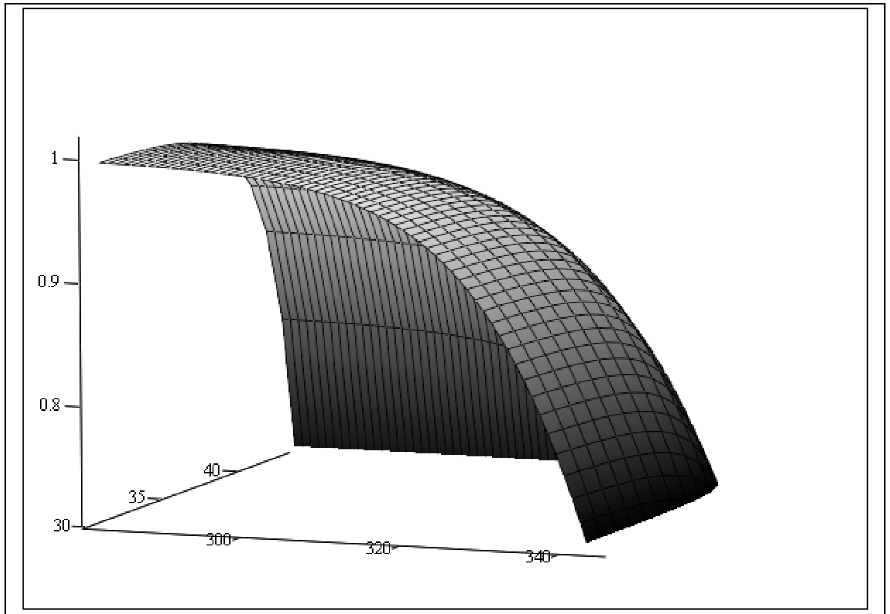
$$R(X,Y) := (1 - F1(X))\cdot(1 - F2(Y))$$

Вероятность безотказной работы (R) силовой системы для некоторых значений воздействий X и Y

R(300, 28) = 0.992883	R(240, 32) = 0.995906
R(300, 35) = 0.984824	R(300, 32) = 0.990393
R(300, 38) = 0.966723	R(320, 32) = 0.953759
R(300, 42) = 0.812483	R(330, 32) = 0.891799
R(300, 44) = 0.428558	R(340, 32) = 0.761788

Графическая интерпретация вероятности безотказной работы R силовой системы

$i := 200..380 \quad j := 28..60 \quad M_{i,j} := R(i,j)$



M

2.3.3.2 Два случая зависимых воздействий. Предполагая, что воздействия нормального и фрикционного напряжений в примере, рассматриваемом в предыдущем подпункте, зависимы, вероятность безотказной работы силовой системы будет определяться выражением

$$R = P(\{Y < \tau_f\} \cap \{X < \sigma_{-1}\}) = P(Y < \tau_f)\,P(X < \sigma_{-1} | Y < \tau_f) = \\ = [1 - P(\tau_f \le Y)][1 - P(\sigma_{-1} \le X | Y < \tau_f)] = [1 - F_{\tau_f}(Y)][1 - F_{\sigma_{-1}}(X | Y < \tau_f)]. \quad (2.20)$$

Известно, что математическое ожидание предела выносливости вала σ_{-1}, подчиняющегося распределению Вейбулла, в (2.16) прямо пропорционально параметру напряжений Вейбулла σ_w, т. е.

$$M[\sigma_{-1}] = \mathrm{const}\cdot\sigma_w. \quad (2.21)$$

Примем допущение о том, что математическое ожидание предела выносливости вала σ_{-1} зависит также от величины приложенного фрикционного напряжения Y следующим образом:

$$M[\sigma_{-1}] = \mathrm{const}\cdot\sigma_w = \mathrm{const}\,(160 - 0{,}5\,Y). \quad (2.22)$$

Тогда условная функция распределения предела выносливости вала σ_{-1}

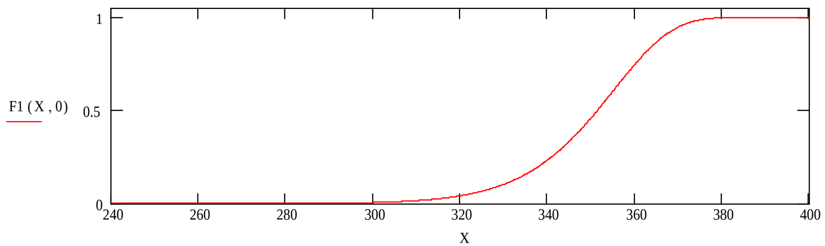
$$F_{\sigma_{-1}}\left(X \| Y<\tau_f\right)=P\left(\sigma_{-1} \le X | Y<\tau_f\right)=$$
$$=\begin{cases} 1-\exp\left(-\eta_\sigma\left(\dfrac{X-\sigma_{-1\min}}{160-0{,}5Y}\right)^{m_V}\right), & X>\sigma_{-1\min}; \\ 0, & X \le \sigma_{-1\min}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Определение других функций и значения количественных параметров аналогичны п. 2.3.3.1. Расчеты показателей безотказности металл-полимерной силовой системы выполним в пакете MathCAD.

Задание функции распределения предела выносливости вала выражением (2.16)

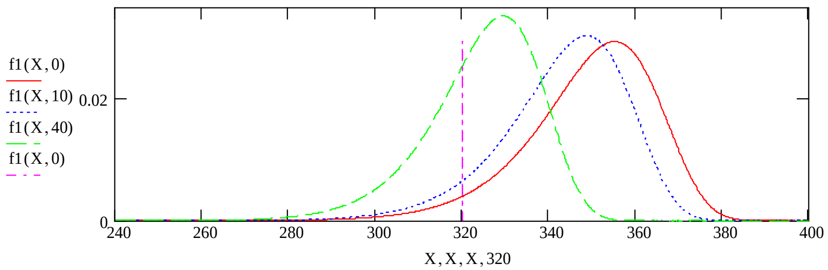
mv := 16.4 σmin := 150 ησ := 0.016

$$F1(X,Y) := \begin{cases} \left[1-\exp\left[-\eta\sigma\cdot\left(\dfrac{X-\sigma min}{160-0.5\cdot Y}\right)^{mv}\right]\right] & \text{if } X>\sigma min \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Определение плотности распределения предела выносливости вала и иллюстрация вероятности безотказной работы вала при воздействии нормального напряжения в 320 МПа (см. площадь криволинейной трапеции справа от прямой X = 320)

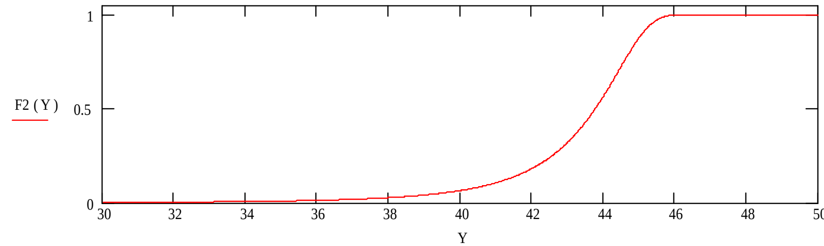
$$f1(X,Y) := \frac{d}{dX}F1(X,Y)$$



Задание функции распределения предела фрикционной усталости контртела выражением (2.17)

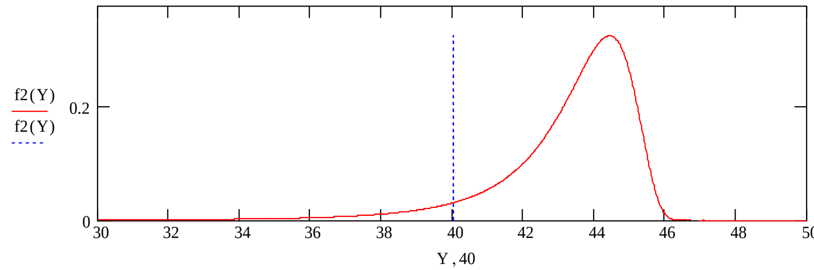
ητ := 0.12 τd := 49.5 ms := 4.6 ΔT := 40 τtf := 0.21

$$F2(Y) := \begin{cases} 1-\left[\exp\left[-\eta\tau\cdot\left(\dfrac{\tau tf\cdot\Delta T}{\tau d-Y}\right)^{ms}\right]\right] & \text{if } Y<\tau d \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Определение плотности распределения предела фрикционной усталости контртела и иллюстрация вероятности безотказной работы контртела при фрикционном напряжении в 40 МПа (см. площадь криволинейной трапеции справа от прямой Y = 40)

$$f2(Y) := \frac{d}{dY}F2(Y)$$



Определение вероятности безотказной работы (R) силовой системы, как вероятности безотказной работы по каждому из двух воздействий X и Y в соответствии с выражением (2.19)

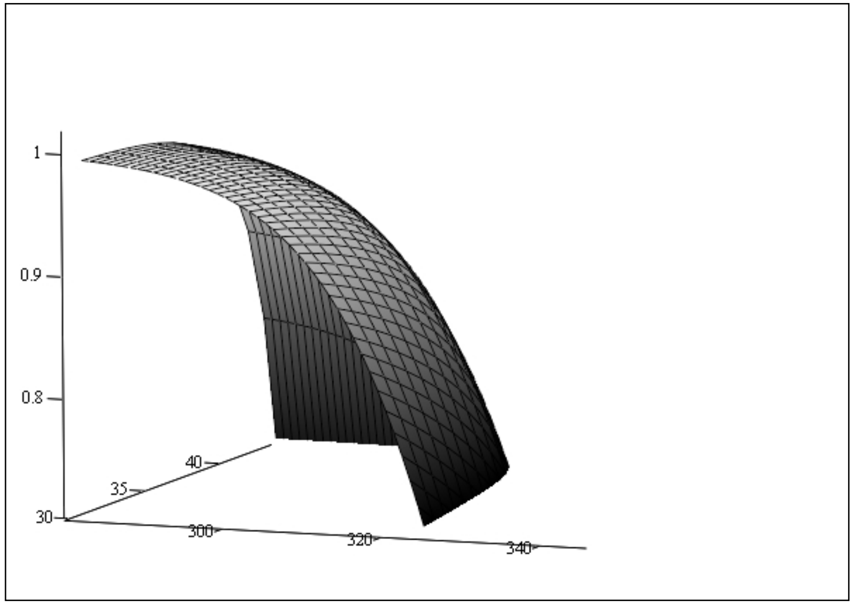
R(X,Y) := (1 − F1(X,Y)) · (1 − F2(Y))

Вероятность безотказной работы (R) силовой системы для некоторых значений воздействий X и Y

R(300, 28) = 0.973833	R(240, 32) = 0.9959
R(300, 35) = 0.954233	R(300, 32) = 0.965265
R(300, 38) = 0.93013	R(320, 32) = 0.780742
R(300, 42) = 0.772672	R(330, 32) = 0.534937
R(300, 44) = 0.40471	R(340, 32) = 0.220345

Графическая интерпретация вероятности безотказной работы R силовой системы

i := 200 .. 380 j := 28 .. 60 $M_{i,j}$:= R(i, j)



M

Рассмотрим второй случай зависимых воздействий. Будем предполагать, что условная функция распределения предела выносливости вала в (2.20) такова [59, с. 283], что вероятность безотказной работы силовой системы определяется выражением

$$R=\left[1-F_{\sigma_{-1}}(X)\right]\left[1-F_{\tau_f}(Y)\right]\Psi(X,Y), \qquad (2.24)$$

где $\Psi(X,Y)$ – функция взаимосвязи нормального и фрикционного напряжений, определяемая выражением

$$\Psi(X,Y)=1-\frac{Y}{X}\frac{M\left[\sigma_{-1}\right]}{M\left[\tau_f\right]}\exp\left(-\frac{Y}{X}\frac{M\left[\sigma_{-1}\right]}{M\left[\tau_f\right]}\right). \qquad (2.25)$$

Определение других функций и значения количественных параметров аналогичны предыдущему примеру. Расчеты показателей безотказности металл-полимерной силовой системы выполним в пакете MathCAD.

Задание функции распределения предела выносливости вала выражением (2.16)

$mv := 16.4 \quad \sigma w := 160 \quad \sigma min := 150 \quad \eta\sigma := 0.016$

$$F1(X) := \begin{cases} \left[1-\exp\left[-\eta\sigma\cdot\left(\frac{X-\sigma min}{\sigma w}\right)^{mv}\right]\right] & \text{if } X > \sigma min \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Функция распределения предела фрикционной усталости контртела (2.17)

$\eta\tau := 0.12 \quad \tau d := 49.5 \quad ms := 4.6 \quad \Delta T := 40 \quad \tau tf := 0.21$

$$F2(Y) := \begin{cases} 1-\left[\exp\left[-\eta\tau\cdot\left(\frac{\tau tf\cdot\Delta T}{\tau d-Y}\right)^{ms}\right]\right] & \text{if } Y < \tau d \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Определение математического ожидания предела выносливости вала

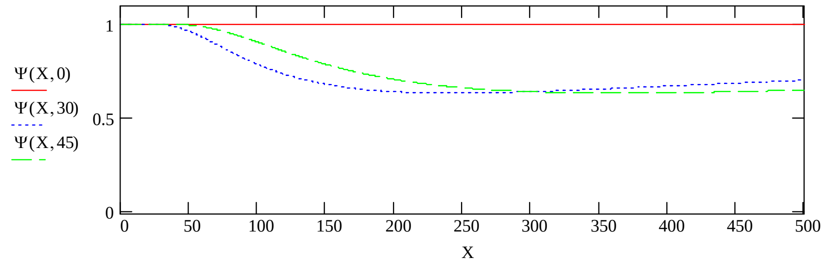
$$M1 := \int_0^{\infty}(1-F1(X))\,dX \qquad M1 = 349.356111$$

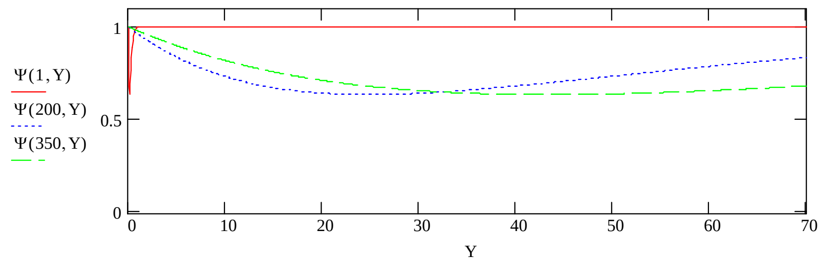
Математическое ожидание предела фрикционной усталости контртела

$$M2 := \int_0^{\infty}(1-F2(Y))\,dY \qquad M2 = 43.22594$$

Определение и иллюстрация функции взаимосвязи нормального и фрикционного напряжений в соответствии с [59, с. 283]

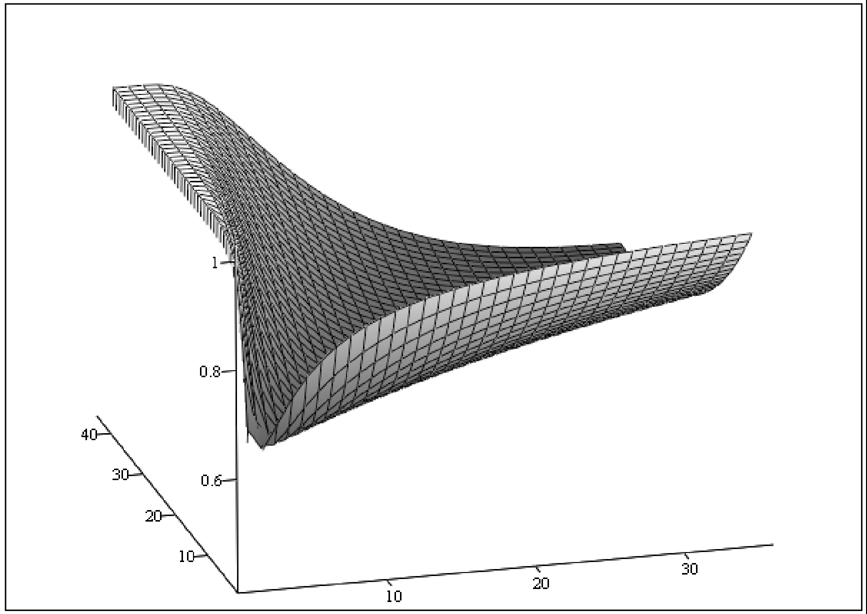
$$\Psi(X,Y) := 1-\frac{Y}{X}\cdot\frac{M1}{M2}\cdot\exp\left(-\frac{Y}{X}\cdot\frac{M1}{M2}\right)$$





$i := 1..35 \qquad j := 1..45 \qquad M_{i,j} := \Psi(i\cdot 10, j)$

Причечание: масштаб по оси 0-X уменьшен в 10 раз



M

Определение вероятности безотказной работы (R) силовой системы, как вероятности безотказной работы по каждому из двух воздействий X и Y в соответствии с выражением (2.19) и [59]

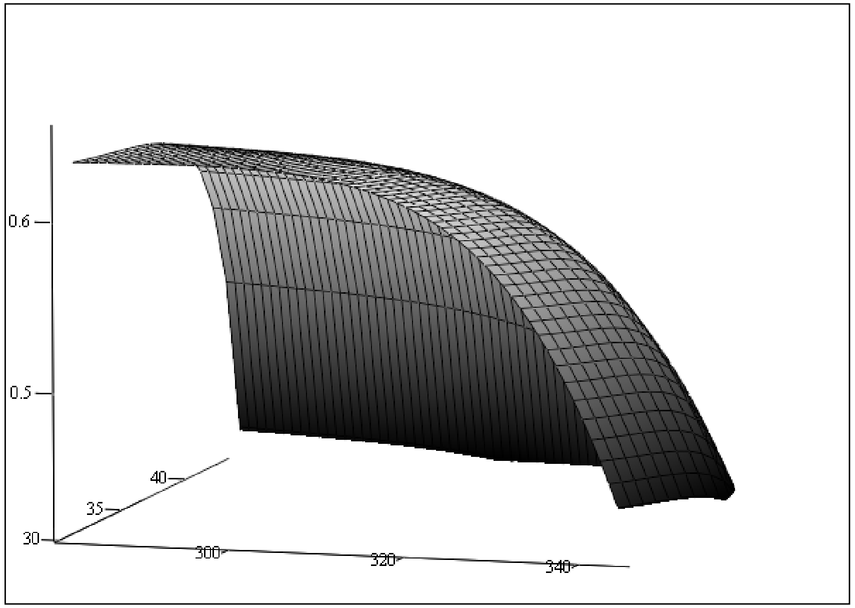
$R(X, Y) := (1 - F1(X)) \cdot (1 - F2(Y)) \cdot \Psi(X, Y)$

Вероятность безотказной работы (R) силовой системы для некоторых значений воздействий X и Y

$R(300, 28) = 0.640627$	$R(240, 32) = 0.630581$
$R(300, 35) = 0.623141$	$R(300, 32) = 0.629848$
$R(300, 38) = 0.611184$	$R(320, 32) = 0.610232$
$R(300, 42) = 0.515955$	$R(330, 32) = 0.572599$
$R(300, 44) = 0.273296$	$R(340, 32) = 0.490972$

Графическая интерпретация вероятности безотказной работы R силовой системы

$i := 279 .. 350$ $\quad j := 29 .. 45$ $\quad M_{i, j} := R(i, j)$



M

2.3.4 Модель постепенного отказа

2.3.4.1 Общая схема формирования постепенного отказа. Рассмотрим общую схему формирования отказа объекта [45, с. 257, 50, 53, 61], отражающую вероятностный характер процессов, приводящих к отказу, на всех этапах работы объекта (рисунок 2.3).

Вначале имеет место рассеяние начальных значений выходного параметра (параметров) объекта $X(t)$, характеризуемое функцией плотности распределения $f_X(x, t = 0)$ параметра $X(t)$ при $t = 0$. Наличие рассеяния начальных значений выходного параметра обусловлено погрешностями изготовления и быстропротекающими процессами (вибрация, упругая деформация и т. п.), влияние которых проявляется в самом начале применения объекта.

Затем в процессе эксплуатации параметры объекта ухудшают процессы средней скорости и медленно протекающие процессы (изнашивание, коррозия). В общем случае их влияние сказывается через некоторое время задержки $T_в$, которое также является случайной величиной с функцией плотности распределения $f_в(t)$ и связано с накоплением повреждений (например, усталостных или износом). Для внезапных (и сложных) отказов время задержки $T_в$ соответствует времени возникновения внешнего воздействия, вызывающего отказ (или инициирующего процесс повреждений, приводящий к отказу).

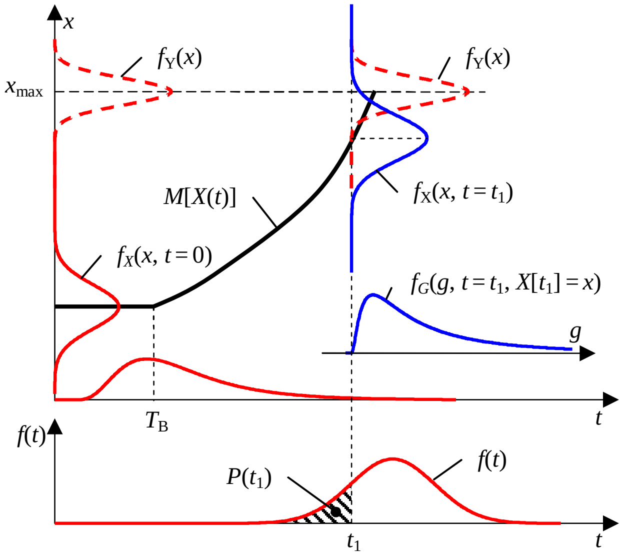


Рисунок 2.3 – Иллюстрация схемы формирования постепенного отказа

Процесс изменения выходного параметра $X(t)$ при $t > T_в$ характеризуется скоростью изменения $G = dX/dt$, которая также является случайной величиной, характеризуемой функцией плотности распределения $f_G(g, t, X(t))$, в общем случае зависящей от t – времени (наработки объекта) и текущего значения выходного параметра $X(t)$.

В текущий момент времени (наработки) t_1 рассеивание случайной величины X характеризуется функцией плотности распределения $f_X(x, t_1)$, зависящей от наработки t_1. В свою очередь допустимое (максимальное) значение Y выходного параметра также может быть случайной величиной с функцией плотности распределения $f_Y(x)$.

Тогда вероятность безотказной работы объекта в рассматриваемый момент времени (наработки) t_1 при условии, что к моменту t_1 отказ не возник [см. выражения (2.9) и (2.11)]

$$R = P\left(X[t_1] \le x_m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x, t_1)\left[\int_x^{\infty} f_Y(y)dy\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{y} f_X(x, t_1)dx\right]dy. \quad (2.26)$$

С другой стороны, вероятность безотказной работы объекта выражается через функцию плотности распределения $f(t)$ случайной величины ξ – наработки объекта до отказа:

$$R = P(\xi > t_1) = \int_{t_1}^{\infty} f(t)dt. \quad (2.27)$$

Данная схема в общем виде описывает процесс возникновения отказа и при частных значениях входных параметров может отражать те или иные случаи, характерные для рассматриваемого конкретного вида объектов и особенностей их применения. Если $T_в = 0$, то получаем типичную схему формирования постепенного параметрического отказа, который при резком возрастании значений выходного параметра $X(t)$ по достижении уровня x_m может перейти в отказ функционирования (привести к поломке объекта).

Если в процессе формирования отказа основную роль играет случайная неконтролируемая внешняя причина, проявляющаяся в момент $T_в = 0$, а затем процесс повреждения развивается с высокой скоростью $(G \to \infty)$, то получим модель формирования внезапного отказа.

2.3.4.2 Частный случай формирования постепенного отказа: начальное значение выходного параметра равно нулю. Рассмотрим распространенный случай (рисунок 2.4), когда выходной параметр объекта X является линейной функцией времени (наработки):

$$X(t) = G\,t. \quad (2.28)$$

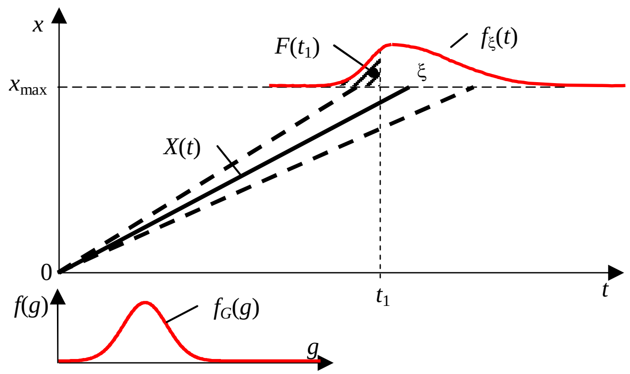


Рисунок 2.4 – Модель постепенного отказа при нулевом начальном значении выходного параметра X

Скорость изменения выходного параметра G зависит от большого числа случайных факторов (нагрузки, режимы и условия эксплуатации), поэтому допустим, что она подчиняется нормальному закону распределения с функцией плотности

$$f_G(g)=\frac{1}{\sigma_G\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(g-\mu_G)^2}{2\sigma_G^{\,2}}\right), \tag{2.29}$$

где μ_G – математическое ожидание скорости изменения выходного параметра $X(t)$; σ_G – стандартное отклонение скорости изменения выходного параметра.

Случайная величина ξ – наработка объекта до отказа – является функцией случайного аргумента G (считается, что отказ наступает при достижении выходным параметром X предельного значения $x_{\max}$):

$$\xi=\frac{x_{\max}}{G}. \tag{2.30}$$

Задача заключается в отыскании закона распределения непрерывной случайной величины ξ при известном законе распределения величины G (см. рисунок 2.4). В теории вероятностей [10] для определения функции плотности распределения монотонно убывающей функции случайного аргумента $t=\varphi(g)$ (2.30) применяется формула

$$f_\xi(t)=f_G(\psi(t))\left|\psi'(t)\right|, \tag{2.31}$$

где $\psi(t)$ – функция, обратная к $t=\varphi(g)$, т. е.

$$\psi(t)=\frac{x_{\max}}{t}, \tag{2.32}$$

$$\psi'(t)=-\frac{x_{\max}}{t^2}. \tag{2.33}$$

Подставляя выражения (2.32) и (2.33) в (2.31) и учитывая, что $x_{\max}>0$ и $t>0$, получаем

$$f_\xi(t)=\frac{1}{\sigma_G\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\frac{x_{\max}}{t}-\mu_G\right)^2}{2\sigma_G^{\,2}}\right)\frac{x_{\max}}{t^2}. \tag{2.34}$$

Выражение (2.34) можно записать в виде

$$f_\xi(t)=\frac{t_{Me}}{V_G\,t^2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t_{Me}-t)^2}{2V_G^{\,2}\,t^2}\right), \tag{2.35}$$

где $V_G=\dfrac{\sigma_G}{\mu_G}$ – коэффициент вариации скорости изменения выходного параметра $X(t)$; $t_{Me}=\dfrac{x_{\max}}{\mu_G}$ – наработка до отказа, соответствующая средней скорости изменения выходного параметра.

Таким образом, можно отметить, что время наработки объекта до отказа подчиняется распределению, которое отличается от нормального распределения. Важно, что медиана и мода времени наработки объекта до отказа равны, соответственно, $Med[\xi]=t_{Me}$ и $Mod[\xi]=t_{Me}\left(\dfrac{\sqrt{1+8V_G^{\,2}}-1}{4V_G^{\,2}}\right)$, причем $Med[\xi]>Mod[\xi]$.

Из этого следует, что закон распределения времени наработки объекта до отказа ξ является асимметричным – график функции плотности распределения $f_\xi(t)$ обладает большим «правым хвостом» (см. рисунок 2.4). Этот вывод важен при оценке надежности объектов, к которым предъявляются высокие требования безотказности: применение в модели отказа объекта вместо (2.35) другого симметричного, например, нормального закона распределения с тем же математическим ожиданием, дает более высокие значения вероятности отказа в области наработки $0<t<Mod[\xi]$, что приводит к заниженным оценкам ресурса объекта.

Для определения вероятности отказа объекта в течение наработки t_1 необходимо проинтегрировать функцию плотности распределения (2.35):

$$F(t_1)=\int_0^{t_1}f_\xi(t)dt=\frac{t_{Me}}{V_G\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{(t_{Me}-t)^2}{2V_G^2\,t^2}\right)dt. \tag{2.36}$$

Выполнив в (2.36) замену переменной $z=\dfrac{t_{Me}-t}{V_G\,t}$ $\left(dz=\dfrac{-t_{Me}}{V_G\,t^2}dt;\ z_1=\dfrac{t_{Me}-t_1}{V_G\,t_1}\right)$, получим

$$\begin{aligned}F(t_1)&=\frac{t_{Me}}{V_G\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{(t_{Me}-t)^2}{2V_G^{\,2}\,t^2}\right)dt=\\&=\frac{-t_{Me}}{V_G\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{z_1}\frac{V_G\,t^2}{t^2\,t_{Me}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_1}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = \frac{1}{2} - \Phi(z_1),$$

где $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}$ – интеграл Пуассона; $\Phi(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа (см. приложение Б).

Следовательно, вероятность безотказной работы

$$P(t_1) = 1 - F(t_1) = \frac{1}{2} + \Phi(z_1) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{t_{Me} - t_1}{V_G\, t_1}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x_{\max} - \mu_G\, t_1}{\sigma_G\, t_1}\right). \quad (2.38)$$

2.3.4.3 Пример определения вероятности безотказной работы объекта при постепенном отказе в пакете MathCAD. Рассмотрим пример определения вероятности безотказной работы подшипникового узла конвейера в течение наработки t (моточас), который подвержен износу (постепенному отказу). Начальное значение выходного параметра (т. е. износа рабочей поверхности) составляет $X(0) = 0$ мм, максимально допустимый износ составляет $x_{\max} = 1$ мм.

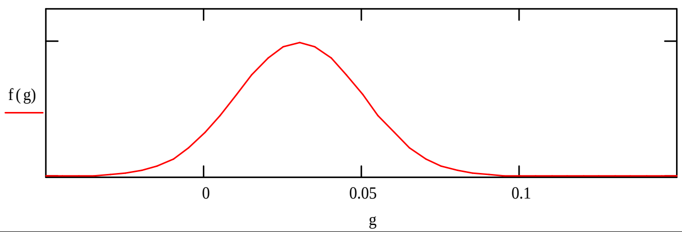
Значение выходного параметра объекта [износа $X(t)$] является линейной функцией времени, а скорость изменения выходного параметра подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $\mu_G =$ $= 0{,}03$ мм/моточас и стандартным отклонением $\sigma_G = 0{,}02$ мм/моточас. Необходимые вычисления выполним в пакете MathCAD.

$\text{Xmax} := 1.0 \qquad \mu g := 0.030 \qquad \sigma g := 0.020 \qquad g := -0.1, -0.095 .. 0.20$

$\text{Tme} := \frac{\text{Xmax}}{\mu g} \qquad \text{Vg} := \frac{\sigma g}{\mu g} \qquad \text{Vg} = 0.666667 \qquad \text{Tme} = 33.333333$

Функция плотности распределения скорости изменения выходного параметра (износа) подшипникового узла конвейера и ее иллюстрация

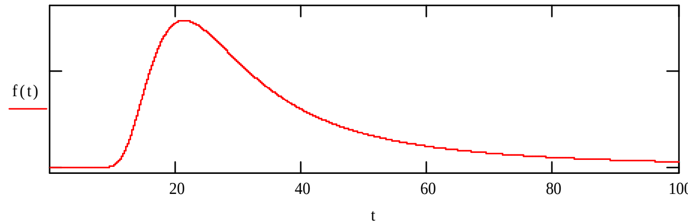
$$f(g) := \frac{1}{\sigma g \cdot \sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \exp\left[\frac{-(g - \mu g)^2}{2\cdot \sigma g^2}\right]$$



Функция плотности распределения времени наработки подшипникового узла до отказа и ее иллюстрация

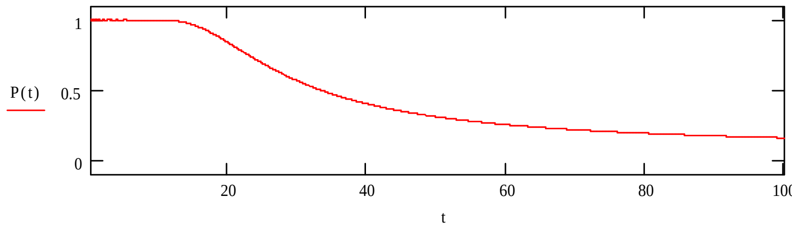
$t := 0.0001 , 0.01 .. 100.0$

$$f(t) := \frac{\text{Tme}}{\text{Vg}\cdot t^2 \cdot \sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \exp\left[\frac{-(\text{Tme} - t)^2}{2\cdot \text{Vg}^2 \cdot t^2}\right]$$



Вероятность безотказной работы подшипникового узла конвейера в течение наработки t, ч, и ее иллюстрация

$$P(t) := \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\text{Tme}-t}{\text{Vgt}}} \exp\left[\frac{-(x)^2}{2}\right] dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$$



Вывод: вероятность безотказной работы подшипникового узла конвейера в течение следующих значений наработки составляет:

$P(t = 10$ моточасов$) = 0{,}999767$;

$P(t = 20$ моточасов$) = 0{,}841345$;

$P(t = 40$ моточасов$) = 0{,}401294$.

3 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

3.1 Способы описания условий работоспособности систем через условия работоспособности элементов

3.1.1 Общие сведения

Одна из основных задач теории надежности – определение показателей надежности систем по известным значениям показателей надежности ее элементов. Для решения данной задачи, прежде всего, нужно формально описать условия работоспособности системы в зависимости от условий работоспособности ее элементов. Это можно сделать несколькими способами:

• словесным описанием;

• графически (например, с помощью структурной схемы надежности, дерева отказов или графа состояний);

• аналитически (с помощью, например, функций алгебры логики).

Словесное описание условий работоспособности системы является наиболее распространенным и простым, однако достаточно громоздким и недостаточно четким [45]. Словесное описание обычно сопровождает другие способы задания условий работоспособности систем. Аналитическое описание условий работоспособности является наиболее полным, четким и однозначным [45].

Рассмотрим наиболее употребительные графические способы описания условий работоспособности систем через условия работоспособности ее элементов: структурную схему надежности, дерево отказов и граф состояний. Некоторые другие способы, например функции алгебры логики и соответствующий им логико-вероятностный метод анализа надежности, рассмотрены в книгах [44, 45, 49, 54].

3.1.2 Структурная схема надежности

При возможности декомпозиции системы на элементы, для описания условий ее работоспособности может использоваться **структурная схема надежности** – совокупность блоков, соединенных последовательно, если отказ хотя бы одного из соответствующих им элементов приводит к отказу под-

системы; или соединенных параллельно, если к отказу подсистемы приводит отказ всех элементов.

Структурная схема надежности системы может не совпадать с функциональной или конструктивной схемой соединения ее элементов. В качестве примера, поясняющего разницу между конструктивной и структурной схемами надежности, рассмотрим подсистему из двух масляных фильтров (рисунок 3.1), которые для повышения надежности гидросистемы могут быть подключены последовательно или параллельно [53].

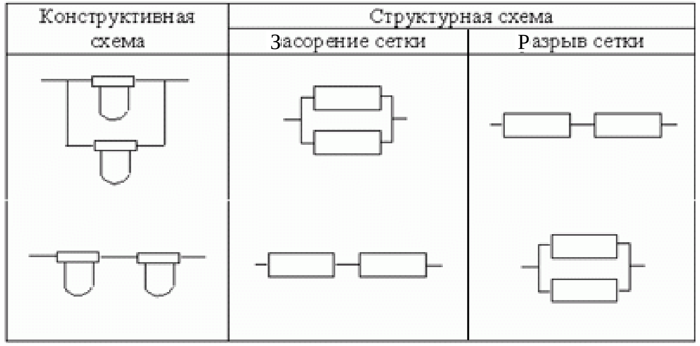


Рисунок 3.1 – Пример структурной схемы надежности, ее соответствие конструктивной схеме

Отказ фильтра может произойти в результате двух основных причин – засорения сетки или ее разрыва. При рассмотрении отказа, связанного с засорением сетки, структурная схема надежности соответствует конструктивной. Последовательное соединение фильтров в этом случае только снизит надежность системы, так как отказ любого из фильтров приведет к отказу системы (необходимый поток жидкости не будет проходить через систему).

При рассмотрении отказа фильтров, связанного с разрывом сетки, структурная схема надежности противоположна конструктивной. При параллельном конструктивном соединении отказ любого фильтра будет означать отказ системы, так как при разрыве сетки поток жидкости пойдет через этот фильтр, и не будет происходить ее фильтрации, что соответствует последовательному соединению элементов на структурной схеме надежности. При последовательном конструктивном включении фильтров, наоборот, разрыв сетки одного из них не будет означать отказа, поскольку второй фильтр продолжит выполнять свои функции, что соответствует параллельному соединению блоков на структурной схеме надежности.

Графическое описание с помощью структурной схемы надежности является очень наглядным, хотя неполным и недостаточно четким [45]. Так, в структурной схеме надежности практически не учитываются:

- зависимость отказов элементов;
- последовательность отказов;
- варианты множественных и частичных отказов;
- способы подключения резервных подсистем, отличные от нагруженного резерва (см. п. 3.2.5).

3.1.3 Дерево отказов

Дерево отказов (ДО) представляет собой логико-вероятностную модель причинно-следственной связи отказа системы с отказами его элементов и другими событиями (например, внешними воздействиями). Алгоритм построения ДО заключается в последовательной постановке вопроса: по каким причинам может произойти отказ системы, затем – ее подсистем, потом – их элементов и т. д. «сверху вниз» до событий и воздействий, порождающих отказ [45] (рисунок 3.2). Таким образом, ДО получают, отслеживая события в системе (связанные с отказами элементов и подсистем) от «следствия» к «причине» (т. е. в порядке, обратном происходящему в действительности), для того чтобы отыскать возможные причины их возникновения.

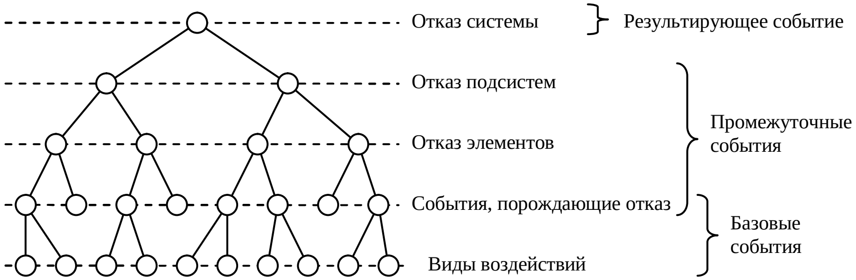


Рисунок 3.2 – Пример дерева отказов

Элементами ДО являются события, связанные между собой логическими операторами «И», «ИЛИ», «НЕ» и др. Каждому типу событий присваиваются символы, которые используются для графического построения ДО. Основные типы событий и соответствующие им символы представлены в таблице 3.1. Символы событий ДО объединяются в соответствии с их причинно-следственными связями посредством логических символов, приведенных в таблице 3.2.

Таблица 3.1 – **Символы событий дерева отказов**

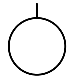
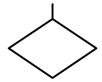
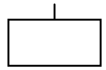
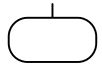
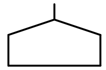
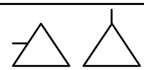
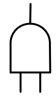
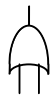
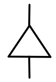
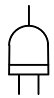
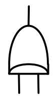
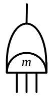
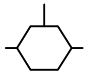
Изображение символа	Название символа	Описание символа события по [19]
	Круг	Базовое событие, обеспеченное всеми исходными данными
	Ромб	Событие, недостаточно детально разработанное, обеспеченное не всеми исходными данными
	Прямоугольник	Промежуточное событие, определяемое логическими символами
	Овал	Условное событие, используемое совместно с символом «запрет»
	Домик	Событие, наступлением которого управляет воля исследователя (используется при отладке модели)
	Треугольник	Символ перехода

Таблица 3.2 – **Логические символы дерева отказов**

Изображение символа	Название символа	Описание логического символа по [19]
	И	Событие-следствие происходит, если все входные события-причины происходят одновременно
	ИЛИ	Событие-следствие происходит, если происходит хотя бы одно из событий-причин (или их комбинация)
	НЕ	Событие-следствие представляет собой условие, которое является противоположным по отношению к событию-причине
	Приоритетное И	Событие-следствие происходит, если все события-причины происходят в нужном порядке слева направо. Символ отсутствует в стандарте [19], может быть заменен символом «запрет» (см. ниже)
	Исключающее ИЛИ	Событие-следствие происходит, если происходит только одно из двух событий-причин. Символ отсутствует в стандарте [19], может быть заменен символами «И» и «ИЛИ»

Окончание таблицы 3.2

Изображение символа	Название символа	Описание логического символа по [19]
	*m* из *n* (голосование)	Событие-следствие происходит, если происходит хотя бы *m* из *n* событий-причин
	Запрет	Событие-следствие происходит, если происходит событие-причина при наступлении условного события

Исходными данными для построения ДО являются перечни возможных видов отказов и их причин, значения внешних воздействующих факторов и др. На рисунке 3.3 представлена структурная схема системы энергоснабжения потребителей 1-й категории, для которых предусмотрены два независимых источника электропитания (например, железнодорожные станции, реанимационные отделения больниц), а на рисунке 3.4 – соответствующее ей ДО [1]. На рисунке 3.5 приведена структурная схема и ДО тепловоза 2ТЭ116.

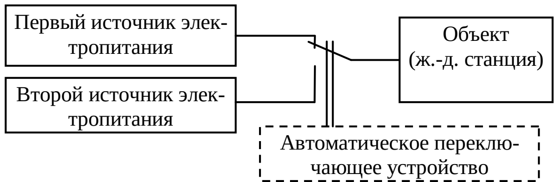


Рисунок 3.3 – Структурная схема системы электропитания потребителя 1-й категории

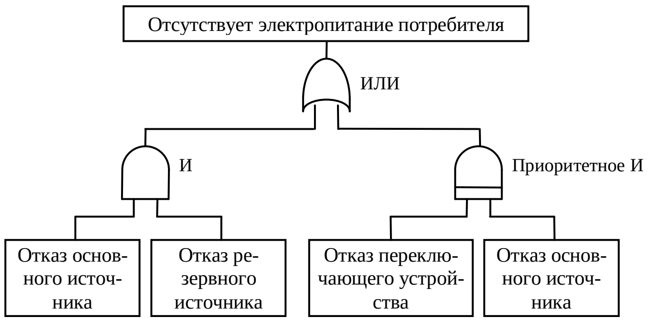


Рисунок 3.4 – Дерево отказов системы электропитания потребителя 1-й категории

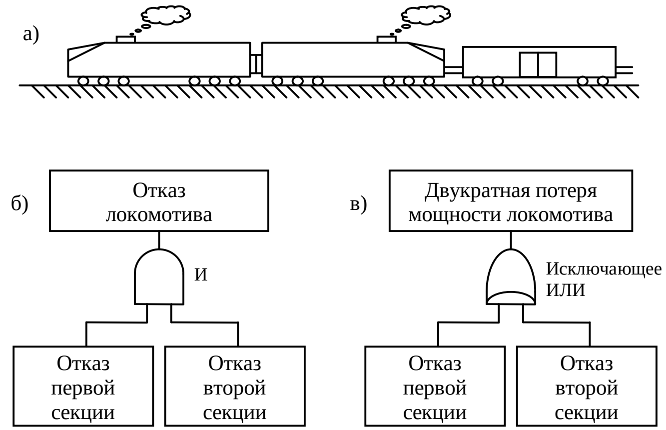


Рисунок 3.5 – Структурная схема (*а*) и деревья отказов (*б*, *в*) тепловоза 2ТЭ116

На рисунке 3.6 представлено ДО подшипника качения [7]; в скобках указана вероятность, с которой каждое событие инициирует результирующее событие.

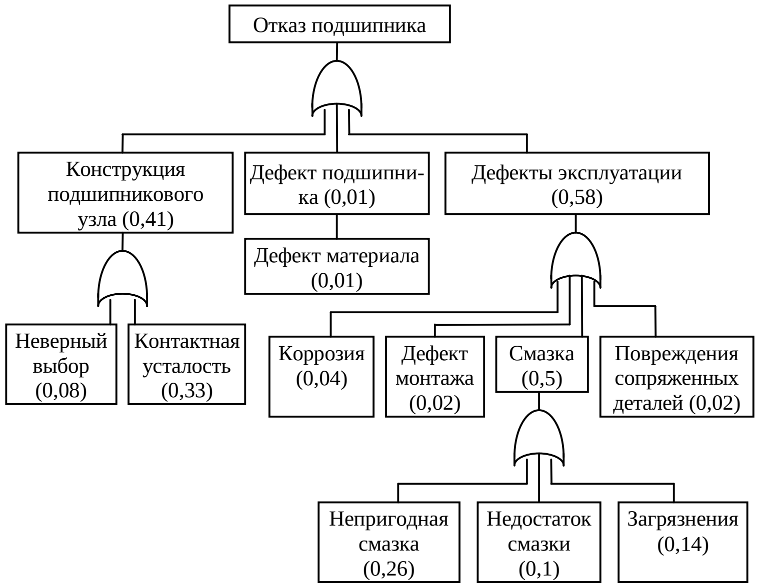


Рисунок 3.6 – Дерево отказов подшипника качения

По информативности описания системы (которая включает логическую полноту средств графического представления булевых функций и задания условий работоспособности системы через состояния ее элементов) ДО занимает промежуточное положение между структурной схемой надежности и графом состояний [1, 18, 23]. Основные достоинства представления модели надежности системы с помощью ДО заключаются в том, что анализ ДО:

- ориентируется на нахождение отказов и позволяет показать в явном виде ненадежные места системы;
- обеспечивается наглядным графическим материалом;
- учитывает последовательность наступления событий, связанных с отказами и другими воздействиями;
- учитывает зависимость между событиями;
- позволяет выполнять качественный и количественный анализы надежности системы.

Ограничения представления модели надежности системы с помощью ДО состоят в следующем:

- реализация метода требует значительных затрат средств и времени;
- ДО представляет собой схему булевой логики, на которой представлены только два состояния: рабочее и отказавшее (трудно учесть состояние частичного отказа элементов);
- сложности аналитического решения для ДО систем, содержащих резервированные и восстанавливаемые подсистемы;
- требует от специалистов по надежности глубокого понимания системы и конкретного рассмотрения только одного определенного отказа.

3.1.4 Граф состояний

Состояние системы в целом (работоспособное, неработоспособное) можно однозначно охарактеризовать состоянием ее элементов. Следовательно, процесс перехода системы из одного состояния в другое (вследствие отказов и восстановлений элементов) можно описать графом состояний.

Граф состояний представляет собой связный ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям процесса отказов и восстановлений элементов системы, а дуги указывают на возможность перехода системы из одного состояния в другое. Дугам, как правило, приписывается интенсивность или вероятность перехода.

На рисунке 3.7 представлены структурная схема надежности, ДО и граф состояний дублированной невосстанавливаемой системы, отказ которой происходит при отказе обоих элементов.

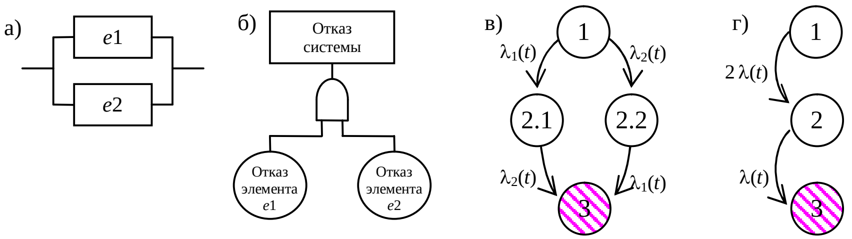


Рисунок 3.7 – Структурная схема надежности (*а*), дерево отказов (*б*) и граф состояний дублированной системы с произвольными (*в*) и идентичными (*г*) элементами

На рисунке 3.7, *в* состояние «1» соответствует исправному состоянию системы; состояние «2.1» – работоспособному состоянию, когда отказал только элемент «*e*1»; состояние «2.2» – работоспособному состоянию, когда отказал только элемент «*e*2»; состояние «3» соответствует неработоспособному состоянию (помечено штриховкой), когда неисправны оба элемента; $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ – интенсивности отказов соответствующего элемента в момент наработки t.

Граф состояний дублированной системы с идентичными элементами $[\lambda_1(t) = \lambda_2(t)]$ представлен на рисунке 3.7, *г*. Здесь состояние «2» соответствует работоспособному состоянию, когда отказал только один (любой) из двух элементов; $\lambda(t)$ – интенсивность отказа каждого из двух идентичных элементов в момент наработки t; $2\lambda(t)$ – интенсивность отказа хотя бы одного из двух элементов в момент наработки t.

Граф состояний является эффективным способом описания условий работоспособности восстанавливаемых систем с произвольными дисциплинами восстановления элементов (рисунок 3.8).

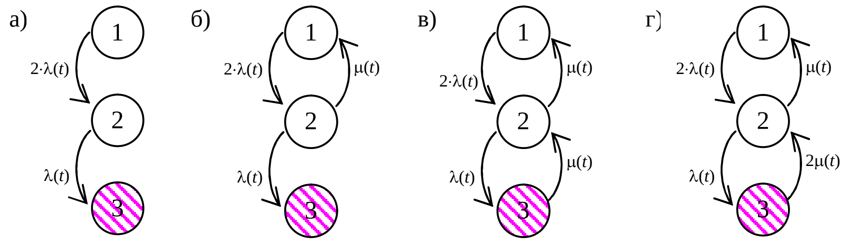


Рисунок 3.8 – Граф состояний дублированной системы с невосстанавливаемыми элементами (*а*), восстанавливаемыми элементами и предельным состоянием «3» (*б*), элементами, восстанавливаемыми одной (*в*) и двумя (*г*) бригадами

На рисунке 3.8, *а* представлен граф состояний дублированной системы с невосстанавливаемыми элементами, а на рисунке 3.8, *б* – граф состояний дублированной системы с восстанавливаемыми элементами, когда состояние «3» является поглощающим и переход из него невозможен (предельное состояние системы). На рисунке 3.8, *в* приведен граф состояний дублированной системы с элементами, восстанавливаемыми одной бригадой, где $\mu(t)$ – интенсивность восстановления элементов, а на рисунке 3.8, *г* – граф состояний дублированной системы с элементами, восстанавливаемыми двумя бригадами; интенсивность перехода из состояния «3» (оба элемента отказали) в состояние «1» (только один элемент отказал) равна $2\mu(t)$.

В графе состояний могут быть учтены множественные отказы элементов системы и последовательность отказов. Ограничение представления модели надежности системы с помощью графа состояний заключается в сложности построения и анализа моделей систем с большим количеством состояний.

3.2 Расчет показателей надежности методом структурной схемы надежности

3.2.1 Надежность систем с последовательной структурой

К системам с последовательной структурой относятся объекты, отказ которых происходит при отказе хотя бы одного из элементов. При этом конструктивное соединение элементов может отличаться от последовательного (см. п. 3.1.2). Например, при отказе любого из элементов привода главного движения станка (электродвигатель, ременная передача, валы, детали передач зацеплением, муфты, вилки переключения и т. д.) происходит отказ функционирования привода [53]. Отказ любого электронного элемента телевизора также переводит его в неработоспособное состояние.

Рассмотрим систему с последовательной структурой, состоящую из n элементов (рисунок 3.9).

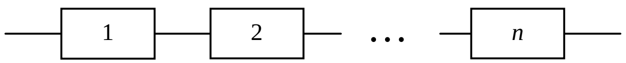


Рисунок 3.9 – Пример системы с последовательной структурой

Определим следующие случайные события и случайные величины:

- A = {безотказная работа системы в течение наработки t};
- B_i = {безотказная работа i-го элемента системы в течение наработки t}, $i=\overline{1,n}$;
- ξ – наработка системы до отказа;
- η_i – наработка i-го элемента системы до отказа.

Поскольку для безотказной работы системы с последовательной структурой необходима безотказная работа всех ее элементов, то событие A определяется произведением событий B_i:

$$A = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n. \qquad (3.1)$$

Применяя к (3.1) теорему умножения вероятностей и предполагая события B_i независимыми в совокупности, получим

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = P(B_1)\,P(B_2)\cdot\ldots\cdot P(B_n) \qquad (3.2)$$

или в соответствии с выражением (1.1)

$$P(\xi > t) = P(\eta_1 > t)\,P(\eta_2 > t)\ldots P(\eta_n > t);$$
$$P(\xi > t) = 1 - P(\xi \le t) = (1 - P(\eta_1 \le t))\,(1 - P(\eta_2 \le t))\ldots(1 - P(\eta_n \le t)); \qquad (3.3)$$
$$P(\xi > t) = 1 - F(t) = (1 - F_1(t))\,(1 - F_2(t))\ldots(1 - F_n(t)),$$

где $F(t)$ – функция распределения величины ξ, т. е. – вероятность отказа системы в течение наработки t; $F_i(t)$ – функция распределения величины η_i – вероятность отказа i-го элемента системы в течение наработки t.

Замечание 1. Учитывая, что в выражении (3.2) $0 \le P(B_i) \le 1$, можно утверждать, что вероятность безотказной работы системы с последовательной структурой не превышает вероятности безотказной работы самого надежного элемента системы.

Рассмотрим интенсивность отказов системы с последовательной структурой и независимыми отказами элементов. В соответствии с (1.10)

$$P(A) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_\Sigma(t)dt\right),\; P(B_1) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right), \ldots, P(B_n) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_n(t)dt\right), \qquad (3.4)$$

где $\lambda_\Sigma(t)$ – интенсивность отказов системы в момент наработки t; $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов i-го элемента системы в момент наработки t; $i=\overline{1,n}$.

В соответствии с (3.2)

$$\exp\left(-\int_0^t \lambda_\Sigma(t)dt\right) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(t)dt\right)\ldots\exp\left(-\int_0^t \lambda_n(t)dt\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^t \lambda_\Sigma(t)dt = \int_0^t \lambda_1(t)dt + \ldots + \int_0^t \lambda_n(t)dt = \int_0^t (\lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t))dt;$$
$$\lambda_\Sigma(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t). \qquad (3.5)$$

Замечание 2. Интенсивность $\lambda_\Sigma(t)$ отказов системы с последовательной структурой и независимыми отказами элементов равна сумме интенсивностей отказов её элементов.

Замечание 3. В случае, когда наработка до отказа каждого из элементов системы имеет экспоненциальное распределение с параметрами λ_i, $i=\overline{1,n}$, вероятность безотказной работы системы с последовательной структурой и независимыми элементами в течение наработки $t>0$ можно определить выражением (3.3):

$$\begin{aligned} P(A) &= [1-F_1(t)][1-F_2(t)]\ldots[1-F_n(t)] = \\ &= [1-(1-\exp(-\lambda_1 t))][1-(1-\exp(-\lambda_2 t))]\ldots[1-(1-\exp(-\lambda_n t))] = \\ &= \exp(-\lambda_1 t)\exp(-\lambda_2 t)\ldots\exp(-\lambda_n t) = \exp(-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где n – количество элементов системы с последовательной структурой.

Следовательно, наработка до отказа системы с последовательной структурой и независимыми элементами также подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda_\Sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Данное замечание является также следствием замечания 2, т. к. параметр λ_i экспоненциального закона распределения наработки до отказа i-го элемента тождественен интенсивности его отказов.

3.2.2 Пример расчета показателей безотказности системы с последовательной структурой в пакете MathCAD

Пусть отказ ременной передачи происходит в случае отказа хотя бы одного из трех элементов: ремня, вала и исполнительного органа. Время безотказной работы каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметрами $\lambda_1 = 10^{-4}$ моточас$^{-1}$, $\lambda_2 = 2\cdot10^{-4}$ моточас$^{-1}$, $\lambda_3 = 3\cdot10^{-4}$ моточас$^{-1}$ (для вала, исполнительного органа и ремня соответственно). Определить основные показатели безотказности системы: вероятность безотказной работы в течение 500 моточасов, среднюю наработку до отказа, 95-гамма-процентную наработку до отказа. Отказы элементов предполагаются независимыми.

Задание функций распределения наработки элементов системы до отказа

$\lambda1 := 0.0001$ $\quad\lambda2 := 0.0002$ $\quad\lambda3 := 0.0003$

$F1(t) := 1 - \exp(-\lambda1 \cdot t)$

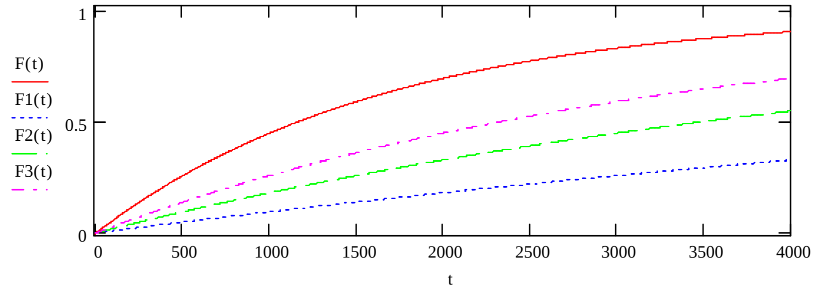
$F2(t) := 1 - \exp(-\lambda2 \cdot t)$

$F3(t) := 1 - \exp(-\lambda3 \cdot t)$

Вычисление функции распределения наработки системы до отказа по (3.3)

$F(t) := 1 - (1 - F1(t)) \cdot (1 - F2(t)) \cdot (1 - F3(t))$

Иллюстрация функций распределения наработки до отказа системы и ее элементов



Определение функций плотности распределения наработки до отказа системы и ее элементов

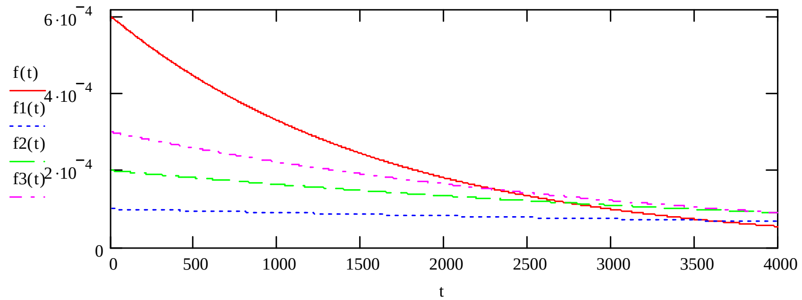
$f(t) := \frac{d}{dt}F(t) \rightarrow 6.\cdot10^{-4}\cdot\exp(-1.\cdot10^{-4}\cdot t)\cdot\exp(-2.\cdot10^{-4}\cdot t)\cdot\exp(-3.\cdot10^{-4}\cdot t)$

$f1(t) := \frac{d}{dt}F1(t) \rightarrow 1.\cdot10^{-4}\cdot\exp(-1.\cdot10^{-4}\cdot t)$

$f2(t) := \frac{d}{dt}F2(t) \rightarrow 2.\cdot10^{-4}\cdot\exp(-2.\cdot10^{-4}\cdot t)$

$f3(t) := \frac{d}{dt}F3(t) \rightarrow 3.\cdot10^{-4}\cdot\exp(-3.\cdot10^{-4}\cdot t)$

Иллюстрация графиков функций плотности распределения наработки до отказа системы и ее элементов



Определение вероятности безотказной работы системы в течение 500 моточасов

$P1 := 1 - F(500) \rightarrow .74081822068171786606$

Определение средней наработки системы до отказа, моточасов

$M := \int_0^\infty t\cdot f(t)\,dt \rightarrow 1666.6666666666666667$

Определение гамма-процентной наработки системы до отказа, моточасов

$t\gamma := 100$

Given

F(tγ) = 1 − 0.95
Find(tγ) = 85.488825
Определение вероятности безотказной работы системы в течение 8.549 моточасов (проверка)
P2 := 1 − F(85.488825) → .94999999941817300694

Вывод: вероятность безотказной работы ременной передачи в течение 500 моточасов составляет $P(500) = 0{,}7408$; средняя наработка до отказа – 1666,7 моточасов; 95-гамма-процентная наработка до отказа – 85,49 моточасов.

3.2.3 Надежность систем с параллельной структурой

К системам с параллельной структурой относятся такие системы, отказ которых происходит в случае отказа всех элементов системы (рисунок 3.10).

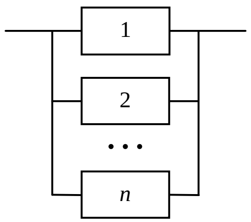


Рисунок 3.10 – Пример системы с параллельной структурой

Определим следующие случайные события:

- A = {безотказная работа системы в течение наработки t};
- B_i = {безотказная работа i-го элемента системы в течение наработки t}, $i = \overline{1, n}$;

и случайные величины

- ξ – наработка системы до отказа;
- η_i – наработка i-го элемента системы до отказа.

Поскольку для безотказной работы системы с параллельной структурой необходима безотказная работа хотя бы одного ее элемента, то событие A определяется через события B_i:

$$A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n . \quad (3.7)$$

Применение к (3.7) теоремы сложения вероятностей совместных событий B_i имеет известные сложности, поэтому целесообразно рассмотреть событие, противоположное событию A:

$$\overline{A} = \{\text{отказ системы в течение наработки } t\} = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_n} . \quad (3.8)$$

Применяя к (3.8) теорему умножения вероятностей и предполагая события B_i независимыми в совокупности, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_n}) = 1 - P(\overline{B_1}) P(\overline{B_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{B_n}) \quad (3.9)$$

или в соответствии с выражением (1.1)

$$P(\xi > t) = 1 - P(\xi \le t) = 1 - P(\eta_1 \le t)\, P(\eta_2 \le t) \ldots P(\eta_n \le t),$$

$$P(\xi > t) = 1 - F(t) = 1 - F_1(t)\, F_2(t) \ldots F_n(t), \quad (3.10)$$

где $F(t)$ – функция распределения непрерывной случайной величины ξ (вероятность отказа системы в течение наработки t); $F_i(t)$ – функция распределения величины η_i (вероятность отказа i-го элемента системы в течение наработки t).

Замечание. Учитывая, что в выражении (3.9) $0 \le P(B_i) \le 1$, можно утверждать, что вероятность безотказной работы системы с параллельной структурой больше вероятности безотказной работы самого надежного элемента системы.

Пример построения структурной схемы надежности и расчета показателей безотказности системы с параллельной структурой методом структурной схемы надежности рассмотрен ниже в п. 3.2.5.

3.2.4 Структурное резервирование элементов систем

В системах с параллельной структурой используется принцип структурного резервирования элементов. Существуют различные варианты реализации этого принципа (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – **Виды структурного резервирования**

По составу резервированных элементов и подсистем	По способу подключения резервных элементов и подсистем
1 Общее	
2 Раздельное	1 Нагруженное
2.1 Скользящее	2 Облегченное
3 Смешанное	3 Ненагруженное

Общее резервирование (рисунок 3.11) предполагает то, что при отказе любого элемента основной цепи включается резервная цепь, которая полностью заменяет основную. Таким образом, при общем резервировании резервируется объект в целом, а в качестве резервного используется аналогичный объект.

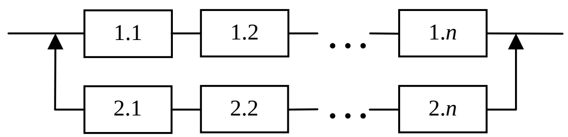


Рисунок 3.11 – Пример общего резервирования

Раздельное резервирование (рисунок 3.12) обеспечивает включение соответствующего резервного элемента при отказе любого элемента основной цепи.

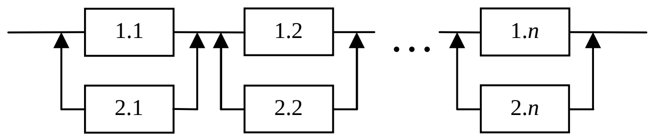


Рисунок 3.12 – Пример раздельного резервирования

Разновидностью раздельного резервирования является с к о л ь з я щ е е резервирование (рисунок 3.13), когда резервный элемент (элементы) может заменить любой отказавший элемент основной цепи.

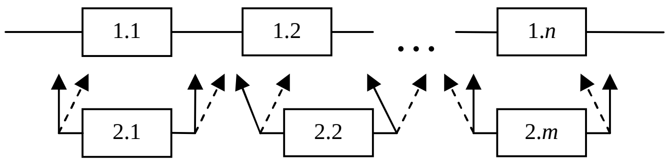


Рисунок 3.13 – Пример скользящего резервирования

Раздельное резервирование обеспечивает более высокий уровень безотказности по сравнению с общим резервированием при одном и том же количестве резервных элементов (кратности резервирования). Однако раздельное резервирование часто приводит к усложнению системы в связи с использованием контролирующих и переключающих устройств.

Рассмотрим два варианта организации двухниточного подводного перехода нефтепровода. На рисунке 3.14, *а* представлен вариант раздельного резервирования основных ниток нефтепровода согласно существующим правилам технической эксплуатации нефтепроводов, а на рисунке 3.14, *б* – вариант скользящего резервирования основных ниток нефтепровода. Строительство одного резервного перехода для обеих ниток приводит к значительному экономическому эффекту [37].

Применяют также **смешанное резервирование –** комбинацию общего резервирования отдельных цепей с раздельным резервированием наиболее ответственных и наименее надежных элементов.

При **нагруженном** (постоянном**,** "горячем") **резервировании** (рисунок 3.15, *а*) резервные элементы постоянно присоединены к основному и с самого начала работы системы подвергаются опасности отказа (исчерпывают свой ресурс). Изменение структуры системы при отказах ее элементов не осуществляется.

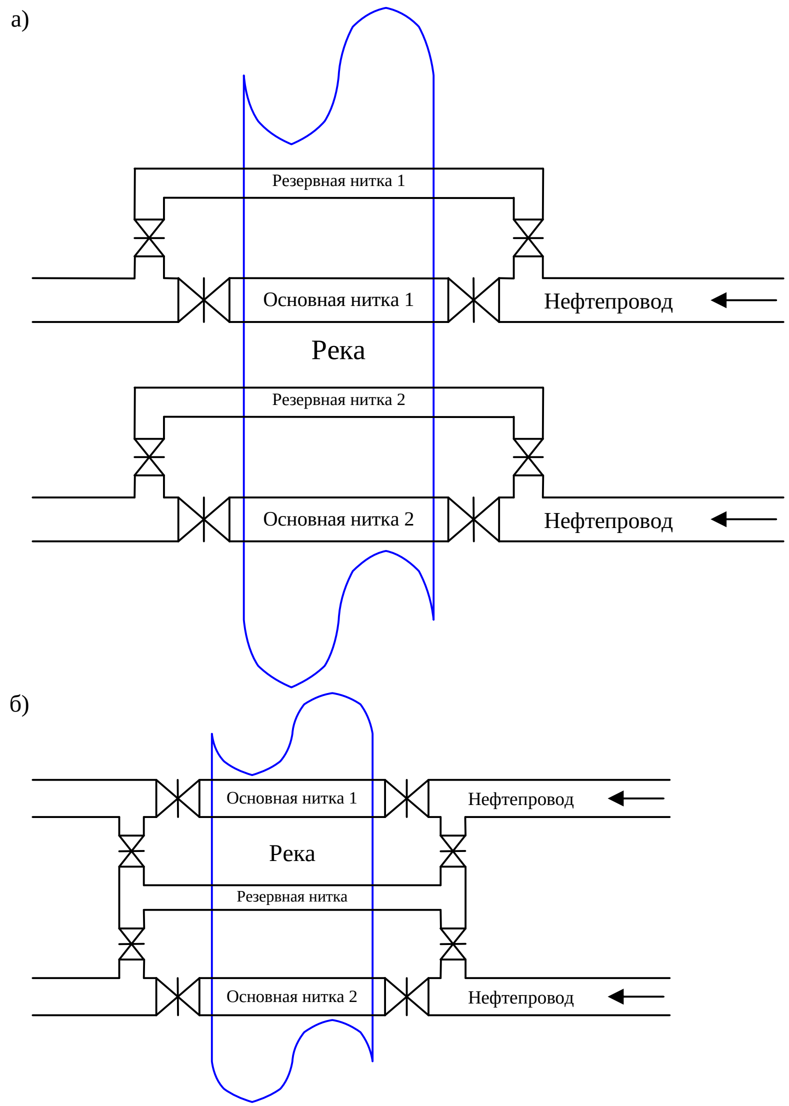


Рисунок 3.14 – Технологические схемы двухниточного подводного перехода нефтепровода с раздельным (*а*) и скользящим (*б*) резервированием

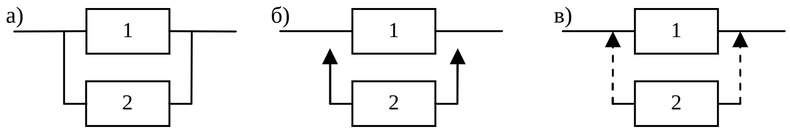


Рисунок 3.15 – Варианты резервирования:
а – нагруженное; *б* – ненагруженное; *в* – облегченное

При **ненагруженном резервировании** (динамическое, "холодное", резервирование замещением) резервные элементы находятся в отключенном состоянии (рисунок 3.15, *б*) и не подвергаются опасности отказа до момента включения, наступающего при отказе основного (предшествующего резервного) элемента. В этом случае необходимо специальное контролирующее и переключающее устройство, служащее для обнаружения отказа и включения очередного резервного элемента.

При **облегченном резервировании** (рисунок 3.15, *в*) резервные элементы до момента включения находятся в облегченном режиме работы, характеризуемом пониженным значением интенсивности отказов (с уменьшенной скоростью расхода ресурса).

3.2.5 Пример расчета показателей безотказности системы с параллельной структурой в пакете MathCAD

Участки нефтепровода, проходящие через водные преграды, имеют основную и резервную нитки (рисунок 3.16). Существующие правила технической эксплуатации трубопровода предусматривали штатное нагружение лишь основной нитки. При этом предполагалось, что резервная нить находится в ненагруженном резерве.

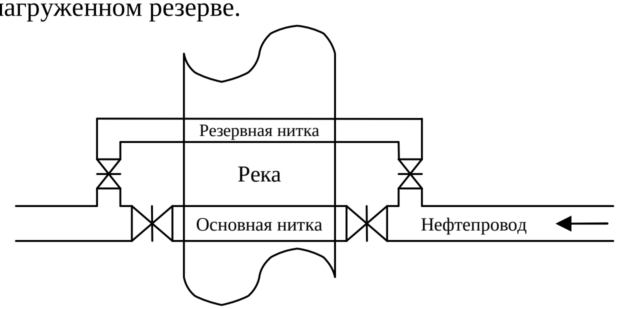


Рисунок 3.16 – Технологическая схема
подводного перехода нефтепровода

Однако исследования [37] показали целесообразность использования обеих ниток в нагруженном состоянии, что приводит к существенному

продлению их срока службы ввиду исключения условий для образования и развития локальных коррозионных повреждений, снижающих коррозионно-механическую прочность труб.

Предполагая, что отказы основной и резервной ниток участка нефтепровода, проходящего через реку, независимы, а наработка до отказа каждой из них имеет экспоненциальное распределение с параметрами [59] (тождественными интенсивностям отказов) $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ ч$^{-1}$; $\lambda_2 = 4 \cdot 10^{-7}$ ч$^{-1}$, соответственно, определим следующие показатели безотказности:

- вероятность безотказной работы в течение 10 лет;
- среднюю наработку до отказа;
- 95-гамма-процентную наработку до отказа.

Отказ рассматриваемого участка нефтепровода состоит в невозможности транспортирования нефти, происходит при повреждении (и последующем перекрытии) обеих ниток трубопровода. Поэтому структурная схема надежности данной системы представляет собой параллельное соединение двух блоков (см. рисунок 3.15, *а*). Для определения показателей безотказности системы в пакете MathCAD воспользуемся п. 3.2.3.

Определение функций распределения наработки элементов до отказа (для t > 0)

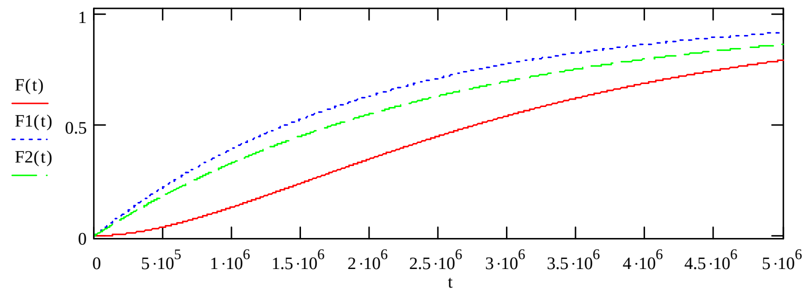
$\lambda1 := 5 \cdot 10^{-7}$ $\lambda2 := 4 \cdot 10^{-7}$

$F1(t) := 1 - \exp(-\lambda1 \cdot t)$ $F2(t) := 1 - \exp(-\lambda2 \cdot t)$

Вычисление функций распределения наработки системы до отказа

$F(t) := F1(t) \cdot F2(t)$

Иллюстрация графиков функций распределения наработки до отказа системы и ее элементов



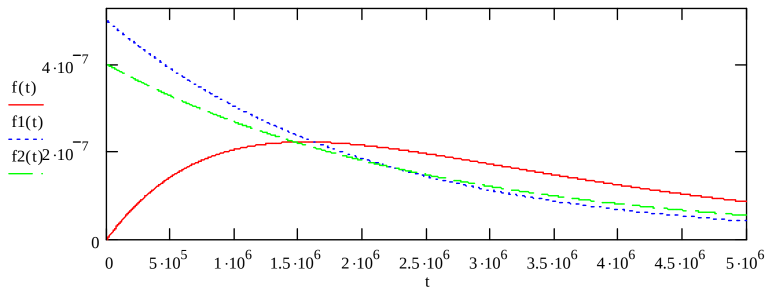
Определение функций плотности распределения наработки до отказа системы и ее элементов

$$f(t) := \frac{d}{dt}F(t) \rightarrow \frac{1}{2000000} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2000000} \cdot t\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{2500000} \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2500000} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{2000000} \cdot t\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{-1}{2500000} \cdot t\right)$$

$$f1(t) := \frac{d}{dt}F1(t) \rightarrow \frac{1}{2000000} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2000000} \cdot t\right)$$

$$f2(t) := \frac{d}{dt}F2(t) \rightarrow \frac{1}{2500000} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2500000} \cdot t\right)$$

Иллюстрация графиков функций плотности распределения наработки до отказа системы и ее элементов



Определение средней наработки системы до отказа, ч,

$$M := \int_0^{\infty} t \cdot f(t)\,dt \rightarrow \frac{30500000}{9} \qquad M = 3.389 \times 10^6$$

Определение вероятности безотказной работы системы в течение 10 лет (87600 ч)

$$P1 := 1 - F(87600) \rightarrow 1 - \left(1 - \exp\left(\frac{-219}{5000}\right)\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-219}{6250}\right)\right)$$

$$P1 = 0.998524$$

Определение гамма-процентной наработки системы до отказа, ч,

$t\gamma := 100$

Given

$F(t\gamma) = 1 - 0.95$

$Find(t\gamma) = 5.664054 \times 10^5$

Определение вероятности безотказной работы системы в течение 5.664054*10^5 ч (проверка)

$$P2 := 1 - F\left(5.664054 \times 10^5\right) \rightarrow .95000005141580414232$$

Вывод: вероятность безотказной работы участка трубопровода в течение 10 лет составляет $P(87600) = 0{,}998524$; средняя наработка до отказа – 3,389 млн ч; 95-гамма-процентная наработка до отказа – 56,64054 тыс. ч.

Замечание 1. В случае, когда наработка элементов системы до отказа подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметрами λ_i, наработка до отказа системы с параллельной структурой отличается от экспоненциального распределения (см. иллюстрацию выше) и с увеличением n стремится к распределению Фреше.

Замечание 2. В рассматриваемом примере отсутствует процедура восстановления отказавших подсистем, которая в действительности существенно увеличивает значения показателей надежности. Данный пример с учетом восстановления элементов будет рассмотрен в п. 3.4.4.

3.2.6 Пример определения показателей надежности систем с произвольной структурой в пакете MathCAD

Показатели надежности систем с последовательно-параллельной структурой могут быть определены в результате многократного применения методов, приведенных в пп. 3.2.1 и 3.2.3. Рассмотрим примеры построения структурных схем надежности и определения на их основе показателей безотказности систем.

Простейший кривошипно-шатунный механизм компрессора двухступенчатого сжатия газа включает в себя коленчатый вал и два поршня цилиндров различного диаметра (рисунок 3.17).

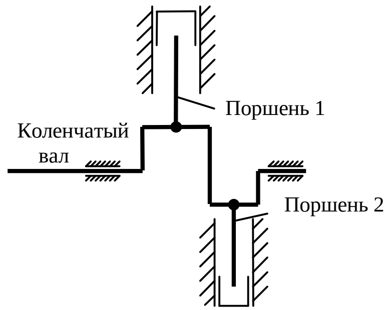


Рисунок 3.17 – Структурная схема кривошипно-шатунного механизма компрессора

Допустим, что наработка до отказа поршня 1 подчиняется логнормальному распределению с математическим ожиданием 5 тыс. моточасов и стандартным отклонением 6 тыс. моточасов; поршня 2 – логнормальному закону распределения с математическим ожиданием 6 тыс. моточасов и стандартным отклонением 5 тыс. моточасов; коленчатого вала – распределению Вейбулла с математическим ожиданием 9 тыс. моточасов и стандартным отклонением 6 тыс. моточасов. Предполагая, что отказы элементов независимы, требуется определить следующие показатели безотказности кривошипно-шатунного механизма компрессора:

- построить график функции $P(t)$ – вероятности безотказной работы в течение наработки t;
- вероятность безотказной работы в течение месяца (720 моточасов) и года (8760 моточасов) непрерывной работы;
- среднюю наработку системы до отказа;
- гамма-процентную наработку до отказа для $\gamma = 95$ %.

В предположении, что отказ одного из поршней лишь снижает мощность компрессора, структурная схема надежности кривошипно-шатунного механизма компрессора представлена на рисунке 3.18, где блок «1» – поршень 1;

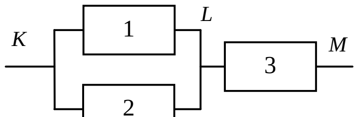


Рисунок 3.18 – Структурная схема надежности кривошипно-шатунного механизма компрессора

блок «2» – поршень 2; блок «3» – коленчатый вал.

Расчеты показателей надежности кривошипно-шатунного механизма компрессора выполним в соответствии с пп. 3.2.1 и 3.2.3 в пакете MathCAD.

Задание математических ожиданий и стандартных отклонений наработки до отказа элемента "1", "2" и "3"

$M1 := 5000 \quad S1 := 6000 \quad M2 := 6000 \quad S2 := 5000 \quad M3 := 9000 \quad S3 := 6000$

Определение параметров $\mu1$ и $\sigma1$ функции логнормального распределения наработки до отказа элемента "1"

$\mu1 := 10 \qquad \sigma1 := .5$

Given

$$M1 = \exp\left(\mu1 + \frac{\sigma1^2}{2}\right)$$

$$S1 = \sqrt{\exp\left(2\cdot\mu1 + \sigma1^2\right)\cdot\left(\exp(\sigma1)^2 - 1\right)}$$

$$\mathrm{Find}(\mu1, \sigma1) = \begin{pmatrix} 8.417736 \\ 0.445999 \end{pmatrix}$$

Система уравнений решена, параметры $\mu1$ и $\sigma1$ определены

$\mu1 := 8.417736 \qquad \sigma1 := 0.445999$

Задание функции логнормального распределения наработки до отказа элемента "1" (только для t > 0)

$$F1(t) := \int_0^t \frac{1}{\sigma1\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln(x) - \mu1)^2}{2\cdot\sigma1^2}\right]dx$$

Определение параметров $\mu2$ и $\sigma2$ функции логнормального распределения наработки до отказа элемента "2"

$\mu2 := 10 \qquad \sigma2 := .5$

Given

$$M2 = \exp\left(\mu2 + \frac{\sigma2^2}{2}\right)$$

$$S2 = \sqrt{\exp\left(2\cdot\mu2 + \sigma2^2\right)\cdot\left(\exp(\sigma2)^2 - 1\right)}$$

$$\mathrm{Find}(\mu2, \sigma2) = \begin{pmatrix} 8.664752 \\ 0.263677 \end{pmatrix}$$

Система уравнений решена, параметры $\mu2$ и $\sigma2$ определены

$\mu2 := 8.664752 \qquad \sigma2 := 0.263677$

Задание функции логнормального распределения наработки до отказа элемента "2" (только для t > 0)

$$F2(t) := \int_0^t \frac{1}{\sigma2\cdot x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(\ln(x) - \mu2)^2}{2\cdot\sigma2^2}\right]dx$$

Определение параметров α и β функции распределения Вейбулла наработки до отказа элемента "3"

$\alpha := 1 \qquad \beta := 1$

Given

$$M3 = \beta\cdot\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 0\right)$$

$$S3 = \beta\cdot\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}, 0\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 0\right)^2}$$

$$\mathrm{Find}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1.530094 \\ 9.992677\times 10^3 \end{pmatrix}$$

Система уравнений решена, параметры α и β определены

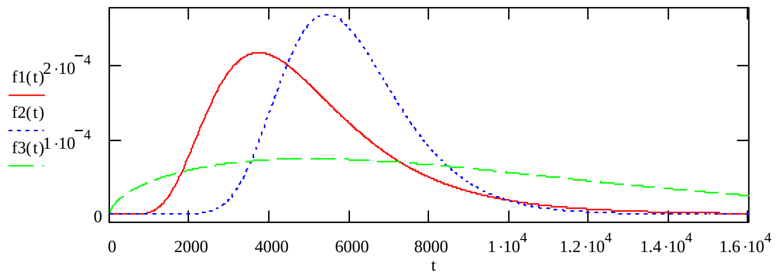
$\alpha := 1.530094 \qquad \beta := 9992.677$

Задание функции распределения Вейбулла наработки до отказа элемента "3" (только для t > 0)

$$F3(t) := 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]$$

Определение и иллюстрация функций плотности распределения наработки элементов до отказа

$$f1(t) := \frac{d}{dt}F1(t) \qquad f2(t) := \frac{d}{dt}F2(t) \qquad f3(t) := \frac{d}{dt}F3(t)$$



Вычисление функции распределения и функции плотности распределения наработки до отказа подсистемы KL элементов "1" и "2" (участок KL на структурной схеме надежности) по (3.10)

$Fkl(t) := F1(t) \cdot F2(t)$

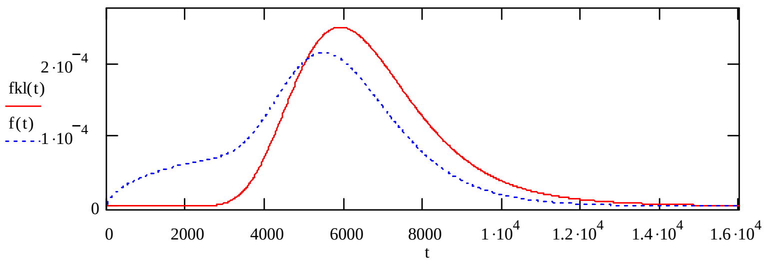
$fkl(t) := \frac{d}{dt} Fkl(t)$

Вычисление функции распределения и функции плотности распределения наработки до отказа системы (участок KM на структурной схеме надежности) по (3.3)

$F(t) := 1 - (1 - Fkl(t)) \cdot (1 - F3(t))$

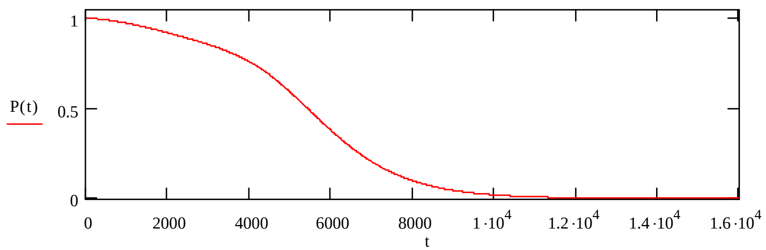
$f(t) := \frac{d}{dt} F(t)$

Иллюстрация функций плотности распределения наработки до отказа подсистемы KL fkl(t) и системы в целом f(t)



Определение и иллюстрация вероятности безотказной работы системы по (1.1)

$P(t) := 1 - F(t) \quad P(720) = 0.98229 \quad P(8760) = 0.054696$



Определение средней наработки системы до отказа по (1.3). Для возможности численного интегрирования бесконечность отождествлена с числом 1E7.

$M := \int_0^{10^7} P(t)\, dt \qquad M = 5.346491 \times 10^3$

Определение 95-гамма-процентной наработки системы до отказа по (1.5).

$t\gamma := 10000$

Given

$F(t\gamma) = 1 - 0.95$

$Find(t\gamma) = 1.434275 \times 10^3$

Вывод: вероятность безотказной работы кривошипно-шатунного механизма компрессора в течение месяца (720 моточасов) составляет $P(720) = 0{,}98229$; в течение года непрерывной работы – $P(8760) = 0{,}054696$; средняя наработка до отказа – 5,34649 тыс. моточасов; 95-гамма-процентная наработка до отказа – 1,434275 тыс. моточасов.

Расчет показателей надежности систем со структурой, не сводящейся к схемам последовательного или параллельного соединения, например, для мостиковой системы (рисунок 3.19), выполняется методами преобразования структурной схемы надежности системы по базовому элементу [49, 53] или эквивалентной заменой треугольника звездой, рассмотренными в литературе [53].

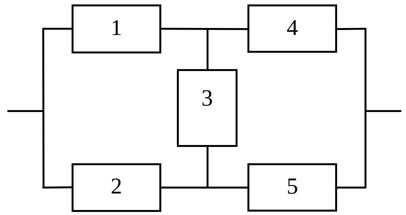


Рисунок 3.19 – Структурная схема надежности мостиковой системы

3.3 Метод анализа дерева отказов

3.3.1 Возможности метода

Метод «дерева отказов» может применяться как для количественного, так и для качественного анализа надежности. В результате качественного анализа определяют виды и причины отказов, степень защищенности системы от конкретных видов отказов, минимальные сечения отказов (минимальные множества элементов, отказы которых влекут отказ системы), проводят ранжирование причин отказов по важности (по влиянию на возникновение отказа изделия).

Количественный анализ надежности методом «дерева отказов» заключается в определении вероятностных характеристик отказов системы (результирующего события) по вероятностным характеристикам базовых событий, связанных с отказами элементов и внешними воздействиями (см. рисунок 3.2).

Обычно [18, 19, 23] количественный анализ ДО ограничивается определением вероятности наступления результирующего события ДО. При этом предполагается, что некоторые события (воздействия, отказы) могут иметь место в течение некоторой наработки, а моменты и последовательность их наступления никак не учитываются. Для описания системы посредством ДО в динамике в качестве исходных данных необходимо задание и учет вероятностных функций распределения времени до наступления каждого из базовых, промежуточных и результирующего событий в системе.

Рассмотрим подход к определению показателей безотказности невосстанавливаемых систем, модели надежности которых представлены ДО с использованием логических символов «И», «ИЛИ», «Приоритетное И», «НЕ» (рисунок 3.20).

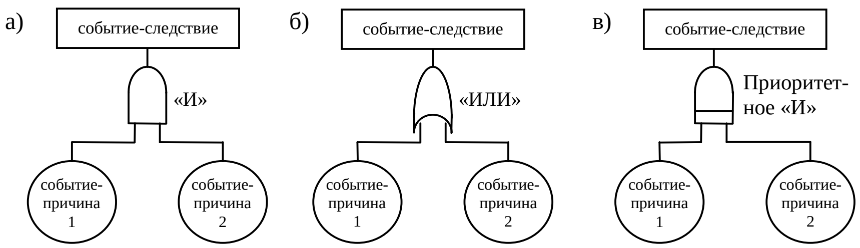


Рисунок 3.20 – Примеры используемых логических операций над событиями ДО

Определим следующие величины и функции:

- ξ_1 – время до наступления первого события-причины, описываемое функцией распределения $F_1(x)$;
- ξ_2 – время до наступления второго события-причины, описываемое функцией $F_2(x)$;
- η – время до наступления события-следствия (определяемого некоторым логическим символом), описываемое функцией распределения $F(x)$.

Укажем способ определения функции распределения $F(x)$ времени до наступления события-следствия для различных вариантов взаимосвязей событий-причин. Часто для простоты будем использовать допущение о независимости событий-причин.

3.3.2 Моделирование причинно-следственной связи «И»

Рассмотрим вариант, когда событие-следствие связано с событиями-причинами логическим символом «И» (см. рисунок 3.20, *а*). В этом случае величина η определяется величинами ξ_1 и ξ_2:

$$\eta = \max\{\xi_1, \xi_2\}, \tag{3.11}$$

а ее функция распределения –

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\{\xi_1 \le x\} \cap \{\xi_2 \le x\}). \tag{3.12}$$

Применяя к (3.12) теорему умножения вероятностей и предполагая, что события-причины независимы, получим

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\{\xi_1 \le x\} \cap \{\xi_2 \le x\}) = P(\xi_1 \le x)P(\xi_2 \le x) = F_1(x)F_2(x). \tag{3.13}$$

3.3.3 Моделирование причинно-следственной связи «ИЛИ»

Рассмотрим вариант, когда событие-следствие связано с событиями-причинами логическим символом «ИЛИ» (см. рисунок 3.20, *б*). В этом случае величина η определяется величинами ξ_1 и ξ_2:

$$\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}, \tag{3.14}$$

а ее функция распределения –

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\{\xi_1 \le x\} \cup \{\xi_2 \le x\}). \tag{3.15}$$

Применяя к (3.15) теорему сложения вероятностей совместных событий и предполагая, что события-причины между собой независимы, получим

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\eta \le x) = P(\{\xi_1 \le x\} \cup \{\xi_2 \le x\}) = \\ &= P(\xi_1 \le x) + P(\xi_2 \le x) - P(\xi_1 \le x) \cdot P(\xi_2 \le x) = \\ &= F_1(x) + F_2(x) - F_1(x) \cdot F_2(x) = 1 - (1 - F_1(x)) \cdot (1 - F_2(x)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3.4 Моделирование причинно-следственной связи «Приоритетное И»

Рассмотрим вариант, когда событие-следствие связано с событиями-причинами символом «Приоритетное И» (см. рисунок 3.20, *в*). В этом случае, как и в случае логического символа «И», величина η определяется величинами ξ_1 и ξ_2:

$$\eta = \max\{\xi_1, \xi_2\}. \tag{3.17}$$

Однако здесь присутствует дополнительная оговорка относительно выполнения события $\{\xi_1 \le \xi_2\}$. Поэтому в итоге

$$\eta = \begin{cases} \max\{\xi_1, \xi_2\} | \xi_1 \le \xi_2; \\ \infty | \xi_1 > \xi_2. \end{cases} \tag{3.18}$$

Учитывая, что $\max\{\xi_1, \xi_2\} | \{\xi_1 \le \xi_2\} = \xi_2$,

$$\eta = \begin{cases} \xi_2 | \xi_1 \le \xi_2; \\ \infty | \xi_1 > \xi_2. \end{cases} \tag{3.19}$$

Функция распределения времени величины η

$$F(x) = P(\eta \le x) = \begin{cases} P(\xi_2 \le x | \xi_1 \le \xi_2); \\ 0 | \xi_1 > \xi_2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Рассматривая события $\{\xi_1 \le \xi_2\}$ и $\{\xi_1 > \xi_2\}$ как гипотезы и применяя к (3.20) формулу полной вероятности [10], получаем

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\xi_1 \le \xi_2)P(\xi_2 \le x | \xi_1 \le \xi_2) + P(\xi_1 \ge \xi_2)\cdot 0 = \\ = P(\xi_1 \le \xi_2)P(\xi_2 \le x | \xi_1 \le \xi_2), \tag{3.21}$$

или, применяя к событиям $\{\xi_1 \le \xi_2\}$ и $\{\xi_2 \le x\}$ теорему умножения вероятностей,

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\xi_2 \le x)P(\xi_1 \le \xi_2 | \xi_2 \le x). \tag{3.22}$$

Рассмотрим вспомогательную случайную величину ξ_2^*, полученную из случайной величины ξ_2 усечением справа в точке x. Ее функция плотности и функция распределения определяется выражениями [38, с. 274]

$$f_2^*(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(\xi_2 \le x)} f_2(y), & y \le x; \\ 0, & y > x, \end{cases} \tag{3.23}$$

а событие $\{\xi_1 \le \xi_2 | \xi_2 \le x\}$ тождественно событию $\{\xi_1 \le \xi_2^*\}$. Тогда выражение (3.22) преобразуется в

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\xi_2 \le x)P(\xi_1 \le \xi_2^*). \tag{3.24}$$

В свою очередь, согласно формуле (2.12), вероятность

$$P(\xi_1 \le \xi_2^*) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(y)F_1(y)dy\,. \tag{3.25}$$

Учитывая связь величин ξ_2^* и ξ_2, выражение (3.25) преобразуется в

$$P(\xi_1 \le \xi_2 | \xi_2 \le x) = P(\xi_1 \le \xi_2^*) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(y)F_1(y)dy = \frac{1}{P(\xi_2 \le x)} \int_{-\infty}^{x} f_2(y)F_1(y)dy. \tag{3.26}$$

Подставляя (3.26) в (3.22) и учитывая, что ξ_1 и ξ_2 – неотрицательные величины, получим

$$F(x) = P(\eta \le x) = P(\xi_2 \le x)P(\xi_1 \le \xi_2 | \xi_2 \le x) = \\ = \frac{P(\xi_2 \le x)}{P(\xi_2 \le x)} \int_0^x f_2(y)F_1(y)dy = \int_0^x f_2(y)F_1(y)dy. \tag{3.27}$$

Таким образом, итоговое выражение для функции распределения времени до появления события-следствия, определяемого двумя событиями-причинами, связанными логическим символом «приоритетное И», выглядит так:

$$F(x) = \int_0^x f_2(y)F_1(y)dy\,. \tag{3.28}$$

Замечание. Важно, что при $x \to \infty$ функция (3.28) асимптотически стремится к $P(\xi_1 \le \xi_2)$, а не к единице. Это объясняется тем, что при выполнении события $\{\xi_1 > \xi_2\}$ величина η – время до наступления события-следствия (3.19) – не принимает действительного значения (т. к. событие-следствие не происходит); величина η является так называемой несобственной случайной величиной [11].

3.3.5 Моделирование причинно-следственной связи «НЕ»

Рассмотрим вариант, когда событие-следствие связано с событием-причиной логическим символом «НЕ». В этом случае величина η времени до появления события-следствия полностью определяется величиной ξ – временем до появления (точнее, сброса) события-причины:

$$\eta = \xi. \tag{3.29}$$

Сам логический символ «НЕ» является лишь повторителем информации о событии-причине и используется только для корректной интерпретации ДО.

3.3.6 Пример определения показателей безотказности системы методом анализа дерева отказов в пакете MathCAD

Рассмотрим пример определения показателей безотказности системы, условия работоспособности которой заданы ДО (рисунок 3.21), аналогичным дереву отказов на рисунке 3.4. Базовые события соответствуют отказам элементов системы и внешним воздействиям, промежуточные события – отказам подсистем; результирующее событие – отказу системы в целом.

Будем предполагать, что базовые события независимы, а время наступления каждого из базовых событий (наработка до i-го отказа или неблагоприятное воздействие) подчиняется экспоненциальному закону распределения с математическими ожиданиями 3, 4, 1, 2 тыс. ч, соответственно. Расчеты выполним в пакете MathCAD, а результаты сведем в таблицу 3.4.

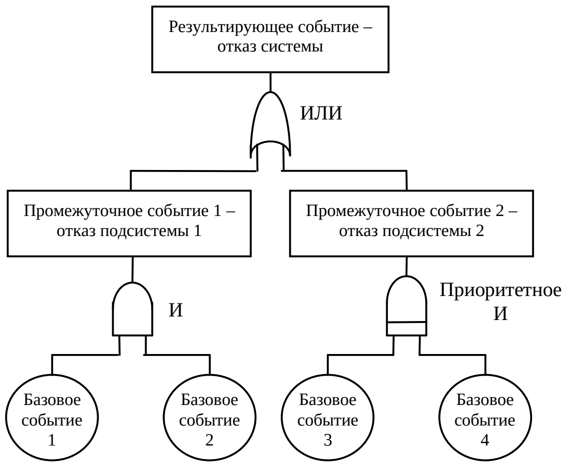


Рисунок 3.21 – Дерево отказов некоторой системы

Задание математических ожиданий времени до наступления базовых событий

$M1 := 3000 \qquad M2 := 4000 \qquad M3 := 1000 \qquad M4 := 2000$

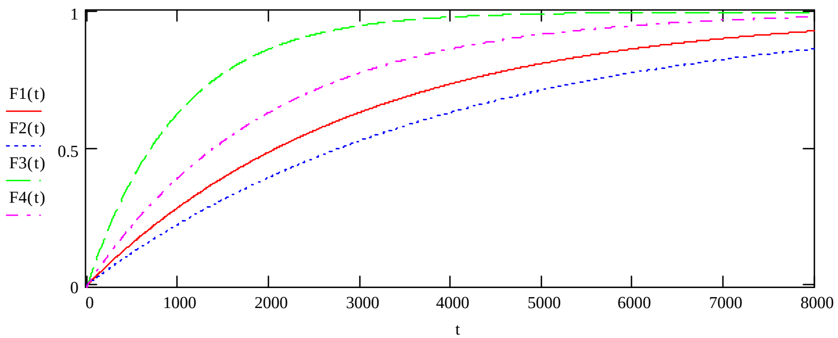
Определение параметров функций распределения времени до наступления базовых событий

$\lambda1 := \frac{1}{M1} \qquad \lambda2 := \frac{1}{M2} \qquad \lambda3 := \frac{1}{M3} \qquad \lambda4 := \frac{1}{M4}$

Задание и иллюстрация функции распределения времени до наступления базовых событий (учитывается, что t > 0)

$F1(t) := 1 - \exp(-\lambda1 \cdot t) \qquad F2(t) := 1 - \exp(-\lambda2 \cdot t)$

$F3(t) := 1 - \exp(-\lambda3 \cdot t) \qquad F4(t) := 1 - \exp(-\lambda4 \cdot t)$



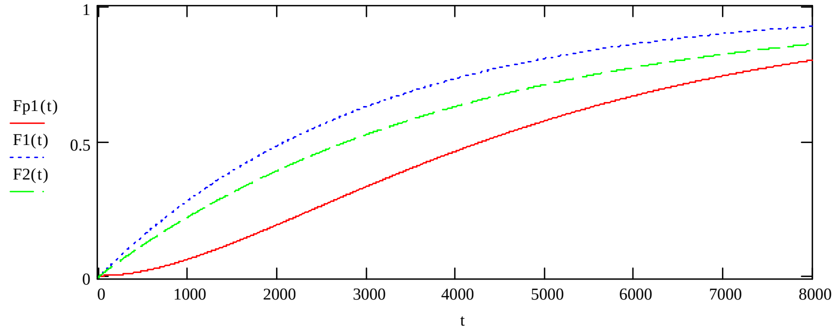
Определение функции распределения времени до наступления промежуточного события 1 по формуле (3.13)

$$Fp1(t) := F1(t) \cdot F2(t) \to \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{3000} \cdot t\right)\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{4000} \cdot t\right)\right)$$

Упрощение и сравнительная иллюстрация полученного символьного результата

$$Fp1(t) \text{ simplify } \to \left(-1 + \exp\left(\frac{-1}{3000} \cdot t\right)\right) \cdot \left(-1 + \exp\left(\frac{-1}{4000} \cdot t\right)\right)$$

$$Fp1(t) := \left(-1 + \exp\left(\frac{-1}{3000} \cdot t\right)\right) \cdot \left(-1 + \exp\left(\frac{-1}{4000} \cdot t\right)\right)$$



Определение математического ожидания времени до наступления промежуточного события 1 по формуле (1.3), ч,

$$Mp1 := \int_0^{\infty} t \cdot \frac{d}{dt} Fp1(t)\, dt \to \frac{37000}{7}$$

$$Mp1 = 5.285714 \times 10^3$$

Определение функции распределения времени до наступления промежуточного события 2 по формуле (3.28)

$$f3(t) := \frac{d}{dt} F3(t) \to \frac{1}{1000} \cdot \exp\left(\frac{-1}{1000} \cdot t\right)$$

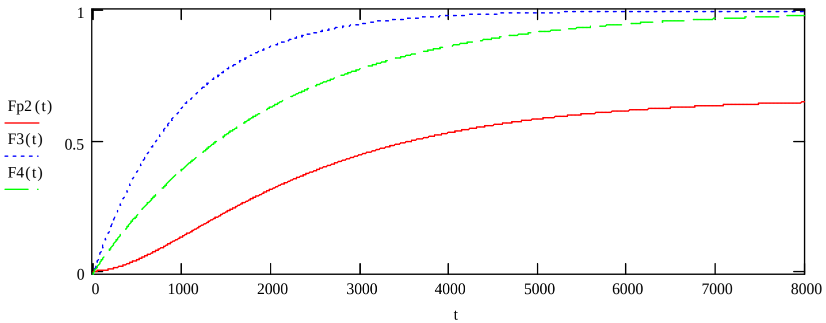
$$f4(t) := \frac{d}{dt} F4(t) \to \frac{1}{2000} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2000} \cdot t\right)$$

$$Fp2(t) := \int_0^{t} f4(y) \cdot F3(y)\, dy \to \frac{1}{3} \cdot \exp\left(\frac{-3}{2000} \cdot t\right) - \exp\left(\frac{-1}{2000} \cdot t\right) + \frac{2}{3}$$

Упрощение и сравнительная иллюстрация полученного символьного результата

$$Fp2(t) \text{ simplify } \to \frac{1}{3} \cdot \exp\left(\frac{-3}{2000} \cdot t\right) - \exp\left(\frac{-1}{2000} \cdot t\right) + \frac{2}{3}$$

$$Fp2(t) := \frac{1}{3} \cdot \exp\left(\frac{-3}{2000} \cdot t\right) - \exp\left(\frac{-1}{2000} \cdot t\right) + \frac{2}{3}$$



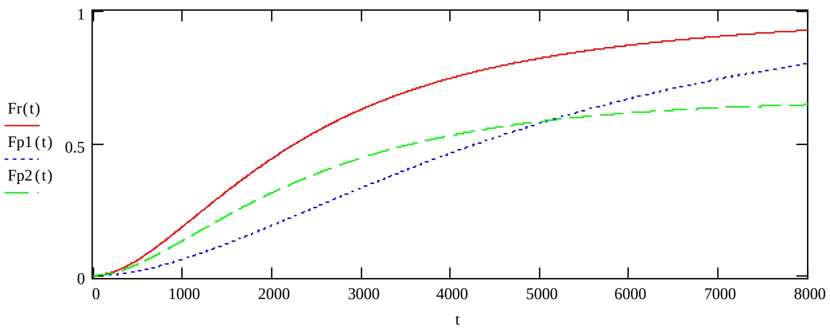
Определение функции распределения времени до наступления результирующего события по формуле (3.16)

$Fr(t) := Fp1(t) + Fp2(t) - Fp1(t) \cdot Fp2(t)$

Упрощение и сравнительная иллюстрация полученного символьного результата

$$Fr(t)\ simplify \rightarrow 1-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{4000}\cdot t\right)-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{3000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-7}{12000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-7}{4000}\cdot t\right) - \exp\left(\frac{-3}{4000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-11}{6000}\cdot t\right)-\exp\left(\frac{-1}{1200}\cdot t\right)-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{480}\cdot t\right)+\exp\left(\frac{-13}{12000}\cdot t\right)$$

$$Fr(t) := 1-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{4000}\cdot t\right)-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{3000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-7}{12000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-7}{4000}\cdot t\right) - \exp\left(\frac{-3}{4000}\cdot t\right)+\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-11}{6000}\cdot t\right)-\exp\left(\frac{-1}{1200}\cdot t\right)-\frac{1}{3}\cdot \exp\left(\frac{-1}{480}\cdot t\right)+\exp\left(\frac{-13}{12000}\cdot t\right)$$



Определение математического ожидания времени до наступления результирующего события (средней наработки до отказа) по формуле (1.3), ч,

$$Mr := \int_0^{\infty} t\cdot \frac{d}{dt}Fr(t)\,dt \rightarrow \frac{9489080}{3003}$$

$$Mr = 3.159867\times 10^{3}$$

Определение вероятности безотказной работы системы в течение 1 тыс. и 5 тыс. ч

$P(t) := 1 - Fr(t)$ $P(1000) = 0.811219$ $P(5000) = 0.174924$

Определение 95-гамма-процентной наработки до отказа, ч,

$t\gamma := 1000$

Given

$Fr(t\gamma) = 1 - 0.95$

$Find(t\gamma) = 439.376421$

Таблица 3.4 – **Результаты определения показателей безотказности системы методом анализа дерева отказов**

Событие	Функция распределения времени до наступления	Среднее время до наступ-ления, ч
Результирующее (отказ системы в целом)	$1-\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-t}{4000}\right)-\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-t}{3000}\right)+\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-7\cdot t}{12000}\right)+\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-7\cdot t}{4000}\right)-\exp\left(\frac{-3\cdot t}{4000}\right)+\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-11\cdot t}{6000}\right)-\exp\left(\frac{-t}{1200}\right)-\frac{1}{3}\exp\left(\frac{-t}{480}\right)+\exp\left(\frac{-13\cdot t}{12000}\right)$	3159,867
Промежуточное 1	$(-1+\exp(-t/3000))\,(-1+\exp(-t/4000))$	5285,714
Базовое 1	$1-\exp(-t/3000)$	3000
Базовое 2	$1-\exp(-t/4000)$	4000
Промежуточное 2	$(1/3)\exp(-3\,t/2000)-\exp(-t/2000)+2/3$	∞
Базовое 3	$1-\exp(-t/1000)$	1000
Базовое 4	$1-\exp(-t/2000)$	2000

Вывод: вероятность безотказной работы системы в течение 1 тыс. ч составляет $P(10^3) = 0{,}811219$; в течение 5 тыс. ч – $P(5\cdot 10^3) = 0{,}174924$; средняя наработка до отказа – 3159,867 ч; 95-гамма-процентная наработка до отказа – 439,376421 ч. Следует отметить, что функция распределения времени до наступления промежуточного события 2 (инициируемого операцией «Приоритетное И») при $t \rightarrow \infty$ асимптотически стремится не к единице, а к вероятности, с которой события-причины произойдут в необходимой последовательности; математическое ожидание времени до наступления промежуточного события 2 бесконечно.

3.3.7 Методика расчета показателей безотказности системы методом анализа дерева отказов в пакете FDiTA

3.3.7.1 Назначение пакета FDiTA. Для автоматизации расчета показателей безотказности систем методом анализа ДО предлагается специализированный программный комплекс FDiTA (Fault Dinamic Tree Analysis)*. Основное окно пакета FDiTA включает в себя главное меню, панель инстру-

* Модель динамического дерева отказов и пакет FDiTA созданы при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, договор № Ф07М-247 от 01.04.07.

ментов, графическую панель отображения ДО и панель сообщений программы (рисунок 3.22).

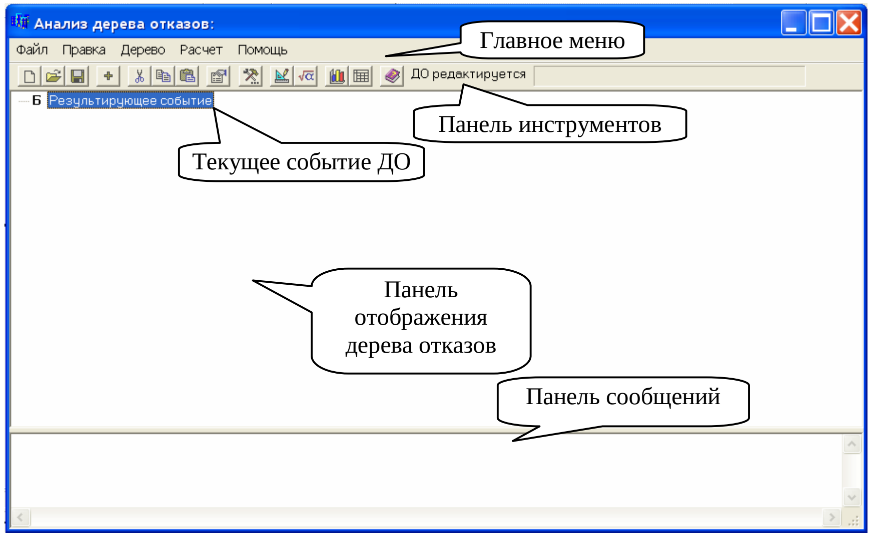


Рисунок 3.22 – Основное окно пакета FDiTA

Главное меню пакета FDiTA включает разделы:

- «Файл» с пунктами, необходимыми для создания нового проекта (ДО системы), открытия существующего и сохранения текущего ДО, выхода из программы;
- «Правка» (рисунок 3.23) с пунктами, необходимыми для добавления, удаления и перемещения событий и поддеревьев (в том числе через буфер обмена), а также для поиска событий и доступа к свойствам событий ДО;
- «Дерево» с пунктами, необходимыми для удобного отображения ДО на панели;
- «Расчет» (рисунок 3.24) с пунктами, необходимыми для настройки процедур анализа, проверки корректности ДО, выполнения анализа ДО, отображения и документирования результатов анализа (в том числе в формате Microsoft Word);
- «Помощь» с пунктами, необходимыми для доступа к справочной системе и информации о программе.

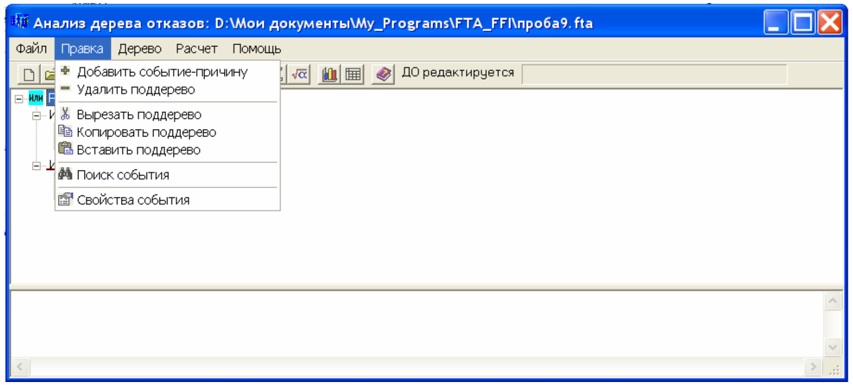


Рисунок 3.23 – Раздел «Правка» главного меню пакета FDiTA

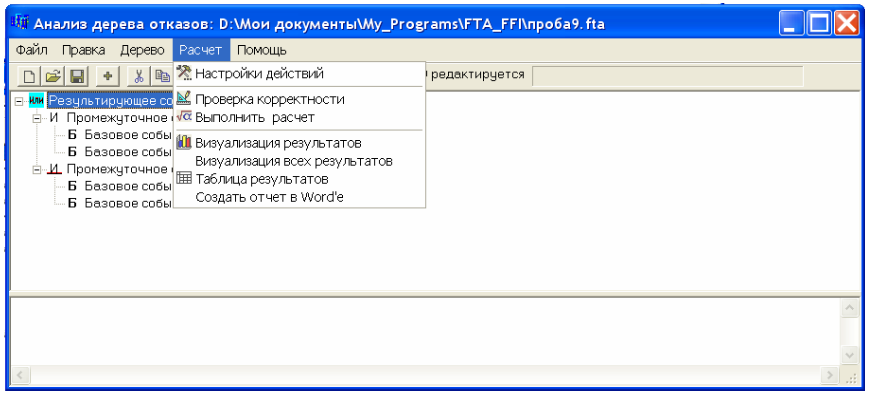


Рисунок 3.24 – Раздел «Расчет» главного меню пакета FDiTA

3.3.7.2 Построение дерева отказов в пакете FDiTA. В пакете FDiTA реализованы следующие возможности построения ДО:

- редактирование заголовка текущего события (доступ осуществляется двойным щелчком мыши на заголовке текущего события);
- добавление событий-причин для текущего события (пункт «Добавить событие-причину» раздела «Правка» главного меню, см. рисунок 3.23);
- удаление текущего события вместе с событиями-причинами (пункт «Удалить поддерево» раздела «Правка», см. рисунок 3.23);
- удаление текущего события вместе с событиями-причинами в буфер обмена для последующей вставки в другую область ДО (пункт «Вырезать поддерево» раздела «Правка», см. рисунок 3.23);

• копирование и вставка из буфера обмена текущего события вместе с событиями-причинами (пункты «Копировать поддерево» и «Вставить поддерево» раздела «Правка», см. рисунок 3.23).

Доступ к основным пунктам главного меню пакета FDiTA возможен также с помощью панели инструментов.

Для каждого события ДО в окне «Свойства событий» (рисунок 3.25) необходимо указать логический символ, устанавливающий связь с событиями-причинами. Если текущее событие не имеет событий-причин, то оно является базовым. Для каждого базового события в окне «Свойства событий» необходимо также указать функцию распределения времени до наступления события. Другие свойства событий (вероятность наступления, математическое ожидание времени до наступления и прочие) автоматически определяются FDiTA в процессе анализа ДО и доступны только для чтения.

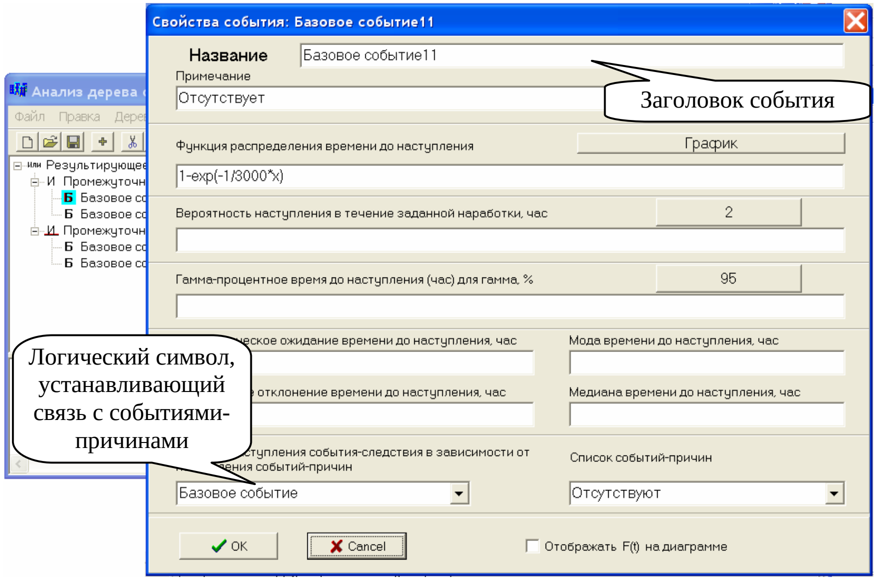


Рисунок 3.25 – Окно свойств событий в пакете FDiTA

После построения ДО в пакете FDiTA предусматривается проверка его корректности. Для этого в панели инструментов следует нажать кнопку «Проверка корректности». В случае успешного завершения проверки в панели сообщений появится строка «Проверка корректности модели завершена успешно», а в панели инструментов появится метка «ДО корректно» (рисунок 3.26). В противном случае в панели сообщений будут указаны замечания к ДО.

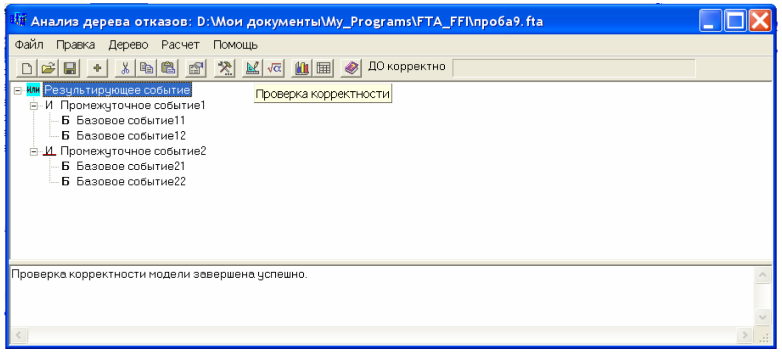


Рисунок 3.26 – Окно пакета FDiTA
после успешной проверки корректности дерева отказов

На рисунке 3.26 представлен пример ДО в пакете FDiTA, соответствующего дереву на рисунке 3.21. На рисунке 3.25 приведена информация о свойствах одного из базовых событий ДО в соответствии с примером из п. 3.3.6.

3.3.7.3 Анализ дерева отказов в пакете FDiTA. Основные установки анализа ДО задаются в окне «Настройка действий» (рисунок 3.27). В соответствующем поле необходимо указать наработку системы, в течение которой определяется вероятность безотказной работы, и значение «гамма» для определения гамма-процентной наработки до отказа.

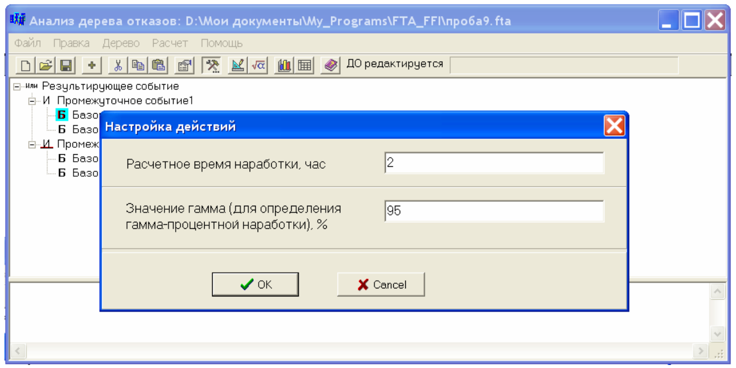


Рисунок 3.27 – Окно настройки параметров анализа в пакете FDiTA

После проверки корректности ДО готово к анализу. Для этого в панели инструментов необходимо нажать кнопку «Выполнить полный расчет». В случае успешного завершения расчета в панели сообщений появится строка «Полный расчет завершен», а в панели инструментов – метка «Анализ ДО завершен» (рисунок 3.28). В противном случае в панели сообщений появятся указания причин невозможности выполнения анализа ДО.

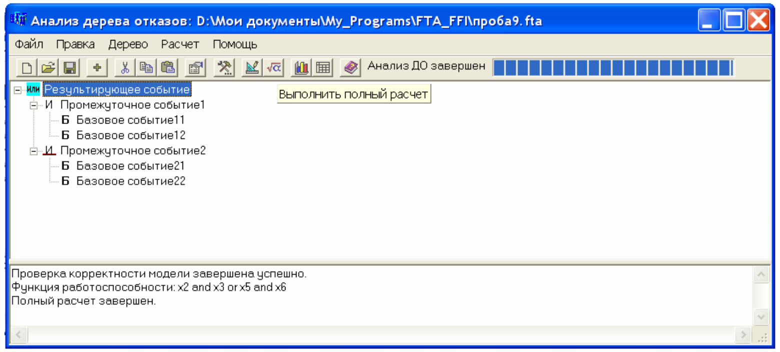


Рисунок 3.28 – Окно пакета FDiTA
после успешного выполнения анализа дерева отказов

После выполнения анализа ДО в пакете FDiTA можно просматривать значения свойств (показателей надежности) результирующего и других событий (рисунок 3.29), а также получать визуальное отображение функции распределения времени до его наступления (рисунок 3.30).

Результаты анализа ДО для каждого события документируются в панели сообщений FDiTA или в файле Microsoft Word. Для этого в панели инструментов пакета FDiTA необходимо нажать кнопку «Таблица результатов» или в разделе «Расчет» главного меню выбрать пункт «Создать отчет в Word».

Отчет о результатах анализа ДО, соответствующего примеру из п. 3.3.6, в формате Microsoft Word представлен в приложении Б.

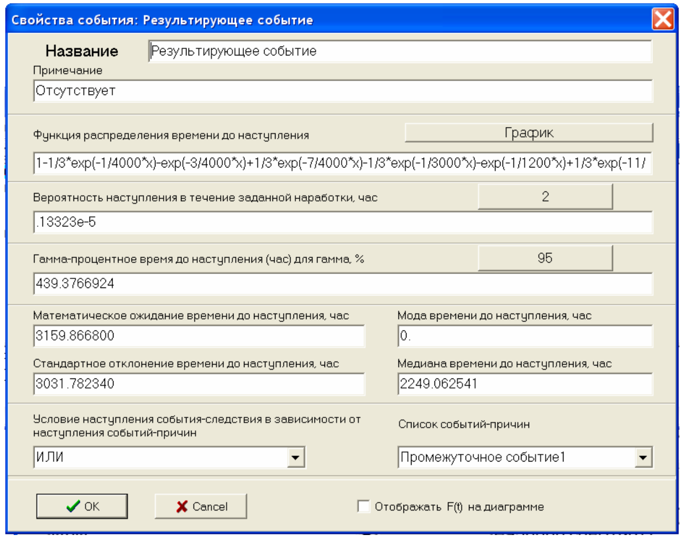


Рисунок 3.29 – Окно свойств результирующего события дерева отказов
после успешного выполнения анализа в программном комплексе «FDiTA»

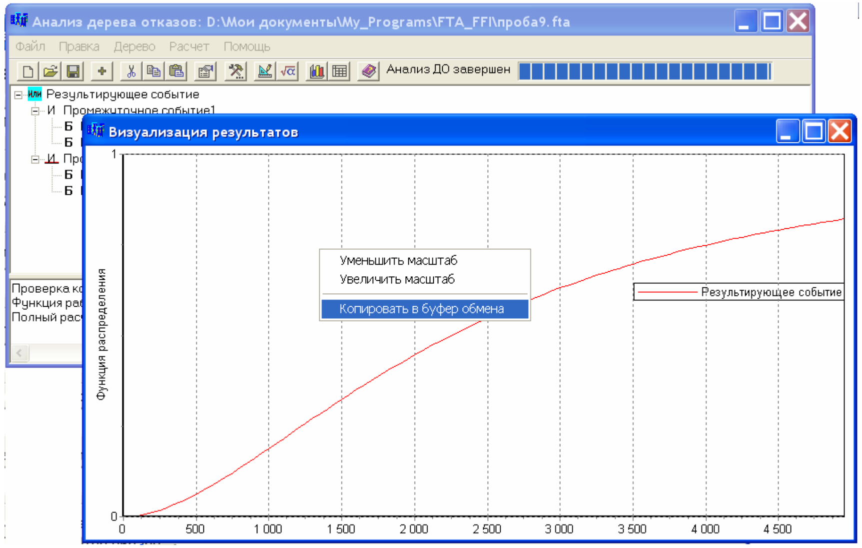


Рисунок 3.30 – Функция распределения времени до наступления
результирующего события ДО в программном комплексе «FDiTA»

3.4 Марковский метод анализа надежности систем

3.4.1 Возможности метода. Определение вероятностей состояний системы

В п. 3.1.4 указывалась целесообразность представления условий работоспособности восстанавливаемых систем с помощью графа состояний. Вершины графа отождествляются с возможными состояниями системы (исправное, полностью или частично работоспособное, неработоспособное, предельное и т. д.), а дуги – с переходами процесса отказов и восстановлений элементов системы из одного состояния в другое.

Если время наработки на отказ и время восстановления элементов системы независимы и подчиняются экспоненциальному закону распределения, то интенсивности перехода системы из одного состояния в другое (в соответствии с графом состояний) не зависят от времени и определяются параметром экспоненциального распределения λ (см. приложение А п. А.3). А сам процесс перехода системы из одного состояния в другое (вследствие отказов и восстановлений элементов) является **марковским случайным процессом** [44]. Эволюция марковского процесса определяется только текущим состоянием и не зависит от поведения данного процесса в прошлом.

В этом случае процесс перехода системы из работоспособных состояний в неработоспособные и обратно (вследствие отказов и восстановлений элементов) может быть описан системой дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -P_1(t)(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots + \lambda_{1n}) + P_2(t)\lambda_{21} + P_3(t)\lambda_{31} + \ldots + P_n(t)\lambda_{n1}\,; \\ \ldots \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = P_1(t)\lambda_{1i} + P_2(t)\lambda_{2i} + \ldots + P_{i-1}(t)\lambda_{(i-1)\,i} - P_i(t)(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{in}) + P_{i+1}(t)\lambda_{(i+1)\,i} + \ldots + P_n(t)\lambda_{ni}\,; \\ \ldots \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = P_1(t)\lambda_{1n} + P_2(t)\lambda_{2n} + P_3(t)\lambda_{3n} + \ldots + P_{n-1}(t)\lambda_{(n-1)\,i} - P_n(t)(\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{n(n-1)}), \end{cases} \qquad (3.30)$$

где $P_i(t)$ – вероятность пребывания исследуемой системы в i-м состоянии, $i = \overline{1, n}$; λ_{ij} – интенсивность перехода исследуемой системы из i-го состояния в j-е состояние ($\lambda_{ij} = 0$, если переход из i-го в j-е состояние по графу состояний невозможен); n – количество состояний исследуемой системы.

Знаки слагаемых в правой части уравнений определяются направлением дуг графа состояний.

Решение полученной системы дифференциальных уравнений с определением вероятностей $P_i(t)$ пребывания процесса отказов и восстановлений элементов системы в каждом из n состояний в момент наработки t и составляет так называемый **марковский метод анализа надежности**, который позволяет вычислять следующие показатели надежности систем [21, 44, 49]:

- коэффициент готовности системы $K_г(t)$ в момент t;
- стационарный коэффициент готовности системы $K_г$ (при $t \to \infty$);
- среднюю наработку (восстанавливаемой) системы на отказ $T(t)$;
- вероятность безотказной работы системы $P(t)$ в течение наработки t [49];
- среднюю наработку (восстанавливаемой) системы до первого отказа.

При решении полученной системы дифференциальных уравнений (3.30) должны использоваться начальные условия, определяющие начальное состояние исследуемой системы (в данном случае – состояние «1»):

$$P_1(0) = 1,\ P_2(0) = 0,\ \ldots,\ P_n(0) = 0\,. \qquad (3.31)$$

Также может использоваться условие нормировки

$$P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_n(t) = 1\,, \qquad (3.32)$$

которое определяет то, что исследуемая система в произвольный момент наработки t обязательно находится в одном из n состояний, причем только в одном из них.

3.4.2 Пример определения вероятностей состояний системы в пакете MathCAD

Определим вероятности состояний дублированной системы с идентичными подсистемами, восстанавливаемыми двумя бригадами (см. рисунки 3.7, *а* и 3.8, *г*) при условии, что время безотказной работы подсистем подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda = 2/3$ (интенсивность отказов каждой подсистемы составляет $\lambda = 2/3$ ч$^{-1}$), а время восстановления каждой подсистемы – экспоненциальному закону с параметром $\mu = 1$ (интенсивность восстановления каждой подсистемы $\mu = 1$ ч$^{-1}$). Восстановление осуществляется двумя бригадами, следовательно, восстановление каждой подсистемы начинается сразу после ее отказа.

Граф состояний рассматриваемой системы представлен на рисунке 3.22. Здесь состояние «1» соответствует работоспособному состоянию обеих подсистем, состояние «2» – работоспособному состоянию одной из двух идентичных подсистем, а состояние «3» – неработоспособному состоянию системы, когда отказали обе подсистемы.

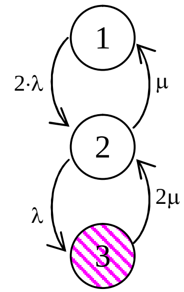


Рисунок 3.22 – Граф состояний дублированной системы с нагруженным резервом с идентичными подсистемами, восстанавливаемыми двумя бригадами

Система дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова (3.30), соответствующих графу состояний (см. рисунок 3.22), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1(t)}{dt} = P_2(t)\mu - P_1(t)\cdot 2\lambda; \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)\cdot 2\lambda + P_3(t)\cdot 2\mu - P_2(t)\lambda - P_2(t)\mu; \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = P_2(t)\lambda - P_3(t)\cdot 2\mu. \end{cases} \tag{3.33}$$

Определим вероятности состояний $P_i(t)$ в момент наработки t ($t = 0{,}5$; 1; 3 ч), решив систему дифференциальных уравнений численно методом Рунге-Кутта в пакете MathCAD [2].

Определение исходных данных λ, μ (1/ч.) и количества узлов аппроксимации n.

$\lambda := 0.6667$ $\mu := 1$ $n := 0..99$

Задание массива дифференциальных уравнений (дифференциального оператора D, нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля)

$$D(t,P) := \begin{bmatrix} P_1\cdot\mu - P_0\cdot 2\cdot\lambda \\ P_0\cdot 2\cdot\lambda + P_2\cdot 2\cdot\mu - P_1\cdot(\lambda + \mu) \\ P_1\cdot\lambda - P_2\cdot 2\cdot\mu \end{bmatrix}$$

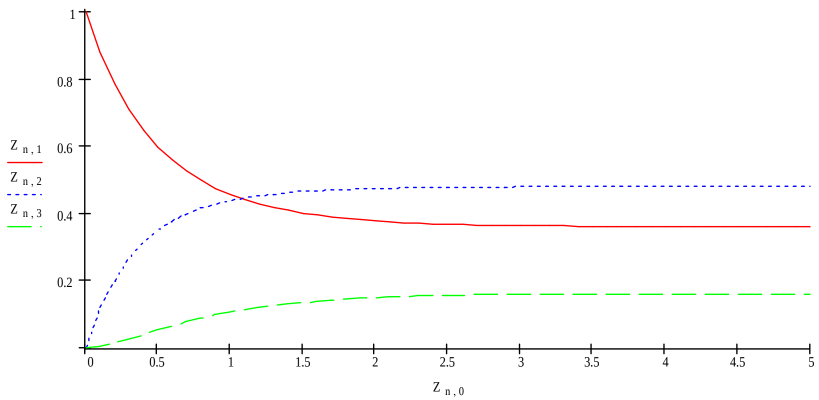
Задание начального значения вектора вероятностей состояний: при t = 0 начальным является состояние "0" (нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля)

$P := (1\ \ 0\ \ 0)^T$

Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта на интервале времени t = 0..10 ч с использованием n = 100 узлов аппроксимации

$Z := \mathrm{rkfixed}(P, 0, 10, 100, D)$

Диаграмма изменения вероятностей состояний



Определение вероятностей состояний системы в момент наработки t = 0,5 ч (n = 5)

$Z_{5,1} = 0.598835$ $Z_{5,2} = 0.35001$ $Z_{5,3} = 0.051155$

Определение вероятностей состояний системы в момент наработки t = 1 ч (n = 10)

$Z_{10,1} = 0.456372$ $Z_{10,2} = 0.438359$ $Z_{10,3} = 0.105269$

Определение вероятностей состояний системы в момент наработки t = 3 ч (n = 30)

$Z_{30,1} = 0.363242$ $Z_{30,2} = 0.478907$ $Z_{30,3} = 0.157851$

Вывод: вероятность исправного состояния (состояние «1») с ростом наработки t монотонно уменьшается с 1 до 0,36; вероятность неработоспособного состояния (состояние «3») с ростом наработки t монотонно увеличивается от 0 и стабилизируется около значения 0,16.

3.4.3 Определение основных стационарных показателей надежности восстанавливаемой системы

3.4.3.1 Стационарное распределение процесса отказов и восстановлений. Распределение вероятностей состояний марковского процесса изменяется во времени. Известно, что марковский процесс с конечным количеством состояний, все из которых являются сообщающимися, имеет единственное стационарное распределение вероятностей состояний, не зависящее от начального состояния системы.

В стационарном режиме вероятности состояний $P_i(t)$ не изменяются во времени, т. е. $P_i(t) = P_i$. Следовательно, производные $\dfrac{dP_i(t)}{dt}$ в левой части уравнений Чепмена-Колмогорова равны нулю, а система дифференциальных уравнений (3.30) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -P_1(\lambda_{12} + \lambda_{13} + ... + \lambda_{1n}) + P_2\,\lambda_{21} + P_3\,\lambda_{31} + ... + P_n\,\lambda_{n1}; \\ \dots \\ 0 = P_1\,\lambda_{1i} + P_2\,\lambda_{2i} + ... + P_{i-1}\,\lambda_{(i-1)i} - P_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + ... + \lambda_{in}) + P_{i+1}\,\lambda_{(i+1)i} + ... + P_n\,\lambda_{ni}; \\ \dots \\ 0 = P_1\,\lambda_{1n} + P_2\,\lambda_{2n} + P_3\,\lambda_{3n} + ... + P_{n-1}\,\lambda_{(n-1)i} - P_n(\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + ... + \lambda_{n(n-1)}). \end{cases} \tag{3.34}$$

Так как уравнения системы (3.34) зависимы (любое уравнение может быть получено из остальных), то в качестве одного из уравнений используют условие нормировки (3.31). Решением получившейся системы линейных алгебраических уравнений являются стационарные значения вероятностей $P_i(t) = P_i$ состояний системы (*финальные* вероятности, $i = \overline{1, n}$).

3.4.3.2 Нестационарный коэффициент готовности. Коэффициент готовности $K_г(t)$ в момент наработки t по определению (см. п. 1.4.9) есть вероятность пребывания системы в одном из работоспособных состояний. Поэтому $K_г(t)$ равен сумме вероятностей $P_i(t)$ пребывания системы в каждом из работоспособных состояний:

$$K_г(t) = \sum_{i \in E_+} P_i(t), \tag{3.35}$$

где $P_i(t)$ – вероятность пребывания системы в i-м состоянии в момент наработки t, $i = \overline{1, n}$; E_+ – множество работоспособных состояний системы.

Например, если работоспособными состояниями системы являются состояния «1», «2», «3» и «5», то $K_г(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_5(t)$.

3.4.3.3 Стационарный коэффициент готовности. Стационарный коэффициент готовности системы $K_г$ определяется аналогичным образом с использованием финальных вероятностей состояний системы:

$$K_г = \lim_{t\to\infty} K_г(t) = \sum_{i \in E_+} \left[\lim_{t\to\infty} P_i(t)\right] = \sum_{i \in E_+} P_i, \tag{3.36}$$

где P_i – финальная вероятность пребывания системы в i-м состоянии (в стационарном режиме, $i = \overline{1, n}$).

3.4.3.4 Средняя наработка на отказ и среднее время восстановления. В стационарном режиме среднюю наработку на отказ T и среднее время восстановления $T_в$ определяют по формулам [44]

$$T = \frac{\sum_{i \in E_+} P_i}{\sum_{j \in E_-} \sum_{i \in E_+} (P_i \lambda_{ij})}; \tag{3.37}$$

$$T_в = \frac{\sum_{i \in E_-} P_i}{\sum_{j \in E_-} \sum_{i \in E_+} (P_i \lambda_{ij})} = \frac{1 - \sum_{i \in E_+} P_i}{\sum_{j \in E_-} \sum_{i \in E_+} (P_i \lambda_{ij})} = \frac{1}{\sum_{j \in E_-} \sum_{i \in E_+} (P_i \lambda_{ij})} - T, \tag{3.38}$$

где E_+ – множество работоспособных состояний системы; E_- – множество неработоспособных состояний; λ_{ij} – интенсивность перехода системы из i-го (работоспособного) в j-е (неработоспособное) состояние.

Следовательно, стационарный коэффициент готовности системы, описываемой марковским процессом, может быть определен через среднюю наработку на отказ (3.37) и среднее время восстановления (3.38):

$$K_г = \sum_{i \in E_+} P_i = T \sum_{j \in E_-} \sum_{i \in E_+} (P_i \lambda_{ij}) = T\left(\frac{1}{T + T_г}\right) = \frac{T}{T + T_г}. \tag{3.39}$$

3.4.4 Пример определения основных стационарных показателей надежности восстанавливаемой системы в пакете MathCAD

Продолжим рассмотрение примера из п. 3.4.2. Для дублированной системы, граф состояний которой представлен на рисунке 3.22, система дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова (3.33) в стационарном режиме преобразуется к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = P_2 \mu - P_1 2\lambda; \\ 0 = P_1 2\lambda + P_3 2\mu - P_2(\lambda + \mu); \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3. \end{cases} \tag{3.40}$$

Решим данную систему уравнений и определим значения показателей безотказности в стационарном режиме работы дублированной системы с идентичными подсистемами, восстанавливаемыми двумя бригадами, в пакете MathCAD.

Приближенное определение финальных вероятностей подстановкой наибольшего номера узла аппроксимации (n = 100)

$Z_{100,1} = 0.36$ $\quad Z_{100,2} = 0.48$ $\quad Z_{100,3} = 0.16$

Определение точных значений финальных вероятностей решением системы линейных арифметических уравнений методом Гаусса (третье уравнение системы – условие нормировки вероятностей)

$$A := \begin{bmatrix} -2\cdot\lambda & \mu & 0 \\ 2\cdot\lambda & -(\lambda + \mu) & 2\cdot\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P := A^{-1}\cdot B \quad P = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.48 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

Определим коэффициент готовности системы в момент наработки t = 0,5 ч (n = 5), t = 1 ч (n = 10) и t = 3 ч (n = 30)

$Kr\_5 := Z_{5,1} + Z_{5,2}$ $\quad Kr\_10 := Z_{10,1} + Z_{10,2}$ $\quad Kr\_30 := Z_{30,1} + Z_{30,2}$

$Kr\_5 = 0.948845$ $\quad Kr\_10 = 0.894731$ $\quad Kr\_30 = 0.842149$

Определим значение стационарного коэффициента готовности системы

$Kr1 := P_0 + P_1$ $\quad Kr1 = 0.84$

Определим значение средней наработки на отказ в стационарном режиме работы системы

$$T := \frac{(P_0 + P_1)}{P_1\cdot\lambda} \quad T = 2.625$$

Определим значение среднего времени восстановления в стационарном режиме работы системы

$$Tv := \frac{P_2}{P_1 \cdot \lambda} \qquad Tv = 0.5$$

Определим значение коэффициента готовности в стационарном режиме работы системы

$$Kr2 := \frac{T}{T + Tv} \qquad Kr2 = 0.84$$

Вывод: вероятность исправного состояния дублированной системы (состояние «1» на рисунке 3.22) в стационарном режиме составляет 0,36; вероятность работоспособного состояния (при одной исправной подсистеме, состояние «1» на рисунке 3.22) равна 0,48; а вероятность пребывания дублированной системы в неисправном состоянии в стационарном режиме составляет 0,16.

Коэффициент готовности дублированной системы изменяется от единицы (при $t = 0$) до стационарного значения, равного 0,84 (данное значение было определено двумя различными способами); средняя наработка системы на отказ составляет 2,625 ч, а среднее время восстановления – 0,5 ч.

3.4.5 Определение показателей надежности восстанавливаемой системы, функционирующей до первого отказа

3.4.5.1 Вероятность безотказной работы системы. Для определения вероятности безотказной работы системы $P(t)$ в течение наработки t исходный граф состояний системы преобразуется: исключаются переходы из всех неработоспособных состояний, что делает их п о г л о щ а ю щ и м и. Расчет ведут рассмотренным ранее способом для преобразованного графа как вероятность пребывания системы в работоспособных состояниях в момент наработки t.

3.4.5.2 Средняя наработка до отказа. Среднюю наработку системы до (первого) отказа $\bar{t}$ определяют через вероятность безотказной работы $P(t)$ по выражению (1.3):

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} P(t)dt$$

или с использованием преобразования Лапласа $\dot{P}(s)$ функции $P(t)$ [44, 49]:

$$\bar{t} = \dot{P}(0). \qquad (3.41)$$

3.4.6 Пример определения показателей надежности восстанавливаемой системы, функционирующей до первого отказа, в пакете MathCAD

Продолжим рассмотрение примера из пп. 3.4.2 и 3.4.4. Для определения вероятности безотказной работы системы $P(t)$ в течение наработки t исходный граф состояний системы (см. рисунок 3.22) преобразуем, исключив переходы из неработоспособного состояния «3» (рисунок 3.23).

Соответственно преобразованному графу состояний изменится система дифференциальных уравнений Чепмена-Колмогорова:

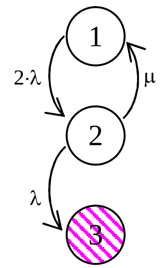


Рисунок 3.23 – Граф состояний дублированной системы с идентичными подсистемами, функционирующей до первого отказа

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = P_2(t)\mu - P_1(t)2\lambda; \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = P_1(t)2\lambda - P_2(t)\lambda - P_2(t)\mu; \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = P_2(t)\lambda. \end{cases} \qquad (3.42)$$

Решим данную систему уравнений в пакете MathCAD.

Задание массива дифференциальных уравнений (дифференциального оператора D, нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля), соответствующих преобразованному графу состояний

$$D(t,P) := \begin{bmatrix} P_1 \cdot \mu - P_0 \cdot 2 \cdot \lambda \\ P_0 \cdot 2 \cdot \lambda - P_1 \cdot (\lambda + \mu) \\ P_1 \cdot \lambda \end{bmatrix}$$

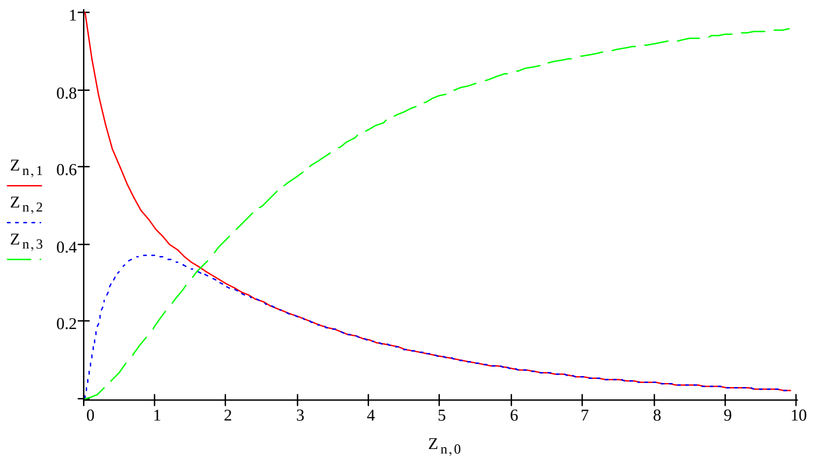
Задание начального значения вектора вероятностей состояний: при $t = 0$ начальным является состояние "0" (нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля)

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта на интервале времени $t = 0..10$ ч с использованием $n = 100$ узлов аппроксимации

$$Z := rkfixed(P, 0, 10, 100, D)$$

Диаграмма изменения вероятностей состояний



Определение вероятностей состояний системы в момент наработки t = 0,1 ч (n = 1), t = 0,5 ч (n = 5), t = 1 ч (n = 10), t = 3 ч (n = 30), t = 5 ч (n = 50) и t = 10 ч (n = 100)

$Z_{1,1} = 0.880955$ $\quad Z_{1,2} = 0.115015$ $\quad Z_{1,3} = 4.030041\times 10^{-3}$

$P\_1 := Z_{1,1} + Z_{1,2}$ $\quad P\_1 = 0.99597$

$Z_{5,1} = 0.596682$ $\quad Z_{5,2} = 0.333066$ $\quad Z_{5,3} = 0.070252$

$P\_5 := Z_{5,1} + Z_{5,2}$ $\quad P\_5 = 0.929748$

$Z_{10,1} = 0.439229$ $\quad Z_{10,2} = 0.369736$ $\quad Z_{10,3} = 0.191035$

$P\_10 := Z_{10,1} + Z_{10,2}$ $\quad P\_10 = 0.808965$

$Z_{30,1} = 0.210361$ $\quad Z_{30,2} = 0.210025$ $\quad Z_{30,3} = 0.579614$

$P\_30 := Z_{30,1} + Z_{30,2}$ $\quad P\_30 = 0.420386$

$Z_{50,1} = 0.10793$ $\quad Z_{50,2} = 0.107928$ $\quad Z_{50,3} = 0.784142$

$P\_50 := Z_{50,1} + Z_{50,2}$ $\quad P\_50 = 0.215858$

$Z_{100,1} = 0.020385$ $\quad Z_{100,2} = 0.020385$ $\quad Z_{100,3} = 0.95923$

$P\_100 := Z_{100,1} + Z_{100,2}$ $\quad P\_100 = 0.04077$

Наряду с представленным выше численным решением (методом Рунге-Кутта), рассмотрим операторный метод решения системы дифференциальных уравнений. В преобразовании Лапласа (приложение В) система дифференциальных уравнений (3.42) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} s\cdot \dot{P}_1(s) - P_1(t=0) = \dot{P}_2(s)\mu - \dot{P}_1(s)2\lambda; \\ s\cdot \dot{P}_2(s) - P_2(t=0) = \dot{P}_1(s)2\lambda - \dot{P}_2(s)\lambda - \dot{P}_2(s)\mu; \\ s\cdot \dot{P}_3(s) - P_3(t=0) = \dot{P}_2(s)\lambda, \end{cases} \qquad (3.43)$$

где $\dot{P}_i(s)$ – изображение функции $P_i(t)$ – вероятности пребывания системы в i-м состоянии, $i = \overline{1, n}$.

Третье уравнение системы полностью определяется вторым уравнением, поэтому исключим его из системы. Учитывая при этом начальные условия ($P_1(0) = 1$; $P_2(0) = 0$; $P_3(0) = 0$), получим

$$\begin{cases} \dot{P}_1(s)(s + 2\lambda) = \dot{P}_2(s)\mu + 1; \\ \dot{P}_1(s)\,2\lambda = \dot{P}_2(s)(s + \lambda + \mu). \end{cases} \qquad (3.44)$$

Разделим первое уравнение системы (3.44) на второе:

$$\frac{(s+2\lambda)}{2\lambda} = \frac{\mu}{s+\lambda+\mu} + \frac{1}{(s+\lambda+\mu)\cdot \dot{P}_2(s)};$$

$$\dot{P}_2(s) = \frac{2\lambda}{(s+2\lambda)(s+\lambda+\mu) - 2\lambda\mu} = \frac{2\lambda}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2}. \qquad (3.45)$$

Подставим (3.45) во второе уравнение системы (3.44):

$$\dot{P}_1(s) = \frac{\dot{P}_2(s)(s+\lambda+\mu)}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2}\,\frac{(s+\lambda+\mu)}{2\lambda} = \frac{s+\lambda+\mu}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2}.$$

Вероятность безотказной работы исследуемой системы $P(t)$ в преобразовании Лапласа

$$\dot{P}(s) = \dot{P}_1(s) + \dot{P}_2(s) = \frac{s+\lambda+\mu}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2} + \frac{2\lambda}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2} =$$
$$= \frac{s+3\lambda+\mu}{s^2 + s(3\lambda+\mu) + 2\lambda^2} = \frac{s + 3\cdot(2/3) + 1}{s^2 + s(3\cdot(2/3)+1) + 2(2/3)^2} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 8/9}. \qquad (3.46)$$

Оригинал функции $P(t)$ определим с помощью обратного преобразования Лапласа в пакете MathCAD (см. приложение В):

$$\text{invlaplace}\left(\frac{s+3}{s^2 + 3\cdot s + \frac{8}{9}}, s, t\right) \rightarrow \frac{-1}{7}\cdot \exp\left(\frac{-8}{3}\cdot t\right) + \frac{8}{7}\cdot \exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right)$$

$$P(t) := \frac{-1}{7}\cdot\exp\left(\frac{-8}{3}\cdot t\right) + \frac{8}{7}\cdot\exp\left(\frac{-1}{3}\cdot t\right)$$

P(0.1) = 0.995971	P(0.5) = 0.929751	P(1) = 0.808967
P(5) = 0.215858	P(3) = 0.420386	P(10) = 0.04077

Следовательно, вероятность безотказной работы дублированной системы

$$P(t) = \frac{8}{7}\cdot\exp\left(\frac{-t}{3}\right) - \frac{1}{7}\cdot\exp\left(\frac{-8t}{3}\right).$$

Пользоваться данным аналитическим выражением намного удобнее, нежели вышеприведенным численным решением.

Определим среднюю наработку до (первого) отказа дублированной системы по формуле (3.41) с использованием изображения (3.46) функции $P(t)$:

$$\bar{t} = \dot{P}(0) = \frac{s+3}{s^2+3s+8/9} = \frac{0+3}{0^2+0+8/9} = 3{,}375.$$

Вывод: средняя наработка дублированной системы до первого отказа составляет 3,375 ч. Она существенно больше средней наработки системы на отказ (2,625 ч), что объясняется начальным состоянием системы (при $t = 0$ обе подсистемы работоспособны).

3.4.7 Примеры определения показателей надежности участка нефтепровода

3.4.7.1 Вариант восстановления подсистем без приоритетов. Продолжим исследование основных показателей надежности участка нефтепровода, проходящего через водные преграды (см. п. 3.2.5), с учетом процесса восстановления.

Будем предполагать, что время восстановления основной и резервной ниток трубопровода (см. рисунок 3.16) подчиняется экспоненциальному закону распределения с математическим ожиданием 336 ч (2 недели). Восстановление осуществляется одной ремонтной бригадой. Другие значения, обозначения и критерии отказов заимствованы из п. 3.2.5.

При заданных условиях процесс перехода резервированной системы «участок нефтепровода» из работоспособных в неработоспособные состояния и обратно (вследствие отказов и восстановлений подсистем) является марковским случайным процессом. Его граф состояний представлен на рисунке 3.24. Здесь состояние «1» соответствует работоспособному состоянию обеих ниток нефтепровода; состояние «2» – неработоспособному состоянию основной нитки и работоспособному состоянию резервной нитки; состояние «3» – работоспособному состоянию основной нитки и неработоспособному

состоянию резервной нитки; состояние «4» соответствует неработоспособному состоянию обеих ниток, т. е. неработоспособному состоянию участка нефтепровода, когда уже начато восстановление основной нитки (она отказала первой); состояние «5» – неработоспособному состоянию обеих ниток, т. е. неработоспособному состоянию участка нефтепровода, когда уже начато восстановление резервной нитки (она отказала первой).

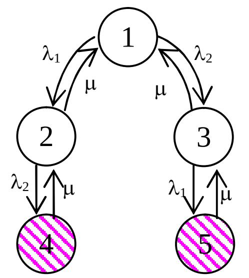


Рисунок 3.24 – Граф состояний резервированного участка нефтепровода

Интенсивность отказов основной нитки (см. п. 3.2.5) $\lambda_1 = 5\cdot10^{-7}$ ч$^{-1}$; резервной – $\lambda_2 = 4\cdot10^{-7}$ ч$^{-1}$; интенсивность восстановления ниток обратно пропорциональна среднему времени восстановления, следовательно, $\mu = 336^{-1}$ ч$^{-1}$.

Процесс перехода участка нефтепропровода из работоспособных состояний в неработоспособные и обратно (вследствие отказов и восстановлений) в стационарном режиме описывается (в соответствии с графом состояний на рисунке 3.24) следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -P_1(\lambda_1+\lambda_2) + P_2\,\mu + P_3\,\mu; \\ 0 = P_1\,\lambda_1 - P_2(\lambda_2+\mu) + P_4\,\mu; \\ 0 = P_1\,\lambda_2 - P_3(\lambda_1+\mu) + P_5\,\mu; \\ 0 = P_2\,\lambda_2 - P_4\,\mu; \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5. \end{cases} \qquad (3.47)$$

Решим данную систему в пакете MathCAD.

Определение исходных переменных λ1, λ2, μ (1/ч.)

$\lambda 1 := 5\cdot10^{-7}$ $\quad\lambda 2 := 4\cdot10^{-7}$ $\quad\mu := 336^{-1}$

Определение финальных вероятностей решением системы линейных арифметических уравнений методом Гаусса (пятое уравнение системы – условие нормировки)

$$A1 := \begin{bmatrix} -(\lambda1+\lambda2) & \mu & \mu & 0 & 0 \\ \lambda1 & -(\lambda2+\mu) & 0 & \mu & 0 \\ \lambda2 & 0 & -(\lambda1+\mu) & 0 & \mu \\ 0 & \lambda2 & 0 & -\mu & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P1 := A1^{-1}\cdot B1$

$$P1 = \begin{pmatrix} 0.99969764628702 \\ 0.00016794920458 \\ 0.00013435936366 \\ 0.00000002257237 \\ 0.00000002257237 \end{pmatrix}$$

Определим значение стационарного коэффициента готовности системы как сумму стационарных вероятностей работоспособных состояний (нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля)

$Kr1 := P1_0 + P1_1 + P1_2$ $\qquad Kr1 = 0.99999995485525$

Определим значение средней наработки на отказ и среднее время восстановления в стационарном режиме работы системы

$$T1 := \frac{P1_0 + P1_1 + P1_2}{P1_1 \cdot \lambda 2 + P1_2 \cdot \lambda 1} \qquad T1 = 7442726190.47619$$

$$Tv1 := \frac{P1_3 + P1_4}{P1_1 \cdot \lambda 2 + P1_2 \cdot \lambda 1} \qquad Tv1 = 336.000000000154$$

3.4.7.2 Вариант приоритетного восстановления подсистем. Решим ту же задачу для следующей технологии восстановления ниток нефтепровода.

Пусть при отказе обеих ниток трубопровода первой будет восстанавливаться та подсистема, чья интенсивность отказов меньше (в данном случае – резервная нитка), даже если первой отказала основная нитка, и уже началось (но еще не закончилось) ее восстановление. В этом случае граф состояний участка нефтепровода представлен на рисунке 3.25.

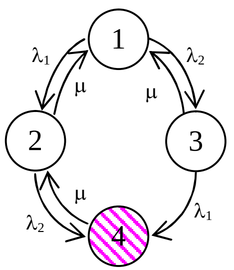


Рисунок 3.25 – Граф состояний резервированного участка нефтепровода

Здесь состояние «1» соответствует работоспособному состоянию обеих ниток нефтепровода; состояние «2» – неработоспособному состоянию основной нитки и работоспособному состоянию резервной нитки; состояние «3» – работоспособному состоянию основной нитки и неработоспособному состоянию резервной нитки; состояние «4» соответствует неработоспособному состоянию обеих ниток, т. е. неработоспособному состоянию участка трубопровода. Переход из состояния «4» возможен только в состояние «2», т. е. первой всегда восстанавливается резервная нитка нефтепровода.

Система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим процесса отказов и восстановлений участка нефтепровода, имеет вид

$$\begin{cases} 0 = -P_1(\lambda_1 + \lambda_2) + P_2\,\mu + P_3\,\mu; \\ 0 = P_1\,\lambda_1 - P_2(\lambda_2 + \mu) + P_4\,\mu; \\ 0 = P_1\,\lambda_2 - P_3(\lambda_1 + \mu); \\ 1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4. \end{cases} \qquad (3.48)$$

Решим данную систему уравнений в пакете MathCAD.

Определение финальных вероятностей решением системы линейных арифметических уравнений методом Гаусса (четвертое уравнение системы – условие нормировки вероятностей)

$$A2 := \begin{bmatrix} -(\lambda 1 + \lambda 2) & \mu & \mu & 0 \\ \lambda 1 & -(\lambda 2 + \mu) & 0 & \mu \\ \lambda 2 & 0 & -(\lambda 1 + \mu) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P2 := A2^{-1} \cdot B2$$

$$P2 = \begin{pmatrix} 0.99969764628777 \\ 0.00016797177316 \\ 0.00013433679508 \\ 0.00000004514399 \end{pmatrix}$$

Определим стационарный коэффициент готовности системы как сумму стационарных вероятностей работоспособных состояний (нумерация индексов в MathCAD начинается с нуля)

$Kr2 := P2_0 + P2_1 + P2_2$ $\qquad Kr2 = 0.99999995485601$

Определим значение средней наработки на отказ и среднее время восстановления в стационарном режиме работы системы

$$T2 := \frac{P2_0 + P2_1 + P2_2}{P2_1 \cdot \lambda 2 + P2_2 \cdot \lambda 1} \qquad T2 = 7442851209.3733$$

$$Tv2 := \frac{P2_3}{P2_1 \cdot \lambda 2 + P2_2 \cdot \lambda 1} \qquad Tv2 = 336.000000000154$$

Вывод: возможность восстановления резервированных подсистем существенно увеличивает значения показателей безотказности системы. Так, значение средней наработки на отказ восстанавливаемой системы (7,443 млрд ч) существенно превышает значение средней наработки до отказа системы без восстановления (3,389 млн ч, см. п. 3.2.5).

Следует отметить, что столь большое значение средней наработки участка нефтепровода на отказ не является буквальным, т. к. через несколько лет реальной эксплуатации системы адекватность используемой марковской математической модели станет неудовлетворительной. Поэтому полученное значение средней наработки участка нефтепровода на отказ может рассматриваться только как величина, обратно пропорциональная интенсивности отказов системы, или использоваться при сравнении нескольких вариантов организации системы и технологии ее обслуживания и ремонта.

Сравнение двух вариантов восстановления ниток нефтепровода показывает целесообразность восстановления в первую очередь более надежной подсистемы (при ограничении на количество ремонтных бригад). При этом стационарный коэффициент готовности системы увеличивается (хотя и незначительно, в данном примере) со значения $K_г 1 = 0{,}99999995485525$ до значения $K_г 2 = 0{,}99999995485601$. ♦

4 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

4.1 Постановка задачи

В подразделах 1.4, 2.3, 3.2–3.4 при определении показателей надежности систем некоторая информация предполагалась заранее известной. Так, например, зная функцию распределения объекта до отказа, можно определить его среднюю и гамма-процентную наработку до отказа, вероятность безотказной работы в течение заданной наработки; зная показатели надежности элементов, можно определить показатели надежности системы в целом.

На практике, в частности, при разработке и эксплуатации новых материалов и систем, какая бы то ни было информация о показателях надежности элементов и системы в целом зачастую отсутствует. В распоряжении исследователя может оказаться только информация о функционировании объекта (в том числе об отказах). В этом случае актуально рассмотрение методик, которые позволяют определять (в данном случае – оценить) показатели надежности объектов (систем и их элементов) в ходе наблюдения за одним или несколькими однотипными объектами, в частности, по результатам анализа статистики об отказах.

В данном разделе предлагаются три методики статистического анализа показателей надежности объектов по опытным данным об отказах объектов в процессе испытаний или эксплуатации.

Первая методика позволяет оценить вероятность безотказной работы $P(t)$ в течение наработки t, интенсивность отказов $\lambda(t)$ и некоторые другие показатели надежности невосстанавливаемых объектов по статистике о количестве объектов, отказавших в том или ином интервале наработки.

Вторая методика связана со статистическим анализом выборки реализаций случайных величин, связанных с надежностью объекта (например, наработки объекта до отказа, предела текучести стали, значений действующих нагрузок и др.), оценкой числовых характеристик и подбором закона распределения. Основным ограничением данной методики является необходимость получения реализаций наработки до отказа (значений предела прочности и т. п.) для всех объектов изучаемой совокупности, что требует значительных временнх и материальных затрат, зачастую ведет к разрушению исследуемых объектов.

Третья методика преодолевает вышеуказанное ограничение. Она позволяет оценивать функцию плотности распределения $f(t)$ наработки на отказ и другие показатели надежности восстанавливаемых объектов по выборочной функции параметра потока отказов $\omega(t)$.

4.2 Методика статистической оценки показателей безотказности невосстанавливаемого объекта по наработке до отказа

Одними из важнейших показателей безотказности невосстанавливаемых объектов являются вероятность безотказной работы и интенсивность отказов (см. п. 1.4.1). Данные показатели могут быть оценены по результатам анализа статистической информации об отказах нескольких однотипных объектов в процессе эксплуатации.

Пусть на испытания поставлено N однотипных невосстанавливаемых объектов (систем, образцов, изделий, деталей, узлов и т. п.); $n(i)$ – число образцов, отказавших в интервале наработки $(t_{i-1};\ t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ t_0 = 0)$, которое регистрировалось для большого количества интервалов k. Тогда вероятность безотказной работы объекта в течение наработки t_i приближенно может быть оценена по формуле

$$P(t_i) \approx 1 - \frac{\sum\limits_{j \le i} n(j)}{N}, \tag{4.1}$$

где $\sum\limits_{j \le i} n(j)$ – количество объектов, отказавших в интервалах наработки, предшествующих рассматриваемой наработке t_i.

Интенсивность отказов объекта в момент t_i может быть приближенно оценена выражением

$$\lambda(t_i) \approx \frac{n(i)}{N_{\text{ср}}(i)\cdot(t_i - t_{i-1})}, \tag{4.2}$$

где $(t_i - t_{i-1})$ – длительность интервала, предшествующего наработке t_i; $N_{\text{ср}}(i)$ – среднее число объектов, исправно работающих в интервале наработки $(t_{i-1};\ t_i)$, определяемое формулой

$$N_{\text{ср}}(i) = \frac{\left(N - \sum\limits_{j<i} n(j)\right) + \left(N - \sum\limits_{j\le i} n(j)\right)}{2}, \tag{4.3}$$

где $\sum\limits_{j<i} n(j)$ – количество объектов, отказавших в интервалах наработки, предшествующих наработке t_{i-1}.

Формулы (4.1)–(4.2) являются приближенными, однако их точность возрастает с увеличением:

- количества исследуемых объектов N;
- количества рассматриваемых интервалов k и одновременным уменьшением длительности интервалов $t_i - t_{i-1}$.

4.3 Пример статистической оценки показателей безотказности невосстанавливаемого объекта по наработке объектов до отказа в пакете MathCAD

Рассмотрим пример статистической оценки показателей надежности невосстанавливаемых объектов в пакете MathCAD.

Пусть на ускоренные вибрационные испытания поставлено $N = 190$ однотипных консольных образцов; $n(i)$ – число образцов, отказавших за i-е сутки, т. е. в интервале наработки $(t_{i-1};\ t_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, 20$; $t_0 = 0$, $t_1 = 24, \ldots, t_{20} = 480$ ч (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – **Статистика об отказах консольных образцов в процессе испытаний**

Сутки i	Число отказов $n(i)$	Сутки i	Число отказов $n(i)$	Сутки i	Число отказов $n(i)$	Сутки i	Число отказов $n(i)$
1	16	6	5	11	5	16	6
2	10	7	3	12	4	17	7
3	7	8	5	13	6	18	8
4	6	9	4	14	6	19	10
5	4	10	5	15	5	20	10

Требуется оценить и построить график вероятности безотказной работы и интенсивности отказов объекта в зависимости от наработки.

Начальное количество образцов

N := 190

Количество рассматриваемых интервалов наработки k := 20

Нумерация рассматриваемых интервалов наработки (в MathCAD принята нумерация с нуля)

i := 0, 1 .. 19

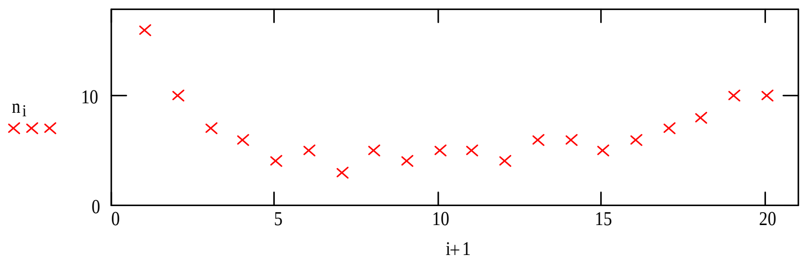
Длительность рассматриваемых интервалов наработки, ч,

$\Delta t := 24$

Количество образцов, отказавших в интервалах наработки (за сутки),

$n := (16\ 10\ 7\ 6\ 4\ 5\ 3\ 5\ 4\ 5\ 5\ 4\ 6\ 6\ 5\ 6\ 7\ 8\ 10\ 10)^T$

Иллюстрация количества объектов, отказавших в различных интервалах наработки,



Количество образцов, отказавших в интервалах наработки, предшествующих рассматриваемой наработке ti (нумерация начинается с 0),

$$nn_i := \sum_{j=0}^{i} n_j$$

$nn^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	16	26	33	39	43	48	51	56	60	65	70	74	80	86	91	97	104	112	122

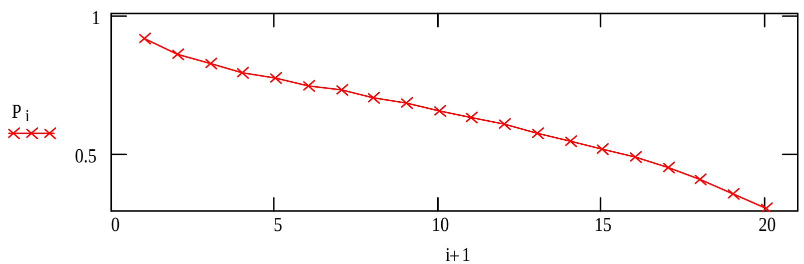
Оценка вероятности безотказной работы образца в течение рассматриваемой наработки

$$P_i := 1 - \frac{nn_i}{N}$$

$P^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.916	0.863	0.826	0.795	0.774	0.747	0.732	0.705	0.684	0.658	0.632	0.611

Иллюстрация вероятности безотказной работы образца в течение рассматриваемой наработки (нумерация начинается с 0)



Определение среднего количества образцов, работоспособных в течение рассматриваемых интервалов наработки (нумерация начинается с 0),

j := 1, 2 .. k − 1

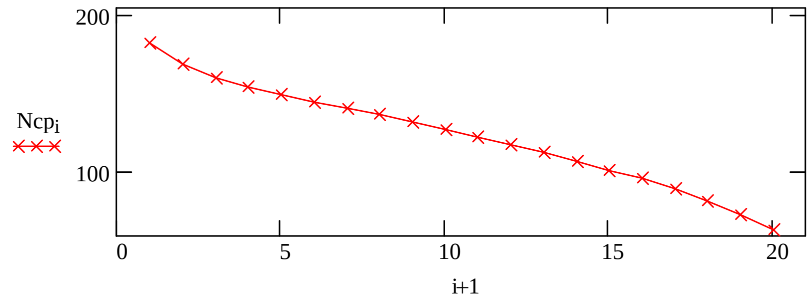
$$Ncp_0 := \frac{N - nn_0 + N - 0}{2}$$

$$Ncp_j := \frac{N - nn_j + N - nn_{j-1}}{2}$$

$Ncp^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	182	169	160.5	154	149	144.5	140.5	136.5	132	127.5	122.5	11

Иллюстрация среднего количества образцов, работоспособных в течение рассматриваемых интервалов наработки (нумерация начинается с 0),

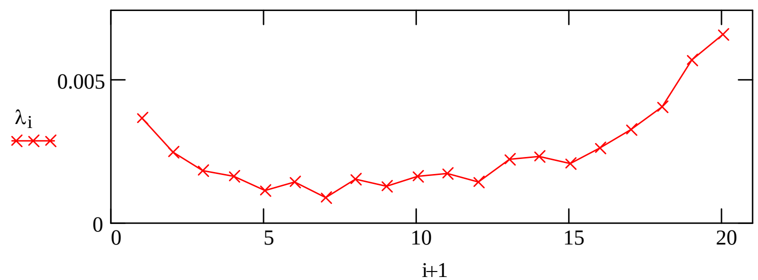


Определение и иллюстрация интенсивности отказов образца для каждого из рассматриваемых интервалов наработки (нумерация начинается с 0)

$$\lambda_i := \frac{n_i}{Ncp_i \cdot \Delta t}$$

$\lambda^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$3.663\cdot10^{-3}$	$2.465\cdot10^{-3}$	$1.817\cdot10^{-3}$	$1.623\cdot10^{-3}$	$1.119\cdot10^{-3}$	$1.442\cdot10^{-3}$	8.897·1



4.4 Подбор закона распределения наработки объекта до отказа в пакете Statgraphics Centurion XV

4.4.1 Общие сведения

Если в результате n экспериментов получена выборка значений случайной величины ξ, например, наработки объекта до отказа, то статистическая оценка показателей надежности объекта может быть определена по следующей схеме:

1) подбор закона распределения наработки объекта до отказа (или, например, предела прочности);

2) последующее определение показателей надежности объекта методами, рассматриваемыми в подразделах 1.4, 2.3, 3.2–3.4.

Закон распределения случайной величины может быть подобран многократной проверкой гипотез о возможных теоретических распределениях (см. приложение А) с помощью статистических критериев согласия. Наибольшее распространение получили критерии согласия χ^2-Пирсона и Колмогорова-Смирнова. Процедуры статистической проверки гипотез и подбора закона распределения случайной величины реализованы в пакетах программ статистического анализа данных и подробно рассматриваются в литературе по математической статистике, например [12, 34, 74]. Одним из наиболее распространенных средств статистического анализа является пакет Statgraphics и его распространяемая версия 2010 года Centurion XV (v. 15.2.12). В пакете реализовано 45 различных типовых распределений. Инструкция по работе с пакетом Statgraphics Centurion XV представлена в приложении Е.

Рассмотрим примеры подбора закона распределения наработки до отказа и последующего определения некоторых показателей надежности объекта.

4.4.2 Пример исследования выборки значений наработки до отказа

Пусть проведены ускоренные испытания на усталость нового материала в условиях циклического нагружения. Для каждого из 50 образцов контролировалась наработка до отказа в моточасах (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – **Статистика о наработке до отказа образцов материала в процессе ускоренных испытаний**

0,88	11,57	4,36	1,98	17,2	14,22	1,91	20,46	2,06	17,46
15,38	14,24	5,18	2,52	0,07	2,22	16,54	2,65	5,71	4,92
3,35	9,7	7,51	6,12	4,78	5,31	7,64	6,74	6,8	4,39
2,3	4,41	1,87	9,39	5,65	14,12	1,97	3,56	5,69	12,04
1,2	5,47	7,74	4,67	16,58	4,98	12,12	0,23	3,74	11,44

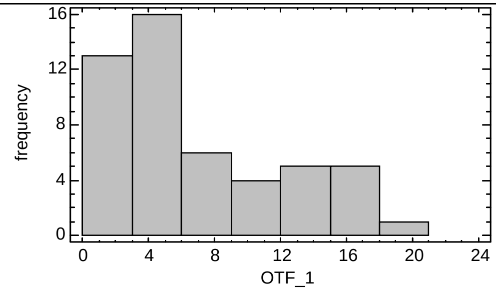
Требуется определить основные показатели безотказности образцов из нового материала: вероятность безотказной работы в течение 10 моточасов, среднюю наработку до отказа, гамма-процентную наработку до отказа для $\gamma = 95$ %.

Создадим выборку значений случайной величины ξ – наработки образцов до отказа в пакете Statgraphics Centurion XV в соответствии с пп. 1–3 приложения Е.

Вычислим оценки числовых характеристик случайной величины ξ и построим ее гистограмму в соответствии с п. 4 приложения Е. Результаты анализа представлены на рисунке 4.1.

Summary Statistics for OTF_1

Count	50
Average	7,0608
Median	5,39
Mode	
Geometric mean	4,82759
Variance	28,0565
Standard deviation	5,29684
Coeff. of variation	75,0176 %
Minimum	0,07
Maximum	20,46
Range	20,39
Lower quartile	2,65
Upper quartile	11,44
1/6 sextile	2,06
5/6 sextile	14,12
Skewness	0,857043
Stnd. skewness	2,47407
Kurtosis	-0,300813
Stnd. kurtosis	-0,434186
Sum	353,04



The StatAdvisor
This table shows summary statistics for OTF_1. It includes measures of central tendency, measures of variability, and measures of shape. Of particular interest here are the standardized skewness and standardized kurtosis, which can be used to determine whether the sample comes from a normal distribution. Values of these statistics outside the range of -2 to +2 indicate significant departures from normality, which would tend to invalidate any statistical test regarding the standard deviation. In this case, the standardized skewness value is not within the range expected for data from a normal distribution. The standardized kurtosis value is within the range expected for data from a normal distribution.

Рисунок 4.1 – Результаты анализа одномерной случайной величины в пакете Statgraphics Centurion XV

В частности, из результатов анализа видно, что оценка

- математического ожидания случайной величины ξ (средняя наработка до отказа) составляет 7,061 моточасов;
- стандартного отклонения – 5,297 моточасов;
- медианы – 5,39 моточасов (т. е. в среднем 50 % изделий отказывает в течение 5,39 моточасов);

• нижней квартили – 2,65 моточасов (т. е. в среднем 25 % изделий отказывают в течение 2,65 моточасов);

• верхней квартили – 11,44 моточасов (т. е. в среднем 75 % изделий отказывает в течение 11,44 моточасов).

Для подбора закона распределения наработки образца до отказа выполним действия п. 8 приложения Е, проводя исследование для всех распределений непрерывных случайных величин с множеством возможных значений на полуинтервале [0, ∞) из приложения А, п. А.3.

Результаты подбора распределения представлены на рисунке 4.2. Из них видно, что в соответствии с критерием согласия χ^2-Пирсона наилучшим образом с экспериментальными данными согласуется распределение Вейбулла (двухпараметрическое, см. приложение А, п. А.3). А при использовании критерия Колмогорова-Смирнова наилучшее согласование с экспериментальными данными показывает трехпараметрическое гамма-распределение.

Comparison of Alternative Distributions

Distribution	Est. Parameters	Chi-Squared P	KS D
Weibull	2	**0,451679**	0,0840131
Loglogistic	2	0,435478	0,0866018
Gamma	2	0,403969	0,0808257
Loglogistic (3-Parameter)	3	0,365362	0,0860408
Exponential	1	0,320053	0,152673
Largest Extreme Value	2	0,297925	0,115395
Exponential (2-Parameter)	2	0,249846	0,147004
Lognormal (3-Parameter)	3	0,211645	0,0884645
Weibull (3-Parameter)	3	0,156353	0,0876979
Gamma (3-Parameter)	3	0,156353	**0,0791728**
Lognormal	2	0,0739689	0,142282
Maxwell	2	0,0557509	0,173514
Rayleigh	2	0,0468723	0,171641
Half Normal	2	0,0429278	0,0986642
Chi-Squared	1	0,0332403	0,19198
Logistic	2	0,0129457	0,138546
Triangular	3	0,00884775	0,161156
Cauchy	2	0,00591536	0,153447
Laplace	2	0,00553416	0,148142
Exponential Power	3	0,00316455	0,277395
Normal	2	0,00173409	0,180648
Birnbaum-Saunders	2	0,00055772	0,288414
Smallest Extreme Value	2	0,0000920842	0,201125
Uniform	2	0,0000244531	0,323835

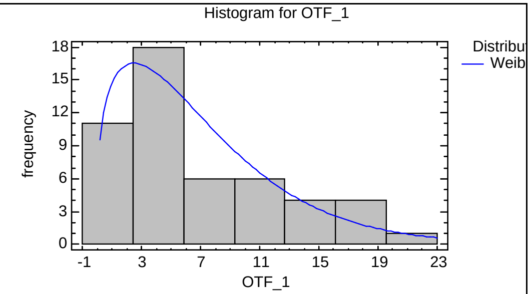
Рисунок 4.2 – Результаты подбора закона распределения одномерной случайной величины в пакете Statgraphics Centurion XV с помощью критериев согласия χ^2-Пирсона и Колмогорова-Смирнова

Для определения параметров подобранной функции распределения Вейбулла выполним п. 7 приложения Е, указав данное распределение в окне гипотетических распределений (см. рисунок Е.11). Результаты анализа приведены на рисунке 4.3.

Uncensored Data - OTF_1
Data variable: OTF_1 (Primer_1)
50 values ranging from 0,07 to 20,46

Fitted Distributions

Weibull
shape = 1,30514
scale = 7,62879



Goodness-of-Fit Tests for OTF_1
Chi-Squared Test

	Lower Limit	Upper Limit	Frequency Observed	Frequency Expected	Chi-Squared
at or below		1,01026	3	3,45	0,06
	1,01026	1,7687	1	3,45	1,74
	1,7687	2,4889	7	3,45	3,66
	2,4889	3,20755	2	3,45	0,61
	3,20755	3,94498	3	3,45	0,06
	3,94498	4,71791	4	3,45	0,09
	4,71791	5,54383	6	3,45	1,89
	5,54383	6,44433	4	3,45	0,09
	6,44433	7,44928	2	3,45	0,61
	7,44928	8,60439	3	3,45	0,06
	8,60439	9,98765	2	3,45	0,61
	9,98765	11,7534	2	3,45	0,61
	11,7534	14,2906	5	3,45	0,70
above	14,2906		6	5,17	0,13

Chi-Squared = 10,9 with 11 d.f. P-Value = 0,451679

Kolmogorov-Smirnov Test

	Weibull
DPLUS	0,0840131
DMINUS	0,0767566
DN	0,0840131
P-Value	0,872045

The StatAdvisor
This pane shows the results of tests run to determine whether OTF_1 can be adequately modeled by a Weibull distribution. The chi-squared test divides the range of OTF_1 into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The Kolmogorov-Smirnov test computes the maximum distance between the cumulative distribution of OTF_1 and the CDF of the fitted Weibull distribution. In this case, the maximum distance is 0,0840131. The other statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways. Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0,05, we can not reject the idea that OTF_1 comes from a Weibull distribution with 95% confidence.

Рисунок 4.3 – Результаты проверки гипотезы о распределении Вейбулла с помощью критериев согласия χ^2-Пирсона и Колмогорова-Смирнова в пакете Statgraphics Centurion XV

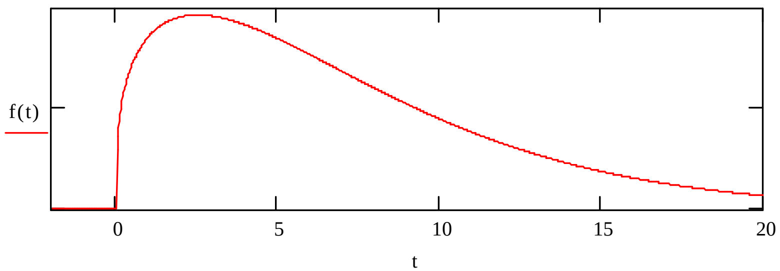
Проверка гипотезы о распределении Вейбулла в пакете Statgraphics Centurion XV показала следующие значения параметров распределения: параметр формы $\alpha = 1{,}30514$; параметр масштаба $\beta = 7{,}62879$. Учитывая, что расчетное значение P-Value для критерия согласия χ^2-Пирсона превысило задаваемый в инженерной практике уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, гипотезой о распределении Вейбулла можно пользоваться в дальнейших исследованиях – функция плотности распределения наработки до отказа (при циклическом нагружении) образцов из нового материала имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1{,}30514 \cdot x^{1{,}30514-1}}{7{,}62879^{1{,}30514}} \exp\left(-\left(\dfrac{x}{7{,}62879}\right)^{1{,}30514}\right), & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Требуемые показатели безотказности образцов из нового материала определим в соответствии с подразд. 1.4 в пакете MathCAD.

Задание и иллюстрация функции плотности распределения наработки образца до отказа (в соответствии с распределением Вейбулла)

$$f(t) := \begin{vmatrix} \dfrac{1.30514 \cdot t^{1.30514-1}}{7.62879^{1.30514}} \cdot \exp\left[-\left(\dfrac{t}{7.62879}\right)^{1.30514}\right] & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$



Вероятность безотказной работы в течение 10 моточасов

$$P\_10 := 1 - \int_0^{10} f(t)\,dt$$

$P\_10 = 0.240826$

Средняя наработка образца до отказа, моточас

$$T := \int_0^{9999} t \cdot f(t)\,dt$$

$T = 7.040205$

Определение гамма-процентной наработки до отказа, моточас ($\gamma = 0{,}95$)

$t\gamma\_95 := 3$

Given

$$\int_0^{t\gamma\_95} f(t)\,dt = 1 - 0.95$$

$Find(t\gamma\_95) = 0.783607$

Вывод: вероятность безотказной работы образца из нового материала при циклическом нагружении в течение 10 моточасов составляет 0,2408, средняя наработка до отказа – 7,0402 (практически совпадает с оценкой математического ожидания по выборке, см. рисунок 4.1), гамма-процентная наработка до отказа для $\gamma = 95\ \%$ составляет 0,7836 моточасов.

Аналогично по выборке значений могут быть исследованы другие надежностные и качественные показатели объектов и материалов.

4.4.3 Пример исследования выборки значений предела текучести

Определить вероятность безотказной работы зуба колеса трансмиссии комбайна, изготовленного из стали 45-II [65], по критерию текучести, если нормативное (минимально допустимое) значение предела текучести составляет 200 МПа, а испытания 45 образцов показали следующие результаты в МПа (таблица 4.3).

Таблица 4.3 – **Статистика значений предела текучести зуба колеса**

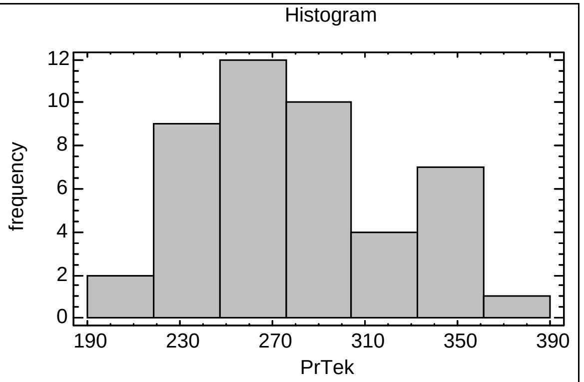
Образец	Результат	Образец	Результат	Образец	Результат	Образец	Результат
1	260,73	13	285,26	25	256,73	37	202,04
2	274,82	14	255,68	26	333,81	38	294,02
3	250,34	15	275,81	27	318,62	39	221,85
4	278,92	16	305,13	28	370,77	40	276,98
5	320,95	17	284,79	29	255,07	41	285,72
6	349,49	18	211,95	30	251,77	42	339,2
7	265,84	19	275,67	31	334,61	43	334,61
8	259,58	20	243,1	32	280,81	44	349,38
9	226,17	21	241,51	33	232,73	45	290,25
10	236,57	22	244,99	34	318,29		
11	279,36	23	346,35	35	237,08		
12	270,38	24	232,35	36	253,39		

Создадим выборку значений случайной величины ξ – предела текучести зуба колеса в пакете Statgraphics Centurion XV в соответствии с пп. 1–3 приложения Е.

Вычислим оценки числовых характеристик случайной величины ξ и построим ее гистограмму в соответствии с п. 4 приложения Е. Результаты анализа представлены на рисунке 4.4.

Summary Statistics for PrTek

Count	45
Average	278,077
Median	275,67
Mode	334,61
Geometric mean	275,154
Variance	1698,14
Standard deviation	41,2084
Coeff. of variation	14,8191 %
Minimum	202,04
Maximum	370,77
Range	168,73
Lower quartile	250,34
Upper quartile	305,13
1/6 sextile	237,08
5/6 sextile	333,81
Skewness	0,420176
Stnd. skewness	1,1507
Kurtosis	-0,579432
Stnd. kurtosis	-0,79342
Sum	12513,5



The StatAdvisor
This table shows summary statistics for PrTek. It includes measures of central tendency, measures of variability, and measures of shape. Of particular interest here are the standardized skewness and standardized kurtosis, which can be used to determine whether the sample comes from a normal distribution. Values of these statistics outside the range of -2 to +2 indicate significant departures from normality, which would tend to invalidate any statistical test regarding the standard deviation. In this case, the standardized skewness value is within the range expected for data from a normal distribution. The standardized kurtosis value is within the range expected for data from a normal distribution.

Рисунок 4.4 – Результаты анализа предела текучести зуба колеса в пакете Statgraphics Centurion XV

В частности, видно, что оценка:

- математического ожидания случайной величины ξ (средний предел текучести) составляет 278,077 МПа;
- стандартного отклонения – 41,2084 Мпа;
- медианы – 275,67 МПа (т. е. в среднем 50 % изделий имеют предел текучести, превышающий 275,67 МПа).

Для подбора закона распределения предела текучести зуба колеса выполним действия п. 8 приложения Е проводя исследование для всех распределений непрерывных случайных величин из приложения А.

Результаты подбора распределения представлены на рисунке 4.5. Из них видно, что в соответствии с критерием согласия χ^2-Пирсона наилучшим образом с экспериментальными данными согласуется гамма-распределение (см. приложение А). При использовании критерия Колмогорова-Смирнова наилучшее согласование с экспериментальными данными показало логнормальное распределение.

Comparison of Alternative Distributions

Distribution	Est. Parameters	Chi-Squared P	KS D
Gamma	2	**0,7804**	0,0956176
Normal	2	0,663849	0,115317
Laplace	2	0,480595	0,109002
Loglogistic	2	0,480595	0,0980842
Lognormal	2	0,368924	**0,0874859**
Logistic	2	0,368886	0,102726
Weibull	2	0,0499434	0,149761
Uniform	2	0,0401782	0,192949
Smallest Extreme Value	2	0,0256413	0,17418
Exponential	1	0,0	0,516431
Pareto	1	0,0	0,611327

Рисунок 4.5 – Результаты подбора закона распределения предела текучести зуба колеса с помощью критериев согласия χ^2-Пирсона и Колмогорова-Смирнова в пакете Statgraphics Centurion XV

Для определения параметров подобранной функции гамма-распределения выполним п. 7 приложения Е, указав данное распределение в окне гипотетических распределений (см. рисунок Е.11). Результаты анализа приведены на рисунке 4.6.

Проверка гипотезы о гамма-распределении в пакете Statgraphics Centurion XV показала следующие значения параметров распределения: параметр формы $\alpha = 47{,}4801$; параметр масштаба $\beta = 1/0{,}170744 = 5{,}8567$ (см. приложение А, п. А.3). Следовательно, функция плотности распределения предела текучести зуба колеса имеет вид

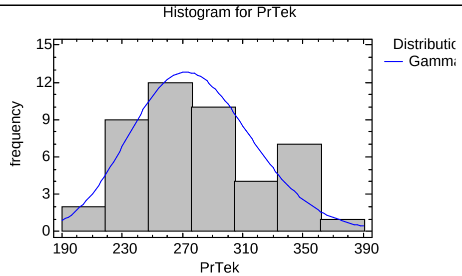
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{47,4801-1}}{5{,}8567^{47,4801}\cdot\Gamma(47{,}4801)}\, e^{-\left(\frac{x}{5,8567}\right)}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Учитывая, что расчетное значение P-Value для критерия согласия χ^2-Пирсона превысило задаваемый в инженерной практике уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, гипотезой о гамма-распределении воспользуемся для определения вероятности безотказной работы зуба колеса по критерию превышения предела текучести. Расчеты выполним в пакете MathCAD.

Uncensored Data – PrTek
Data variable: PrTek (Predel Teku4esti)
45 values ranging from 202,04 to 370,77

Fitted Distributions

Gamma
shape = 47,4801
scale = 0,170744



Goodness-of-Fit Tests for PrTek
Chi-Squared Test

	Lower Limit	Upper Limit	Frequency Observed	Frequency Expected	Chi-Squared
at or below		216,949	2	2,50	0,10
	216,949	229,932	2	2,50	0,10
	229,932	239,05	4	2,50	0,90
	239,05	246,523	3	2,50	0,10
	246,523	253,11	2	2,50	0,10
	253,11	259,176	4	2,50	0,90
	259,176	264,94	2	2,50	0,10
	264,94	270,55	2	2,50	0,10
	270,55	276,127	3	2,50	0,10
	276,127	281,781	4	2,50	0,90
	281,781	287,626	3	2,50	0,10
	287,626	293,802	1	2,50	0,90
	293,802	300,501	1	2,50	0,90
	300,501	308,013	1	2,50	0,90
	308,013	316,856	0	2,50	2,50
	316,856	328,135	3	2,50	0,10
	328,135	345,206	4	2,50	0,90
above	345,206		4	2,50	0,90

Chi-Squared = 10,6 with 15 d.f. P-Value = **0,7804**

The StatAdvisor
This pane shows the results of tests run to determine whether PrTek can be adequately modeled by a gamma distribution. The chi-squared test divides the range of PrTek into nonoverlapping intervals and compares the number of observations in each class to the number expected based on the fitted distribution. The Kolmogorov-Smirnov test computes the maximum distance between the cumulative distribution of PrTek and the CDF of the fitted gamma distribution. In this case, the maximum distance is 0,0956176. The other statistics compare the empirical distribution function to the fitted CDF in different ways.

Since the smallest P-value amongst the tests performed is greater than or equal to 0,05, we can not reject the idea that PrTek comes from a gamma distribution with 95% confidence.

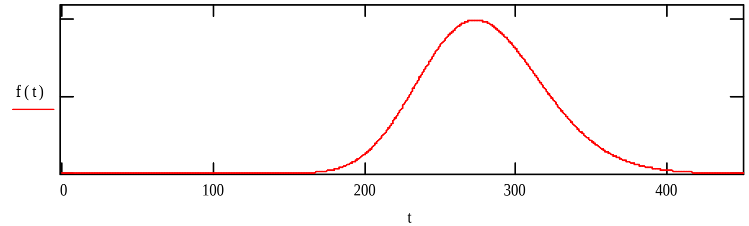
Kolmogorov-Smirnov Test

	Gamma
DPLUS	0,0956176
DMINUS	0,0886078
DN	0,0956176
P-Value	0,805168

Рисунок 4.6 – Результаты проверки гипотезы о гамма-распределении предела текучести зуба с помощью критериев согласия χ^2-Пирсона и Колмогорова-Смирнова в пакете Statgraphics Centurion XV

Задание и иллюстрация функции плотности распределения предела текучести стали 45-II зуба колеса трансмиссии (в соответствии с гамма-распределением)

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{47.4801-1}}{5.8567^{47.4801}\cdot\Gamma(47.4801,0)}\cdot\exp\left(\dfrac{-t}{5.8567}\right) & \text{if } t>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Математическое ожидание предела текучести стали, МПа,

$$T := \int_0^{9999} t\cdot f(t)\,dt \qquad T = 278.076702$$

Вероятность безотказной работы зуба колеса по критерию превышения нормативного предела текучести в 200 МПа

$$P\_10 := 1 - \int_0^{200} f(t)\,dt \qquad P\_10 = 0.982274$$

Вывод: вероятность безотказной работы зуба колеса по критерию превышения нормативного предела текучести в 200 МПа составляет 0,982274. Следует отметить, что оценка вероятности указанного события по выборке равна единице (т. к. предел текучести каждого из 45 испытываемых образцов превысил 200 МПа), что не адекватно действительности.

4.5 Методика статистической оценки показателей безотказности восстанавливаемого объекта по интенсивности отказов

Методы, рассмотренные в подразд. 4.3–4.4, предусматривают сбор информации о наработке невосстанавливаемых объектов до отказа. Недостатком такого подхода является то, что в течение ограниченного периода времени наблюдения среди исследуемых объектов успевают отказать далеко не все. По результатам наработки до отказа части исследуемых объектов (отказавших в процессе наблюдения) возможна оценка лишь функции отказов и интенсивности отказов.

В такой ситуации целесообразен другой подход к статистической оценке показателей надежности объектов, предусматривающий исследование интенсивности отказов объектов. Рассмотрим следующую модель испытаний [24, 49]. Пусть исследуются N объектов, отказавшие объекты немедленно заменяются исправными (новыми или отремонтированными). Испытания считаются законченными, когда число отказов достигает величины, достаточной для оценки показателей надёжности с заданной доверительной вероятностью.

Если допустить, что время, необходимое на восстановление (или замену) объекта, равно нулю, можно оценить параметр потока отказов $\omega(t)$ (1.27) по формуле

$$\widehat{\omega}(t_i) = \frac{n(i)}{N\,\Delta t}, \tag{4.4}$$

где $n(i)$ – количество объектов, отказавших в интервале достаточно малой наработки (t_{i-1}, t_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ – номер интервала, $t_0 = 0$; N – число испытываемых объектов при условии, что отказавшие объекты мгновенно восстанавливаются или заменяются исправными; Δt – длительность рассматриваемых интервалов наработки.

В свою очередь параметр потока отказов $\omega(t)$ связан с функцией плотности распределения наработки объекта на отказ $f(t)$ интегральным уравнением Вольтерра второго рода с разностным ядром [24, 49]

$$\omega(t) = f(t) + \int_0^t \omega(\tau) f(t-\tau)d\tau. \tag{4.5}$$

Определив функцию параметра потока отказов $\omega(t)$, можно узнать $f(t)$, а значит, и все остальные показатели безотказности восстанавливаемых систем.

Ниже предлагается инженерная методика анализа надежности объектов [49]:

1) по данным об отказах в процессе эксплуатации определяется эмпирическое значение параметра потока отказов объекта в соответствии с выражением (4.4). Результаты расчетов представляются таблично и графически для каждого рассматриваемого интервала наработки;

2) методами аппроксимации, приближенными в узлах $\widehat{\omega}(t_i)$, определяется аналитическое выражение для функции параметра потока отказов объекта $\omega(t)$. Вид функции интерполяции выбирается на основе анализа исходных данных, предметной постановки задачи (физической сущности процессов отказов) и возможностей используемых математических программных средств;

3) выполняется преобразование Лапласа функции $\omega(t)$;

4) определяется изображение (преобразование Лапласа) функции плотности распределения наработки объекта на отказ с помощью выражения

$$\dot{f}(s) = \frac{\dot{\omega}(s)}{1+\dot{\omega}(s)}, \tag{4.6}$$

которое является решением интегрального уравнения (4.5);

5) определяется оригинал (обратное преобразование Лапласа) функции плотности распределения времени наработки объекта на отказ $f(t)$;

6) на основе известной функции $f(t)$ определяются другие показатели надежности объекта.

Приведенная методика позволяет получать в аналитическом виде функции всех показателей безотказности объекта. Однако ее реализация имеет ряд существенных ограничений:

- функция параметра потока отказов $\omega(t)$ должна иметь преобразование Лапласа;
- изображение функции плотности распределения наработки объекта на отказ $\dot{f}(s)$ должно иметь обратное преобразование Лапласа;
- оригинал функции плотности распределения наработки объекта на отказ $f(t)$ должен удовлетворять условию нормировки $\int_0^\infty f(t)dt = 1$.

Если последнее условие нормировки не выполняется, то полученную функцию $f(t)$ можно приближенно использовать лишь для рассматриваемого диапазона наработки системы.

4.6 Пример статистической оценки показателей безотказности восстанавливаемого объекта по интенсивности отказов в пакете MathCAD

Пусть на ускоренные испытания поставлено $N = 100$ однотипных образцов – жаток кормоуборочного комбайна; $n(i)$ – число образцов, отказавших в течение i-го интервала наработки длительностью 100 ч (таблица 4.4). Все отказавшие жатки немедленно заменяются новыми (или восстанавливаются). Исследование продолжается в течение 1200 ч, т. е. в течение 12 рассматриваемых интервалов.

Требуется определить и построить график функции плотности распределения наработки жатки кормоуборочного комбайна на отказ. Расчеты выполним в пакете MathCAD.

Таблица 4.4 – **Статистика значений количества отказов жаток**

Интервал наработки i	Число отказов $n(i)$	Интервал наработки i	Число отказов $n(i)$	Интервал наработки i	Число отказов $n(i)$
1	2	5	6	9	5
2	4	6	7	10	5
3	5	7	6	11	3
4	6	8	6	12	2

Задание номеров и количества интервалов (нумерация начинается с 0)

$i := 0, 1 .. 11$ $\qquad k := 12$

Задание количества испытываемых образцов

$N := 100$

Задание длительности интервалов наработки

$\Delta T := 100$

Задание количества образцов, отказавших в рассматриваемом интервале наработки

$n := (2\ 4\ 5\ 6\ 6\ 7\ 6\ 6\ 5\ 5\ 3\ 2)^T$

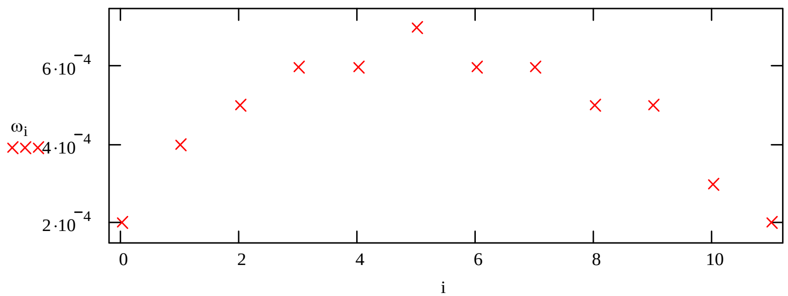
Определение эмпирической функции параметра потока отказов для каждого из рассматриваемых интервалов наработки

$$\omega_i := \frac{n_i}{N \cdot \Delta T}$$

$\omega^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-}$

Иллюстрация эмпирической функции параметра потока отказов для каждого из рассматриваемых интервалов наработки



Аппроксимация эмпирической функции параметра потока отказов полиномом 2-й степени (параболой) методом наименьших квадратов:

а) задание функции S – суммы квадратов отклонений точек от аппроксимирующей кривой b0 + b1 x + b2 x^2

$$S(b0,b1,b2) := \sum_{i=0}^{k-1} \left(\omega_i - b0 - b1 \cdot i - b2 \cdot i^2\right)^2$$

б) минимизация функции S:

б.1) определение частных производных по параметрам аппроксимирующей кривой b0, b1, b2

$$\frac{d}{db0}S(b0,b1,b2) \rightarrow \frac{-57}{5000} + 132\cdot b1 + 24\cdot b0 + 1012\cdot b2$$

$$\frac{d}{db1}S(b0,b1,b2) \rightarrow 1012\cdot b1 + 132\cdot b0 - \frac{153}{2500} + 8712\cdot b2$$

$$\frac{d}{db2}S(b0,b1,b2) \rightarrow 8712\cdot b1 + 1012\cdot b0 - \frac{1063}{2500} + 79948\cdot b2$$

б.2) приравнивание частных производных по параметрам аппроксимирующей кривой к 0 и решение системы уравнений

$b0 := 1 \qquad b1 := 1 \qquad b2 := 1$

Given

$$132\cdot b1 + 24\cdot b0 + 1012\cdot b2 - \frac{57}{5000} = 0$$

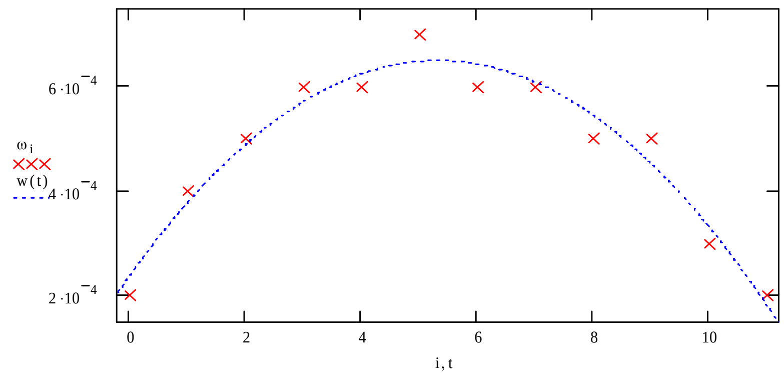
$$1012\cdot b1 + 132\cdot b0 + 8712\cdot b2 - \frac{153}{2500} = 0$$

$$8712\cdot b1 + 1012\cdot b0 + 79948\cdot b2 - \frac{1063}{2500} = 0$$

$$\text{Find}(b0,b1,b2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{859}{3640000} \\ \frac{249}{1601600} \\ \frac{-9}{616000} \end{pmatrix}$$

в) полученная аналитическая функция параметра потока отказов – функция, аппроксимирующая эмпирическую функцию параметра потока отказов, с иллюстрацией

$$w(t) := \frac{859}{3640000} + \frac{249}{1601600}\cdot t + \frac{-9}{616000}\cdot t^2$$



Преобразование Лапласа над аналитической функцией параметра потока отказов

$$wl(s) := laplace(w(t), t, s) \rightarrow \frac{859}{3640000 \cdot s} + \frac{249}{1601600 \cdot s^2} - \frac{9}{308000 \cdot s^3}$$

Определение изображения (преобразования Лапласа) функции плотности наработки объекта на отказ по (4.6)

$$fl(s) := \frac{wl(s)}{1 + wl(s)}$$

Минимизация полученной функции

$$fl(s)\ simplify \rightarrow \frac{\left(9449 \cdot s^2 + 6225 \cdot s - 1170\right)}{\left(40040000 \cdot s^3 + 9449 \cdot s^2 + 6225 \cdot s - 1170\right)}$$

Упрощение функции fl(s) с использованием теоремы Виетта

$$fl(s) := \frac{[9449 \cdot (s + 0.811402991) \cdot (s - 0.152603118)]}{\left[40040000 \cdot (s - 0.02904624376866)^3\right]}$$

Обратное преобразование Лапласа над функцией fl для получения оригинала функции f(t) наработки объекта на отказ

$$invlaplace\ (fl(s), s, t) \rightarrow$$

$$\rightarrow -1.2252936519505482671 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right) +$$

$$+ 1.6917871914877963736 \cdot 10^{-4} \cdot t \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right) +$$

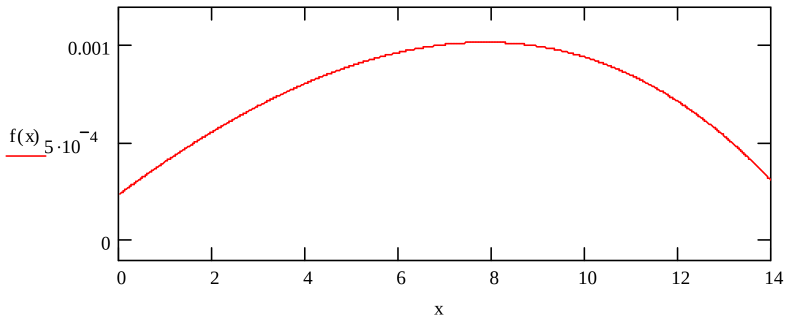
$$+ 2.3598901098901098901 \cdot 10^{-4} \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right)$$

Иллюстрация полученной функции наработки объекта на отказ f(t) на рассматриваемом интервале наработки

$$f(t) := -1.2252936519505482671 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right) +$$

$$+ 1.6917871914877963736 \cdot 10^{-4} \cdot t \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right) +$$

$$+ 2.3598901098901098901 \cdot 10^{-4} \cdot \exp\left(2.9046243768660000000 \cdot 10^{-2} \cdot t\right)$$



5 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

5.1 Основные положения имитационного моделирования

Применение аналитических методов расчета показателей надежности сложных систем с реконфигурируемой структурой и восстанавливаемыми компонентами представляет известные трудности и ограничивается определением небольшого количества показателей (обычно средней наработки на отказ и коэффициента готовности).

В частных случаях решение может быть получено с применением множества допущений (например, независимость отказов элементов, экспоненциальный закон распределения наработки на отказ и восстановление элементов), которые могут существенно занижать или завышать расчетные значения показателей надежности по сравнению с истинными значениями.

Возможным подходом всестороннего и адекватного исследования показателей надежности систем является имитационное моделирование.

Имитационное моделирование – метод научного исследования систем, для которого характерно воспроизведение (на ЭВМ) процессов функционирования элементов системы с сохранением их алгоритмов, причинно-следственных связей, последовательности протекания и вероятностного характера.

Так, в процессе имитации с помощью генератора случайных чисел «разыгрываются» моменты наступления и виды отказов некоторых элементов и проверяются условия работоспособности системы в этот момент. Если существующие отказы элементов не нарушают условий работоспособности системы, то разыгрываются очередные отказы. Наряду с моделированием отказов имитируются процессы восстановления отказавших элементов. В процессе имитации отслеживаются и фиксируются определенные события и состояния системы (наработка до отказа, продолжительность восстановления и другие), по которым оцениваются показатели надежности системы.

При создании имитационной модели могут быть учтены:

- структура исследуемой системы и возможности её модификации;
- различные режимы функционирования системы и их характеристики;

• условия, накладываемые на зависимость отказов элементов.

В имитационной модели могут быть реализованы произвольные вероятностные закономерности:

• надежностных свойств элементов;

• воздействий на систему.

Поэтому стандарты [26] определяют имитационное моделирование в качестве наиболее универсального метода исследования надежности систем.

Другими достоинствами имитационного моделирования является возможность [42, 58]:

• визуального наблюдения за процессом функционирования системы в течение некоторого времени;

• рассматривать различные варианты системы, отвечающие различным сторонам функционирования и возможным структурным преобразованиям;

• имитировать большое число отказов аппаратных и программных средств, что практически неосуществимо при натурных испытаниях;

• оценивать значения всех необходимых количественных показателей надежности;

• создать во время испытаний всё множество технологических ситуаций;

• проводить испытания модели системы в ускоренном или замедленном машинном времени. Так, в течение нескольких секунд на ЭВМ можно проимитировать многолетнее функционирование системы, собрать статистику о тысячах отказов. Известны также приложения имитационного моделирования для изучения процесса ядерного взрыва, продолжительность которого составляет всего доли секунды;

• использовать имитационную модель в качестве тренажера для отработки навыков принятия технических и управленческих решений. Общеизвестно применение имитаторов для тренировки пилотирования самолета (в том числе в нештатных ситуациях), управления движением поездов на участке железной дороги.

Многократно воспроизводя процесс функционирования имитационной модели системы до отказа, можно собрать статистический материал, достаточный для оценки интересующих показателей надежности системы с заданной точностью. Такой подход исследования называется **статистическим моделированием**.

5.2 Особенности имитационного моделирования на ЭВМ. Ограничения имитационного моделирования

В процессе имитации приходится оперировать большими объемами данных о функционировании и взаимодействии элементов системы, отслежи-

вать процесс функционирования системы в целом, генерировать случайные факторы с требуемыми вероятностными характеристиками, накапливать и анализировать статистику об отказах. Поэтому основным техническим средством автоматизации имитационного моделирования является ЭВМ, а имитационная модель по существу является компьютерной программой.

Основная проблема создания имитационной модели на ЭВМ заключается в сложности:

1) формализации исследуемых систем;

2) описания на языке, понятном ЭВМ (например, Паскаль, Си):

• алгоритмов функционирования и взаимодействия элементов системы;

• условий работоспособности систем;

• надежностных характеристик элементов;

• вероятностных характеристик входных воздействий;

• режимов эксплуатации и технического обслуживания.

Другие ограничения имитационного моделирования на ЭВМ связаны с тем, что:

• оно не предоставляет непосредственного решения задачи (как при использовании аналитических методов). Имитационная модель служит лишь средством для анализа поведения системы в условиях, определяемых экспериментатором;

• результаты имитационного моделирования зачастую носят вероятностный характер и требуют применения многочисленных методов статистического анализа данных;

• имитационная модель зачастую применима для решения лишь определенной узкой задачи исследования. Незначительная корректировка задачи может потребовать новую имитационную модель;

• имитационная модель, как любая компьютерная программа, требует **верификации** – проверки соответствия фактического алгоритма функционирования имитационной модели замыслу исследования;

• задача **проверки адекватности** (характерная для любой модели) в имитационном моделировании стоит наиболее остро, что связано с вероятностным характером результатов моделирования;

• имитационная модель надежности системы с большим количеством элементов может потребовать значительных ресурсов оперативной памяти ЭВМ и машинного времени для воспроизведения процессов функционирования каждого элемента;

• имитационное моделирование высоконадежных систем весьма ресурсоёмко. Так, для подтверждения вероятности безотказной работы системы 0,99999 с доверительной вероятностью 0,995 необходимо не менее 529830 реализаций имитационной модели до отказа.

Преодоление многих перечисленных выше ограничений состоит в создании специализированных средств автоматизации имитационного моделирования надежности. По сравнению с универсальными языками программирования (Паскаль, Си), специализированные средства автоматизации имитационного моделирования надежности имеют ярко выраженную концептуальную направленность на класс исследуемых систем и решаемых задач. Основными функциями таких средств являются:

- наглядность построения и представления имитационных моделей надежности некоторого класса исследуемых систем;
- автоматизация этапов построения и отладки имитационных моделей;
- автоматизация постановки и проведения имитационных экспериментов с моделями, для чего в средствах автоматизации имитационного моделирования могут быть реализованы типовые методики;
- автоматическое документирование и наглядность представления результатов моделирования;
- автоматизация анализа результатов моделирования;
- поддержка в принятии решений относительно значений показателей надежности систем.

5.3 Технология имитационного моделирования безотказности систем в пакете СМ-ДЭС

5.3.1 Общие сведения о пакете СМ-ДЭС

Рассмотрим одно из существующих средств автоматизации имитационного моделирования надежности – пакет СМ-ДЭС, разработанный на кафедре прикладной математики БелГУТа. Первоначальной специализацией пакета было моделирование безопасности функционирования дискретных электронных систем, что обусловило некоторые особенности его применения. В настоящее время пакет может использоваться как средство автоматизации имитационного моделирования безотказности систем, в которых события, связанные с отказами и восстановлением элементов, происходят мгновенно. Состав и структура пакета СМ-ДЭС приведена в работах [72, 73].

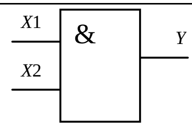
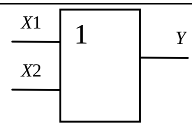
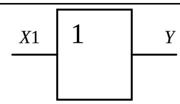
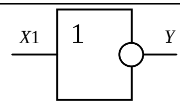
Процедура создания на ЭВМ имитационной модели безотказности исследуемой системы включает в себя несколько этапов, начиная от составления содержательного описания объекта моделирования и заканчивая написанием программы, реализующей алгоритмы функционирования элементов системы [42]. Подробно реализация данных этапов представлена в литературе [73, 75]. Рассмотрим технологию создания имитационной модели безотказности систем в пакете СМ-ДЭС.

5.3.2 Логическая модель безотказной работы системы

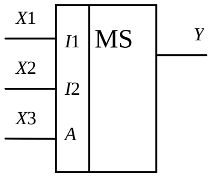
В разделе 3 были рассмотрены три наиболее распространенные модели надежности систем: структурная схема надежности, ДО и граф состояний. Кроме того, для описания работоспособного состояния системы может использоваться **логическая модель безотказной работы** [24, 41, 71, 73], которая представляет собой дискретное устройство, состоящее из **вентилей** – взаимосвязанных логических компонентов, которые вырабатывают сигналы двух уровней (логического нуля «лог. 0» или логической единицы «лог. 1») в зависимости от состояний сигналов на их входных линиях.

Так, в нормальном режиме вентиль «И» вырабатывает на своем выходе сигнал «лог. 1» только, если на всех его входных линиях присутствует сигнал «лог. 1» (таблица 5.1). Вентиль «ИЛИ» вырабатывает на выходе сигнал «лог. 1», если хотя бы на одной из его входных линий присутствует сигнал «лог. 1». Вентиль «Повторитель» (линия задержки) вырабатывает на выходе сигнал, логический уровень которого совпадает с уровнем логического сигнала на входе. Вентиль «НЕ» (инвертор) вырабатывает на выходе сигнал, логический уровень которого противоположен уровню логического сигнала на входе вентиля (см. таблицу 5.1). Мультиплексор MS вырабатывает на своем выходе сигнал, аналогичный сигналу на одном из его информационных входов (*I*1 или *I*2) в зависимости от уровня сигнала на адресном входе (*A*).

Таблица 5.1 – **Таблица истинности некоторых логических компонентов**

Наименование	Графическое обозначение	Таблица истинности			
		Уровень входного сигнала			Уровень выходного сигнала
		*X*1	*X*2	*X*3	Y
И		«0»	«0»		«0»
		«0»	«1»		«0»
		«1»	«0»		«0»
		«1»	«1»		«1»
ИЛИ		«0»	«0»		«0»
		«0»	«1»		«1»
		«1»	«0»		«1»
		«1»	«1»		«1»
Повторитель		«0»			«0»
		«1»			«1»
НЕ		«0»			«1»
		«1»			«0»

Окончание таблицы 5.1

Наименова-ние	Графическое обозначение	Таблица истинности			
		Уровень входного сигнала			Уровень выходного сигнала
		*X*1	*X*2	*X*3	*Y*
MS (муль-типлексор)		*X*1	*X*2	«0»	*X*1
		*X*1	*X*2	«1»	*X*2

Важной особенностью вентилей является то, что новые значения выходных сигналов устанавливаются с задержкой времени: t_{01} – задержка распространения сигнала на выходах вентиля при переключении с уровня «лог. 0» в «лог. 1»; t_{10} – задержка распространения сигнала при переключении с уровня «лог. 1» в «лог. 0». Временна́я диаграмма сигналов на входах и выходе вентиля «И» представлена на рисунке 5.1.

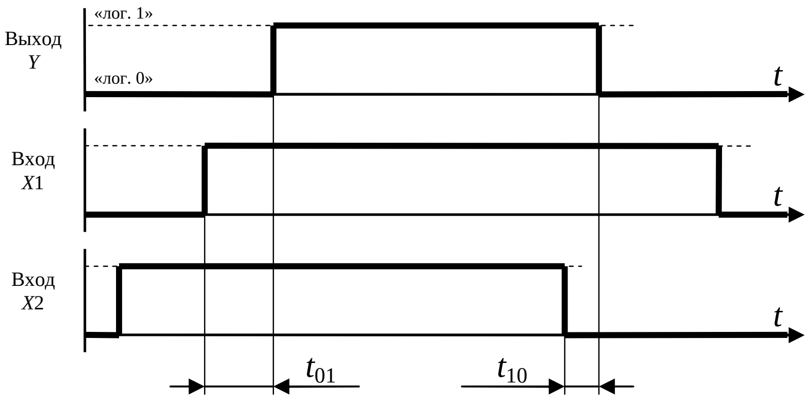


Рисунок 5.1 – Временна́я диаграмма сигналов на входе и выходе вентиля «И»

Состав и способ соединения вентилей позволяют задать условия работоспособности широкого класса систем, отказы и восстановления элементов которых происходят мгновенно. Условимся при этом считать, что работоспособному состоянию системы соответствует сигнал «лог. 0» на выходе полученной логической схемы, а сигнал «лог. 1» соответствует отказу системы:

$$V(X) = \begin{cases} 0, & \text{если система работоспособна;} \\ 1, & \text{если система неработоспособна.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Моделирование неисправностей элементов системы осуществляется маскированием выходных сигналов соответствующих вентилей сигналами «лог. 0» или «лог. 1», т. е. нарушением логики их нормального функционирования [58].

Дублированная система с нагруженным резервом. Например, для дублированной системы с нагруженным резервом (рисунок 5.2, *а*), отказ которой происходит при отказе обоих элементов «*e*1» и «*e*2», логическая модель безотказной работы представлена на рисунке 5.2, *б*.

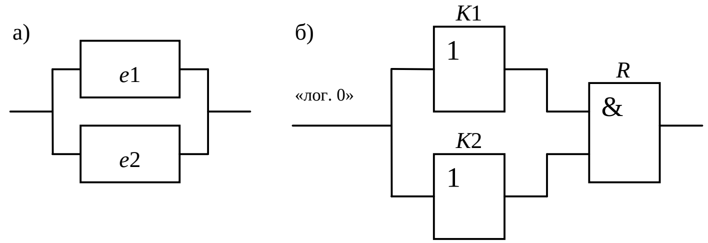


Рисунок 5.2 – Структурная схема надежности (а) и логическая модель безотказной работы (б) дублированной системы с нагруженным резервом

Отказ элементов «*e*1» и «*e*2» моделируется маскированием выходного сигнала соответствующего вентиля («*K*1» или «*K*2») значением «лог. 1». Вспомогательный вентиль «*R*» является «решающим». В работоспособном состоянии, если работоспособен хотя бы один из элементов «*e*1» или «*e*2», на выходе вентиля «*R*» присутствует сигнал «лог. 0». Однако при наличии сигналов «лог. 1» на обоих входах (при отказе обоих элементов «*e*1» и «*e*2»), вентиль «*R*» вырабатывает сигнал «лог. 1».

Восстановление элементов «*e*1» и «*e*2» моделируется отменой маскирования выходных сигналов вентилей («*K*1», «*K*2») значением «лог. 1».

Второй способ моделирования отказов элементов состоит в управлении задержками распространения сигнала вентилей t_{01} и t_{10} [58], что наряду с маскированием сигналов позволяет моделировать зависимые отказы и варианты реконфигурации системы при выполнении некоторых логических условий.

Дублированная система с ненагруженным резервом. Так, например, для дублированной системы с ненагруженным резервом, которая состоит из двух идентичных элементов «*e*1» и «*e*2», логическая модель безотказной работы представлена на рисунке 5.3. В произвольный момент времени работает только один из элементов. Второй находится в резерве или восстанавливается. Ресурс резервного элемента не исчерпывается. Отказ системы возможен при отказе работающего элемента, когда восстановление второго элемента еще не завершено.

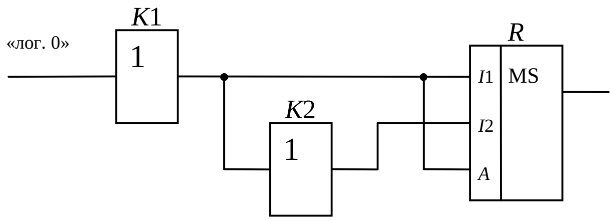


Рисунок 5.3 – Логическая модель безотказной работы дублированной системы с ненагруженным резервом

Вентили «$K1$» и «$K2$» моделируют работу элементов «$e1$» и «$e2$». Отказ (восстановление) основного элемента «$e1$» моделируется маскированием (отменой маскирования) выходного сигнала вентиля «$K1$» значением «лог. 1». После этого вентиль «$K2$» вырабатывает сигнал «лог. 1» с задержкой t_{01}, равной времени наработки на отказ резервного элемента «$e2$». Время восстановления резервного элемента определяется задержкой t_{10}.

Мультиплексор «R» является абсолютно надежным решающим компонентом, задержки распространения сигналов которого пренебрежимо малы по сравнению с соответствующими значениями вентиля «$K2$». При безотказной работе основного элемента «$e1$» (сигнал «лог. 0» на выходе вентиля «$K1$») мультиплексор «R» вырабатывает сигнал, соответствующий сигналу на входе «$I1$», т. е. сигнал «лог. 0». В случае отказа основного элемента (сигнал «лог. 1» на выходе вентиля «$K1$») мультиплексор «R» вырабатывает сигнал, соответствующий сигналу на выходе вентиля «$K2$». Вентиль «$K2$» через время t_{01} вырабатывает сигнал «лог. 1», соответствующий моменту отказа элемента «$e2$». Если за это время основной элемент успеет восстановиться, то мультиплексор «R» вырабатывает сигнал, соответствующий сигналу на входе «$I1$», т. е. сигнал «лог. 0». При этом «ресурс» резервного элемента восстанавливается.

Если за время безотказной работы резервного элемента «$e2$» основной элемент «$e1$» не успевает восстановиться, то на выходе схемы (см. рисунок 5.3) устанавливается сигнал «лог. 1», указывающий на неработоспособное состояние системы.

Дублированная система с облегченным резервом. Отличие дублированной системы с облегченным резервом от системы с ненагруженным резервом состоит в том, что ресурс резервного элемента исчерпывается (хотя и менее значительно, чем основного) даже при его нахождении в резерве. Логическая модель безотказной работы дублированной системы с облегченным резервом и невосстанавливаемыми элементами представлена на рисунке 5.4.

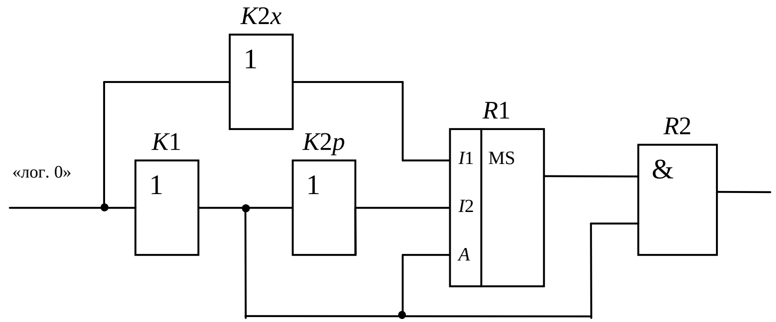


Рисунок 5.4 – Логическая модель безотказной работы дублированной системы с облегченным резервом и невосстанавливаемыми элементами

Вентиль «$K1$» моделирует работу основного элемента «$e1$»; вентиль «$K2x$» моделирует функционирование элемента «$e1$», когда тот находится в резерве; вентиль «$K2o$» – функционирование элемента «$e1$» в рабочем состоянии. В работоспособном состоянии всех элементов моделируемой системы на выходах каждого вентиля логической схемы (см. рисунок 5.4) вырабатывается сигнал «лог. 0». Отказы элементов «$e1$» и «$e2$» моделируются маскированием выходных сигналов соответствующих вентилей «$K1$» и «$K2x$» значением «лог. 1». Так при отказе элемента «$e1$» на выходе вентиля «$K1$» вырабатывается сигнал «лог. 1», который переключает мультиплексор «$R1$» на коммутацию линии «$I2$». Однако, если к моменту отказа элемента «$e1$» второй элемент «$e2$», находящийся в резерве, уже отказал (на выходе вентиля «$K2x$» сигнал «лог. 1»), то в течение времени t_{10} мультиплексора «$R1$» на его выходе и на выходе вентиля «$R2$» будет присутствовать сигнал «лог. 1», указывающий на отказ системы.

Если к моменту отказа элемента «$e1$» второй элемент «$e2$», находящийся в резерве, не отказал (на выходе вентиля «$K2x$» сигнал «лог. 0»), то отказ второго элемента моделируется временем задержки распространения сигнала t_{01} вентиля «$K2p$». Компоненты предлагаемой модели предполагаются невосстанавливаемыми. Кроме того, ресурс исправного резервного компонента полностью восстанавливается перед его включением вместо основного компонента.

Таким образом, для систем, заданных структурной схемой, построение логической модели безотказной работы заключается в составлении логической структуры, соответствующей функции работоспособности (5.1). Формально технология составления логической структуры работоспособности может использовать один из следующих подходов.

В соответствии с функциональной или структурной схемой системы **методом минимальных сечений** [44] находят минимальные множества элементов, неработоспособное состояние которых переводит систему в неработоспособное состояние. Другой подход состоит в использовании **метода минимальных путей** [44]: определяют минимальные множества элементов, работоспособное состояние которых обеспечивает работоспособное состояние системы. Подобным образом могут быть созданы логические модели безотказной работы широкого класса технических и организационных систем.

5.3.3 Технология задания логической модели безотказной работы систем в пакете СМ-ДЭС

Для автоматизации создания имитационных моделей безотказной работы систем в пакете СМ-ДЭС разработан предметно-ориентированный язык [73]. С помощью стандартных устройств ввода (мышь, клавиатура) из окна библиотеки выбираются необходимые компоненты и располагаются в окне визуального конструктора «Схемограф 2.0» (рисунок 5.5). Визуальный конструктор имеет интуитивно понятный интерфейс и возможности, аналогичные системам автоматизированного проектирования электронных устройств Electronics Workbench и OrCAD.

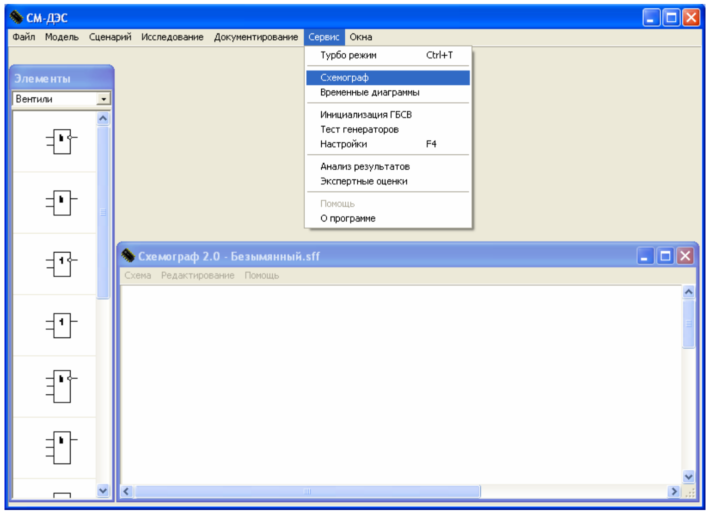


Рисунок 5.5 – Начало работы в пакете СМ-ДЭС

Логическая модель безотказной работы исследуемой системы в пакете СМ-ДЭС кроме прочих включает компоненты «АХ1», предназначенные для подачи на логическую структуру входного сигнала «лог. 0» (рисунок 5.6), и компонент «АY1», необходимый для контроля уровня выходного сигнала.

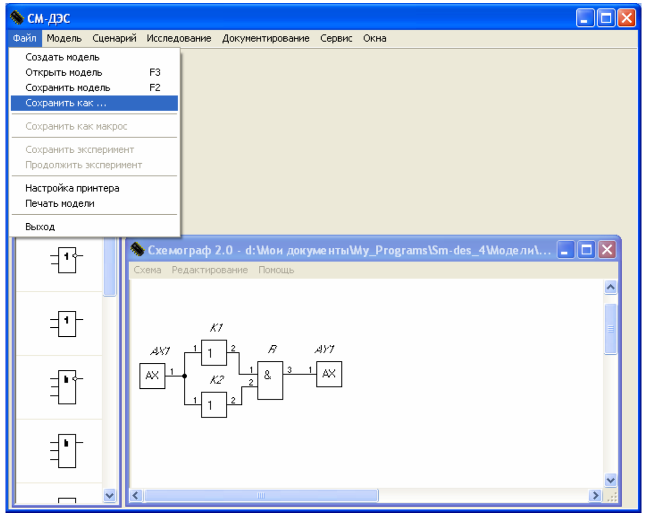


Рисунок 5.6 – Построение логической модели безотказной работы дублированной системы с нагруженным резервом в пакете СМ-ДЭС

Для сохранения создаваемой логической модели безотказной работы можно воспользоваться разделом «Файл» главного меню пакета СМ-ДЭС (см. рисунок 5.6) или разделом «Схема» меню «Схемографа 2.0» (рисунки 5.7–5.9).

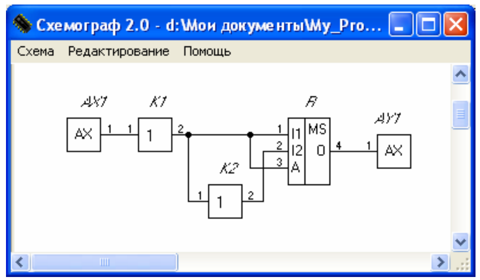


Рисунок 5.7 – Логическая модель безотказной работы дублированной системы с ненагруженным резервом в пакете СМ-ДЭС

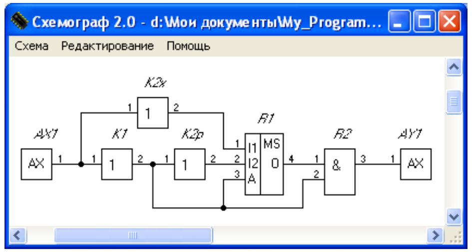


Рисунок 5.8 – Логическая модель безотказной работы
дублированной системы с облегченным резервом в пакете СМ-ДЭС

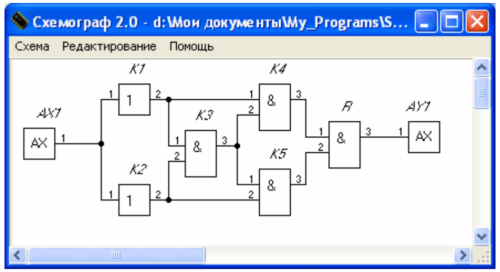


Рисунок 5.9 – Логическая модель безотказной работы
мостиковой системы в пакете СМ-ДЭС

После графического изображения логической модели безотказной работы ее следует загрузить в оперативную память ЭВМ, выбрав пункт «Загрузка модели» в разделе «Модель» главного меню пакета СМ-ДЭС (рисунок 5.10). При этом появится окно «Модель» с закладками списка компонентов, списка соединений компонентов и списка критериев отказа системы.

После описания структуры исследуемой системы необходимо задать характеристики компонентов модели и критерии неработоспособного состояния системы. Для доступа к параметрам компонентов следует выполнить двойной щелчок мыши по имени компонента в списке (см. рисунок 5.10). В специальном окне следует задать временн**ы**е и надежностные характеристики компонентов:

- закон распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение времени задержки распространения сигналов t_{01} и t_{10} (рисунок 5.11);
- закон распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение наработки компонента до отказа «внеш.Конст.1» (рисунок 5.12, *а*);
- закон распределения, математическое ожидание и стандартное отклонение времени восстановления отказа «внеш.Конст.1» (рисунок 5.12, *б*).

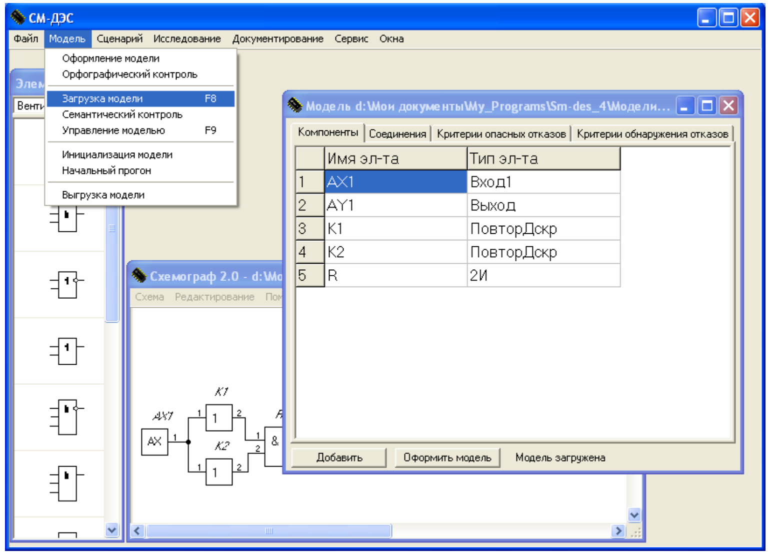


Рисунок 5.10 – Загрузка логической модели безотказной работы
в оперативную память ЭВМ

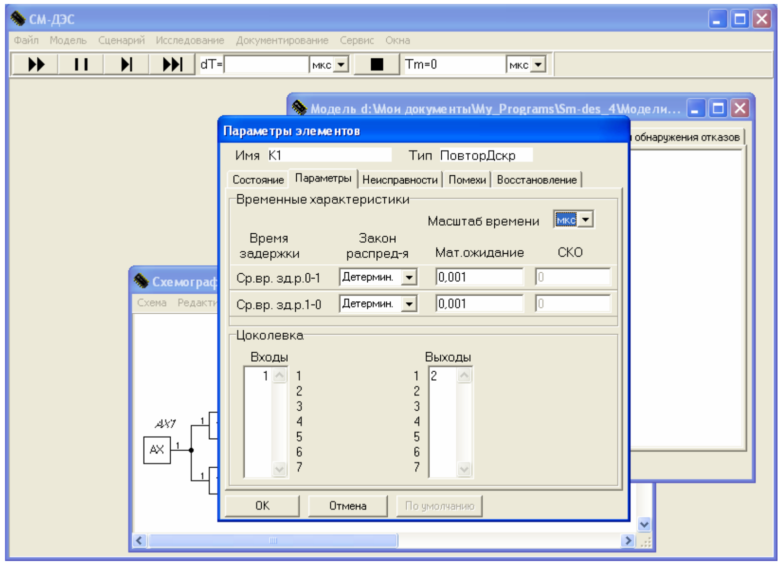


Рисунок 5.11 – Задание временных характеристик компонентов

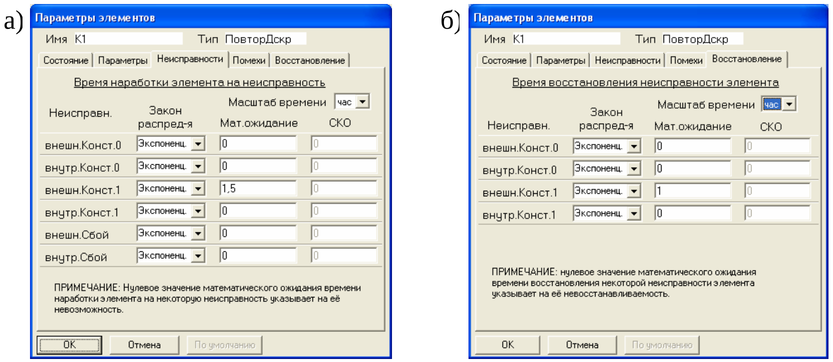


Рисунок 5.12 – Задание надежностных характеристик компонентов

Далее следует задать критерии отказа исследуемой системы. Выше указывалось, что неработоспособному состоянию системы соответствует сигнал «лог. 1» на выходе логической модели безотказной работы. В данном случае (рисунок 5.13) отказом системы является наличие сигнала «лог. 1» на выходе вентиля «R» (линия № 3) при наличии сигнала «лог. 0» на входе модели (линия № 1 компонента «*AX*1»). Поэтому на закладке «Опасные состояния» окна «Модель» (см. рисунок 5.13) необходимо перечислить линии с низким «лог. 0» и высоким «лог. 1» уровнем сигнала, а также время фиксации данного состояния (в данном случае – 0,003 мкс).

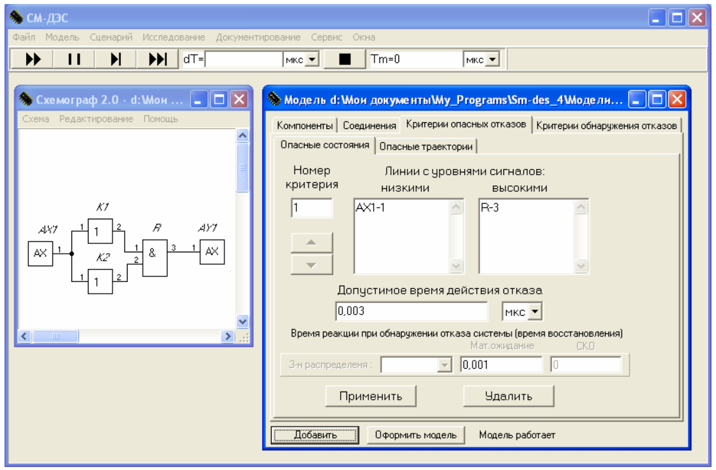


Рисунок 5.13 – Задание неработоспособного состояния логической модели безотказной работы

Для перевода модели из режима редактирования в режим исследования необходимо в разделе «Модель» главного меню пакета СМ-ДЭС выбрать пункт «Управление моделью» (см. рисунок 5.10). При этом в главном окне пакета отобразится панель управления с кнопками: ▶▶ – пуск; ❙❙ – пауза; ▶❙ – пошаговая работа; ▶▶❙ – работа в течение модельного времени dT; ■ – останов моделирования; индикатором текущего модельного времени и индикатором выполнения процесса моделирования (см. рисунок 5.13).

Имитационная модель готова к исследованию. Более подробно этапы и средства автоматизации построения имитационных моделей надежности в пакете СМ-ДЭС описаны в литературе [73, 75].

5.3.4 Технология статистического моделирования безотказности систем в пакете СМ-ДЭС

Для проведения статистического моделирования надежности систем необходимо задать режимы исследования в соответствии с рисунком 5.14, а также условия окончания моделирования, выбрав пункт «Настройки» раздела «Сервис» главного меню пакета СМ-ДЭС (см. рисунок 5.5).

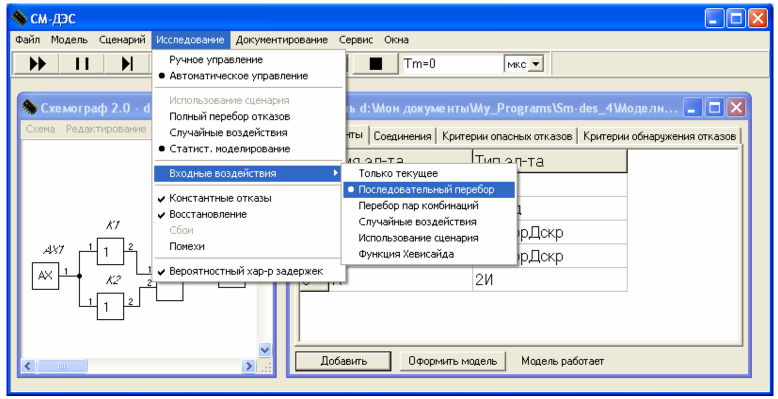
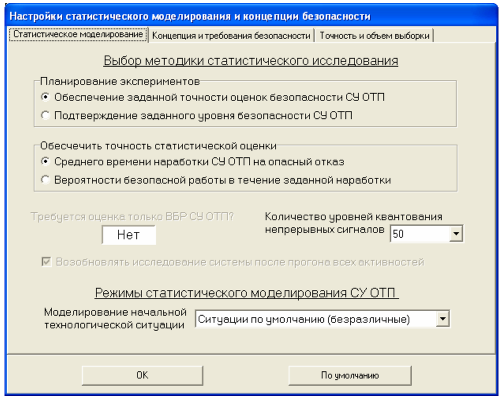
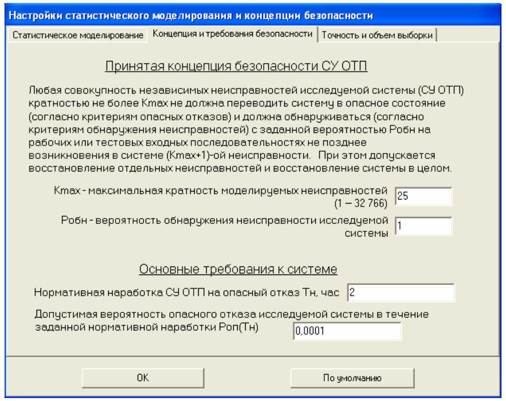


Рисунок 5.14 – Задание режимов статистического моделирования надежности

На закладке «Статистическое моделирование» необходимо выбрать условия окончания моделирования для обеспечения заданной точности средней наработки системы до отказа (рисунок 5.15, *а*). На закладке «Концепция и требования безопасности» следует задать интересующую наработку системы (например, 2 ч, см. рисунок 5.15, *б*), а на закладке «Точность и объем выборки» – абсолютное значение точности оценки средней наработки системы до отказа и доверительную вероятность (рисунок 5.15, *в*).

а) 

б) 

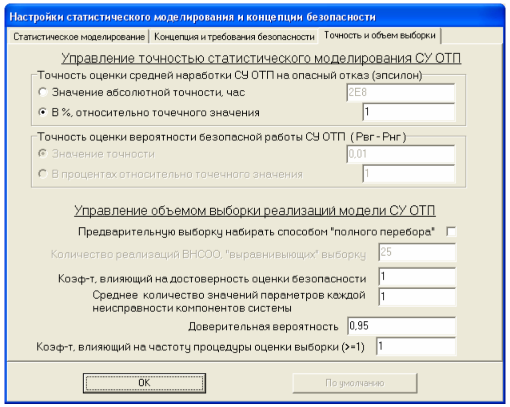
в) 

Рисунок 5.15 – Задание условий проведения и окончания статистического моделирования надежности

Для запуска процедуры статистического моделирования следует нажать кнопку  (пуск) на панели управления моделированием. В ходе моделирования в специальном окне «опасных неисправностей» (рисунок 5.16) будет отображаться информация об отказах системы (модельное время и список отказов элементов). С целью увеличения скорости моделирования целесообразно отменить документирование информации об отказах (убрать метку в пункте «Опасные неисправности» раздела «Документирование» главного меню, см. рисунок 5.16).

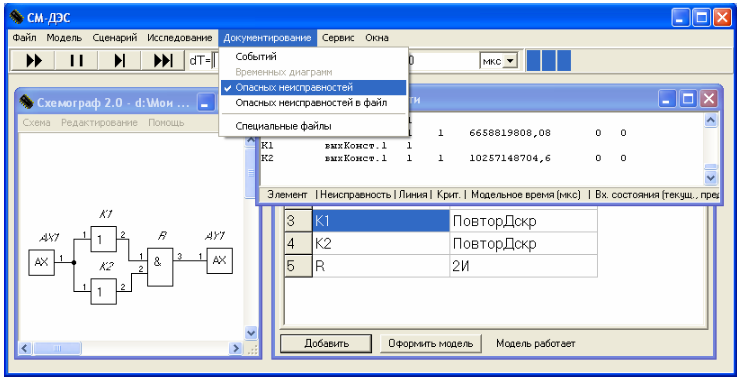


Рисунок 5.16 – Документирование событий, связанных с отказом исследуемой системы

В ходе и по окончании моделирования в СМ-ДЭС можно отслеживать информацию о статистическом законе распределения и оценках числовых характеристик наработки модели системы до отказа (рисунок 5.17), выбрав пункт «Анализ результатов» из раздела «Сервис» главного меню пакета (см. рисунок 5.5).

По результатам статистического моделирования в окне «Сообщения и предупреждения» (рисунок 5.18) предоставляется итоговый отчет о значении основных показателей надежности системы:

- количество полученных реализаций наработки имитационной модели системы до отказа;
- точечная и интервальная оценки средней наработки системы до отказа (МО);
- точечные оценки стандартного отклонения (СКО) наработки системы до отказа и вероятности безотказной работы.

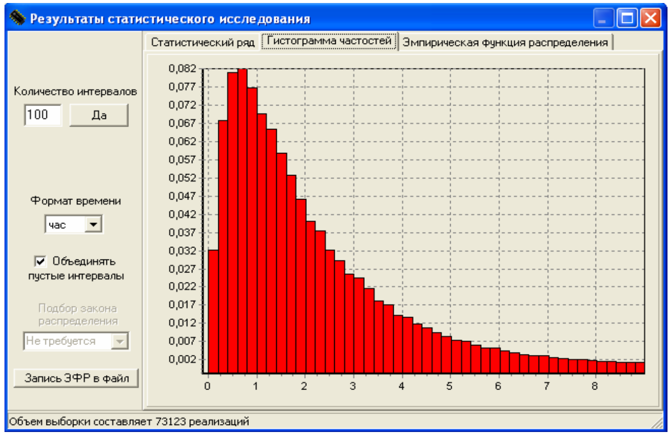


Рисунок 5.17 – Окно статистического анализа наработки модели системы до отказа

а)
б)

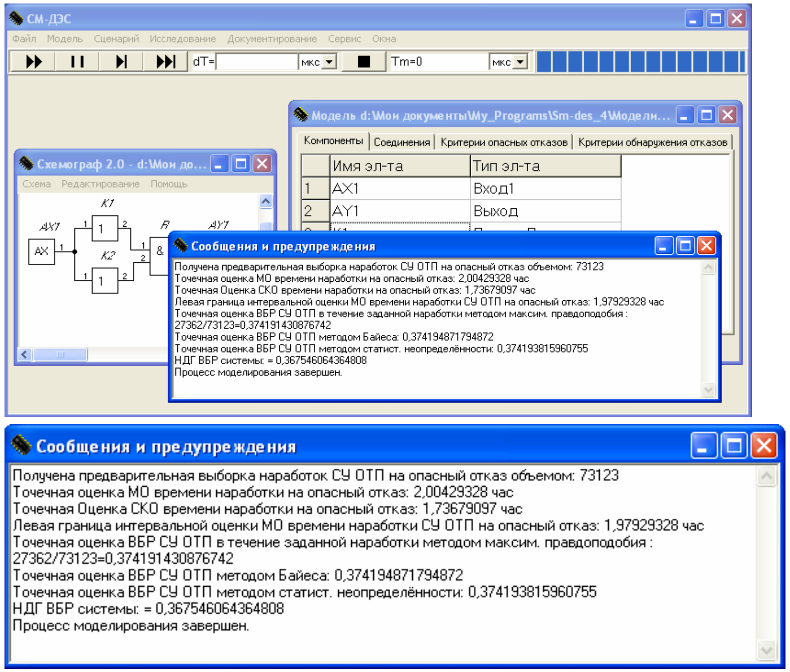


Рисунок 5.18 – Итоговый отчет о значениях основных показателей надежности системы

5.4 Пример статистического моделирования безотказности дублированной системы с различными вариантами резервирования в пакете СМ-ДЭС

Рассмотрим пример оценки показателей безотказности дублированной системы с различными вариантами резервирования (см. рисунок 3.15) с невосстанавливаемыми и восстанавливаемыми подсистемами методом статистического моделирования в пакете СМ-ДЭС.

Исходные данные для построения имитационной модели системы с нагруженным резервом аналогичны исходным данным тестового примера из п. 3.4.2:

- дублированные подсистемы идентичны;
- восстанавливаются двумя бригадами (если подсистемы предполагаются восстанавливаемыми);
- время безотказной работы каждой подсистемы подчиняется экспоненциальному закону распределения с математическим ожиданием 1,5 ч (см. приложение А, п. А.3);
- время восстановления подчиняется экспоненциальному закону с математическим ожиданием 1 ч.

Логическая модель безотказной работы дублированной системы с нагруженным резервом представлена на рисунке 5.2, *б*. Технология построения ее имитационной модели в пакете СМ-ДЭС приведена в п. 5.3.3, а технология организации статистического моделирования – в п. 5.3.4. Для указания (или отмены) возможности восстановления подсистем необходимо поставить (или убрать) метку «Восстановление» в разделе «Исследование» главного меню пакета СМ-ДЭС (см. рисунок 5.14).

Копия экрана пакета СМ-ДЭС с результатами моделирования безотказности дублированной системы с нагруженным резервом и невосстанавливаемыми подсистемами приведена на рисунке 5.19, а с восстанавливаемыми подсистемами – на рисунке 5.20. Значения оценок основных показателей безотказности системы сведены в таблицу 5.2.

Результаты моделирования безотказности дублированной системы с облегченным резервом и невосстанавливаемыми подсистемами представлены на рисунке 5.21. При моделировании предполагалось, что наработка до отказа резервной подсистемы в ненагруженном режиме подчиняется экспоненциальному закону распределения с математическим ожиданием 3 ч, а в нагруженном режиме – экспоненциальному закону распределения с математическим ожиданием 1,5 ч.

Для системы с ненагруженным резервом результаты моделирования безотказности представлены на рисунках 5.22 (вариант с невосстанавливаемыми подсистемами) и 5.23 (вариант с восстанавливаемыми подсистемами).

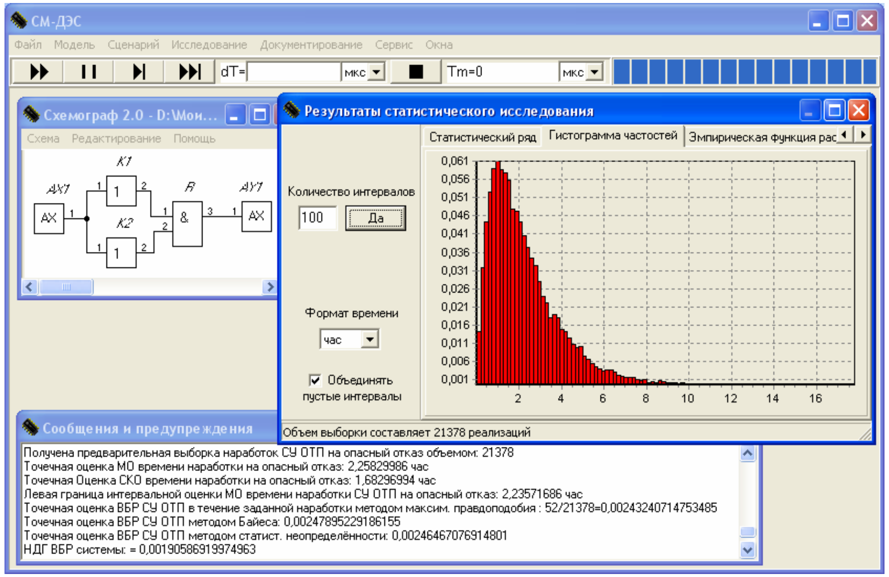


Рисунок 5.19 – Результаты статистического моделирования дублированной системы
с нагруженным резервом и невосстанавливаемыми подсистемами

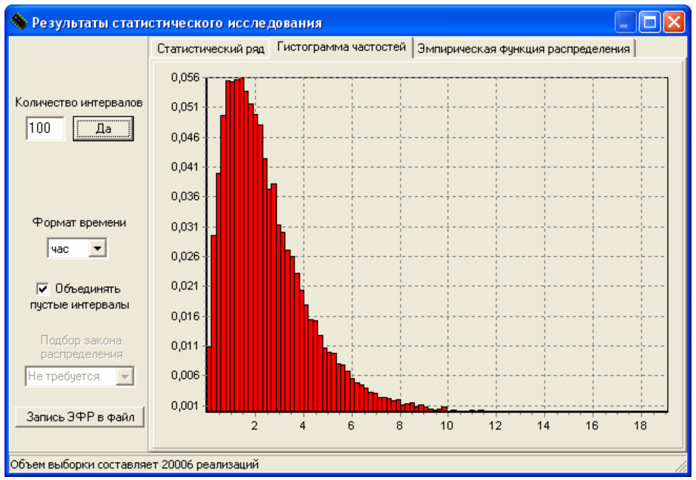


Рисунок 5.20 – Гистограмма наработки до отказа имитационной модели
дублированной системы с нагруженным резервом
и восстанавливаемыми подсистемами

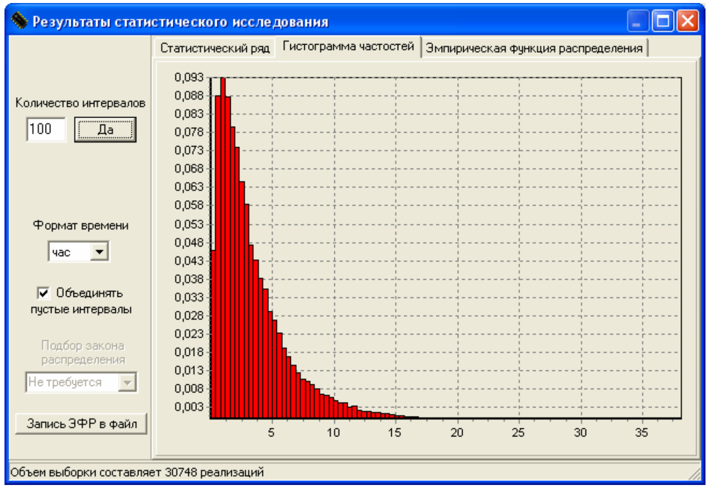


Рисунок 5.21 – Гистограмма наработки до отказа
имитационной модели дублированной системы
с облегченным резервом и невосстанавливаемыми подсистемами

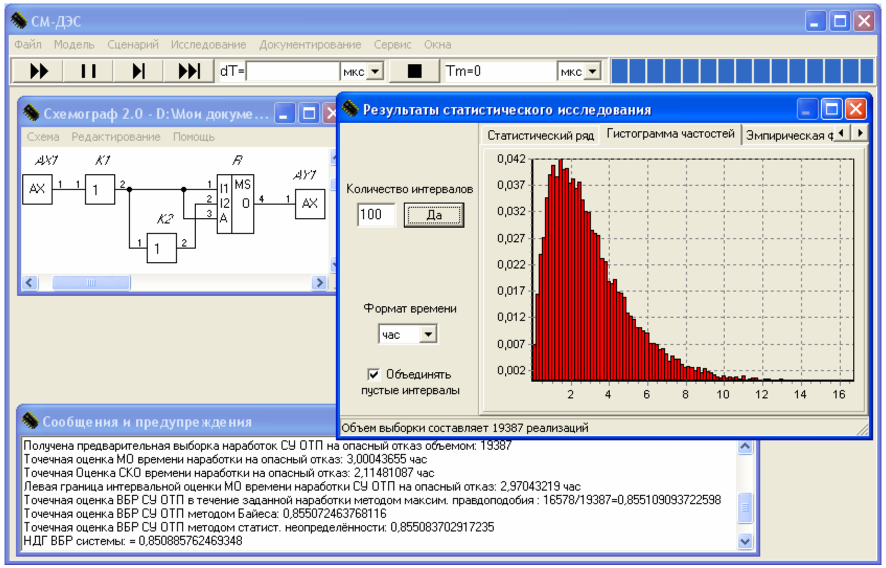


Рисунок 5.22 – Результаты статистического моделирования дублированной системы
с ненагруженным резервом и невосстанавливаемыми подсистемами

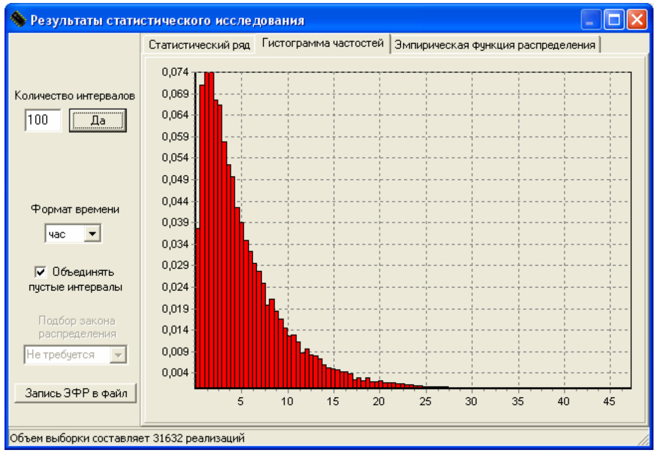


Рисунок 5.23 – Гистограмма наработки до отказа
имитационной модели дублированной системы
с ненагруженным резервом и восстанавливаемыми подсистемами

Значения оценок основных показателей безотказности дублированной системы с различными вариантами резервирования и восстановления сведены в таблицу 5.2, а их сравнительный анализ представлен на рисунке 5.24.

Таблица 5.2 – **Оценки основных показателей безотказности дублированной системы с различными вариантами резервирования и восстановления подсистем**

Оценка показателя	Резерв				
	нагруженный	облегченный	ненагруженный	нагруженный	ненагруженный
	без восстановления			с восстановлением	
Объем выборки	21378	20006	19387	30748	31632
Средняя наработка до отказа, ч	2,2582999	2,4817432	3,0004366	3,3506177	5,2220839
Нижняя 95%-ная доверительная граница средней наработки до отказа, ч	2,2357169	2,4569258	2,9704322	3,3171115	5,1698630
Стандартное отклонение наработки до отказа, ч	1,6829699	1,7905464	2,1148109	2,9964558	4,7364546
P(0,5)	0,9215081	0,9373188	0,954093	0,9289385	0,9603882
P(1)	0,7650388	0,8028591	0,8551091	0,8091908	0,8842944
P(2)	0,4598185	0,5182945	0,6157219	0,5870301	0,7302731
P(3)	0,2536720	0,3025592	0,4050137	0,4156693	0,5916161
P(5)	0,0698382	0,0908727	0,1555166	0,2111032	0,3895739

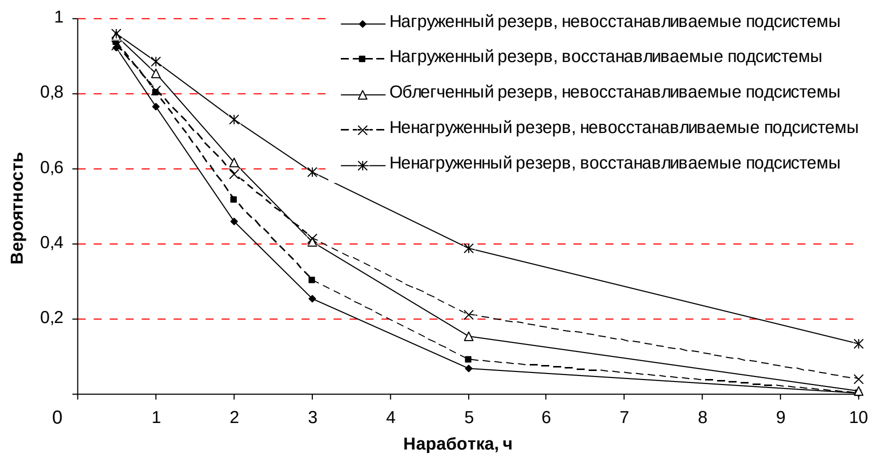


Рисунок 5.24 – Сравнительный анализ вероятности безотказной работы
дублированной системы с различными вариантами резервирования и восстановления

Выводы: оценка средней наработки дублированной системы в нагруженным резервом и восстанавливаемыми подсистемами до отказа (3,3506177 ч) в пределах заданной точности совпадает с теоретическим значением (3,375 ч), полученным марковским методом в п. 3.4.6. Значения оценок вероятностей безотказной работы системы (см. таблицу 5.2) также практически совпадают с истинными значениями (см. п. 3.4.6).

Следует также отметить, что определение значений показателей надежности резервированных восстанавливаемых систем аналитическими методами часто представляет собой сложную математическую задачу (например, для систем с облегченным или ненагруженным резервом, а также когда наработка до отказа элементов системы не подчиняется экспоненциальному распределению) [40]. Использование же имитационного и статистического моделирования является достаточно универсальным подходом к оценке показателей надежности широкого класса сложных технических систем.