

личии экспериментально полученной температурной зависимости от времени можно находить величину квадрата отклонения теоретической температуры от экспериментальной. Варьируя σ , можно с некоторой точностью найти минимум квадрата отклонения. В качестве σ принимается значение, соответствующее этому минимуму. Так как зависимость от σ монотонная, то такой минимум будет единственным.

Предлагается метод, основанный на построении регуляризующих алгоритмов (использовании методов решения обратных некорректных задач).

Из граничного условия (1) можно выразить коэффициент внешней теплоотдачи, т. е. представить в виде линейного операторного уравнения I рода, в правой части которого – неизвестный коэффициент внешней теплоотдачи σ . Полученная задача будет некорректной, т. к. при ее решении нужно находить производную по внутренней нормали в точке границы от экспериментальных данных. Как известно, эта задача является неустойчивой. Для решения требуется знать температурную зависимость в двух близлежащих точках, расположенных по внутренней нормали к точке границы. Так как мы имеем температуру как функцию времени, целесообразно провести осреднение по времени и полученное среднее приравнять значению коэффициента внешней теплоотдачи σ .

Предложенные алгоритмы позволяют найти коэффициент теплоотдачи с точностью, достаточной для определения температурной зависимости в точках стальной заготовки и подобных тел, для которых имеет место теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

УДК 539.4

ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ О ВНЕДРЕНИИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

А. Г. ГОРШКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

В рамках плоской постановки рассматривается нестационарная контактная задача об ударе абсолютно твердого выпуклого тела (ударника) по упругому полупространству. Контакт происходит в условиях свободного проскальзывания. Решение определяется в прямоугольной декартовой системе координат Oxy . Начало системы координат совпадает с точкой первоначального контакта, ось Oy направлена в глубь полупространства, а Ox – вправо вдоль невозмущенной граничной поверхности полупространства. В начальный момент времени $\tau = 0$ полупространство находится в невозмущенном состоянии, а ударник движется вертикально с некоторой начальной скоростью v_0 . С использованием интегральных связей нормальных перемещений границы полупространства с контактным давлением задача сводится к системе трех функциональных уравнений относительно неизвестного контактного давления, глубины погружения ударника и ширины области контакта. Основное разрешающее уравнение следует из граничных условий. До разрешающей системы оно дополняется уравнением движения ударника, записанным в интегральной форме и геометрическим соотношением, определяющим границу области контакта из условия пересечения поверхностей полупространства и ударника:

$$\int_{0-b(t)}^{\tau} \int_{-b(t)}^{b(t)} G(x-\xi, \tau-t) p(\xi, t) d\xi dt = f(x) - 1 + h(\tau), \quad (1)$$

$$h(\tau) = v_0 \tau + \frac{1}{m} \int_0^{\tau} dt \int_{-b(t)}^{b(t)} (\tau-t) p(x, t) d\xi, \quad (2)$$

$$b(\tau) = f^{-1}[1 - h(\tau)]. \quad (3)$$

Здесь $G(x, \tau)$ – функция влияния упругой изотропной полуплоскости; $p(x, \tau)$ – контактное давление; $h(\tau)$ – глубина погружения ударника как абсолютно твердого тела; $b(\tau)$ – полуширина области контакта; m – погонная масса ударника.

Основное разрешающее уравнение представляет собой двумерное сингулярное интегральное уравнение с переменными пределами интегралов. Особенности его ядра имеют порядок -1 и сосредоточены на фронте волны Рэлея. Замена переменных в интеграле приводит основное интегральное уравнение к системе двух одномерных интегральных уравнений:

$$\int_{-1}^1 \frac{g(u)}{u^2 - c_R^2} P(u; x, \tau) du = \pi w(x, \tau), \quad (4)$$

$$\int_0^{\beta(u; x, \tau)} p(r, u; x, t) dr = P(u; x, \tau), \quad (5)$$

$$g(u) = \begin{cases} g_1(u), & |u| \leq \eta \\ g_2(u), & \eta < |u| \leq 1 \end{cases}, \quad g_1(u) = \frac{1}{\eta^4} \frac{(\eta^2 u^2 - 2)^2 \sqrt{1 - u^2}}{(u^4 - 2\alpha^2 u^2 + \beta^2)},$$

$$g_2(u) = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{4(1 - u^2) \sqrt{1 - \eta^2 u^2}}{(u^4 - 2\alpha^2 u^2 + \beta^2)}.$$

В плоскости комплексного переменного z с разрезом вдоль действительной оси Ox от $x = -1$ до $x = 1$ введем функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t^2 - z^2} dt. \quad (6)$$

Ее значения $\Phi_+(x)$ на верхнем берегу разреза и $\Phi_-(x)$ – на нижнем связаны между собой следующими формулами:

$$\Phi_+(x) + \Phi_-(x) = 2\Phi(x), \quad (7)$$

$$\Phi_-(x) - \Phi_+(x) = \frac{1}{2x} [f(-x) + f(x)]. \quad (8)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t^2 - x^2} = \pi F(x). \quad (9)$$

С учетом (7) уравнение (9) заменяется эквивалентным ему функциональным уравнением относительно функции $\Phi(z)$

$$\Phi_+(x) + \Phi_-(x) = -iF(x). \quad (10)$$

Введем в рассмотрение новую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2z} \sqrt{z^2 - 1} \Phi(z), \quad (11)$$

$$\sqrt{z^2 - 1}_+ : \sqrt{z^2 - 1}_+ = i\sqrt{1 - x^2}, \quad \sqrt{z^2 - 1}_- = -i\sqrt{1 - x^2}.$$

Умножим (10) на $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x}$ и используем (11)

$$\Psi_+(x) - \Psi_-(x) = -i \frac{F(x)}{2x} \sqrt{x^2 - 1}. \quad (12)$$

Если $F(x) = \tilde{F}(x) + \tilde{F}(-x)$, тогда, учитывая формулу (8), одно из решений (12)

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \tilde{F}(t)}{t^2 - z^2} dt. \quad (13)$$

Из асимптотического выражения для $\Psi(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ следует, что частное решение (12) $\Psi^{(0)}(z) = 0$.

С учетом вышеизложенного решение интегрального уравнения (4) имеет вид

$$P(u, x, \tau) = \frac{2uw(x, \tau)}{\pi g(u) \sqrt{1-u^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2 - u^2} dt. \quad (14)$$

Таким образом, исследование особенностей решения двумерного сингулярного интегрального уравнения (1) сводится к исследованию решения одномерного интегрального уравнения типа Вольтера (5).

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Ю. В. ГРОМЫКО

Белорусский государственный университета транспорта

Для описания вынужденных колебаний круговой трехслойной пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомое решение $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде следующих разложений в ряд по системам собственных функций:

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t);$$

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr. \quad (1)$$

Выражения для $q_n(t)$ получено в виде:

$$\int_0^1 q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^1 v_m v_n r dr.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций

$$\int_0^1 v_m v_n r dr = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^1 q(r, t) v_n r dr. \quad (2)$$

Уравнение для определения функции $T_n(t)$ в этом случае имеет вид

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n.$$