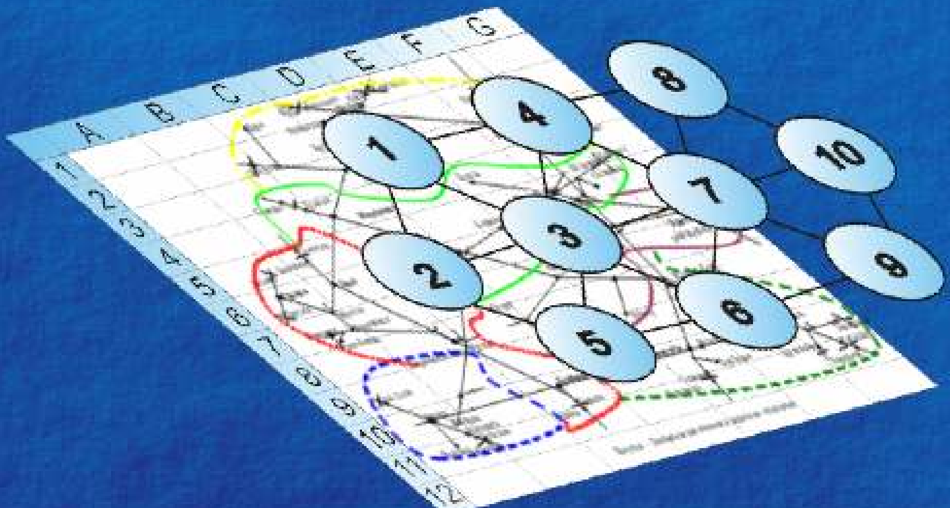
Д. И. БОЧАРОВ, И. Н. КРАВЧЕНЯ

Применение методов математического моделирования при решении производственных задач



Гомель 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

Д. И. БОЧАРОВ, И. Н. КРАВЧЕНЯ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Учебно-методическое пособие для студентов
строительного факультета

Одобрено методической комиссией строительного факультета

Гомель 2009

УДК 519.21.001.57(075.8)
ББК 22.171
Б86

Рецензенты: зав. кафедрой «Математические проблемы управления» д-р техн. наук, профессор *И. В. Максимей* (УО «ГГУ им. Ф. Скорины»); зав. кафедрой «Строительство и эксплуатация дорог» канд. техн. наук, доцент *П. В. Ковтун* (УО «БелГУТ»).

Бочаров, Д. И., Кравченя, И. Н.

Б86 Применение методов математического моделирования при решении производственных задач : учеб.-метод. пособие для студентов строительного факультета / Д. И. Бочаров, И. Н. Кравченя ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2009. – 191 с.

ISBN 978-985-468-594-6

Содержит теоретические сведения по основным разделам курса «Исследование операций», примеры решения задач, рабочую программу, задания и указания по выполнению расчетно-графических и лабораторных работ. Включает в себя разделы линейного и целочисленного программирования, управления запасами, а также представлена методика решения задач линейного программирования с помощью табличного редактора Excel.

Предназначено для студентов всех специальностей строительного факультета. Может быть использовано при курсовом и дипломном проектировании студентами технических специальностей, инженерами, аспирантами и преподавателям в их научной и исследовательской работе.

УДК 519.21.001.57(075.8)
ББК 22.171

ISBN 978-985-468-594-6

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время изучение и использование методов математического моделирования является важным этапом при подготовке квалифицированных инженерных и научных кадров, повышении уровня математических знаний и их использования в практической работе при модернизации производства и применении новых технологий, опирающихся на математические методы и моделирование на ЭВМ, которые объединяются под общим названием «Исследование операций».

Исследование операций как наука ведет отсчет своей истории с 40-х годов XX столетия, когда впервые была предпринята научная попытка поиска ответов на вопросы о том, как наилучшим (оптимальным) образом организовать выполнение тех или иных операций.

Стремительное и успешное развитие исследования операций в последующие годы объясняется тем, что к моменту зарождения этой науки уже существовала возможность использования для реализации предлагаемых алгоритмов быстродействующих ЭВМ. Это позволяло в считанные минуты получать ответы на все интересующие исследователей вопросы и таким образом оптимизировать выполнение важных операций.

В настоящее время исследование операций – активно развивающаяся наука, содержащая большое число разделов и находящая применение в самых различных областях человеческой деятельности.

Одним из важнейших разделов исследования операций является **математическое программирование,** а наиболее разработанной составной его частью – ***линейное программирование***.

Впервые постановка задачи линейного программирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж, дана в работе советского математика А. Н. Толстого (1930 г.).

В 1939 г. советский ученый Л. В. Канторович указал общий метод (метод разрешающих множителей) решения задач, связанных с составлением оптимального плана при организации производственных процессов (в связи с решением задачи оптимального распределения работы между станками фанерного треста в Ленинграде). Им же совместно с М. К. Гавуриным в

1949 г. разработан *метод потенциалов*, используемый при решении транспортных задач. В последующих работах Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, А. Л. Лурье, А. Г. Аганбегяна, Д. Б. Юдина, Е. Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

В 1949 г. американским математиком Дж. Данцигом был опубликован основной метод решения задач линейного программирования – симплекс-метод. Термин «линейное программирование» впервые появился в 1951 г. в работах Дж. Данцига и Т. Купманса.

В конце 60-х годов XX столетия как самостоятельная и важная часть математического программирования сформировалось ***дискретное* (*целочисленное*) *программирование***. Процесс формирования был фактически завершен после выхода в свет в 1969 г. монографии А. А. Корбута и Ю. Ю. Финкельштейна «Дискретное программирование». Это была первая в мировой научной литературе книга по дискретной оптимизации, ее название дало имя целому научному направлению в математическом программировании. Хотя идея одного из методов целочисленного программирования – венгерского метода была высказана венгерским математиком Б. Эгервари (отсюда и название метода) задолго до возникновения теории линейного программирования (1931 г.). Длительное время работа Б. Эгервари оставалась малоизвестной. Заслуга ее «открытия» принадлежит Куну, который в 1953 г. перевел ее на английский язык. В дальнейшем Кун развил идею Б. Эгервари и предложил метод, названный им венгерским, для решения проблемы выбора (частный случай транспортной задачи). В 1957 г. венгерский метод был усовершенствован Манкресом, который перенес его на произвольную транспортную задачу.

К числу наиболее молодых разделов исследования операций относится теория ***управления запасами***, хотя отдельные результаты ее получены достаточно давно. Впервые подобная задача применительно к определению резервных денежных фондов была математически сформулирована Ф. Эджуортом в 1888 г. и Ф. Харрисом в 1915 г., в работах которых исследовалась простая оптимизационная модель для определения экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта. В начале XX века появился ряд статей по определению оптимального объема заказа – К. Стефаник-Алмейер (1927 г.), К. Андлер (1929 г.) и Р. Уилсон (1934 г.) и только с середины 50-х гг. XX века началось формирование теории управления запасами как научной дисциплины.

Таким образом, **математическое программирование** представляет собой класс методов, предназначенных для отыскания экстремума заданной функции при определенных ограничениях.

В общем виде *задача математического программирования* может быть записана следующим образом: определить такие значения переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, которые доставляют экстремальное значение (т. е. максимум или минимум) функции

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max (\min) \qquad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le; =; \ge\}b_i, \qquad i = \overline{1, m}. \qquad (2)$$

Величины $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, так называемые **переменные** задачи, представляют собой возможные варианты решения, из которых требуется выбрать наилучший вариант.

Функция (1) называется **целевой функцией**, поскольку она отражает цель оптимизации, т. е. определяет, в каком смысле лучшее решение нас интересует.

Соотношения (2) определяют условия (ограничения) задачи, в которых необходимо принимать решение.

Например, если рассмотреть задачу определения оптимального плана производства продукции различных видов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, то соотношения (2) описывают имеющиеся ограничения на план выпуска продукции, связанные, например, с существующими запасами сырья, ресурсами, технологическими возможностями производства, лимитами энергетических и трудовых ресурсов и т. д.

Возможные решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют **планами** задачи.

Набор переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий всем соотношениям системы (2) (т. е. всем ограничениям задачи), называется **допустимым решением задачи** или **допустимым планом**.

Допустимое решение $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ называется **оптимальным решением задачи** (1)–(2), или **оптимальным планом**, если оно доставляет экстремум целевой функции задачи.

В зависимости от типа функций $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = \overline{1, m}$ различают следующие важнейшие классы задач математического программирования.

Задача (1)–(2) называется задачей ***линейного программирования***, если все функции $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = \overline{1, m}$ являются линейными функциями относительно переменных x_j, $j = \overline{1, n}$. Методы решения задач линейного программирования применяются на промышленных предприятиях при оптимизации производственной программы, распределении ее по цехам, участкам и по временным интервалам, при ассортиментной загрузке оборудования, в задачах текущего, перспективного и технологического планирования, при планировании грузопотоков, определении плана товарооборота и его распределении, составлении оптимальных смесей, решении транспортных и производственно-транспортных задач и т. д.

Если хотя бы одна из функций $f(X)$ или $g_i(X)$, $i=\overline{1,m}$ – нелинейна, то задача (1)–(2) называется задачей ***нелинейного программирования***. Нелинейное программирование используется при расчете оптимальной партии выпуска деталей, управлении комплектными поставками и запасами, распределении ограниченных ресурсов, оптимизации некоторых показателей производственно-экономической деятельности и т. д.

Если на переменные x_j, $j=\overline{1,n}$ наложено условие дискретности (например, целочисленности их значений), то имеем задачу ***дискретного (целочисленного) программирования***. Его методами решаются задачи оптимизации выпуска неделимой продукции, маршрутизации, календарного планирования, управления поставками при заданных транзитных нормах отпуска, размещения производственно-складской структуры и т. п.

Если целевая функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет специальную структуру, являясь *аддитивной* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ или *мультипликативной* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, то задача (1)–(2) *называется* ***задачей динамического программирования***. Таким методом решаются задачи текущего и перспективного планирования, управления производством, запасами и поставками, распределения ограниченных ресурсов, оптимального размещения капитальных вложений, замены оборудования и др.

В пособии освещены методы, которые используются в процессе решения и анализа производственных задач. Пособие содержит теоретические сведения и подробные примеры решения задач по основным разделам курса «Исследование операций», учебная программа которого представлена в приложении А. Для выполнения лабораторных работ по курсу на персональном компьютере приведена методика решения вышеназванных задач с помощью табличного редактора Excel. Задания и указания по выполнению расчетно-графических и лабораторных работ содержатся в приложении Б.

1 РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Примеры производственных задач и постановка задачи линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – раздел математического программирования, содержащий методы отыскания экстремума (максимума или минимума) линейных функций нескольких переменных при линейных ограничениях, наложенных на переменные. В зависимости от типа решаемых задач методы ЛП можно разделить на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи ЛП. Специальные методы учитывают особенности целевой функции и системы ограничений.

Рассмотрим примеры производственных задач, которые могут быть решены методами линейного программирования.

Задача оптимального использования ресурсов. Имеется m видов ресурсов, объемы которых заданы вектором $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$. Задана матрица $A=||a_{ij}||$, где a_{ij} – норма расхода i-го ресурса ($i=\overline{1,m}$) на производство единицы j-го вида продукции ($j=\overline{1,n}$). Прибыль от выпуска единицы j-го вида продукции составляет p_j. Требуется определить план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий прибыль предприятия при заданных ресурсах.

Математическая модель задачи может быть записана в следующем виде:

$$z=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max \tag{1.1}$$

при ограничениях:

- на затраты ресурсов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{1.2}$$

условие неотрицательности

$$x_j \ge 0, \qquad j=\overline{1,n}. \tag{1.3}$$

В качестве критерия оптимальности в данной задаче также могут быть приняты: минимум затрат на производство продукции, максимум выпуска продукции в стоимостном выражении, максимум использования оборудования и др. Ограничения могут быть связаны с фондом времени работы оборудования, ассортиментом выпускаемой продукции.

Задача распределения парка машин механизированной колонны по участкам земляных работ. Имеется механизированная колонна, располагающая парком из m типов машин. Задана производственная программа колонны на требуемый промежуток времени, в течение которого она должна выполнить земляные работы на n участках. Объем работ на каждом участке равен v_j ($j=\overline{1,n}$). Фонд рабочего времени механизмов каждого типа в течение планируемого периода составляет d_i ($j=\overline{1,n}$) (машино-смен). Известны также сменная производительность машины i-го типа на j-м участке работ p_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) и затраты на разработку 1 м^3 грунта на j-м участке с использованием машины i-го типа c_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$). Требуется найти такой план распределения парка машин механизированной колонны по участкам работ, который обеспечивает выполнение всех работ в полном объеме и с минимальными суммарными приведенными затратами.

Обозначим искомую продолжительность работы в сменах машины i-го типа на j-м участке через x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$).

Математическая модель задачи может быть записана в следующем виде:

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}c_{ij}x_{ij}\to\min \tag{1.4}$$

при ограничениях:

- на объем работ на каждом участке, который должен быть выполнен полностью

$$\sum_{i=1}^{m}p_{ij}x_{ij}=v_j,\quad j=\overline{1,n}; \tag{1.5}$$

- на фонд рабочего времени машин

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le d_i,\quad i=\overline{1,m}; \tag{1.6}$$

условие неотрицательности

$$x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.7}$$

Задача размещения звеносборочных баз при ведении укладки пути на рассредоточенных объектах. Строительный трест, ведущий путеукладочные работы на рассредоточенных объектах с небольшими объемами работ, имеет m звеносборочных баз, которые возможно расположить на обслуживаемой территории. Планом предусмотрено n мест укладки пути с объемами работ b_j ($j=\overline{1,n}$). Себестоимость сборки и укладки звеньев пути в зависимости от объема сборки на базе составляет c_i ($i=\overline{1,m}$) ден. ед., стоимость перевозки 1 км звеньев пути от i-й базы до j-го места укладки пути – t_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) ден. ед.

В условиях ведения укладки пути на рассредоточенных объектах возникает необходимость в определении оптимального размещения звеносборочных баз строительных трестов, т. е. такого размещения, при котором суммарные затраты на весь технологический комплекс путеукладочных работ будут минимальными.

Обозначим через x_i ($i=\overline{1,m}$) объемы сборки и укладки звеньев пути на i-й базе, а через x_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) – объемы звеньев, собранных на i-й базе и укладываемых на j-м объекте.

Математическая модель задачи может быть записана в следующем виде:

$$z=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_{ij}\to\min \tag{1.8}$$

при ограничениях:

- все собранные на i-й базе звенья пути должны быть уложены на одном или нескольких объектах

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\quad i=\overline{1,m}; \tag{1.9}$$

- объем укладки пути на j-м объекте должен быть обеспечен поставкой звеньев с одной или нескольких баз

$$b_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij},\quad j=\overline{1,n}; \tag{1.10}$$

- общий потребный объем механизированной сборки и укладки пути должен быть равен объему сборки и укладки по всем звеносборочно-укладочным базам

$$\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}x_i; \tag{1.11}$$

условие неотрицательности

$$x_i\ge 0,\quad x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.12}$$

В общем виде задача ЛП сводится к нахождению некоторой совокупности значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющих линейной функции цели экстремальное значение и удовлетворяющих системе ограничений в виде равенств или неравенств.

Математическая модель задачи ЛП формулируется следующим образом: найти план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который доставляет экстремум функции

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{1.13}$$

при системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = \overline{1, m_1}; \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \tag{1.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ \ i = \overline{m_2 + 1, m}; \tag{1.16}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, r},\ \ r \le n\ . \tag{1.17}$$

Линейная функция (1.13) называется ***целевой функцией***; множество планов X, удовлетворяющих системе ограничений (1.14)–(1.17), называется ***множеством допустимых решений*** Ω, $X \in \Omega$. Допустимый план $X \in \Omega$, доставляющий целевой функции (1.13) экстремальное значение, называется ***оптимальным***.

Если целевая функция подлежит максимизации, а все ограничения задачи имеют вид равенств и на все переменные величины наложено условие неотрицательности $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}$, то говорят, что задача представлена в ***канонической форме записи***:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = \overline{1, m}; \tag{1.18}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1, n}.$$

Любую задачу линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования в канонической форме записи.

Правило приведения задачи линейного программирования к канонической форме записи состоит в следующем:

1) если в исходной задаче требуется минимизировать целевую функцию $z(X)$, то необходимо перейти от задачи на минимум к задаче на максимум. Очевидно, что максимизация целевой функции $z(X)$ на области допустимых решений $X \in \Omega$ эквивалентна задаче минимизации функции $-z(X)$ на той же области:

$$\max_{X \in \Omega} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\min_{X \in \Omega} \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right); \tag{1.19}$$

2) если среди ограничений есть неравенства, то необходимо перейти от ограничений в виде неравенств к ограничениям в виде равенств. Для этого вводят неотрицательные ***дополнительные переменные*** $x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$, которые прибавляются к левым частям ограничений (1.15) и вычитаются из левых частей ограничений (1.16). В целевую функцию (1.13) дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю;

3) если в исходной задаче на некоторые переменные x_j ($j = \overline{1, n}$) не наложено условие неотрицательности, то их представляют в виде разности неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j' - x_j'',\ \ j > r,\ x_j' \ge 0,\ \ x_j'' \ge 0. \tag{1.20}$$

1.2 Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для решения задач:

- с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;
- со многими переменными при условии, что их можно свести к задачам с двумя переменными.

Пусть задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min), \tag{1.21}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Каждое из неравенств (1.22) системы ограничений с геометрической точки зрения определяет на плоскости X_1OX_2 полуплоскость, ограниченную прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \; (i = \overline{1, m})$.

Поскольку полуплоскость является выпуклым множеством, а пересечение конечного числа выпуклых множеств также выпукло, то ***область допустимых решений*** Ω задачи ЛП является выпуклым множеством. Если же это множество ограничено, то оно называется ***многоугольником решений***.

Приведем несколько примеров областей допустимых решений задачи ЛП (рисунок 1.1).

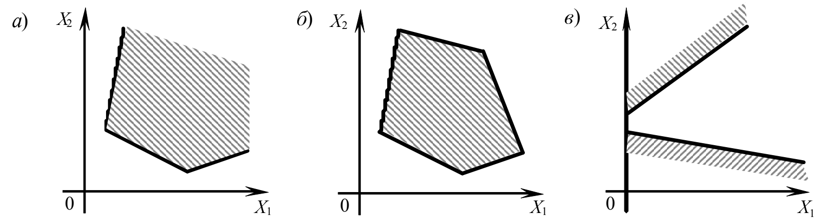


Рисунок 1.1 – Схемы различных областей допустимых решений:
а – неограниченная область; *б* – выпуклый многоугольник; *в* – пустое множество

Целевая функция (1.21) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, называемых ***линиями уровня целевой функции***, каждой из которых соответствует определенное значение целевой функции z. Найдем частные производные целевой функции по x_j: $\partial z / \partial x_j = c_j \, (j = 1, 2)$.

Вектор $\vec{C} = (\partial z / \partial x_1; \partial z / \partial x_2) = (c_1; c_2)$ – это вектор наискорейшего возрастания целевой функции, ***вектор градиентного направления***. Направление, противоположное направлению вектора $\vec{C}$: $-\vec{C} = (-c_1; -c_2)$, есть направление наискорейшего убывания целевой функции или ***антиградиентное***.

Графический метод решения задачи линейного программирования состоит в следующем. Выбираем произвольное положение линии уровня целевой функции z**,** например, $z = 0$. Перемещаем прямую $z = 0$ в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$. При некотором значении z эта прямая впервые коснется области допустимых решений Ω. В данной точке (или точках) целевая функция достигает минимума. При дальнейшем перемещении прямой z по направлению вектора $\vec{C}$ она коснется области допустимых решений Ω в последней точке (или точках). В данной точке (точках) целевая функция достигает максимума. Если же область Ω не ограничена, то сколько бы прямую ни перемещали в направлении вектора $\vec{C}$, она будет иметь общие точки с областью решений Ω. В этом случае целевая функция не ограничена.

Алгоритм графического решения задачи ЛП в случае двух переменных:

Шаг 1 Построить область допустимых решений Ω с учетом системы ограничений (1.22).

Шаг 2 Построить вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$ наискорейшего возрастания целевой функции – вектор градиентного направления.

Шаг 3 Провести произвольную линию уровня целевой функции z=const, перпендикулярную к вектору $\vec{C}$.

Шаг 4 При решении задачи на максимум перемещать прямую z=const в направлении вектора $\vec{C}$, пока она не коснется области допустимых решений Ω в последней точке. В случае решения задачи на минимум линию уровня целевой функции z=const перемещать в антиградиентном направлении до последней точки касания с областью допустимых решений Ω.

Шаг 5 Определить оптимальный план $X^* = (x_1^*; x_2^*)$. Возможны следующие случаи:

а) оптимальный план единственный. Тогда линия уровня и область допустимых решений Ω в крайнем положении будут иметь одну общую точку (рисунок 1.2: *а* – на max и min, *б* – на min);

б) оптимальных планов может быть бесконечное множество. В этом случае в крайнем положении линия уровня проходит через грань области Ω (рисунок 1.2: *б* – на max, *в* – на min);

в) целевая функция не ограничена. Линия уровня, сколько бы ее ни перемещали, будет иметь общие точки с областью допустимых решений Ω (рисунок 1.2: *в* – на max, *г* – на max и min);

г) задача решения не имеет. Область допустимых решений – пустое множество, т. е. система ограничений (1.17) несовместна (рисунок 1.2, *д*).

Шаг 6 Вычислить значение целевой функции $z^* = z(x_1^*; x_2^*)$ по формуле (1.16).

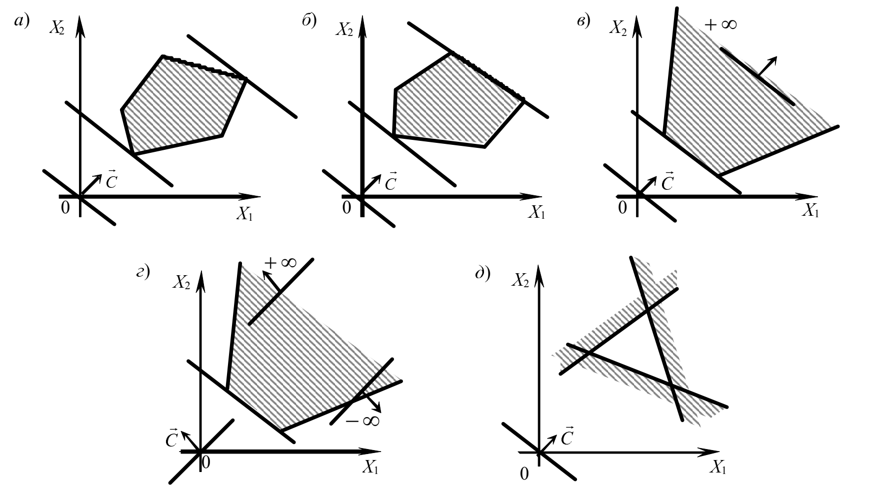


Рисунок 1.2 – Варианты ситуаций при решении задач ЛП графическим методом

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования графическим методом.

Пример 1.1

$z = x_1 + 2x_2 \to \max (\min)$,
$3x_1 - x_2 \geq 8$,
$-x_1 + 3x_2 \leq 16$,
$2x_1 - x_2 \leq 13$,
$x_1 + 4x_2 \geq 20$,
$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$.

С учетом системы ограничений построим множество допустимых решений Ω (рисунок 1.3).

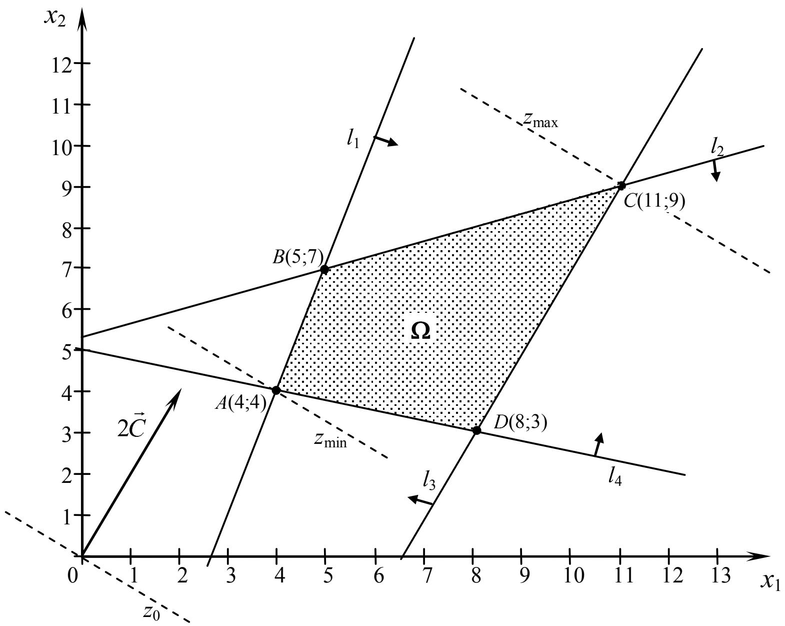


Рисунок 1.3 – Графическое решение задачи

Строим в системе координат x_1Ox_2 прямые :

$$l_1: \ 3x_1 - x_2 = 8;$$
$$l_2: \ -x_1 + 3x_2 = 16;$$
$$l_3: \ 2x_1 - x_2 = 13;$$
$$l_4: \ x_1 + 4x_2 = 20.$$

Изобразим полуплоскости, определяемые системой ограничений. Находим множество допустимых решений Ω как общую часть полученных полуплоскостей – четырехугольник *ABCD*.

Строим вектор градиентного направления $\vec{C} = (\partial z / \partial x_1; \partial z / \partial x_2) = (1; 2)$. Для большей наглядности построим вектор $2\vec{C} = (2; 4)$.

Строим произвольную линию уровня целевой функции, например $z = 0$, перпендикулярную к вектору $\vec{C}$. Перемещаем прямую $z = 0$ в направлении вектора $\vec{C}$ до последней точки ее пересечения с областью допустимых решений Ω. В точке *C* целевая функция достигает максимума. Находим координаты точки *C* – точки пересечения прямых l_2 и l_3 как решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} l_2 &: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 16, \\ 2x_1 - x_2 = 13. \end{cases} \\ l_3 &: \end{aligned}$$

Следовательно, $X^* = (11; 9)$.

Вычислим значение целевой функции $z_{max} = z(X^*) = 11 + 2 \cdot 9 = 29$.

Перемещаем эту прямую $z = 0$ в антиградиентном направлении до последней точки ее пересечения с областью допустимых решений Ω. В точке *A* целевая функция достигает минимума. Находим координаты точки *A* – точки пересечения прямых l_1 и l_4 как решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} l_1 &: \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 + 4x_2 = 20. \end{cases} \\ l_4 &: \end{aligned}$$

Следовательно, $X^* = (4; 4)$.

Вычислим значение целевой функции $z_{min} = z(X^*) = 4 + 2 \cdot 4 = 12$.

1.3 Пример решения задачи об оптимальной загрузке машин и механизмов графическим методом

Постановка задачи. На звеносборочной базе имеется двухконсольный козловой кран грузоподъемностью до 10 т и стреловой кран с двигателем внутреннего сгорания грузоподъемностью 6–25 т (в зависимости от вылета стрелы). С помощью этих машин за 8 часов необходимо произвести погрузку на платформы 800 рельсов типа Р50 и 600 рельсов типа Р65 длиной 25 п.м. Причем, один п.м рельсов типа Р50 имеет массу 50 кг, рельсов типа Р65 – 65 кг.

Двухконсольный козловой кран может погрузить рельсов типа Р50 150 т в час, рельсов типа Р65 – 180 т в час. Стреловой кран может погрузить рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 – 200 т в час.

Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т двухконсольным козловым краном рельсов типа Р50, – 10 ден. ед., рельсов типа Р65 – 12 ден. ед., стреловым краном рельсов типа Р50 – 15 ден. ед., рельсов типа Р65 – 18 ден. ед.

Требуется распределить загрузку между грузоподъемными машинами таким образом, чтобы они, работая одинаковое время (единым фронтом), выполнили заданный объем работ, и чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Обозначим через x_{11} и x_{12} объём работ (в тоннах) двухконсольного козлового крана по погрузке рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 соответственно, x_{21} и x_{22} – объём работ (в тоннах) стрелового крана по погрузке рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 соответственно.

Определим общий объем работ в тоннах по погрузке двух типов рельсов. Необходимо погрузить рельсов типа Р50 $0{,}05 \cdot 25 \cdot 800 = 1000$ т и рельсов типа Р65 $0{,}065 \cdot 25 \cdot 600 = 975$ т.

Условия задачи запишем в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – **Исходные данные задачи**

Вид машины i	Виды работы j		Лимит времени работы машин, ч
	Погрузка рельсов типа Р50	Погрузка рельсов типа Р65	
Двухконсольный козловый кран	150 10 x_{11}	180 12 x_{12}	8
Стреловой кран	200 15 x_{21}	200 18 x_{22}	8
Задание, т	1000	975	

Построим математическую модель задачи.

Целевая функция описывает затраты, связанные с выполнением заданного объема работ:

$$z = 10x_{11} + 12x_{12} + 15x_{21} + 18x_{22} \to \min$$

при ограничениях

- на лимит рабочего времени:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_{11}}{150} + \frac{x_{12}}{180} \le 8, \\ \frac{x_{21}}{200} + \frac{x_{22}}{200} \le 8, \end{aligned}\right\}$$

- на необходимость выполнить задание:

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} = 1000, \\ x_{12} + x_{22} = 975, \end{aligned}\right\}$$

условие неотрицательности $x_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, 2)$.

Для решения задачи графическим методом сведем задачу с четырьмя переменными к задаче с двумя переменными.

Исключаем из модели переменные x_{21} и x_{22}. Из ограничений-равенств имеем $x_{21} = 1000 - x_{11}$, $x_{22} = 975 - x_{12}$.

Подставив выражения для x_{21} и x_{22} в ограничения-неравенства и целевую функцию, получим задачу линейного программирования с двумя переменными x_{11} и x_{12}:

$$\begin{aligned} &z = -5x_{11} - 6x_{12} + 32550 \to \min \\ &6x_{11} + 5x_{12} \le 7200, \\ &x_{11} + x_{12} \ge 375, \\ &x_{11} \le 1000, \\ &x_{12} \le 975, \\ &x_{11} \ge 0, \\ &x_{12} \ge 0. \end{aligned}$$

Целевая функция $z = -5x_{11} - 6x_{12} + 32550$ достигает минимального значения при условии, что $z' = 5x_{11} + 6x_{12}$ принимает максимальное значение. Имеем задачу:

$$\begin{aligned} &z = 5x_{11} + 6x_{12} \to \max \\ &6x_{11} + 5x_{12} \le 7200, \\ &x_{11} + x_{12} \ge 375, \\ &x_{11} \le 1000, \\ &x_{12} \le 975, \\ &x_{11} \ge 0, \\ &x_{12} \ge 0. \end{aligned}$$

Решим задачу графическим методом.

С учетом системы ограничений построим множество допустимых решений Ω (рисунок 1.4). Строим в системе координат x_1Ox_2 прямые :

$$\begin{aligned} &l_1: \ 6x_{11} + 5x_{12} = 7200; \\ &l_2: \ x_{11} + x_{12} = 375; \\ &l_3: \ x_{11} = 1000; \\ &l_4: \ x_{12} \le 975. \end{aligned}$$

Изобразим полуплоскости, определяемые системой ограничений. Находим множество допустимых решений Ω как общую часть полученных полуплоскостей – многоугольник $ABCDEF$.

Строим вектор градиентного направления $\vec{C} = (\partial z / \partial x_1; \partial z / \partial x_2) = (5; 6)$. Для большей наглядности построим вектор $100\vec{C} = (500; 600)$.

Строим произвольную линию уровня целевой функции, например $z = 0$, перпендикулярную к вектору $\vec{C}$. Перемещаем прямую $z = 0$ в направлении вектора $\vec{C}$ до последней точки ее пересечения с областью допустимых решений Ω. В точке C целевая функция достигает максимума.

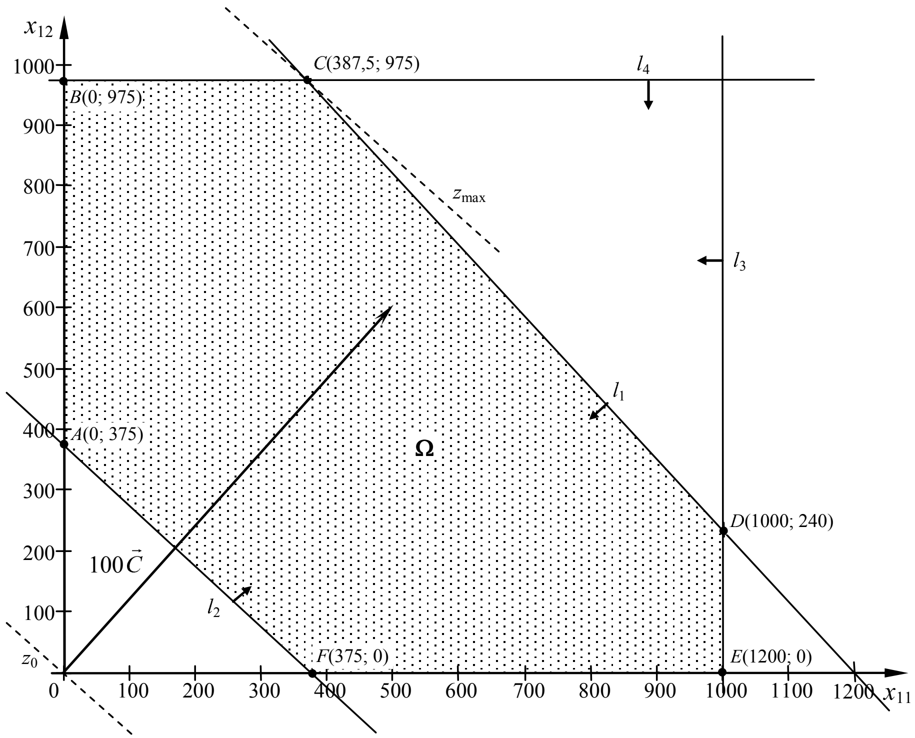


Рисунок 1.4 – Графическое решение задачи

Находим координаты точки C – точки пересечения прямых l_1 и l_4 как решение системы уравнений:

$$\begin{matrix} l_1: \\ l_4: \end{matrix} \begin{cases} 6x_{11} + 5x_{12} = 7200, \\ x_{12} = 975. \end{cases}$$

Функция z' достигает наибольшего значения при $x^*_{11} = 387{,}5$; $x^*_{12} = 975$. Находим $x_{21} = 1000 - x_{11} = 612{,}5$ и $x_{22} = 975 - x_{12} = 0$.

Значение целевой функции

$$z^* = z(X^*) = -5 \cdot 387{,}5 - 6 \cdot 975 + 32550 = 24762{,}5.$$

Вывод. Согласно полученному оптимальному плану двухконсольный козловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 387,5 т, рельсов типа Р65 – 975 т. Стреловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 612,5 т. Стоимость всех работ по погрузке будет минимальной и составит 24762,5 ден. ед.

1.4 Решение задач линейного программирования табличным симплексным методом

Рассмотренный выше графический способ решения задач линейного программирования применим к весьма узкому классу задач ЛП: эффективно им можно решать задачи, содержащие не более двух переменных. Одним из универсальных методов является ***симплексный (симплекс-метод)***, называемый также методом последовательного улучшения плана.

Рассмотрим задачу линейного программирования, представленную в следующем виде:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{1.23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m}; \qquad x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{1.24}$$

Решение задачи (1.23)–(1.24) складывается из двух этапов: на первом находят какой-либо начальный базисный план, на втором – по специальным правилам переходят от начального плана к другому, более близкому к оптимальному базисному плану, затем к следующему и так до тех пор, пока задача не будет решена.

1 Построение начального базисного плана. Переменные, которые входят в левую часть одного из ограничений с коэффициентом, равным единице, а во все остальные ограничения с коэффициентами, равными нулю (при неотрицательности правых частей), называются ***базисными***. Переменные, не являющиеся базисными, называются ***свободными***. Если каждое из ограничений системы имеет базисную переменную, то легко найти базисный план задачи. Все переменные, кроме базисных, нужно приравнять к нулю. Тогда последние примут значения, равные правым частям. Приравнивание базисных переменных к правым частям дает базисный план, т. е. угловую точку многогранника решений.

Представим задачу (1.23)–(1.24) в канонической форме записи.

Добавим к левым частям системы ограничений (1.24) дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$, $i = \overline{1, m}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.25}$$

Дополнительные переменные $x_{n+i} \ge 0$ ($i = \overline{1, m}$) будут являться базисными переменными. Следовательно, ***начальный базисный план*** задачи будет иметь следующий вид:

$$X^0 = (\underbrace{0, 0, ..., 0,}_{n}\ \underbrace{b_1, b_2, ..., b_m}_{m}). \qquad (1.26)$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю: $c_{n+i} = 0,\ i = \overline{1, m}$.

2 Признак оптимальности базисного плана. Симплексные таблицы. Введем обозначения:

$$\Delta_0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + ... + c_m b_m = C_Б A_0, \qquad (1.27)$$

где $C_Б = (c_1, c_2, ... c_m)$ – вектор коэффициентов целевой функции, стоящих у базисных переменных;

$A_0 = (b_1, b_2, ... b_m)^T$ – вектор свободных членов у системы ограничений, представленных в канонической форме записи.

Значения Δ_j называются ***оценками свободных переменных*:**

$$\Delta_j = C_Б A_0 - c_j, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (1.28)$$

Базисный план X_0 является ***оптимальным*** (доставляет целевой функции максимальное значение $z = z(X_0) = \Delta_0$), если все оценки свободных переменных неотрицательны.

Для решения задачи (1.23)–(1.24) обычно условие заносят в таблицу, которую называют ***симплексной*** (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – **Симплексная таблица**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	Решение
x_{n+1}	c_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	c_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{n+m}	c_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
z-строка		Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	0	0	…	0	Δ_0

В первом столбце симплексной таблицы находится список базисных переменных для каждого из ограничений-равенств, в столбце $C_Б$ содержатся соответствующие им коэффициенты целевой функции. Столбец «решение» – столбец свободных членов системы ограничений, в котором находятся значения базисных переменных (решение задачи). В столбцах $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$ – коэффициенты a_{ij} системы ограничений. В z-строке или индексной строке расположены коэффициенты Δ_0 (значение целевой функции) и Δ_j, которые рассчитываются по формулам (1.27)–(1.28).

3 Переход к нехудшему базисному плану. Симплексные преобразования. Пусть существуют отрицательные оценки свободных переменных $\Delta_j < 0$. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине и соответствующий ему ***столбец*** j_0 выбираем в качестве ***ведущего***. Соответствующую переменную x_{j_0} введем в базис. Чтобы перейти к новому базисному плану, из базиса нужно вывести одну из переменных. Возможны два случая.

Первый случай (признак неограниченного возрастания целевой функции). Если в ведущем столбце нет ни одного положительного элемента, т. е. все элементы $a_{ij} \le 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, то целевая функция на множестве допустимых планов неограничена сверху.

Второй случай. Если среди элементов ведущего столбца имеются положительные, то для каждого элемента $a_{ij_0} > 0$ ведущего столбца находим отношение b_i / a_{ij_0}, выбираем из них наименьшее

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i j_0}}\right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \theta \qquad (1.29)$$

и называем соответствующую ***строку*** i_0 ***ведущей***. Элемент $a_{i_0 j_0}$ (на пересечении ведущего столбца и ведущей строки) будет ***ведущим элементом***.

Выполним переход к «новой» симплексной таблице по следующим формальным правилам, которые называются ***симплексными преобразованиями:***

1 Элементы ведущей строки новой таблицы $a'_{i_0 j}$ и b'_{i_0} равны соответствующим элементам старой таблицы $a_{i_0 j}$ и b_{i_0}, разделенным на ведущий элемент $a_{i_0 j_0}$:

$$a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \quad b'_{i_0} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (1.30)$$

2 Элементы ведущего столбца новой таблицы $a'_{i j_0}$ равны нулю, за исключением ведущего элемента, равного единице:

$$a'_{i j_0} = 0 \quad (i \ne i_0) \quad a'_{i_0 j_0} = 1. \qquad (1.31)$$

3 Чтобы найти любой другой элемент новой симплексной таблицы $a'_{i j}$ и b'_i, воспользуемся правилом прямоугольника (рисунок 1.5). Элементы новой симлексной таблицы находим по формулам:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \quad b'_i = b_i - \frac{a_{ij_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}; \qquad (1.32)$$

$$j = \overline{1,\ n}; \qquad i = \overline{1,\ m}; \qquad i \neq i_0,$$

где a_{ij}, b_i – элементы старой таблицы;

a_{ij_0} – элементы ведущего столбца;

$a_{i_0 j}$, b_{i_0} – элементы ведущей строки;

$a_{i_0 j_0}$ – ведущий элемент.

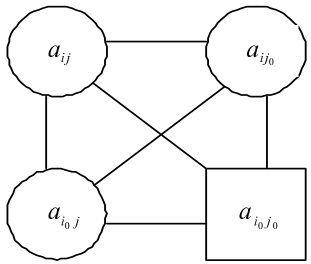


Рисунок 1.5 – Правило прямоугольника

Для этого в исходной таблице выделяем прямоугольник, вершинами которого служат нужные для вычисления элементы (см. рисунок 1.5). Диагональ, содержащую ведущий и искомый элементы новой таблицы, назовем главной, а другую – побочной. Из элемента a_{ij} вычитаем произведение элементов с побочной диагонали, деленной на ведущий элемент с основной диагонали.

4 По этому же правилу могут быть вычислены все элементы индексной строки:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}; \qquad \Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{\Delta_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}. \qquad (1.33)$$

Последовательность операций 1–4, позволяющая перейти от одного базисного плана к другому нехудшему, называется ***итерацией симплекс-метода***.

Алгоритм решения задачи ЛП симплексным методом:

Шаг 1 Представить математическую модель задачи в канонической форме записи.

Шаг 2 Построить начальный базисный план.

Шаг 3 Условие задачи записать в виде симплекс-таблицы.

Шаг 4 Проверить выполнение условия оптимальности. Просмотреть знаки коэффициентов *z*-строки. Если все $\Delta_j \geq 0$, то задача решена: допустимое базисное решение оптимально и $z^* = z\ (X^*)$. Если не все $\Delta_j \geq 0$, то перейти к *шагу 5*.

Шаг 5 Среди значений $\Delta_j < 0$ найти наибольшее по абсолютной величине и соответствующий ему столбец выбрать в качестве ведущего.

Шаг 6 Проверить выполнение условия неограниченности целевой функции. Если оно выполняется, то целевая функция неограничена ($\max z = \infty$), иначе перейти к *шагу 7*.

Шаг 7 Для элементов $a_{ij_0} > 0$ ведущего столбца найти по формуле (1.29) отношение θ и соответствующую строку выбрать в качестве ведущей. Элемент $a_{i_0 j_0}$ на пересечении ведущего столбца и ведущей строки использовать в качестве ведущего элемента.

Шаг 8 По правилам 1–4 (формулы (1.30)–(1.33)) выполнить переход к «новой» симплексной таблице и перейти к *шагу 4*.

1.5 Пример решения задачи добычи и производства балласта симплексным методом

Постановка задачи. Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 1.3. Потребность в балласте песчано-гравийного не превышает 8 тыс. м^3, в балласте щебеночном – 5 тыс. м^3. Требуется определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль.

Таблица 1.3 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420
Бульдозеры, маш.-ч	8	5	6	100
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720
Прибыль, тыс. ден. ед.	68	70	75	

Построим ***математическую модель*** задачи.

Обозначим через x_1 – объем добычи и производства балласта песчаного, x_2 – балласта песчано-гравийного, x_3 – балласта щебеночного.

Тогда целевая функция описывает прибыль

$$z = 68\,x_1 + 70\,x_2 + 75\,x_3 \to \max$$

при ограничениях

– на использование ресурсов:

- экскаваторов $\quad 14\,x_1 + 18\,x_2 + 23\,x_3 \le 420;$
- бульдозеров $\quad 8\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 \le 100;$
- трудовых ресурсов $\quad 32\,x_1 + 45\,x_2 + 54\,x_3 \le 720;$

– на объемы производства балласта:

- песчано-гравийного $\quad x_2 \le 8;$
- щебеночного $\quad x_3 \le 5;$

условие неотрицательности: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Решим задачу ***симплексным методом***. Представим математическую модель задачи в канонической форме записи. Добавим к левым частям системы ограничений дополнительные переменные $x_{3+i} \ge 0$ ($i = \overline{1,5}$):

$$\begin{aligned}
&14\,x_1 + 18\,x_2 + 23\,x_3 + x_4 = 420,\\
&8\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + x_5 = 100,\\
&32\,x_1 + 45\,x_2 + 54\,x_3 + x_6 = 720,\\
&x_2 + x_7 = 8,\\
&x_3 + x_8 = 5,\\
&x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,8}.
\end{aligned}$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$z = 68\,x_1 + 70\,x_2 + 75\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 + 0\,x_7 + 0\,x_8\,,$$

где x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 – базисные переменные;

x_1, x_2, x_3 – небазисные (свободные) переменные.

Построим начальный базисный план. Точку (0, 0, 0) используем как начальное допустимое решение, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Тогда $x_4 = 420, x_5 = 100, x_6 = 720, x_7 = 8, x_8 = 5.$

$X^0 = (0, 0, 0, 420, 100, 720, 8, 5)$ – начальный базисный план.

При этом

$$z(X^0) = 68\cdot 0 + 70\cdot 0 + 75\cdot 0 + 0\cdot 420 + 0\cdot 100 + 0\cdot 720 + 0\cdot 8 + 0\cdot 5 = 0.$$

Заполним первую симплекс-таблицу (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – **Симплекс-таблица начального допустимого решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	18	23	1	0	0	0	0	420	18,3
x_5	0	8	5	6	0	1	0	0	0	100	16,7
x_6	0	32	45	54	0	0	1	0	0	720	13,3
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_8	0	0	0	**1**	0	0	0	0	1	5	5
z-строка	1	– 68	– 70	– 75	0	0	0	0	0	0	

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^0 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–75), столбец x_3 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений θ = 5, x_8 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	18	0	1	0	0	0	– 23	305	17
x_5	0	8	5	0	0	1	0	0	– 6	70	14
x_6	0	32	45	0	0	0	1	0	– 54	450	10
x_7	0	0	**1**	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	– 70	0	0	0	0	0	75	375	

$X^1 = (0, 0, 5, 305, 70, 450, 8, 0), \quad z(X^1) = 375.$

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^1 не является оптимальным. Среди значений $\Delta_j < 0$ находим наибольшее по абсолютной величине (–70), столбец x_2 выбираем в качестве ведущего. Для положительных элементов ведущего столбца находим наименьшее из симплексных отношений θ = 8, x_7 – ведущая строка. Элемент 1 на пересечении ведущего столбца и ведущей строки – ведущий элемент.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.6).

Таблица 1.6 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	14	0	0	1	0	0	– 18	– 23	161	11,5
x_5	0	8	0	0	0	1	0	– 5	– 6	30	3,8
x_6	0	**32**	0	0	0	0	1	– 45	– 54	90	2,8
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	– 68	0	0	0	0	0	70	75	935	

$X^2 = (0, 8, 5, 161, 30, 90, 8, 5)$, $z(X^2) = 935$.

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^2 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.7).

Таблица 1.7 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение	θ
x_4	0	0	0	0	1	0	– 0,44	1,69	0,63	121,63	71,8
x_5	0	0	0	0	0	1	– 0,25	6,25	**7,5**	7,5	1,2
x_1	68	1	0	0	0	0	0,03	– 1,41	– 1,69	2,81	
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8	8
x_3	75	0	0	1	0	0	0	0	1	5	
z-строка	1	0	0	0	0	0	2,13	– 25,63	– 39,75	1126,25	

$X^3 = (2{,}81; 8; 5; 121{,}63; 7{,}5; 0, 0, 0)$, $z(X^3) = 1126{,}25$.

В z-строке среди оценок Δ_j есть отрицательные, следовательно, план X^3 не является оптимальным.

В соответствии с формулами (1.25)–(1.28) переходим к следующей симплексной таблице (таблица 1.8).

Таблица 1.8 – **Симплекс-таблица улучшенного решения**

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Решение
x_4	0	0	0	0	1	– 0,08	– 0,42	1,17	0	121
x_8	0	0	0	0	0	0,13	– 0,03	0,83	1	1
x_1	68	1	0	0	0	0,23	– 0,03	0	0	4,5
x_2	70	0	1	0	0	0	0	1	0	8
x_3	75	0	0	1	0	– 0,13	0,03	– 0,83	0	4
z-строка	1	0	0	0	0	5,3	0,8	7,5	0	1166

$X^4 = (4{,}5; 8; 4; 121; 0; 0; 0; 1)$, $z(X^4) = 1166$.

В z-строке среди оценок Δ_j нет отрицательных, следовательно, план X^4 является оптимальным.

$X^* = (4{,}5; 8; 4; 121; 0; 0; 0; 1)$, $z^* = z(X^*) = 1166$.

Вывод. Для получения максимальной прибыли в размере 1166 денежных единиц необходимо добывать и производить балласта 4,5 тыс. м^3 песчаного, 8 тыс. м^3 песчано-гравийного и 4 тыс. м^3 щебеночного.

Контрольные вопросы

1 Для решения каких типов задач используются методы линейного программирования?

2 Сформулируйте постановку задачи линейного программирования в общем виде.

3 Как привести задачу линейного программирования к канонической форме записи?

4 Для решения каких задач линейного программирования используется графический метод?

5 Дайте геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования.

6 Что представляет собой область допустимых решений в задачах линейного программирования?

7 Сформулируйте алгоритм графического метода решения задачи линейного программирования.

8 Какие переменные называются базисными (свободными)?

9 Сформулируйте признак оптимальности базисного плана при решении задачи ЛП симплексным методом.

10 Сформулируйте признак неограниченного возрастания целевой функции.

11 Как перейти от одной симплексной таблицы к другой?

12 Сформулируйте алгоритм решения задачи ЛП симплексным методом.

2 ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

2.1 Постановка транспортной задачи в матричной форме

Пусть имеется m поставщиков $A_1, A_2, \ldots, A_m$, располагающих некоторым однородным грузом в объемах по a_i единиц ($i = \overline{1,m}$), и n потребителей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ с объемами потребления по b_j единиц ($j = \overline{1,n}$). Задана матрица $C = \|c_{ij}\|$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю. Требуется составить план перевозок, при котором все запасы поставщиков будут вывезены, спрос потребителей полностью удовлетворен, и при этом суммарные транспортные издержки будут минимизированы. Матрица $X = \|x_{ij}\|$, где x_{ij} ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) – количество единиц груза, поставляемое от i-го поставщика j-му потребителю, называется ***планом*** (***матрицей***) ***перевозок***. Предполагается, что $x_{ij} \ge 0$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Матрица $C = \| c_{ij} \|$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$) называется ***матрицей тарифов*** или ***матрицей стоимости***.

Для наглядности условие транспортной задачи (ТЗ) записывают в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – **Матричная модель ТЗ**

Поставщики	Потребители					Запасы груза a_i
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_j	b_1	…	b_j	…	b_n	

Основное положение, используемое при построении транспортной модели, состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна объему перевозимого груза.

Задача называется задачей ***закрытого типа***, если суммарный запас грузов у поставщиков равен суммарному спросу потребителей, т. е. выполняется условие общего баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.1}$$

Если условие (2.1) не выполняется, то задача называется задачей ***открытого типа***.

Любую задачу открытого типа можно свести к задаче закрытого типа.

В случае, если суммарные запасы поставщиков больше потребностей получателей (т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$), вводят $(n + 1)$-го фиктивного потребителя, потребности которого равны излишку запаса, т. е.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{2.2}$$

Стоимости перевозки единицы груза от i-го поставщика к $(n + 1)$-му потребителю c_{in+1} принимаются равными нулю (поставки x_{in+1} в оптимальном плане покажут остатки продукции на складах поставщиков).

Если потребности превышают запасы (т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$), то вводят $(m + 1)$-го фиктивного поставщика, запасы которого считаются равными недостающему грузу, т. е.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{2.3}$$

Стоимости перевозки единицы груза от $(m + 1)$-го поставщика j-му потребителю c_{m+1j} принимаются равными некоторому большому положительному числу M (поставки x_{m+1j} в оптимальном плане полученной задачи покажут объемы недопоставки груза).

Математическая модель закрытой транспортной задачи формулируется следующим образом. Требуется найти план перевозок

$$X = \left\| x_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

при ограничениях:

- на запасы груза у поставщиков, которые в силу (2.1) должны быть вывезены,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m}; \qquad (2.5)$$

- на спрос потребителей, который должен быть полностью удовлетворен,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,n}; \qquad (2.6)$$

условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки,

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n} \qquad (2.7)$$

и чтобы суммарные затраты на перевозку груза были минимальными:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \qquad (2.8)$$

План перевозок X будем называть ***допустимым планом***, если он удовлетворяет ограничениям (2.5) – (2.7). Допустимый план перевозок называется ***оптимальным планом***, если он доставляет минимум целевой функции (2.8).

Модель транспортной задачи – модель линейного программирования. Ее оптимальный план всегда можно найти симплексным методом. Однако матрица системы ограничений (2.5) – (2.6) специфична. Специфика состоит в следующем:

1) коэффициенты при неизвестных во всех ограничениях равны единице;

2) каждая неизвестная величина встречается только в двух уравнениях: раз – в системе (2.5) и раз – в системе (2.6);

3) система уравнений симметрична относительно переменных x_{ij}.

Благодаря этой специфике общую процедуру симплексного метода можно значительно упростить.

Решение транспортной задачи сводится к построению начального базисного плана с использованием любого известного метода, например, северо-западного угла (диагональный метод), минимальной стоимости, двойного предпочтения и др., и доведению его до оптимального, например, с помощью метода потенциалов.

2.2 Построение начального базисного плана перевозок

Метод северо-западного угла. Назначение перевозок x_{ij} начинаем с верхней левой клетки (северо-западного угла) таблицы. Положим

$x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$, вычеркиваем из матрицы столбец $j = 1$, так как спрос первого потребителя полностью удовлетворен. Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, вычеркиваем строку $i = 1$, так как в этом случае полностью исчерпаны запасы первого поставщика. Если $a_1 = b_1$, то вычеркиваем и строку $i = 1$, и столбец $j = 1$ одновременно. Вычеркнув ряд, соответствующий $\min(a_1, b_1)$, корректируем запасы и потребности первого поставщика и первого потребителя на величину x_{11}. С оставшейся матрицей поступим аналогично предыдущему. Продолжая действовать по этой схеме, исчерпаем запасы поставщиков и удовлетворим запросы потребителей. На последнем шаге процесса получится матрица 1×1, в которой одновременно вычеркиваем и строку, и столбец.

Метод северо-западного угла не учитывает матрицу тарифов, поэтому начальный план может оказаться далеким от оптимального. Более близким к оптимальному обычно является план, построенный методом минимальной стоимости или методом двойного предпочтения.

Метод минимальной стоимости. Находим клетку с наименьшей стоимостью перевозки $\min\limits_{ij} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$. Если $a_{i_0} > b_{j_0}$, то $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, вычеркиваем столбец j_0, запасы поставщика i_0 корректируем, т. е. считаем равными $a_{i_0} - x_{i_0 j_0}$; если $a_{i_0} < b_{j_0}$, то $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, вычеркиваем строку i_0, потребности потребителя j_0 считаем равными $b_{j_0} - x_{i_0 j_0}$; если же $a_{i_0} = b_{j_0}$, то $x_{i_0 j_0} = a_{i_0} = b_{j_0}$, вычеркиваем и строку $i = i_0$, и столбец $j = j_0$ одновременно. Вычеркнув один из рядов матрицы и скорректировав либо запасы поставщика, либо потребности получателя на величину $x_{i_0 j_0}$, с оставшейся матрицей меньшего размера поступаем аналогично предыдущему. На последнем шаге в матрице 1×1 одновременно убираем и строку, и столбец.

Метод двойного предпочтения (метод Фогеля). Метод двойного предпочтения дает начальный план, близкий к оптимальному. Его используют как приближенный метод решения транспортной задачи. Процедура построения начального опорного плана начинается с определения наибольшей разности между двумя наименьшими тарифами перевозки каждой строки и каждого столбца. Находим в ряду, соответствующем наибольшей разности всех строк и столбцов, клетку с минимальной стоимостью перевозки. Пусть это будет клетка (i_0, j_0). Аналогично предыдущему методу записываем поставку $x_{i_0 j_0} = \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$. Вычеркиваем ряд, соответствующий $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$. Если же $x_{i_0 j_0} = a_{i_0} = b_{j_0}$, вычеркиваем и строку $i = i_0$, и столбец $j = j_0$ одновременно. Корректируются запасы поставщика либо потребности получателя. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему. На последнем шаге в матрице 1×1 одновременно убираем и строку, и столбец.

Построенный начальный план перевозок должен быть ***базисным***, т. е. число назначенных перевозок x_{ij} должно быть равно $m + n - 1$. Если это условие не выполняется, а условие общего баланса выполнено, то построенный начальный план – ***вырожденный***. Для построения базисного плана в исходный план вводят нулевые перевозки так, чтобы не образовывался замкнутый контур из назначенных перевозок. Заполнение клеток нулем не влияет на экономическую оценку решения, но оно необходимо для получения начального базисного плана и для поиска оптимального решения.

Замкнутым контуром (циклом) в матрице называется непрерывная замкнутая ломаная линия, вершины которой находятся в загруженных клетках матрицы, а звенья расположены вдоль строк и столбцов. Причем в каждой вершине замкнутого контура встречаются ровно два звена; одно из них располагается по строке, другое – по столбцу, таким образом, звенья образуют прямой угол. Если замкнутый контур образует самопересекающаяся ломаная линия, то точки ее самопересечения вершин не образуют. Примеры некоторых замкнутых контуров показаны на рисунке 2.1.

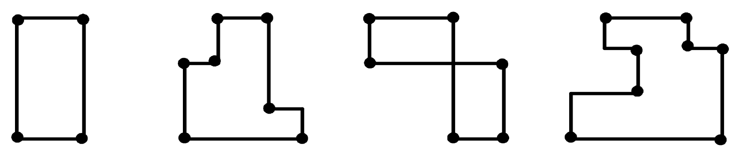


Рисунок 2.1 – Примеры форм замкнутых контуров

При правильном построении плана перевозок, начиная с любой незагруженной клетки, можно построить лишь один замкнутый контур.

2.3 Построение оптимального плана методом потенциалов

Полученный начальный базисный план перевозок путём постепенного его улучшения доводится до оптимального.

Условие оптимальности плана перевозок можно сформулировать следующим образом.

Если для некоторого плана $X^* = \|x_{ij}^*\|$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ транспортной задачи существуют такие числа u_i $(i = \overline{1, m})$ и v_j $(j = \overline{1, n})$, что

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \text{если} \quad x_{ij} \geq 0, \tag{2.9}$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad \text{если} \quad x_{ij} = 0, \tag{2.10}$$

то план $X^* = \|x_{ij}^*\|$ является ***оптимальным***.

Числа u_i $(i = \overline{1, m})$ и v_j $(j = \overline{1, n})$ называются ***потенциалами*** соответственно поставщиков и потребителей.

Каждой загруженной клетке будет соответствовать уравнение $v_j - u_i = c_{ij}$. Так как число загруженных клеток равно $m + n - 1$, т. е. на единицу меньше числа потенциалов, то для определения чисел u_i и v_j необходимо решить систему из $n + m - 1$ уравнений $v_j - u_i = c_{ij}$ с $n + m$ неизвестными.

Поэтому одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу. Потенциалы остальных строк и столбцов вычисляются по стоимости перевозок в загруженных (базисных) клетках по следующим формулам:

$$\begin{cases} v_j = u_i + c_{ij}, & x_{ij} \geq 0, \\ u_i = v_j - c_{ij}, & x_{ij} \geq 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Для проверки условия оптимальности для незагруженных (свободных) клеток вычисляется величина превышения стоимости по следующей формуле:

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}. \tag{2.12}$$

Если все $\Delta_{ij} \leq 0$, то построенный план перевозок является оптимальным.

Клетки, в которых условие оптимальности не выполняется, называются ***потенциальными***.

Если имеется хотя бы одна потенциальная клетка, то построенный план неоптимален, переходим к улучшенному плану перевозок. В этом случае среди незагруженных клеток, для которых $\Delta_{ij} > 0$, находим клетку с наибольшей величиной превышения стоимости.

Строим замкнутый контур (см. рисунок 2.1), начиная перемещаться из потенциальной клетки в горизонтальном или вертикальном направлении с поворотами в загруженных клетках с таким расчётом, чтобы вернуться в исходную клетку. Начиная с потенциальной клетки, разметим вершины контура поочередно знаками плюс «+» и минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении. В клетках, помеченных знаком «–», находим наименьшее значение объема перевозки:

$$\min\{x_{\overline{ij}}\} = \theta. \tag{2.13}$$

Из всех объемов перевозок x_{ij} в клетках контура, помеченных знаком «–», вычитаем значение θ, а к перевозкам клеток, помеченных знаком «+», прибавляем θ. Перевозки в клетках, которые не находятся в вершинах замкнутого контура, остаются без изменения. В общем виде переход к улучшенному плану перевозок осуществляется по формуле

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{– для клеток, не входящих в контур;} \\ x_{ij} + \theta & \text{– для клеток контура, помеченных знаком "+";} \\ x_{ij} - \theta & \text{– для клеток контура, помеченных знаком "–".} \end{cases} \qquad (2.14)$$

Затем вновь проверяем условие оптимальности полученного плана перевозок. При необходимости повторяем процедуру улучшения плана.

Алгоритм решения ТЗ может быть представлен в следующем виде:

Шаг 1 Построить начальный базисный план перевозок методами минимальной стоимости, северо-западного угла или двойного предпочтения. Вычислить значение целевой функции при начальном плане перевозок $z(X^0)$.

Шаг 2 Вычислить потенциалы строк и столбцов u_i и v_j, по формуле (2.11).

Шаг 3 Для незагруженных клеток вычислить величины превышения стоимости по формуле (2.12).

Шаг 4 Проверить, есть ли незагруженные клетки, для которых величина $\Delta_{ij} > 0$, среди всех таких клеток выбрать одну с наибольшим значением $\Delta_{ij} > 0$ и перейти к *шагу 5*. Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то построенный план перевозок является оптимальным.

Шаг 5 От выбранной клетки построить замкнутый контур (см. рисунок 2.1). Разметить вершины контура знаками «+», «–». Вычислить величину изменения объема перевозок по контуру θ по формуле (2.13). По формуле (2.14) сформировать новый улучшенный план перевозок. Вычислить значение целевой функции при улучшенном плане перевозок $z(X)$. Перейти к *шагу 2*.

2.4 Пример решения задачи прикрепления балластных карьеров к участкам строящейся линии

Постановка задачи. Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно 35, 60, 85 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно 75, 20, 55, 30 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки, и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте

при минимальных общих затратах на перевозки.

Исходные данные приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9	6	5	2	$a_1 = 35$
2	11	8	6	7	$a_2 = 60$
3	7	10	4	8	$a_3 = 85$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75$	$b_2 = 20$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	180 / 180

Суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, что составляет 180 тыс. м^3 (т. е. выполняется условие общего баланса $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$). Следовательно, данная задача является задачей закрытого типа.

Математическую модель транспортной задачи сформулируем следующим образом. Требуется найти план перевозок

$$X = \left\| x_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

при ограничениях:

- на мощности балластных карьеров:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 85;$$

- на потребности участков строящейся линии в балласте, которые должны быть полностью удовлетворены:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75; \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55; \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30;$$

условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки,

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}$$

и чтобы суммарные затраты на перевозку от поставщиков к потребителям были минимальными:

$$z = 9x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 11x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} +$$
$$+ 7x_{24} + 7x_{31} + 10x_{32} + 4x_{33} + 8x_{34} \to \min.$$

Построим начальный базисный план методами северо-западного угла, минимальной стоимости, двойного предпочтения и сравним значения целевой функции для полученных планов.

Построение начального базисного плана ***методом северо-западного угла*** (таблица 2.3). Назначение перевозок начинаем с верхней левой клетки (северо-западного угла). В клетку (1; 1) записываем наименьшее из значений a_1 и b_1 $x_{11} = \min(35, 75) = 35$. Так как запасы первого поставщика полностью исчерпаны, из дальнейшего рассмотрения исключаем первую строку. Вычеркнув строку, корректируем потребности первого потребителя на величину $x_{11} = 35$, $b_1 = 75 - 35 = 40$.

Следующая поставка осуществляется от второго поставщика первому потребителю. В клетку (2; 1) назначаем перевозку $x_{21} = \min(60; 40) = 40$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения первого потребителя. Вычеркнув первый столбец, корректируем запасы второго поставщика $a_2 = 60 - 40 = 20$.

Следующая поставка осуществляется от второго поставщика второму потребителю. В клетку (2; 2) назначаем перевозку $x_{22} = \min(40; 40) = 40$. Исключаем из дальнейшего рассмотрения второго поставщика и второго потребителя. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{33} = \min(85; 55) = 55;$$
$$x_{34} = \min(30; 30) = 30.$$

Таблица 2.3 – **План перевозок, построенный методом северо-западного угла**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9 35	6	5	2	$a_1 = 35$
2	11 40	8 20	6	7	$a_2 = 60, 20$
3	7	10 0	4 55	8 30	$a_3 = 85, 30$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75, 40$	$b_2 = 20$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	

Построенный начальный план перевозок является вырожденным, так как число ненулевых перевозок x_{ij} не равно $m + n - 1 = 6$. Для построения базисного плана в клетку (3; 2) введем нулевую перевозку $x_{32} = 0$ так, чтобы не образовывался замкнутый контур из назначенных перевозок.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 9 \cdot 35 + 11 \cdot 40 + 8 \cdot 20 + 10 \cdot 0 + 4 \cdot 55 + 8 \cdot 30 = 1375 \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом минимальной стоимости*** (таблица 2.4). Назначение перевозок начинаем с клетки (1; 4), имеющей минимальную стоимость перевозки. В клетку (1; 4) записываем наименьшее из значений a_1 и b_4 $x_{14} = \min(35, 30) = 30$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Вычеркнув четвертый столбец, корректируем запасы первого поставщика на величину $x_{14} = 30$, $a_1 = 35 - 30 = 5$.

Следующая поставка осуществляется от третьего поставщика третьему потребителю. В клетку (3; 3) назначаем перевозку $x_{33} = \min(85; 55) = 55$, исключаем из дальнейшего рассмотрения третьего потребителя. Корректируем запасы третьего поставщика $a_3 = 85 - 55 = 30$. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{12} = \min(5; 20) = 5;$$
$$x_{31} = \min(30; 75) = 30;$$
$$x_{22} = \min(60; 15) = 15;$$
$$x_{21} = \min(45; 45) = 45.$$

Таблица 2.4 – **План перевозок, построенный методом минимальной стоимости**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9	6 5	5	2 30	$a_1 = 35, 5$
2	11 45	8 15	6	7	$a_2 = 60, 45$
3	7 30	10	4 55	8	$a_3 = 85, 30$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75, 45$	$b_2 = 20, 15$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m + n - 1 = 6$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок:

$$z(X^0) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 11 \cdot 45 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 30 + 4 \cdot 55 = 1135 \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом двойного предпочтения*** (таблицы 2.4, 2.5).

По каждой строке и каждому столбцу находим разности между двумя наименьшими тарифами перевозки (этап 1). Из этих разностей выделяется наибольшая (равная 5). В четвертом столбце находим клетку (1; 4), имеющую минимальную стоимость перевозки. В клетку (1; 4) записываем наименьшее из значений a_1 и b_4 $x_{14} = \min(35, 30) = 30$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Вычеркнув четвертый столбец, корректируем запасы первого поставщика на величину $x_{14} = 30$, $a_1 = 35 - 30 = 5$.

С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{33} = \min(85; 55) = 55$$
$$x_{12} = \min(5; 20) = 5;$$
$$x_{31} = \min(30; 75) = 30;$$
$$x_{22} = \min(60; 15) = 15;$$
$$x_{21} = \min(45; 45) = 45.$$

Таблица 2.5 – **План перевозок, построенный методом двойного предпочтения**

Поставщики	Потребители				a_i	Этапы				
	1	2	3	4		1	2	3	4	5
1	9	6 5	5	2 30	a_1=35, 5	3	1	**3**	–	–
2	11 45	8 15	6	7	a_2= 60, 45	1	2	3	3	**3**
3	7 30	10	4 55	8	a_3= 85, 30	3	**3**	3	3	–
b_j	b_1= 75, 45	b_2= 20, 15	b_3= 55	b_4= 30						
Этапы 1	2	2	1	**5**						
2	2	2	1	–						
3	2	2	–	–						
4	**4**	2	–	–						
5	–		–	–						

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m+n-1=6$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 11 \cdot 45 + 8 \cdot 15 + 7 \cdot 30 + 4 \cdot 55 = 1135 \text{ ден. ед.}$$

Сравнивая значения целевых функций для планов, полученных методами северо-западного угла, двойного предпочтения и минимальной стоимости, заметим, что транспортные расходы по плану, построенному методом минимальной стоимости и двойного предпочтения, меньше на 240 ден. ед.

Построение оптимального плана методом потенциалов. С помощью метода потенциалов доведем до оптимального начальный план, построенный методом минимальной стоимости или методом двойного предпочтения (см. таблицу 2.4).

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Если известен u_i, то $v_j = c_{ij} + u_i$, если известен v_j, то $u_i = v_j - c_{ij}$. Положим, например, $u_1 = 0$. Тогда будут вычислены и остальные потенциалы строк и столбцов (таблица 2.6).

Таблица 2.6 – **Начальный план перевозок**

u_i \ v_j	v_1= 9	v_2= 6	v_3= 6	v_4= 2
u_1= 0	9	6 5	5	2 30
u_2= –2	– 11 45	8 15	+ 6	7
u_3= 2	+ 7 30	10	– 4 55	8

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$\Delta_{11} = 9 - 0 - 9 = 0$ $\qquad \Delta_{24} = 2 - (-2) - 7 = -3$

$\Delta_{13} = 6 - 0 - 5 = 1$ $\qquad \Delta_{32} = 6 - 2 - 10 = -6$

$\Delta_{23} = 6 - (-2) - 6 = 2$ $\qquad \Delta_{34} = 2 - 2 - 8 = -8.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеются положительные. Наиболее потенциальной является клетка (2; 3). От клетки (2, 3) строим замкнутый контур: (2; 3), (2; 1), (3; 1), (3; 3). Начиная с клетки (2, 3), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении.

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее значение объема перевозки $\theta = \min(45, 55) = 45$. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 45 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ».

Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	v_1= 7	v_2= 6	v_3= 4	v_4= 2
u_1= 0	9	6 5	5	2 30
u_2= –2	11	8 15	6 45	7
u_3= 0	7 75	10	4 10	8

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок:

$$z(X^1) = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 30 + 8 \cdot 15 + 6 \cdot 45 + 7 \cdot 75 + 4 \cdot 10 = 1045 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{11} = 7 - 0 - 9 = -2$ $\Delta_{24} = 2 - (-2) - 7 = -3$
$\Delta_{13} = 4 - 0 - 5 = -1$ $\Delta_{32} = 6 - 0 - 10 = -4$
$\Delta_{21} = 7 - (-2) - 11 = -2$ $\Delta_{34} = 2 - 0 - 8 = -6.$

Среди оценок свободных клеток нет положительных, следовательно, построенный план перевозок является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 75 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 1045$ ден. ед.

Вывод. Для того чтобы общие затраты на перевозки были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана X^* (см. таблицу 2.7). В этом случае суммарные затраты будут минимальны и составят 1045 ден. ед.

2.5 Определение оптимального плана усложненных транспортных задач

На практике рассмотренная классическая транспортная задача встречается редко. Обычно при составлении математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, вследствие чего поиск оптимального решения усложняется.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

1 Запрет перевозок от *i*-го поставщика к *j*-му потребителю. Часто необходимо вводить ограничения, согласно которым отдельные поставки от определенного поставщика A_i определенному потребителю B_j должны быть исключены (из-за возникновения технологических препятствий, отсутствия достаточного количества транспорта или необходимых условий хранения груза, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т. п.).

Чтобы определить оптимальный план в подобных задачах, предполагают, что стоимость перевозки единицы груза c_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю является достаточно большой величиной M, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи.

С таким предположением исключается возможность перевозить груз от i-го поставщика к j-му потребителю при оптимальном плане транспортной задачи. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют ***запрещением перевозок*** или ***блокированием*** соответствующей клетки таблицы («запрещенные возки»).

Если же при решении транспортной задачи все-таки окажется, что запрещенная перевозка отлична от нуля при достаточно высокой стоимости перевозки груза в данной клетке ($x_{ij} \neq 0$), то это значит, что спрос j-го потребителя невозможно удовлетворить без i-го поставщика.

2 Фиксированная поставка. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза.

Пусть объем поставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю должен быть строго определенным ($x_{ij} = d_{ij}$). Эту поставку следует включить в оптимальный план даже в том случае, если она не выгодна. Поэтому уменьшаются мощности i-го поставщика (a_i) и спрос j-го потребителя (b_j) на величину d_{ij}, а также вводится запрет на поставку груза по маршруту (i, j) и далее решается полученная задача.

В полученное оптимальное решение со значением функции $z_{\min}$ подставляется фиксированная поставка $x_{ij} = d_{ij}$ и с учетом ее находится значение функции

$$z^* = z_{\min} + c_{ij}\, d_{ij}. \tag{2.15}$$

Пример 2.1

У трех поставщиков имеется в наличии $a_1 = 7$, $a_2 = 15$, $a_3 = 13$ единиц однородного груза. Данный груз должен быть доставлен четырем потребителям в количестве $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 6$, $b_3 = 14$ единиц. От третьего поставщика ко второму потребителю необходимо поставить $d_{32} = 5$ единиц груза. Известны также тарифы c_{ij} перевозок одной единицы груза от каждого поставщика каждому потребителю. Составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Исходные данные приведены в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	1	9	8	8	$a_1 = 7$
2	6	5	2	10	$a_2 = 15$
3	7	8	4	3	$a_3 = 13$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 5$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$	$b_4 = 14$	35 / 35

Данная задача является задачей закрытого типа. Суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, что составляет 35 ед.

Поскольку объем поставки груза от третьего поставщика ко второму потребителю должен быть строго определенным $x_{32} = d_{32} = 5$, уменьшим мощность третьего поставщика и спрос второго потребителя на величину $d_{32} = 5$: $a_3 = 13 - 5 = 8$, $b_2 = 10 - 5 = 5$.

Введем запрет на поставку груза по маршруту (3, 2). Стоимость от третьего поставщика ко второму потребителю примем достаточно большой величиной M (таблица 2.9).

Таблица 2.9 –**Данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	1	9	8	8	$a_1 = 7$
2	6	5	2	10	$a_2 = 15$
3	7	M	4	3	$a_3 = 8$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 5$	$b_2 = 5$	$b_3 = 6$	$b_4 = 14$	

Построение начального базисного плана методом северо-западного угла (таблица 2.10).

Таблица 2.10 – **План перевозок, построенный методом северо-западного угла**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	1 5	9 2	8	8	$a_1 = 7, 2$
2	6	5 3	2 6	10 6	$a_2 = 15, 12, 6$
3	7	M	4	3 8	$a_3 = 8$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$B_1 = 5$	$b_2 = 5, 3$	$b_3 = 6$	$b_4 = 14, 8$	

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m + n - 1 = 6$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 1 \cdot 5 + 9 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 134 \text{ ден. ед.}$$

Построение оптимального плана методом потенциалов.

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках (таблица 2.11).

Таблица 2.11 – **Начальный план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = -3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 10$
$u_1 = -4$	1 5	– 9 2	8	+ 8
$u_2 = 0$	6	+ 5 3	2 6	– 10 6
$u_3 = 7$	7	M	4	3 8

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$\Delta_{13} = 2 - (-4) - 8 = -2$ $\quad\Delta_{31} = -3 - 7 - 7 = -17$
$\Delta_{14} = 10 - (-4) - 8 = 6$ $\quad\Delta_{32} = 5 - 7 - M = -2 - M$
$\Delta_{21} = -3 - 0 - 6 = -9$ $\quad\Delta_{33} = 2 - 7 - 4 = -9.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеется положительная. Потенциальной является клетка (1; 4). От клетки (1, 4) строим замкнутый контур: (1; 4), (1; 2), (2; 2), (2; 4). Начиная с клетки (1, 4), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении.

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее значение объема перевозки $\theta = \min(2, 6) = 2$. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 2 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ».

Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.12.

Таблица 2.12 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 10$
$u_1 = 2$	1 5	9	8	8 2
$u_2 = 0$	6	5 5	2 6	10 4
$u_3 = 7$	7	M	4	3 8

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок:

$$z(X^1) = 1 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 122 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{12} = 5 - 9 - 2 = -6$ $\quad\quad$ $\Delta_{31} = 3 - 7 - 7 = -14$

$\Delta_{13} = 2 - 8 - 2 = -8$ $\quad\quad$ $\Delta_{32} = 5 - 7 - M = -2 - M$

$\Delta_{21} = 3 - 0 - 6 = -3$ $\quad\quad$ $\Delta_{33} = 2 - 7 - 4 = -9.$

Среди оценок свободных клеток нет положительных, следовательно, построенный план перевозок является оптимальным.

В полученный оптимальный план подставим фиксированную поставку $x_{32} = d_{32} = 5$ (таблица 2.13).

Таблица 2.13 – **Оптимальный план перевозок**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	1 5	9	8	8 2	$a_1 = 7$
2	6	5 5	2 6	10 4	$a_2 = 15$
3	7	8 5	4	3 8	$a_3 = 13$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 5$	$b_2 = 10$	$b_3 = 6$	$b_4 = 14$	35 / 35

Оптимальный план перевозок с учетом того, что от третьего поставщика ко второму потребителю необходимо поставить 5 единиц груза:

$$X^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

С учетом фиксированной поставки находим значение целевой функции оптимального плана при улучшенном плане перевозок:

$$z(X^*) = z(X^1) + c_{32}\,d_{32} = 122 + 8 \cdot 5 = 162 \text{ ден. ед.}$$

3 Нижние границы поставки. Если от i-го поставщика к j-му потребителю необходимо перевезти не менее d_{ij} единиц груза ($x_{ij} \ge d_{ij}$), то как и при фиксированной поставке, мощность соответствующего поставщика и спрос потребителя уменьшаются на величину d_{ij}. Однако в этом случае запрет на поставку груза от i-го поставщика к j-му потребителю не вводится.

4 Верхние границы поставки. Если в транспортной задаче объем поставки груза от i-го поставщика к j-му потребителю не должен превышать d_{ij} единиц ($x_{ij} \le d_{ij}$), то при решении j-й столбец матрицы перевозок разбивается на два: j' и j''.

Аналогично спрос j-го потребителя разбивается на две части: $b_{j'} = d$ и $b_{j''} = b_j - d$. Тарифы в обоих столбцах j' и j'' одинаковые, за исключением $c_{ij''} = M$, где M является сколь угодно большой величиной. Большая стоимость перевозки $c_{ij''} = M$ вводится для запрета перевозки от i-го поставщика к j''-му потребителю.

Измененная задача позволит получить решение, удовлетворяющее поставленному условию.

Пример 2.2

У трех поставщиков имеется в наличии $a_1 = 30$, $a_2 = 26$, $a_3 = 34$ единиц однородного груза. Данный груз должен быть доставлен трем потребителям в количестве $b_1 = 40$, $b_2 = 16$, $b_3 = 6$, $b_3 = 34$ единиц. Объем поставки груза от второго поставщика ко второму потребителю не должен превышать 10 ($d_{22} \le 10$) ед. груза. Известны также тарифы c_{ij} перевозок одной единицы груза от каждого поставщика каждому потребителю. Составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Исходные данные приведены в таблице 2.14.

Таблица 2.14 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители			Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	
1	5	8	14	$a_1 = 30$
2	11	9	7	$a_2 = 26$
3	7	8	6	$a_3 = 34$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 40$	$b_2 = 16$	$b_3 = 34$	90 / 90

Данная задача является задачей закрытого типа. Суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, что составляет 90 ед.

Поскольку объем поставки груза от второго поставщика ко второму потребителю не должен превышать 10 единиц ($d_{22} \le 10$), то при решении второй столбец матрицы перевозок разбивается на два: 2′ и 2″.

Аналогично спрос второго потребителя разбивается на две части: $b_{2'} = d_{22} = 10$ и $b_{2''} = b_2 - d_{22} = 16 - 10 = 6$. Тарифы в обоих столбцах 2′ и 2″ одинаковые, за исключением $c_{22''} = M$, где M является сколь угодно большой величиной. Большая стоимость перевозки $c_{22''} = M$ вводится для запрета перевозки от 2-го поставщика ко 2″-му потребителю.

Измененная задача, представленная в таблице 2.15, позволит получить решение, удовлетворяющее поставленному условию.

Таблица 2.15 – **Данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2′	2″	3	
1	5	8	8	14	$a_1 = 30$
2	11	9	M	7	$a_2 = 26$
3	7	8	8	6	$a_3 = 34$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 40$	$b_{2'} = 10$	$b_{2''} = 6$	$b_3 = 34$	

Построение начального базисного плана методом минимальной стоимости (таблица 2.16).

Таблица 2.16 – **План перевозок, построенный методом минимальной стоимости**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2′	2″	3	
1	5 30	8	8	14	$a_1 = 30$
2	11 10	9 10	M 6	7 0	$a_2 = 26, 16, 6$
3	7	8	8	6 34	$a_3 = 34$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 40,$ 10	$b_{2'} = 10$	$b_{2''} = 6$	$b_3 = 34$	

Построенный начальный план перевозок является вырожденным, так как число ненулевых перевозок x_{ij} не равно $m+n-1=6$.

Для построения базисного плана в клетку (3; 2) введем нулевую перевозку $x_{32} = 0$ так, чтобы не образовывался замкнутый контур из назначенных перевозок.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 5 \cdot 30 + 11 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + M \cdot 6 + 7 \cdot 0 + 6 \cdot 34 = 554 + 6M \text{ ден. ед.}$$

Построение оптимального плана методом потенциалов.

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках (таблица 2.17).

Таблица 2.17 – **Начальный план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 11$	$v_{2'} = 9$	$v_{22''} = M$	$v_3 = 7$
$u_1 = 6$	5 30	8	8	14
$u_2 = 0$	11 10	9 10	– M 6	+ 7 0
$u_3 = 1$	7	8	+ 8	– 6 34

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$\Delta_{12'} = 9 - 8 - 6 = -5$ $\Delta_{31} = 11 - 7 - 1 = 3$

$\Delta_{12''} = M - 8 - 6 = M - 14$ $\Delta_{32'} = 9 - 8 - 1 = 0$

$\Delta_{13} = 7 - 14 - 6 = -13$ $\Delta_{32''} = M - 8 - 1 = M - 9.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеются положительные. Наиболее потенциальной является клетка (3; 2″). От клетки (3, 2″) строим замкнутый контур: (3; 2″), (3; 3), (2; 3), (2; 2″). Начиная с клетки (3, 2″), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении.

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее значение объема перевозки θ = min (6, 34) = 6. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 6 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ».

Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.18.

Таблица 2.18 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 11$	$v_{2'} = 9$	$v_{22''} = 9$	$v_3 = 7$
$u_1 = 6$	5 30	8	8	14
$u_2 = 0$	– 11 10	9 10	M	+ 7 6
$u_3 = 1$	+ 7	8	8 6	– 6 28

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок

$$z(X^1) = 5 \cdot 30 + 11 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 28 = 608 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{12'} = 9 - 8 - 6 = -5$ $\quad\quad$ $\Delta_{22''} = 9 - 0 - M = 9 - M$

$\Delta_{12''} = 9 - 8 - 6 = -5$ $\quad\quad$ $\Delta_{31} = 11 - 7 - 1 = 3$

$\Delta_{13} = 7 - 14 - 6 = -13$ $\quad\quad$ $\Delta_{32'} = 9 - 8 - 1 = 0.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеется положительная. Потенциальной является клетка (3; 1). От клетки (3, 1) строим замкнутый контур: (3; 1), (3; 3), (2; 3), (2; 1). Начиная с клетки (3, 3), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении.

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее значение объема перевозки $\theta = \min(10, 28) = 10$. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 6 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ».

Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.19.

Таблица 2.19 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 8$	$v_{2'} = 9$	$v_{22''} = 9$	$v_3 = 7$
$u_1 = 3$	5 30	8	8	14
$u_2 = 0$	11	9 10	M	7 16
$u_3 = 1$	7 10	8	8 6	6 18

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок

$$z(X^2) = 5 \cdot 30 + 9 \cdot 10 + 7 \cdot 16 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 18 = 578 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{12'} = 9 - 8 - 3 = -2$ $\quad\quad$ $\Delta_{21} = 8 - 0 - 11 = -3$

$\Delta_{12''} = 9 - 8 - 3 = -2$ $\quad\quad$ $\Delta_{22''} = 9 - 0 - M = 9 - M$

$\Delta_{13} = 7 - 14 - 3 = -10$ $\quad\quad$ $\Delta_{32'} = 9 - 8 - 1 = 0.$

Среди оценок свободных клеток нет положительных, следовательно, построенный план перевозок является оптимальным.

Объединим столбцы 2′ и 2″. Получим оптимальный план исходной зада-

чи (таблица 2.20), в котором объем поставки груза от второго поставщика ко второму потребителю не превышает 10 ед. груза.

Таблица 2.20 – **Оптимальный план перевозок**

Поставщики	Потребители			Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	
1	5 30	8	14	$a_1 = 30$
2	11	9 10	7 16	$a_2 = 26$
3	7 10	8 6	6 18	$a_3 = 34$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 40$	$b_2 = 16$	$b_3 = 34$	90 \ 90

Оптимальный план перевозок с учетом того, что от второго поставщика ко второму потребителю объем поставки не превышает 10 единиц груза:

$$X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 16 \\ 10 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 578$ ден. ед.

5 Максимизация функции в моделях транспортного типа. Многие задачи (например, наиболее эффективная организация работ по сооружению земляного полотна железной дороги, оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей) сводятся к решению транспортной задачи. Как правило, в этих случаях необходимо находить максимум целевой функции.

Для решения задачи транспортного типа на максимум возможны два способа нахождения оптимального плана:

I Необходимо коэффициенты c_{ij} при неизвестных в целевой функции взять со знаком минус, т. е. необходимо перейти к нахождению минимума измененной функции.

II При составлении начального плана в первую очередь стараются заполнить клетки с наиболее высокими значениями показателей c_{ij}. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного допустимого плана к другому, должен производиться не по наибольшей величине превышения стоимости $\Delta_{ij} > 0$, а по минимальной отрицательной величине $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$. Оптимальным будет план, которому в последней таблице сопутствуют свободные клетки с неотрицательными оценками (т. е. все $\Delta_{ij} \geq 0$).

2.6 Пример решения задачи распределения земляных масс при организации работ по сооружению земляного полотна

Постановка задачи. Распределение земляных масс при возведении земляного полотна заключается:

1) в определении объема грунта, который требуется переместить в продольном направлении (перемещение грунта из выемки в насыпь) и в поперечном направлении (перемещение грунта из резервов в насыпи, из выемки в кавальер или отвал);

2) нахождении наиболее экономичных и целесообразных соотношений между этими перемещениями.

После определения мест возможного расположения карьеров, отвалов, кавальеров, резервов для отсыпки грунта в насыпь и разработки выемок, а также разбивки продольного профиля на отдельные участки выемок и насыпей, выделено шесть поставщиков земляного грунта, включая карьер и резерв, и пять потребителей, включая кавальер.

Мощность поставщиков a_i ($i = \overline{1,6}$) и спрос потребителей b_j ($j = \overline{1,5}$) грунта, а также стоимость разработки и перемещения единицы грунта c_{ij} ($i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,5}$) от i-го поставщика к j-му потребителю в соответствии с принятым комплексом машин и средней дальностью возки известны и приведены в таблице 2.21.

Таблица 2.21 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители					Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1 (насыпь)	2 (насыпь)	3 (насыпь)	4 (отвал)	5 (кавальер)	
1 (выемка)	8	5	7	9	3	$a_1 = 350$
2 (карьер)	4	6	4	9	8	$a_2 = 260$
3 (выемка)	1	5	3	4	9	$a_3 = 370$
4 (выемка)	2	4	6	10	3	$a_4 = 320$
5 (карьер)	3	7	5	4	6	$a_5 = 200$
6 (резерв)	7	5	8	7	11	$a_6 = 600$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 310$	$b_2 = 340$	$b_3 = 450$	$b_4 = 300$	$b_5 = 700$	2100

Требуется так распределить земляные массы от поставщиков к потребителям, чтобы суммарные затраты на разработку и перемещение грунта были минимальны.

Причем выемки являются основными и обязательными поставщиками грунта, и их запас должен быть полностью использован. Карьеры и резервы являются резервными поставщиками. Насыпи являются основными потребителями, а кавальеры и отвалы – резервными. Перемещение грунта из карьера и резерва в отвал или кавальер не допускается («запрещенные возки»).

Определим ***тип транспортной задачи***. Суммарная мощность поставщиков грунта равна суммарному спросу потребителей, что составляет 2100 тыс. м^3. Выполняется условие общего баланса

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 2100.$$

Следовательно, данная задача является задачей закрытого типа.

Математическую модель транспортной задачи сформулируем следующим образом.

Требуется найти план перевозок $X = \|x_{ij}\|$ ($i = \overline{1,6}$; $j = \overline{1,5}$) при ограничениях:

- на мощности поставщиков грунта:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 350;\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 260;\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 370;\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 320;\\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 200;\\
x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} &= 600;
\end{aligned}$$

- на спрос потребителей, который должны быть полностью удовлетворен:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} &= 310;\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} &= 340;\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} &= 450;\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} &= 300;\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} &= 700;
\end{aligned}$$

условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки,

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = \overline{1,6}; \ \ j = \overline{1,5}$$

и чтобы суммарные затраты на разработку и перемещение грунта от поставщиков к потребителям были минимальными:

$$z = 8x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} + 3x_{15} + 4x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + \ldots + $$
$$+ 7x_{61} + 5x_{62} + 8x_{63} + 7x_{64} + 11x_{65} \to \min.$$

Построим начальный базисный план методами северо-западного угла, минимальной стоимости, двойного предпочтения и сравним значения целевой функции для полученных планов.

Поскольку перемещение грунта из карьера и резерва в отвал или кавальер не допускается («запрещенные возки»), то стоимость перевозки грунта от второго (карьер), пятого (карьер) и шестого (резерв) поставщиков к четвертому (отвал) и пятому (кавальер) потребителям примем достаточно большой величиной M.

Построение начального базисного плана ***методом северо-западного угла*** (таблица 2.22).

Таблица 2.22 – **План перевозок, построенный методом северо-западного угла**

Поставщики	Потребители					Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1 (насыпь)	2 (насыпь)	3 (насыпь)	4 (отвал)	5 (кавальер)	
1 (выемка)	8 310	5 40	7	9	3	$a_1 = 350$, 40
2 (карьер)	4	6 260	4	M	M	$a_2 = 260$
3 (выемка)	1	5 40	3 330	4	9	$a_3 = 370$, 330
4 (выемка)	2	4	6 120	10 200	3	$a_4 = 320$, 200
5 (карьер)	3	7	5	M 100	M 100	$a_5 = 200$, 100
6 (резерв)	7	5	8	M	M 600	$a_6 = 600$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 310$	$b_2 = 340$, 300, 40	$b_3 = 450$, 120	$b_4 = 300$, 100	$b_5 = 700$, 600	

Назначение перевозок начинаем с верхней левой клетки (северо-западного угла). В клетку (1; 1) записываем наименьшее из значений a_1 и b_1 $x_{11} = \min(350, 310) = 310$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения первого потребителя. Вычеркнув первый столбец, корректируем запасы первого поставщика на величину $x_{11} = 310$, $a_1 = 350 - 310 = 40$.

Следующая поставка осуществляется от первого поставщика второму потребителю. В клетку (1; 2) назначаем перевозку $x_{12} = \min(40; 340) = 40$. Исключаем из дальнейшего рассмотрения первого поставщика. Корректируем запасы второго потребителя $b_2 = 340 - 40 = 300$.

С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{22} = \min(260; 300) = 260;$$
$$x_{32} = \min(370; 40) = 40;$$
$$x_{33} = \min(330; 450) = 330;$$
$$x_{43} = \min(320; 120) = 120;$$
$$x_{44} = \min(200; 300) = 200;$$
$$x_{54} = \min(200; 100) = 100;$$
$$x_{55} = \min(100; 700) = 100;$$
$$x_{65} = \min(600; 600) = 600.$$

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m + n - 1 = 10$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 8 \cdot 310 + 5 \cdot 40 + 6 \cdot 260 + 5 \cdot 40 + 3 \cdot 330 + 6 \cdot 120 + 10 \cdot 200 +$$
$$+ M \cdot 100 + M \cdot 100 + M \cdot 600 = 8\,150 + 800\,M \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом минимальной стоимости*** (таблица 2.23).

Таблица 2.23 – **План перевозок, построенный методом минимальной стоимости**

Поставщики	Потребители					Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1 (насыпь)	2 (насыпь)	3 (насыпь)	4 (отвал)	5 (кавальер)	
1 (выемка)	8	5	7	9	3 350	$a_1 = 350$
2 (карьер)	4	6	4 260	M	M	$a_2 = 260$
3 (выемка)	1 310	5	3 60	4	9	$a_3 = 370$, 60
4 (выемка)	2	4	6	10	3 320	$a_4 = 320$
5 (карьер)	3	7	5 130	M 70	M	$a_5 = 200$, 70
6 (резерв)	7	5 340	8	M 230	M 30	$a_6 = 600$, 260, 30
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 310$	$b_2 = 340$	$b_3 = 450$, 390, 130	$b_4 = 300$, 230	$B_5 = 700$, 350, 30	

Назначение перевозок начинаем с клетки (3; 1), имеющей минимальную стоимость перевозки. В клетку (3; 1) записываем наименьшее из значений a_3 и b_1 $x_{31} = \min(370, 310) = 310$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения первый столбец. Вычеркнув первый столбец, корректируем запасы третьего поставщика на величину $x_{31} = 310$, $a_3 = 370 - 310 = 60$.

С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{15} = \min(350;\ 700) = 350;$$
$$x_{45} = \min(320;\ 350) = 320;$$
$$x_{33} = \min(60;\ 450) = 60;$$
$$x_{23} = \min(260;\ 390) = 260;$$
$$x_{62} = \min(600;\ 340) = 340;$$
$$x_{53} = \min(200;\ 130) = 130;$$
$$x_{54} = \min(70;\ 300) = 70;$$
$$x_{64} = \min(260;\ 230) = 230;$$
$$x_{65} = \min(30;\ 30) = 30.$$

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m+n-1=10$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 3\cdot 350 + 4\cdot 260 + 1\cdot 310 + 3\cdot 60 + 3\cdot 320 + 5\cdot 130 + M\cdot 70 + $$
$$+ 5\cdot 340 + M\cdot 230 + M\cdot 30 = 5\,890 + 330\,M \text{ ден. ед.}$$

Построение начального базисного плана ***методом двойного предпочтения*** (таблица 2.24). По каждой строке и каждому столбцу находим разности между двумя наименьшими тарифами перевозки (этап 1). Из этих разностей выделяется наибольшая (равная 5). В четвертом столбце находим клетку (1; 4), имеющую минимальную стоимость перевозки. В клетку (3; 4) записываем наименьшее из значений a_3 и b_4 $x_{34} = \min(370, 300) = 300$ и исключаем из дальнейшего рассмотрения четвертый столбец. Вычеркнув четвертый столбец, корректируем запасы третьего поставщика $a_3 = 370 - 300 = 70$. С оставшейся матрицей поступаем аналогично предыдущему:

$$x_{31} = \min(70;\ 310) = 70;$$
$$x_{15} = \min(350;\ 700) = 350;$$
$$x_{45} = \min(320;\ 350) = 320;$$
$$x_{51} = \min(200;\ 240) = 200;$$
$$x_{23} = \min(260;\ 450) = 260;$$
$$x_{62} = \min(600;\ 340) = 340;$$
$$x_{63} = \min(220;\ 190) = 190;$$
$$x_{65} = \min(30;\ 30) = 30.$$

Построенный начальный план перевозок является базисным, так как число назначенных перевозок x_{ij} равно $m+n-1=10$.

Значение целевой функции при начальном плане перевозок

$$z(X^0) = 3\cdot 350 + 4\cdot 260 + 1\cdot 70 + 4\cdot 300 + 3\cdot 320 + 3\cdot 200 + 7\cdot 40 + $$
$$+ 5\cdot 340 + 8\cdot 190 + M\cdot 30 = 8\,420 + 30\,M \text{ ден. ед.}$$

Сравнивая значения целевых функций для планов, полученных методами северо-западного угла, двойного предпочтения и минимальной стоимости, заметим, что транспортные расходы по плану, построенному методом двойного предпочтения меньше.

Таблица 2.24 – **План перевозок, построенный методом двойного предпочтения**

Поставщики		Потребители					a_i	Этапы								
		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		(насыпь)	(насыпь)	(насыпь)	(отвал)	(кавальер)										
1 (выемка)		8	5	7	9	3 350	$a_1 = 350$	2	2	**2**	–	–	–	–	–	–
2 (карьер)		4	6	4 260	*M*	*M*	$a_2 = 260$	0	0	0	0	0	0	–	–	–
3 (выемка)		1 70	5	3	4 300	9	$a_3 = 370$, 70	2	**2**	–	–	–	–	–	–	–
4 (выемка)		2	4	6	10	3 320	$a_4 = 320$	1	2	2	2	–	–	–	–	–
5 (карьер)		3 200	7	5	*M*	*M*	$a_5 = 200$	2	2	2	2	**2**	–	–	–	–
6 (резерв)		7 40	5 340	8 190	*M*	*M* 30	$a_6 = 600$, 260, 220	2	2	2	2	2	2	**2**	**1**	***M*–8**
b_j		$b_1 = 310$, 240, 40	$b_2 = 340$	$b_3 = 450$, 190	$b_4 = 300$	$b_5 = 700$, 350, 30										
Этапы	1	1	1	1	**5**	0										
	2	1	1	1	–	0										
	3	1	1	1	–	0										
	4	1	1	1	–	***M*–3**										
	5	1	1	1	–	0										
	6	3	1	**4**	–	0										

Построение оптимального плана методом потенциалов. С помощью метода потенциалов доведем до оптимального начальный план, построенный методом двойного предпочтения (см. таблицу 2.24).

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках. Если известен u_i, то $v_j = c_{ij} + u_i$, если известен v_j, то $u_i = v_j - c_{ij}$. Положим, например, $u_6 = 0$. Тогда будут вычислены и остальные потенциалы строк и столбцов (таблица 2.25).

Таблица 2.25 – **Начальный план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 5$	$v_3 = 8$	$v_4 = 10$	$v_5 = M$
$u_1 = M - 3$	8	5	7	9	3 350
$u_2 = 4$	4	6	4 260	M	M
$u_3 = 6$	– 1 70	5	3	4 300	+ 9
$u_4 = M - 3$	2	4	6	10	3 320
$u_5 = 4$	3 200	7	5	M	M
$u_6 = 0$	+ 7 40	5 340	8 190	M	– M 30

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$:

$\Delta_{11} = 7 - M - 8 = -1 - M$
$\Delta_{12} = 5 - (M - 3) - 5 = 3 - M$
$\Delta_{13} = 8 - (M - 3) - 7 = 4 - M$
$\Delta_{14} = 10 - (M - 3) - 9 = 4 - M$
$\Delta_{21} = 7 - 4 - 4 = 7$
$\Delta_{22} = 5 - 4 - 6 = -5$
$\Delta_{24} = 10 - 4 - M = 6 - M$
$\Delta_{25} = M - 4 - M = -4$
$\Delta_{32} = 5 - 6 - 5 = -6$
$\Delta_{33} = 8 - 6 - 3 = -1$
$\Delta_{35} = M - 6 - 9 = -15 - M$
$\Delta_{41} = 7 - (M - 3) - 2 = 8 - M$
$\Delta_{42} = 5 - (M - 3) - 4 = 4 - M$
$\Delta_{43} = 8 - (M - 3) - 6 = 5 - M$
$\Delta_{44} = 10 - (M - 3) - 10 = 3 - M$
$\Delta_{52} = 5 - 4 - 7 = -6$
$\Delta_{53} = 8 - 4 - 5 = -1$
$\Delta_{54} = 10 - 4 - M = 6 - M$
$\Delta_{55} = M - 4 - M = -4$
$\Delta_{64} = 10 - 0 - M = 10 - M.$

Полученный план неоптимален. Среди оценок Δ_{ij} имеются положительные. Наиболее потенциальной является клетка (3; 5). От клетки (3, 5) строим замкнутый контур: (3; 5), (3; 1), (6; 1), (6; 5). Начиная с клетки (3, 5), разметим вершины контура попеременно знаками плюс «+», минус «–», обходя замкнутый контур в любом направлении. Из клеток, помеченных знаком «–»,

выбираем наименьшее значение объема перевозки $\theta = \min(70, 30) = 30$. Сформируем новый улучшенный план перевозок: на 30 увеличим перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшим в клетках, помеченных знаком « – ». Новый улучшенный план перевозок представлен в таблице 2.26.

Таблица 2.26 – **Улучшенный методом потенциалов план перевозок**

u_i \ v_j	$v_1 = 7$	$v_2 = 5$	$v_3 = 8$	$v_4 = 10$	$v_5 = 15$
$u_1 = 12$	8	5	7	9	3 350
$u_2 = 4$	4	6	4 260	500	500
$u_3 = 6$	1 40	5	3	4 300	9 30
$u_4 = 12$	2	4	6	10	3 320
$u_5 = 4$	3 200	7	5	500	500
$u_6 = 0$	7 70	5 340	8 190	500	500

Значение целевой функции при улучшенном плане перевозок

$$z(X^1) = 3 \cdot 350 + 4 \cdot 260 + 1 \cdot 40 + 4 \cdot 300 + 9 \cdot 30 + 3 \cdot 320 + 3 \cdot 200 + \\ + 7 \cdot 70 + 5 \cdot 340 + 8 \cdot 190 = 8\,870 \text{ ден. ед.}$$

Вычислим потенциалы строк и столбцов по стоимости перевозок в загруженных клетках.

Для незагруженных клеток вычислим величины превышения стоимости:

$\Delta_{11} = 7 - 12 - 8 = -13$
$\Delta_{12} = 5 - 12 - 5 = -12$
$\Delta_{13} = 8 - 12 - 7 = -11$
$\Delta_{14} = 10 - 12 - 9 = -11$
$\Delta_{21} = 7 - 4 - 4 = 7$
$\Delta_{22} = 5 - 4 - 6 = -5$
$\Delta_{24} = 10 - 4 - M = 6 - M$
$\Delta_{25} = 15 - 4 - M = 11 - M$
$\Delta_{32} = 5 - 6 - 5 = -6$
$\Delta_{33} = 8 - 6 - 3 = -1$
$\Delta_{41} = 7 - 12 - 2 = -7$
$\Delta_{42} = 5 - 12 - 4 = -11$
$\Delta_{43} = 8 - 12 - 6 = -10$
$\Delta_{44} = 10 - 12 - 10 = -12$
$\Delta_{52} = 5 - 4 - 7 = -6$
$\Delta_{53} = 8 - 4 - 5 = -1$
$\Delta_{54} = 10 - 4 - M = 6 - M$
$\Delta_{55} = 15 - 4 - M = 11 - M$
$\Delta_{64} = 10 - 0 - M = 10 - M$
$\Delta_{65} = 15 - 0 - M = 15 - M.$

Среди оценок свободных клеток нет положительных, следовательно, построенный план перевозок является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 260 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 300 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 320 \\ 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 340 & 190 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 8\ 870$ ден. ед.

Вывод. Для того чтобы общие затраты на перевозки были минимальными и составили 8 870 ден. ед., рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана X^* (см. таблицу 2.26).

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте постановку транспортной задачи в матричной форме и запишите ее математическую модель.
2 Как осуществляется преобразование модели транспортной задачи открытого типа в закрытую?
3 Какой план перевозок называется допустимым (оптимальным) планом?
4 Как построить начальный план перевозок методами северо-западного угла, минимальной стоимости, двойного предпочтения?
5 Какое решение транспортной задачи называется базисным?
6 Дайте определение замкнутого контура транспортной задачи. Какими свойствами он обладает?
7 Сформулируйте условие оптимальности плана перевозок транспортной задачи.
8 Какие числа называются потенциалами? Каким образом они определяются?
9 Как сформировать новый улучшенный план перевозок?
10 Сформулируйте алгоритм решения транспортной задачи в матричной форме.
11 Как определить оптимальный план транспортной задачи, если от i-го поставщика к j-му потребителю запрещены поставки?
12 Как определить оптимальный план транспортной задачи, если дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза; если от i-го поставщика к j-му потребителю указаны нижние или верхние границы поставки?
13 Укажите два способа нахождения оптимального плана задачи транспортного типа на максимум.

3 ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Дискретное программирование – раздел математического программирования, изучающий экстремальные задачи, в которых значения переменных принимают конечное или счетное множество. Целочисленное программирование является частным случаем дискретного. Задачи оптимизации, переменные которых принимают лишь целые значения, называется ***задачей целочисленного программирования***. В математической модели задачи целочисленного программирования как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

Можно выделить следующие основные классы задач дискретного программирования (краткая классификация математических моделей дискретного программирования):

1) транспортная задача и ее модификации;
2) задачи с неделимостями (задача о рюкзаке);
3) экстремальные комбинаторные задачи (задача о коммивояжере, о покрытии, линейный и нелинейный варианты задач о назначениях);
4) модели с булевыми переменными (задача о назначениях);
5) задачи с разрывными целевыми функциями (транспортная задача с фиксированными доплатами);
6) задачи на неклассических областях.

В свою очередь каждый тип моделей подразделяется на линейные и нелинейные, статические и динамические, детерминированные и стохастические и т. д. Наиболее изучен класс задач целочисленного программирования детерминированного типа, в частности, детерминированная задача целочисленного линейного программирования.

Большинство целочисленных и комбинаторных типов задач, таких как задача с неделимостями, задача о коммивояжере, задача календарного планирования принадлежат к разряду так называемых «трудно решаемых задач». Это означает, что вычислительная сложность алгоритма их точного решения, т. е. зависимость числа элементарных операций (операций сложения или сравнения), необходимых для получения точного решения, от размерности задачи *n*, является показательной (порядка 2^n), т. е. сравнимой с трудоемкостью полного перебора вариантов. В качестве *n*, например, для задачи с неделимостями служит число целочисленных переменных и число ограничений, для задачи коммивояжера – число городов или узлов графа маршрутов, для задачи календарного планирования – число деталей и число станков. Такие задачи называют еще *NP*-трудными или *NP*-полными. Получение их точного решения не может быть гарантировано, хотя для некоторых задач данного типа существуют эффективные методы, позволяющие находить точное решение даже при больших размерностях.

Задачи с вычислительной сложностью, определяемой полиномиальной зависимостью от *n*, называются «эффективно решаемыми задачами». К такому типу задач принадлежат задачи транспортного типа и линейные задачи о назначениях.

Общая постановка задачи целочисленного программирования отличается от общей постановки задачи линейного программирования лишь наличием дополнительного ограничения. Этим ограничением является требование целочисленности, в соответствии с которым значения всех или части переменных модели в оптимальном решении являются целыми неотрицательными числами. При этом, если требование целочисленности распространяется на все переменные, то задачу целочисленного программирования называют ***полностью целочисленной задачей***. Если же требование целочисленности относится лишь к части переменных, то задачу называют ***частично целочисленной***. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то говорят, что данная задача является ***задачей линейного целочисленного программирования***. Задачу линейного программирования, отличающуюся от рассматриваемой задачи целочисленного программирования лишь отсутствием требования целочисленности, называют ***задачей с ослабленными ограничениями***, соответствующей задаче целочисленного программирования.

Для решения целочисленных задач используются следующие методы:

1) округления;
2) отсечений (метод Гомори);
3) «ветвей и границ»;
4) комбинаторные;
5) эвристические.

Последняя группа методов не обеспечивает получения точного решения и может использоваться в случаях, когда применение предыдущих методов невозможно или не приводит к успеху. К тому же, эти методы можно использовать для решения задач любой сложности.

3.1 Математическая модель задачи целочисленного программирования

В общем виде математическая модель задачи целочисленного линейного программирования имеет вид:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \qquad (3.1)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = \overline{1, m}, \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}, \qquad (3.3)$$

$$x_j \text{ – целые}, \; j = 1, 2, ..., n_1 \le n. \qquad (3.4)$$

Если $n_1 < n$, то задача называется частично целочисленной, если $n_1 = n$ – полностью целочисленной. Среди задач рассматриваемого класса выделяются задачи с *булевыми* переменными (название связано с именем английского математика Д. Буля (1815–1864), одного из основоположников математической логики), принимающих значения ноль или единица.

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \; j = 1, 2, ..., n_1 \le n. \qquad (3.5)$$

Линейная функция (3.1) называется целевой функцией; множество планов *X*, удовлетворяющих системе ограничений (3.2)–(3.4), называется множеством допустимых решений Ω, $X \in \Omega$. Допустимый план $X \in \Omega$, доставляющий целевой функции (3.1) экстремальное значение, называется оптимальным (*X**).

3.2 Задача о назначениях (задача выбора)

«Лучший работник для выполнения данной работы» – вот подходящее краткое описание задачи о назначениях. В этой задаче необходимо назначить работников на определенные работы; каждый работник может выполнять любую работу, хотя и с различной степенью мастерства. Если на некоторую работу назначается работник именно той квалификации, которая необходима для ее выполнения, тогда стоимость выполнения работы будет ниже, чем при назначении на данную работу работника неподходящей квалификации. Цель задачи – найти оптимальное (минимальной стоимости, максимальной эффективности и т. д.) распределение работников по всем заявленным работам.

Специфические особенности задачи о назначениях, где все величины спроса и предложения равны 1, позволили разработать эффективный метод ее решения, известный как ***венгерский метод***.

Если говорить о связи венгерского метода с общими методами линейного программирования, то наиболее близко он примыкает к методам, опирающимся на теорию двойственности. По существу этот метод является уточнением метода последовательного сокращения невязок применительно к транспортной задаче. Венгерский метод особенно эффективен для задачи выбора.

Задача о назначениях является *частным случаем транспортной задачи*, в которой работники соответствуют пунктам отправления, а работы – пунктам назначения. В данном случае все величины спроса и предложения равны 1. Стоимость «транспортировки» рабочего i на работу j равна c_{ij}. Задачу о назначениях можно эффективно решить точно так же, как и транспортную задачу. Применительно к задаче о назначениях симплекс-метод не эффективен, так как любое ее допустимое базисное решение является вырожденным.

Постановка задачи о назначениях.

Имеется n исполнителей $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и n видов работ $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Пусть c_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$) – параметры эффективности выполнения исполнителем A_i работы B_j. Ставится задача отыскания такой расстановки исполнителей на работы, чтобы суммарный эффект их труда был наилучшим.

Для решения задачи о назначениях исходной информацией является таблица 3.1, элементами которой служат показатели эффективности выполнения работ. Для задачи о назначениях закрытого типа количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов. То, что количество исполнителей равно количеству работ, не является общим ограничением, поскольку всегда можно ввести в модель фиктивных исполнителей или фиктивные работы.

Таблица 3.1 – **Показатели эффективности выполнения работ**

Исполнители A_n	Работы B_n			
	1	2	…	n
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
2	c_{21}	c_{21}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}

Математическая модель задачи примет вид:

найти план назначения исполнителей на работы $X=||x_{ij}||$ ($i, j = \overline{1, n}$), который доставляет экстремум функции

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max\ (\min), \tag{3.6}$$

при следующих ограничениях:

- каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = \overline{1, n}, \tag{3.7}$$

- каждая работа выполняется только одним исполнителем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = \overline{1, n}, \tag{3.8}$$

условие целочисленности

$$x_{ij} \in \{0; 1\},\ \ i, j = \overline{1, n}, \tag{3.9}$$

где переменные $x_{ij} = 1$, если j-й вид работ выполняется i-м исполнителем, $x_{ij} = 0$ – в остальных случаях.

Если задача о назначениях ставится при условии получения максимального эффекта (3.10), то ее сводят к задаче на минимум (3.11):

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max,\ X \in \Omega, \tag{3.10}$$

где Ω – область допустимых решений (3.7)–(3.9).

Пусть дана матрица эффективности $C = \left\| c_{ij} \right\|$. В каждом столбце находим максимальный элемент $l_j = \max\limits_i c_{ij}$ и строим новую матрицу $C' = \left\| l_j - c_{ij} \right\|$.

В этом случае целевая функция имеет вид:

$$z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(l_j - c_{ij}\right)x_{ij} \to \min,\ \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3.11}$$

$$z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(l_j - c_{ij}\right)x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} l_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} l_j - z.$$

Функция z' достигает минимума при условии, что z достигает максимума, $X \in \Omega$.

Задача о назначениях открытого типа. Возникает тогда, когда количество исполнителей n не равно количеству работ m. Если $m < n$, то вводят $n - m$ фиктивных работ. Считается, что с назначением на фиктивные работы исполнителей не связаны затраты, то есть соответствующие элементы матрицы стоимостей равны нулю. В случае $m > n$, вводят $m - n$ фиктивных исполнителей. Соответствующие элементы c_{ij} стоимостей можно полагать очень большим (M). Если запрещается выполнение какой-либо работы каким-либо исполнителем, то и в этом случае соответствующий элемент c_{ij} матрицы стоимостей можно полагать очень большим (M). Таким образом, задача преобразуется к задаче закрытого типа.

Пусть, например, количество исполнителей n превышает количество работ m. Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j = \overline{m+1, n}$. Коэффициенты таблицы назначений c_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{m+1, n}$ положим равными нулю. В этом случае получаем задачу закрытого типа. Если в оптимальном плане этой задачи $x_{ij} = 1$, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, то есть, остается без работы. Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к закрытому типу. Таким образом, эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

3.2.1 Алгоритм венгерского метода

Введём ряд определений: задачи целочисленного линейного программирования называются ***эквивалентными***, если их оптимизирующие наборы совпадают. Преобразование, переводящее задачу целочисленного линейного программирования в эквивалентную ей, будем называть ***эквивалентным***. Систему нулевых элементов матрицы, обладающую тем свойством, что никакая пара из них не лежит в одной строке или в одном столбце, будем называть ***системой независимых нулей***.

Алгоритм венгерского метода состоит в преобразовании исходной задачи целочисленного линейного программирования в эквивалентную ей задачу минимизации, матрица $C = \left\| c_{ij} \right\|$, ($i, j = \overline{1, n}$) которой содержит неотрицательные элементы. Если в матрице C имеется система из n независимых нулей, то решением задачи будет матрица X с единичными элементами на местах, соответствующих независимым нулям, и с остальными нулевыми элементами. Алгоритм венгерского метода включает один подготовительный и четыре основных этапа и не более чем (n – 2) последовательно проводимых итераций. Каждая итерация связана с некоторыми эквивалентными преобразованиями матрицы, полученной в результате проведения предыдущей итерации, и выбором максимального числа независимых нулей. Окончательным результатом итерации является увеличение числа независимых нулей, имеющихся в ее начале, как минимум на единицу. Как только количество независимых нулей становится равным n, проблема выбора оказывается решенной: оптимальное решение определяется системой независимых нулей в последней из матриц, эквивалентных C.

Результатом решения задачи о назначениях является матрица $X^* = \left\| x_{ij} \right\|$, $i, j = \overline{1, n}$, компоненты которой являются целыми числами.

Оптимальный план задачи о назначениях можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица. Такую матрицу иногда называют ***матрицей перестановок***. Значение целевой функции, соответствующее оптимальному плану, называют ***эффективностью назначений***.

Алгоритм решения задачи о назначениях венгерским методом

Подготовительный этап

Если исходная задача была задачей на максимум, то она должна быть преобразована в задачу минимизации (формула (3.11)) следующим эквивалентным преобразованием матрицы C. Необходимо определить максимальный элемент в каждом столбце исходной матрицы и вычесть из него все элементы соответствующего столбца – получаем новую матрицу C'.

Основные этапы

Этап 1 *Получение нулей в каждой строке.* В исходной матрице стоимостей (C) или в преобразованной (C'), в зависимости от условия задачи, определяем в каждой строке минимальную стоимость и вычитаем ее из других элементов строки.

Этап 2 *Получение нулей в каждом столбце.* В матрице, полученной на первом этапе, найдем в каждом столбце минимальную стоимость и вычитаем ее из других элементов столбца.

Этап 3 *Проверка решения на оптимальность.* Оптимальным назначениям будут соответствовать нулевые элементы. Находим строку, содержащую наименьшее число нулей, выделяем один из них и зачёркиваем все остальные нули этой строки и столбца, содержащих выделенный нуль. Аналогичные операции последовательно выполняем для всех строк. Если получена система независимых нулей (число выделенных нулей равно n), то решение является оптимальным, иначе переходим к следующему этапу.

Этап 4 Если после выполнения третьего этапа описанного алгоритма не получено оптимальное решение, то требуется перейти к выполнению первой итерации (решение содержит не более чем (n – 2) последовательно проводимых итераций) и выполнить следующие действия:

а) *поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули*. Требуется выделить (вычеркнуть) в последней матрице строки и столбцы, которые содержат все нулевые элементы так, чтобы их количество было минимальным: 1) помечаем все строки, не имеющие ни одного выделенного нуля; 2) помечаем все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль в помеченных строках; 3) помечаем все строки, содержащие выделенные нули в помеченных столбцах; 4) повторяем, если возможно, поочередно действия пп. 2 и 3. Далее необходимо выделить (вычеркнуть) каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец;

б) *перестановка некоторых нулей*: находим наименьший невыделенный элемент в матрице и вычитаем его из остальных невыделенных элементов и прибавляем к элементам, стоящим на пересечении выделенных строк и столбцов (строим новую матрицу) и переходим к третьему этапу алгоритма.

3.2.2 Пример решения задачи о назначениях венгерским методом

Постановка задачи. Для дорог республиканского значения с облегченным покрытием межремонтный срок службы составляет 10 лет. К истекшему сроку ДРСУ (Дорожно-ремонтное строительное управление) запланировало произвести капитальный ремонт автомагистрали. Для этого был объявлен тендер на проведение ремонтных работ, в ходе которого было отобрано 5 строительных организаций-подрядчиков (A_i). Каждая организация дала оценку времени в сутках t_{ij} ($i=\overline{1,5}$; $j=\overline{1,4}$), требующегося ей для выполнения всех работ (B_j): B_1 – уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника), B_2 – ремонт искусственных сооружений, B_3 – укрепление земляного полотна, B_4 – косметический ремонт дорожной одежды. Эти оценки приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – **Выполнение комплекса ремонтных работ организациями**

Организация	Комплекс ремонтных работ			
	Уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника) B_1	Ремонт искусственных сооружений B_2	Укрепление земляного полотна B_3	Косметический ремонт дорожной одежды B_4
	Время выполнения, сут			
A_1	30	70	50	80
A_2	10	20	10	30
A_3	35	35	–	40
A_4	10	18	10	12
A_5	15	20	15	10

Качество выполнения организациями работ одинаковое. Организации, занятые выполнением заказа, потребовали оплату за одни сутки в размере: 1 ден. ед. – первая организация, 3 ден. ед. – вторая, 2 ден. ед. – третья, 5 ден. ед. – четвертая, 4 ден. ед. – пятая. Организация № 3 не выполняет работы, связанные с укреплением земляного полотна. Какая из организаций не получит заказ? Как ДРСУ следует распределить работы между организациями, чтобы минимизировать общие издержки капитального ремонта автомагистрали?

Определим ***тип задачи о назначениях***. Количество исполнителей равно пяти, а количество работ – четырем, следовательно, данная задача является задачей открытого типа. Преобразуем ее к задаче закрытого типа, введем фиктивную работу B_5.

Построим математическую модель задачи**.** Обозначим через x_{ij} – назначение i-го исполнителя на j-й вид работ, t_{ij} и c_{ij} – время и стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем соответственно.

Математическая модель задачи примет вид:

найти план назначений $X=\left\|x_{ij}\right\|=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$,

при следующих ограничениях:

- каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,5};$$

- каждая работа выполняется только одним исполнителем:

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,5};$$

условие целочисленности

$$x_{ij}\in\{0;1\},\ i,j=\overline{1,5},$$

где переменные $x_{ij}=1$, если j-й вид работ выполняется i-м исполнителем, $x_{ij}=0$ – в остальных случаях,

и чтобы общие издержки капитального ремонта автомагистрали были минимальными:

$$z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}\to\min.$$

Стоимость выполнения работ

$$c_{ij}=t_{ij}c'_{ij},\ i,j=\overline{1,5},$$

где c'_{ij} – стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем в сутки.

Стоимость выполнения фиктивной работы B_5 исполнителями равна нулю, то есть элементы c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45}, c_{55} матрицы стоимостей равны нулю. Так как исполнитель A_3 не выполняет работу B_3, то элемент c_{33} матрицы стоимостей можно полагать очень большим (M).

Составим матрицу стоимостей выполнения работ:

$$C=\left\|c_{ij}\right\|=\begin{pmatrix}30&70&50&80&0\\30&60&30&90&0\\70&70&M&80&0\\50&90&50&60&0\\60&80&60&40&0\end{pmatrix}.$$

Этап 1 Получение нулей в каждой строке.

Находим минимальный элемент в каждой строке исходной таблицы 3.3.

Таблица 3.3 – **Стоимости выполнения работ**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	min
A_1	30	70	50	80	0	0
A_2	30	60	30	90	0	0
A_3	70	70	M	80	0	0
A_4	50	90	50	60	0	0
A_5	60	80	60	40	0	0

Затем вычитаем минимальные элементы из всех элементов соответствующих строк. Результаты вычислений записываем в таблицу 3.4.

Таблица 3.4 – **Получение нулей в каждой строке**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	70	50	80	0
A_2	30	60	30	90	0
A_3	70	70	M	80	0
A_4	50	90	50	60	0
A_5	60	80	60	40	0
min	30	60	30	40	0

Этап 2 Получение нулей в каждом столбце.

Находим минимальный элемент в каждом столбце таблицы 3.4. Вычитаем найденный элемент из каждого элемента соответствующего столбца. В результате получаем следующую таблицу 3.5.

Таблица 3.5 – **Получение нулей в каждом столбце**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	0
A_2	0	0	0	50	0
A_3	40	10	$M-30$	40	0
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	0

Этап 3 Проверка решения на оптимальность.

Находим строки, содержащие наименьшее число нулей, – это строка три и четыре, выбираем одну из них, например, четвертую и выделяем один из нулей этой строки и зачеркиваем все остальные нули этой строки и столбца, содержащих выделенный нуль. Следующими строками, содержащими наименьшее число нулей, являются первая и пятая, из которых выбираем одну и выполняем аналогичные операции, и так далее последовательно для всех строк (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – **Проверка решения на оптимальность**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	$\boxed{0}$	10	20	40	$\cancel{0}$
A_2	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	50	$\cancel{0}$
A_3	40	10	$M-30$	40	$\cancel{0}$
A_4	20	30	20	20	$\boxed{0}$
A_5	30	20	30	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$

Так как количество выделенных нулей равно 4 (система нулей не является независимой), следовательно, решение не оптимально.

Этап 4 Выполнение I итерации:

а) поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

Помечаем третью строку, которая не имеет ни одного выделенного нуля, затем пятый столбец, который содержит перечеркнутый нуль в этой строке. Далее помечаем четвертую строку, содержащую выделенный нуль в помеченном столбце (таблица 3.7).

Таблица 3.7– **Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	~~0~~
A_2	~~0~~	0	~~0~~	50	~~0~~
A_3	40	10	$M-30$	40	~~0~~
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	~~0~~

Затем выделяем каждую непомеченную строку (первую, вторую и пятую) и каждый помеченный столбец (пятый), в итоге получаем таблицу 3.8.

Таблица 3.8– **Получение минимального набора строк и столбцов, содержащих нули**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	40	0
A_2	0	0	0	50	0
A_3	40	10	$M-30$	40	0
A_4	20	30	20	20	0
A_5	30	20	30	0	0

б) перестановка некоторых нулей.

Находим наименьший невыделенный элемент, который находится на пересечении третьей строки и второго столбца, равный 10, и вычитаем его из остальных невыделенных элементов и прибавляем к элементам, стоящим на пересечении выделенных строк (первая, вторая и пятая) и столбцов (пятый). В результате получаем следующую таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	50	10
A_2	0	0	0	60	10
A_3	30	0	$M-40$	30	0
A_4	10	20	10	10	0
A_5	30	20	30	0	10

Этап 3. Проверка решения на оптимальность:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	10	20	50	10
A_2	~~0~~	~~0~~	0	60	10
A_3	30	0	$M-40$	30	~~0~~
A_4	10	20	10	10	0
A_5	30	20	30	0	10

Получена система независимых нулей (количество выделенных нулей равно 5). В результате выполнения одной итерации получено оптимальное решение.

Следовательно, оптимальный план $X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Значение целевой функции при оптимальном плане

$$z^* = z\left(X^*\right) = 30\cdot1 + 70\cdot0 + 50\cdot0 + 80\cdot0 + 0\cdot0 + 30\cdot0 + 60\cdot0 + 30\cdot1 +$$

$$+90\cdot0 + 0\cdot0 + 70\cdot0 + 70\cdot1 + (M-40)\cdot0 + 80\cdot0 + 0\cdot0 + 50\cdot0 + 90\cdot0 + 50\cdot0 +$$

$$+60\cdot0 + 0\cdot1 + 60\cdot0 + 80\cdot0 + 60\cdot0 + 40\cdot1 + 0\cdot0 = 30 + 30 + 70 + 40 = 170 \text{ ден. ед.}$$

Вывод. Для того чтобы общие издержки капитального ремонта ДРСУ автомагистрали были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана назначений: первая организация выполняет уборку полосы отвода, вторая – укрепление земляного полотна, третья – ремонт искусственных сооружений, пятая – косметический ремонт дорожной одежды. Четвертой организации будет отказано ДРСУ в выполнении заказа на проведение ремонтных работ. В этом случае общие издержки будут минимальны и составят 170 ден. ед.

Контрольные вопросы

1 Назовите основные классы задач дискретного программирования.
2 Какие методы используются для решения целочисленных задач?
3 Сформулируйте постановку задачи целочисленного программирования.
4 Сформулируйте постановку задачи о назначениях в общем виде.
5 Как привести задачу о назначениях открытого типа к закрытому?
6 Сформулируйте признак оптимальности плана при решении задачи о назначениях венгерским методом.
7 Что представляет собой область допустимых решений в задаче о назначениях?
8 Сформулируйте алгоритм решения задачи о назначениях венгерским методом.
9 К какому классу задач относится задача о назначениях?
10 Частным случаем какой задачи является задача о назначениях?
11 В каком виде можно представить оптимальный план задачи о назначениях?

4 УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Формирование теории управления запасами как научной дисциплины началось с середины 50-х гг XX века. Внимание отечественных исследователей: математиков, экономистов, военных, практиков – теория запасов привлекла в начале 60-х гг. Многообразие реальных ситуаций вызвало необходимость в рассмотрении огромного числа вариантов задач управления запасами, которые систематизированы лишь частично. Использование богатейшего материала теории управления запасами (Inventory Control), немыслимо без его упорядочивания в рамках единой классификации. Основы современной теории управления запасами – постановка задачи, анализ влияющих на решение факторов, способ учета неопределенности в спросе – были сформулированы в работах К. Эрроу, В. Гарриса, С. Маршака и А. Дворецкого. Разработка этих идей в дальнейшем была подхвачена в ряде статей, обсуждающих как отдельные аспекты самой теории, так и вопрос в целом.

Почти для всех методов решения задач требуется построение модели процесса (математической, статистической, имитационной). Обычно такие модели основаны на системе соотношений, связывающих интересующие нас переменные величины. Эти соотношения позволяют обнаружить и выразить противоречия в пределах операции и организации, а также дают возможность заменять один показатель другим.

Использование моделей для анализа и решения научных проблем – вопрос не новый. *Моделирование* является общим методом во многих науках.

Модель может принимать любую форму. *Имитационные* модели часто являются почти точным аналогом процесса управления запасами. Модели *массового обслуживания* являются статистическими и предполагают определенные допущения относительно распределения спроса и распределения моментов пополнения запасов и относительно их взаимодействия. В некоторых моделях соотношения между показателями кажутся слишком упрощенными, и тем не менее, эти модели дают полезные и важные результаты. Для того чтобы модель оказалась полезной, она должна удовлетворять следующим требованиям: обеспечивать возможность применения математического аппарата (непосредственно, путем соответствующих упрощающих аппроксимаций или с помощью моделирования на ЭВМ) и должна приводить к решениям или разумным выводам. Кроме того, модели, которые необходимо существенно изменять при небольших колебаниях характера процесса, имеют до некоторой степени ограниченную ценность. Еще более важно, чтобы в модели рассматривался и численно оценивался процесс принятия решений, приемлемый в реальных условиях. Модель, в которой обычные решения могут приниматься лишь после математических вычислений, совершенно не подходит для большинства торговых и промышленных предприятий. С другой стороны, неприемлема и модель, упрощенная до такой степени, что она становится слабо связанной с реальной действительностью. Таким образом, полезные и эффективные модели заключены между этими двумя предельными случаями. Наличие ЭВМ позволяет применять все более сложные модели, а прогресс в понимании поведения запасов сможет расширить круг полезных моделей в сторону нижнего предела.

Модель управления запасами используется для определения времени размещения заказов на ресурсы и их количества на складах. Любая организация должна поддерживать некоторый уровень запасов во избежание задержек на производстве и в сбыте. Для сухой очистки требуется поставка необходимого количества химикатов, для больницы – лекарств, для производственной организации – сырья и деталей, а также определенный задел незавершенного производства и запас готовой продукции.

Цель данной модели – сведение к минимуму отрицательных последствий накопления запасов, что выражается в определенных издержках. Эти издержки бывают трех основных видов: *на размещение заказов*, *на хранение*, а также потери, связанные с *недостаточным уровнем запасов*. Последние имеют место при исчерпании запасов. В этом случае продажа готовой продукции или предоставление обслуживания становятся невозможными, а также возникают потери от простоя производственных линий, в частности, в связи с необходимостью оплаты труда работников, хотя они не работают в данный момент.

Поддержание высокого уровня запасов избавляет от потерь, обусловливаемых их нехваткой. Закупка в больших количествах материалов, необходимых для создания запасов, во многих случаях сводит к минимуму издержки на размещение заказов, поскольку организация может получить соответствующие скидки и снизить объем «бумажной работы». Однако эти потенциальные выгоды перекрываются дополнительными издержками расходов на хранение, перегрузку, выплату процентов, затрат на страхование, потерь от порчи, воровства и дополнительных налогов. Кроме того, руководство должно учитывать возможность связывания оборотных средств избыточными запасами, что препятствует вложению капитала в приносящие прибыль акции, облигации или банковские депозиты. Несколько специфических моделей разработано в помощь руководству, желающему установить, когда и сколько материалов заказывать в запас, какой уровень незавершенного производства и запаса готовой продукции поддерживать.

Задачи управления запасами представляют собой трудный для решения класс задач, где необходимо учитывать большое количество параметров, которые имеют сложную зависимость и сводят отыскание оптимума целевой функции к исследованию задач *нелинейного программирования*. Систематизация задач управления запасами по наличию того или иного признака показана на рисунке 4.1.

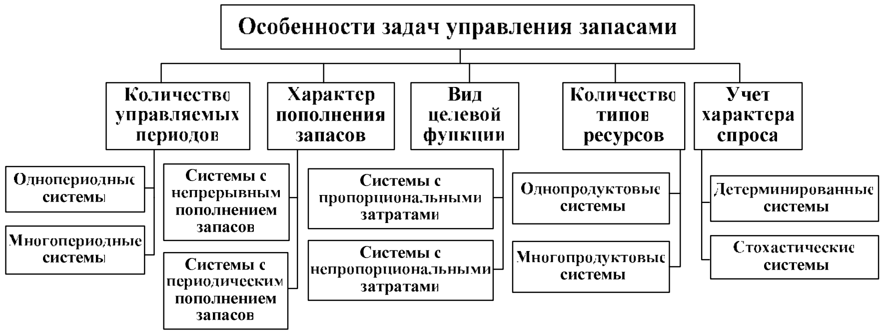


Рисунок 4.1 – Систематизация задач управления запасами

В обобщенном виде эти задачи можно сгруппировать следующим образом:

1) выдерживание обоснованных сроков закупки сырья и комплектующих изделий (материалы, закупленные ранее намеченного срока, ложатся дополнительной нагрузкой на оборотные фонды предприятий, а опоздание в закупках может сорвать производственную программу или привести к ее изменению);

2) обеспечение точного соответствия между количеством поставок и потребностями в них (избыток или недостаточное количество поставляемых товарно-материальных ресурсов также негативно влияет на баланс оборотных фондов и устойчивость выпуска продукции и, кроме того, может вызвать дополнительные расходы при восстановлении балансового оптимума);

3) соблюдение требований производства по качеству сырья и комплектующих изделий.

Особенность большинства предпринимательских систем заключается в том, что товары заказываются в количествах, избыточных по отношению к необходимым на данный момент объемам. Тому есть ряд причин:

- задержка с получением заказанных товаров в полном объеме, что вынуждает заказчиков (в особенности посредников) хранить какое-то время те или иные товары на складе;

- скидки, предоставляемые заказчикам при продаже товаров крупными партиями;

- налогообложение торговых сделок с минимальным размером партии, делающие невыгодной отправку заказчику товаров в количестве, меньше установленного размера и т. п.

При этом существуют определенные ограничения на размер товарно-материальных запасов. Ограничителем выступают издержки их хранения. Поэтому возникает необходимость достижения баланса между преимуществами и недостатками, с одной стороны, заказа, а с другой – хранения товаров.

Этот баланс достигается выбором оптимального объема партии заказных товаров. Величина закупаемой партии оказывает существенное влияние на производственный цикл предприятия и его эксплуатационные расходы. Величина этой партии оказывает влияние и на эксплуатационные расходы торгово-закупочных баз, так как для предприятия величина одновременно закупаемой партии связана с объемом емкостей для хранения, эксплуатацией этих емкостей и соответствующих расходов.

Простейшая схема системы управления запасами представлена на рисунке 4.2.

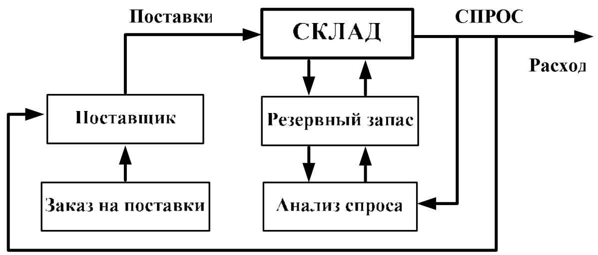


Рисунок 4.2 – Система управления запасами

Существуют ***причины, побуждающие предприятия создавать запасы***:

1) *дискретность поставок при непрерывном потреблении*;

2) *упущенная прибыль в случае отсутствия запаса*;

3) *случайные колебания*:
а) спроса за период между поставками;
б) объема поставок;
в) длительности интервала между поставками;

4) *предполагаемые изменения конъюнктуры*:
а) сезонность спроса;
б) сезонность производства.

Существуют также ***причины, побуждающие предприятия стремиться к минимизации запасов на складах***:

1) *плата за хранение запаса*;

2) *физический износ запаса*;

3) *моральный износ продукта*.

Классификация запасов по времени позволяет выделить различные количественные уровни запасов. Их соотношение показано на рисунке 4.3.

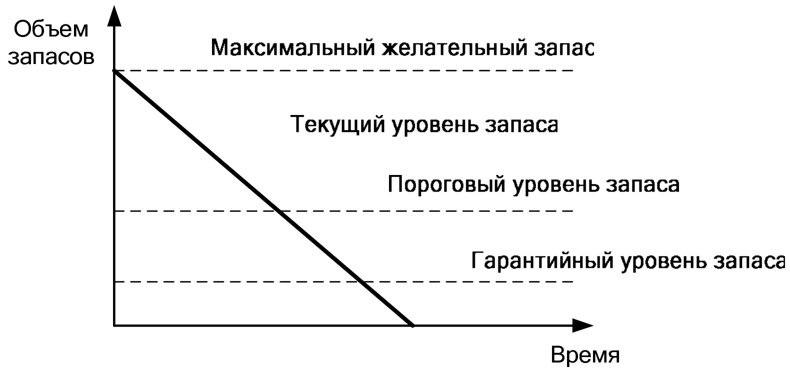


Рисунок 4.3 – Классификация запасов по времени

Максимальный желательный запас определяет уровень запаса, экономически целесообразный в данной системе управления запасами. Этот уровень может превышаться. В различных системах управления максимальный желательный запас используется как ориентир при расчете объема заказа.

Пороговый уровень запаса (точка заказа, точка восстановления) используется для определения момента времени выдачи очередного заказа.

Гарантийный запас (страховой, резервный) предназначен для непрерывного снабжения потребителя в случае непредвиденных обстоятельств (отклонения в периодичности и величине партий поставок от предусмотренных договором; задержки материалов или товаров в пути; непредвиденное возрастание спроса). При нормальных условиях работы эти запасы неприкосновенны.

Текущий запас соответствует уровню запаса в любой момент времени учета. Он может совпасть с максимальным желательным уровнем, пороговым уровнем или гарантийным запасом.

4.1 Модели управления запасами

Существует проблема классификации имеющихся в наличии запасов. Для решения этой задачи используется методика административного наблюдения. Цель ее заключается в определении той части запасов предприятия, которая требует наибольшего внимания со стороны отдела снабжения. Для этого каждый компонент запасов рассматривается по двум параметрам – его доля в общем количестве запасов фирмы и в общей стоимости запасов предприятия.

Методика 20/80

В соответствии с этой методикой компоненты запаса, составляющие 20 % его общего количества и 80 % его общей стоимости, должны отслеживаться отделом снабжения более внимательно.

Нерационально уделять объектам, играющим незначительную роль в деятельности предприятия, то же внимание, что и объектам первостепенной важности – принцип Парето 20/80: лишь пятая часть (20 %) от всего количества объектов, с которыми приходится иметь дело, дает примерно 80 % результатов этого дела. Вклад остальных 80 % объектов составляет только 20 % общего результата.

Обычно согласно принципу Парето множество управляемых объектов делят на две неодинаковые части.

Методика *ABC*

Широко применяемый метод *ABC* предлагает более глубокое разделение – на три части. При этом предварительно все управляемые объекты необходимо оценить по степени вклада в результат деятельности.

ABC-анализ используют с целью сокращения величины запасов, количества перемещений на складе, общего увеличения выручки, прибыли на предприятии и т. п.

Порядок проведения анализа *ABC*:

1) формирование цели анализа;

2) идентификация объектов управления, анализируемых методом *ABC*;

3) выделение признака, на основе которого будет осуществлена классификация объектов управления;

4) оценка объектов управления по выделенному классификационному признаку;

5) группировка объектов управления в порядке убывания значения признака;

6) разделение совокупности объектов управления на три группы: *A*, *B* и *C*;

7) построение кривой *ABC*.

A – немногочисленные, но важные материалы, которые обычно требуют больших вложений денежных средств. Их постоянно контролируют, проводят частую оценку прогноза, точно определяют издержки, связанные с закупкой, доставкой и хранением, а также размер и момент заказа.

B – относительно второстепенные материалы, требующие меньшего внимания, чем *A*. Здесь осуществляется обычный контроль и сбор информации о запасах, который должен позволить своевременно обнаружить основные изменения в использовании запасов.

C – обычно недорогие, второстепенные материалы, составляют значительную часть в номенклатуре, на них приходится наименьшая часть вложений в запасы. Точные оптимизационные расчеты размера и момента заказа с товарами данной группы не выполняются. Пополнение запасов регистрируется, но текущий учет уровня запасов не ведется. Проверка наличных запасов проводится лишь периодически.

В рамках этой методики запасы, имеющиеся в распоряжении предприятия, разделяются на **три группы**:

- *A:* 10 % общего количества запасов и 65 % его стоимости;
- *B:* 25 % общего количества запасов и 25 % его стоимости;
- *C*: 65 % общего количества запасов и около 10 % его стоимости.

Именно наименьшая по объему и наиболее ценная часть запасов может стать предметом особого контроля и математического моделирования.

Необходимо отметить, что классификация запасов может быть основана не только на показателях доли в общей стоимости и в общем количестве. Некоторые виды запасов могут быть причислены к более высокому классу на основании таких характеристик, как специфика поставок, проблемы качества и т. д. Преимущества методики деления видов запасов на классы заключается в возможности выбора порядка контроля и управления для каждого из них. Если в ходе классификации мы основывались на методе *ABC* анализа, имеет смысл обратить внимание на следующие моменты политики управления запасами:

- виды запасов группы *A* требуют более внимательного и частого проведения инвентаризации состояния запасов, правильность учета запасов этой группы должна подтверждаться чаще;
- планирование и прогнозирование, касающиеся запасов группы *A*, должны характеризоваться большей степенью точности, нежели относящиеся к запасам группы *B* и *C*;
- для группы *A* нужно стараться создать страховой запас, чтобы избежать больших расходов, связанных с отсутствием запасов этой группы;
- методы и приемы управления запасами, рассматривающиеся далее, должны прежде всего применяться к запасам групп *A* и *B*. Что касается запасов группы *C*, обычно момент возобновления заказа по ним определяют исходя из конкретных условий, а не на основе количественного метода, чтобы свести до минимума расходы на их контроль.

Основные понятия теории управления запасами

Запасом называется любой материальный ресурс, который хранится на предприятии для удовлетворения будущих потребностей. Например, полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, запчасти для ремонта оборудования.

Издержки выполнения заказа (издержки заказа) – издержки, связанные с переналадкой оборудования и подготовительными операциями.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль (издержки дефицита) – издержки, связанные с неудовлетворенным спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенной прибыли. Иногда к ним прибавляются издержки на закупку товара (стоимость товара).

Срок выполнения заказа – время с момента заказа до момента его выполнения.

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

Эффективность модели зависит от того, насколько точно будет предсказан спрос на запас, что является довольно сложной задачей. Выделяют следующие типы спроса, представленные на рисунке 4.4.

Модель управления запасами не обязательно должна включать все перечисленные виды издержек, т. к. некоторые из них могут быть незначительными или отсутствовать.

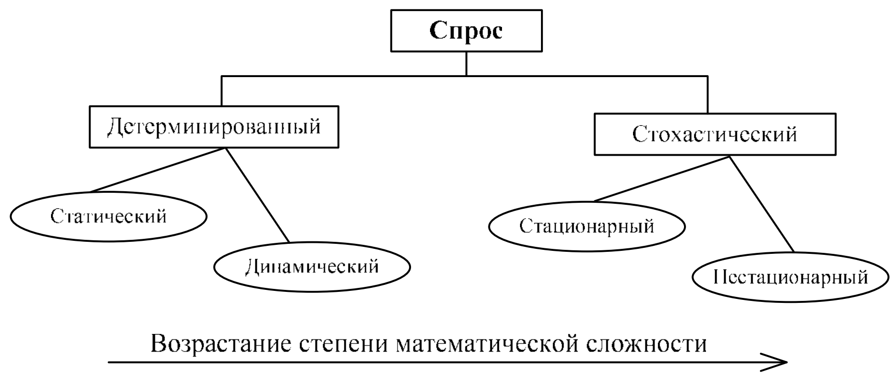


Рисунок 4.4 – Типы спроса

Детерминированный спрос точно известен заранее, в отличие от **вероятностного (стохастического)** спроса. При **статическом** типе спроса интенсивность потребления ресурса остается неизменной во времени, при **динамическом** типе спроса интенсивность потребления изменяется в зависимости от времени. При **стационарном** типе спроса его функция плотности вероятности неизменна во времени, а при **нестационарном** – функция плотности вероятности спроса изменяется во времени. Время пополнения запаса может быть мгновенным в случае внешней доставки заказа. В случае же когда ресурс производится самой организацией, происходит равномерное пополнение запаса на определенный срок (производство микросхем на предприятии, на котором они в дальнейшем используются для сборки электронной аппаратуры). Время доставки заказа может быть определено более или менее точно, в зависимости от дальности поставки, от наличия надежных поставщиков и т. д. Ряд факторов может приводить к запаздыванию поставок.

Математические модели управления запасами позволяют найти оптимальный уровень запасов некоторого товара, минимизирующий суммарные затраты на покупку, оформление и доставку заказа, хранение товара, а также убытки от его дефицита.

В пособии выполнен обзор детерминированных однопродуктовых моделей для моделирования систем управления запасами:

1) простейшая модель оптимального размера заказа (модель Уилсона);

2) модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения;

3) модель планирования оптимального размера заказа (модель с производством);

4) модель оптимального размера заказа с дефицитом;

5) модель с количественными скидками.

Обзор существующих направлений в моделировании управления запасами

Рассмотренные в пособии модели основываются на ряде предположений. В реальных ситуациях они часто нарушаются, что приводит к усложнению моделей управления запасами.

Перечислим основные разновидности таких моделей:

1) большинство систем управления запасами, используемых на практике, включает в себя сотни и даже тысячи наименований продукции. В таких случаях целесообразно ограничиться исследованием тех видов товаров, которые обладают высокой годовой стоимостью продаж. Для моделирования процессов управления запасами не одного, а нескольких видов товара, разработаны так называемые многопродуктовые модели управления запасами;

2) проблемы, связанные с наличием нескольких видов продукции, могут осложняться при ограничении на складские мощности;

3) на практике спрос и время поставки чаще всего являются не детерминированными, а вероятностными величинами. Для формализации фактора неопределенности в соответствующих моделях делают предположения о

законе распределения (чаще всего это нормальное распределение или распределение Пуассона). В этом случае принимаемые решения по управлению запасами гарантируют конкретные результаты (например, недопущение дефицита) с определенной вероятностью;

4) особо сложными являются случаи, когда система управления запасами включает сразу много объектов. Наиболее перспективными в таких случаях являются не аналитические, а имитационные модели, которые с помощью ЭВМ рассматривают возможные варианты развития событий;

5) важным моментом построения и использования моделей управления запасами является выбор критерия эффективности: рассматриваются модели, минимизирующие общие затраты на управление запасами. Между тем различные предприятия чаще всего организуют работу таким образом, чтобы получать максимум прибыли, что может приводить к иным решениям.

Перечисленные ситуации на практике часто комбинируются, что оказывает влияние на вид соответствующей модели управления запасами.

4.2 Детерминированные модели

4.2.1 Простейшая модель оптимального размера заказа (модель Уилсона)

Существует множество моделей управления запасами той или иной степени сложности. Наиболее простой является так называемая основная модель управления запасами (модель Уилсона, система с фиксированным размером заказа). Английский экономист Уилсон вывел известную формулу и разработал модель в 1920-х г., которая не является единственной или наилучшей моделью из числа имеющихся в настоящее время, в то же время она помогает понять поведение запасов и во многих практических случаях позволяет эффективно регулировать и контролировать уровни запасов.

Модель Уилсона, используемую для моделирования процессов закупки продукции у внешнего поставщика, можно модифицировать и применять в случае собственного производства продукции. Эта модель является полезной для понимания существа предмета, проблем, основных закономерностей и подходов в области управления запасами. Основная сложность при решении задач состоит в правильном определении входных параметров задачи, поскольку не всегда в условии их числовые величины задаются в явном виде.

Эта модель наиболее близка к следующим реальным ситуациям:

1) потребление основных продуктов питания;

2) использование осветительных ламп в здании;

3) использование канцелярских товаров;

4) использование в производственном процессе для сборки изделий покупных комплектующих и т. д.

Предпосылки: темп спроса на товар известен и постоянен; получение заказа мгновенно; закупочная цена не зависит от размера заказа; не допускается дефицит.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа и хранения.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Заказ выполняется мгновенно. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает нулевого значения. В этот момент времени делается и мгновенно выполняется заказ. Уровень запаса восстанавливается до максимального значения. При этом оптимальным будет тот размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения уровня I запасов, количества продукта на складе, в модели Уилсона графически представлена на рисунке 4.5. Все циклы изменения запасов являются одинаковыми, максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа Q.

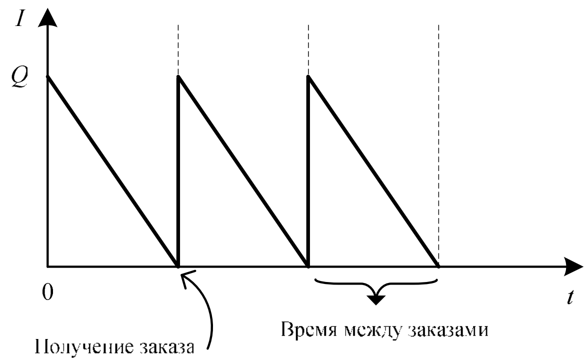


Рисунок 4.5 – Циклы изменения уровня запасов

Пусть:

Q – размер заказа;
T – протяженность периода планирования;
D – величина спроса за период планирования;
d – величина спроса в единицу времени;
K – издержки заказа;
H – удельные издержки хранения за период;
h – удельные издержки хранения в единицу времени.

Математическая модель простейшей модели оптимального размера заказа (модель Уилсона) имеет вид:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H \to \min \tag{4.1}$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0\,; \tag{4.2}$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const}\,,\ K > 0\,; \tag{4.3}$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const}\,,\ D > 0\,; \tag{4.4}$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = 0,\ i = \overline{1, N}\,. \tag{4.5}$$

В этой модели оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

Издержки (C) управления запасами в течение цикла складываются из издержек организации заказа и содержания запасов. Длина цикла возобновления заказа – τ. Следовательно, $\tau = \frac{Q}{d}$. Издержки содержания запасов в течение цикла пропорциональны средней величине текущего запаса и времени хранения, то есть издержки цикла

$$C_{\text{ц}} = K + h\frac{Q}{2}\frac{Q}{d}\,.$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим издержки в единицу времени

$$C = \frac{K}{\tau} + \frac{h}{\tau}\frac{Q}{2}\frac{Q}{d}\,,$$

$$C = \frac{Kd}{Q} + h\frac{Q}{2}\,. \tag{4.6}$$

Чтобы найти оптимальный размер партии заказа, решим уравнение

$$\frac{dC}{dQ} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 .$$

$\frac{Kd}{Q^2} = \frac{h}{2}$, следовательно, $Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}}$.

Так как $\frac{d^2C}{dQ^2} = \frac{2Kd}{Q^3} > 0$ для всех $Q > 0$, то

$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}}$ доставляет целевой функции (4.6) абсолютный минимум.

Тогда оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}} . \qquad (4.7)$$

Формула (4.7) в литературе имеет много названий, основные: *формула Уилсона*, *формула наиболее экономичного объема партии, формула оптимального размера партии*.

Зная оптимальный размер заказа (партии), можно вычислить другие параметры системы:

- издержки заказа $C_1 = \frac{D}{Q} K$;

- издержки хранения $C_2 = \frac{Q}{2} H$;

- совокупные издержки $C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q} K + \frac{Q}{2} H$;

- оптимальное число заказов за период $N = \frac{D}{Q^*}$;

- время цикла (оптимальное время между заказами) $t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$.

Кривые издержек заказа, издержек хранения и совокупных издержек управления запасами приведены на рисунке 4.6.

Следует обратить внимание на то, что оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

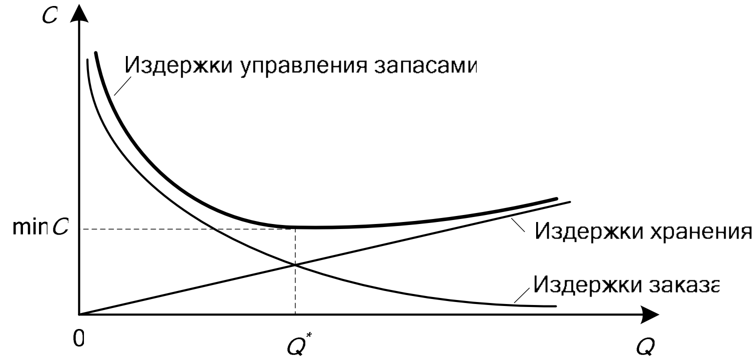


Рисунок 4.6 – График издержек управления запасами в модели Уилсона

4.2.2 Модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения

Предпосылки: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; не допускается дефицит.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа и хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа и время выполнения заказа являются постоянными. Уровень I запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает точки восстановления. В этот момент времени делается заказ, который выполняется за время L. К моменту поступления заказа размер запаса на складе равен нулю. Оптимальным решением задачи будет такой размер заказа Q^*, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рисунке 4.7. Горизонтальной линией отмечено количество продукта, равное точке восстановления R.

Пусть:
Q – размер заказа;

T – протяженность периода планирования;
D – величина спроса за период планирования;
d – величина спроса в единицу времени;
K – издержки заказа;
H – удельные издержки хранения за период;
h – удельные издержки хранения в единицу времени;
L – время выполнения заказа.

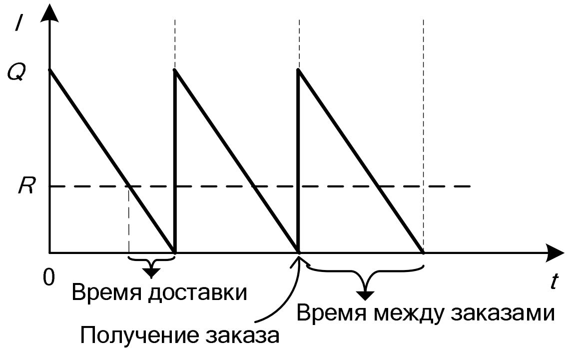


Рисунок 4.7 – Циклы изменения уровня запасов

Математическая модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения имеет вид:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H \to \min \qquad (4.8)$$

при ограничениях:
- условие выполнения заказа

$$Q > 0; \qquad (4.9)$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0; \qquad (4.10)$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0; \qquad (4.11)$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} > 0,\ i = \overline{1, N}. \qquad (4.12)$$

В этой модели оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

Применяя модель Уилсона, формулы (4.1)–(4.7), получаем:
- оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$;
- издержки заказа $C_1 = \frac{D}{Q}K$;
- издержки хранения $C_2 = \frac{Q}{2}H$;
- совокупные издержки $C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H$;
- точку восстановления $R = dL$;
- оптимальное число заказов за период $N = \frac{D}{Q^*}$;
- время цикла (оптимальное время между заказами) $t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$.

4.2.3 Модель планирования оптимального размера заказа (модель с производством)

Предпосылки: темп спроса на товар известен и постоянен; темп производства товара известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, темп производства, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, максимальный уровень запасов.

Предприятие производит продукт самостоятельно, хранит его на складе и расходует в постоянном темпе. Если темп производства выше темпа спроса, то излишки продукта накапливаются на складе. Когда количество продукта на складе (уровень I запасов) достигает максимального значения, производство прекращается и продукт расходуется со склада. Когда запас на складе достигает точки восстановления, производство возобновляется. При этом оптимальным решением задачи будет тот размер заказа Q^*, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление производства.

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рисунке 4.8.

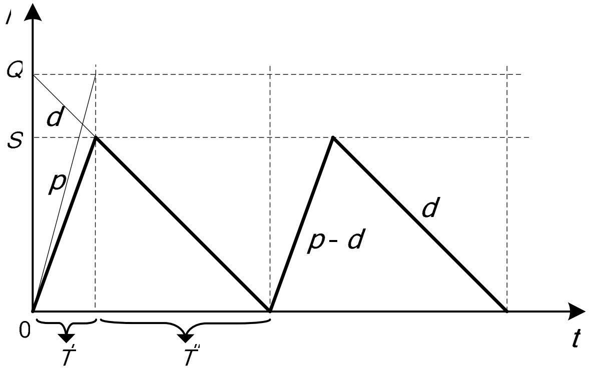


Рисунок 4.8 – График циклов изменения запасов

Пусть:
Q – размер заказа;
P – темп производства;
p – темп производства в единицу времени;
T – протяженность периода планирования;
D – величина спроса за период планирования;
d – величина спроса в единицу времени;
K – фиксированные издержки на запуск производства;
H – удельные издержки хранения за период;
h – удельные издержки хранения в единицу времени;
S – запас за период;
L – время, необходимое для запуска производства.

Математическая модель планирования оптимального размера заказа (модель с производством) имеет вид:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H\left(1 - \frac{D}{P}\right) \to \min \qquad (4.13)$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0\,; \qquad (4.14)$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0\,; \qquad (4.15)$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const}\,,\ D > 0\,; \qquad (4.16)$$

- условие наличия темпа производства

$$P = \text{const}\,,\ P > 0\,; \qquad (4.17)$$

- условие отсутствия дефицита

$$P > D\,; \qquad (4.18)$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} \geq 0,\ i = \overline{1, N}\,. \qquad (4.19)$$

В случае $p >> d$, когда темп производства значительно больше спроса, $\frac{d}{p} \to 0$. Рассматриваемая модель преобразуется в модель оптимального размера заказа без дефицита.

Очевидно, что модель управления запасами будет работать без дефицита только в случае $p > d$.

В этой модели оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

Издержки (C) управления запасами в течение цикла складываются из издержек организации заказа и содержания запасов. Длина цикла возобновления заказа – τ, максимальный уровень запасов – S, T' – время производства и использования продукции, T'' – время использования и хранения запасов продукции. Следовательно, $\tau = T' + T'' = \frac{Q}{d}$.

Время производства и использования продукции

$$T' = \frac{S}{p - d}\,.$$

Время использования и хранения запасов продукции

$$T'' = \frac{S}{d}\,,$$

$$\tau = T' + T'' = \frac{S}{p-d} + \frac{S}{d} = S\left(\frac{1}{p-d} + \frac{1}{d}\right) = S\left(\frac{d + p - d}{d(p-d)}\right) = \frac{S}{d}\left(\frac{p}{(p-d)}\right).$$

Максимальный уровень запасов

$$S = \frac{\tau d(p-d)}{p} = \tau d\left(1 - \frac{d}{p}\right) = Q\left(1 - \frac{d}{p}\right).$$

Издержки содержания запасов в течение цикла пропорциональны средней величине текущего запаса и времени хранения, то есть издержки цикла

$$C_{ц} = K + h\frac{Q}{2}T'' = K + h\frac{Q}{2}\frac{S}{d}.$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим издержки в единицу времени

$$C = \frac{K}{\tau} + \frac{h}{\tau}\frac{Q}{2}\frac{Q\left(1-\frac{d}{p}\right)}{d} \text{ или } C = \frac{K}{\tau} + \frac{h}{\tau}\frac{Q^2}{2d}\left(1-\frac{d}{p}\right),$$

$$C = \frac{Kd}{Q} + h\frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right). \qquad (4.20)$$

Чтобы найти оптимальный размер партии заказа, решим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right) = 0.$$

$$\frac{Kd}{Q^2} = \frac{h}{2}\left(1-\frac{d}{p}\right), \text{ следовательно, } Q = \sqrt{\frac{2dK}{h\left(1-\frac{d}{p}\right)}}.$$

Так как $\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}Q^2} = \frac{2Kd}{Q^3} > 0$ для всех $Q > 0$, то

$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}}$ доставляет целевой функции (4.20) абсолютный минимум.

Тогда оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h\left(1-\frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2DK}{H\left(1-\frac{D}{P}\right)}}. \qquad (4.21)$$

Зная оптимальный размер заказа (партии), можно вычислить другие параметры системы:

- издержки на запуск производства $C_1 = \frac{D}{Q}K$;
- издержки хранения $C_2 = \frac{Q}{2}H\left(1-\frac{D}{P}\right)$;
- совокупные издержки $C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H\left(1-\frac{D}{P}\right)$;
- максимальный уровень запасов $S^* = Q^*\left(1-\frac{d}{p}\right) = Q^*\left(1-\frac{D}{P}\right)$;
- точка восстановления $R = dL$;
- оптимальное число заказов за период $N = \frac{D}{Q^*}$;
- время цикла (оптимальное время между заказами) $t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$.

4.2.4 Модель оптимального размера заказа с дефицитом

Предпосылки: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, издержки дефицита.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, максимальный дефицит, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Уровень I запасов убывает с постоянной интенсивностью. Допускается дефицит продукта. После получения заказа предприятие компенсирует дефицит и восстанавливает запас продукта на складе. Заказ делается тогда, когда дефицит продукта на складе достигает оптимального размера. Оптимальным решением задачи будет такой размер заказа Q, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рисунке 4.9.

Пусть:
Q – размер заказа;
T – протяженность периода планирования;
D – величина спроса за период планирования;
d – величина спроса в единицу времени;

K – издержки заказа;

H – удельные издержки хранения за период;

h – удельные издержки хранения в единицу времени;

B – упущенная прибыль за период, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта;

b – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта;

S – запас за период;

L – время выполнения заказа;

V – уровень дефицита.

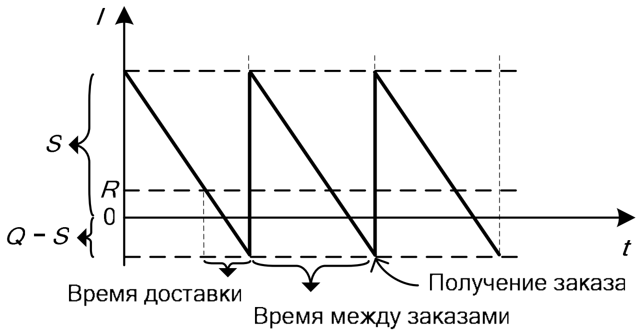


Рисунок 4.9 – График циклов изменения запасов

Математическая модель оптимального размера заказа с дефицитом имеет вид:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}H + \frac{(Q-S)^2}{2Q}B \to \min \tag{4.22}$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0; \tag{4.23}$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0; \tag{4.24}$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0; \tag{4.25}$$

- условие наличия издержек дефицита

$$B = \text{const},\ B > 0; \tag{4.26}$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} \geq 0,\ i = \overline{1, N}. \tag{4.27}$$

В этой модели оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

Издержки (C) управления запасами в течение цикла складываются из издержек организации заказа, содержания запасов и дефицита. Длина цикла возобновления заказа – τ, уровень дефицита – $V = Q - S$, T' – время удовлетворения спроса, T'' – время учета спроса (отсутствие запасов и наличие дефицита). Следовательно, $\tau = T' + T'' = \dfrac{Q}{d}$.

Время удовлетворения спроса

$$T' = \frac{S}{d}.$$

Время учета спроса

$$T'' = \frac{R}{d} = \frac{Q-S}{d}.$$

Издержки содержания запасов в течение цикла пропорциональны средней величине максимального запаса и времени хранения, а издержки дефицита – средней величине максимального уровня дефицита и времени учета спроса, то есть издержки цикла

$$C_{\text{ц}} = K + h\frac{S}{2}T' + h\frac{(Q-S)}{2}T'' = K + h\frac{S}{2}\frac{S}{d} + b\frac{(Q-S)}{2}\frac{(Q-S)}{d};$$

$$C_{\text{ц}} = K + h\frac{(S)^2}{2d} + b\frac{(Q-S)^2}{2d}.$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим издержки в единицу времени

$$C = \frac{K}{\tau} + \frac{h}{\tau}\frac{(S)^2}{2d} + \frac{b}{\tau}\frac{(Q-S)^2}{2d} = \frac{Kd}{Q} + \frac{hd}{Q}\frac{(S)^2}{2d} + \frac{bd}{Q}\frac{(Q-S)^2}{2d};$$

$$C = \frac{Kd}{Q} + \frac{h}{Q}\frac{(S)^2}{2} + \frac{b}{Q}\frac{(Q-S)^2}{2}. \qquad (4.28)$$

Чтобы найти оптимальный размер заказа, решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial Q} = -\dfrac{Kd}{Q^2} - \dfrac{h}{Q^2}\dfrac{S^2}{2} + \dfrac{b}{2}\dfrac{2(Q-S)Q-(Q-S)^2}{Q^2} = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial S} = \dfrac{hS}{Q} - \dfrac{b}{Q}(Q-S) = 0; \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial Q} = -\dfrac{Kd}{Q^2} - \dfrac{h}{Q^2}\dfrac{S^2}{2} + \dfrac{b}{2}\dfrac{(Q^2-S^2)}{Q^2} = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial S} = \dfrac{hS}{Q} - b + \dfrac{bS}{Q} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-2Kd - hS^2 + bQ^2 - bS^2}{2Q^2} = 0, \\ \dfrac{S(h+b)}{Q} = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q^2 = \dfrac{2Kd + (h+b)S^2}{b}, \\ S = Q\left(\dfrac{b}{h+b}\right). \end{cases}$$

Решая отдельно первое уравнение, подставив второе, получаем

$$Q^2 = \frac{2Kd + (h+b)\left(Q\left(\frac{b}{h+b}\right)\right)^2}{b} = \frac{2Kd + Q^2\frac{b^2}{h+b}}{b},$$

$$Q^2\left(b - \frac{b^2}{h+b}\right) = 2Kd, \quad Q^2\left(\frac{hb + b^2 - b^2}{h+b}\right) = 2Kd, \quad Q^2\left(\frac{hb}{h+b}\right) = 2Kd,$$

$$Q = \sqrt{\frac{2dK}{h}\frac{b+h}{b}}.$$

Подставив S в формулу (4.28), определяем издержки в единицу времени:

$$C = \frac{Kd}{Q} + \frac{h}{Q}\frac{\left(Q\left(\frac{b}{h+b}\right)\right)^2}{2} + \frac{b}{Q}\frac{\left(Q - Q\left(\frac{b}{h+b}\right)\right)^2}{2} = \frac{Kd}{Q} + \frac{hQ}{2}\left(\frac{b}{h+b}\right)^2 +$$

$$+\frac{bQ}{2}\left(1 - \left(\frac{b}{h+b}\right)\right)^2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = -\frac{Kd}{Q^2} + \frac{h}{2}\left(\frac{b}{h+b}\right)^2 + \frac{b}{2}\left(1 - \left(\frac{b}{h+b}\right)^2\right) = 0.$$

Так как $\dfrac{\partial^2 C}{\partial Q^2} = \dfrac{2Kd}{Q^3} > 0$ для всех $Q > 0$, то $Q = \sqrt{\dfrac{2dK}{h}\dfrac{b+h}{b}}$ доставляет целевой функции (4.22), (4.28) абсолютный минимум.

Так как $\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \dfrac{h}{Q} + \dfrac{b}{Q} = \dfrac{h+b}{Q} > 0$ для всех S, то $S = Q\left(\dfrac{b}{h+b}\right)$ также доставляет целевой функции (4.28) абсолютный минимум.

Тогда оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}\frac{b+h}{b}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}\frac{B+H}{B}}. \qquad (4.29)$$

Зная оптимальный размер заказа, можно вычислить другие параметры системы:

- издержки заказа $C_1 = \dfrac{D}{Q}K$;
- издержки хранения $C_2 = \dfrac{S^2}{2Q}H$;
- издержки дефицита $C_3 = \dfrac{(Q-S)^2}{2Q}B$;
- совокупные издержки $C = C_1 + C_2 + C_3 = \dfrac{D}{Q}K + \dfrac{S^2}{2Q}H + \dfrac{(Q-S)^2}{2Q}B$;

- максимальный размер запаса $S^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}\frac{b}{b+h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}\frac{B}{B+H}}$;
- максимальный дефицит $V^* = Q^* - S^*$;
- точка восстановления запаса $R = dL$;
- оптимальное время между заказами $t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$.

В формуле (4.29) оптимального размера заказа присутствует величина $\left(\frac{b+h}{b}\right) = \left(1+\frac{h}{b}\right)$. Обратная ей величина $\frac{1}{\left(1+\frac{h}{b}\right)}$ называется *плотностью убытков из-за дефицита*. Отношение $\frac{h}{b}$ сопоставляет затраты по хранению и по дефициту.

В случае $b >> h$, то есть упущенная прибыль значительно больше затрат по хранению, $\frac{h}{b} \to 0$. Рассматриваемая модель преобразуется в модель оптимального размера заказа без дефицита.

4.2.5 Модель с количественными скидками

Предпосылки: темп спроса на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, цена товара, время выполнения заказа, количественные скидки в случае закупки крупных партий товара.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Пусть:

Q_i – размер заказа;
T – протяженность периода планирования;
D – величина спроса за период планирования;
d – величина спроса в единицу времени;
K – издержки заказа;
H_i – удельные издержки хранения за период;
h_i – удельные издержки хранения в единицу времени;
L_{τ_i} – время выполнения заказа.

В случае оптовой скидки в связи с увеличением размера заказываемой партии уменьшается стоимость каждой единицы товара.

Пусть заданы характерные величины размеров заказа $q_0, q_1, ..., q_n$, причем $q_i < q_{i+1}$. Если размер закупаемой партии Q расположен между q_i и q_{i+1}, то есть $q_i \le Q \le q_{i+1}$, то цена каждой единицы товара равна a_i. При увеличении интервала, в котором расположена заказываемая партия, цена снижается, то есть $a_i > a_{i+1}$. Стоимость закупки Q единиц в таком случае можно изобразить кусочно-линейной функцией (рисунок 4.10).

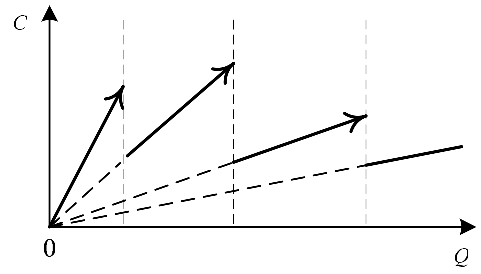


Рисунок 4.10 – График стоимости закупки

Математическая модель с количественными скидками имеет вид:

$$\min C_i = C_i^* = \frac{D}{Q_i}K + \frac{Q_i}{2}H_i + a_i D,\ i = \overline{1,n} \tag{4.30}$$

при ограничениях:
- условие выполнения заказа

$$Q_i > 0,\ i = \overline{1,n}; \tag{4.31}$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0; \tag{4.32}$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0; \tag{4.33}$$

- условие наличия скидок

$$a_i > a_{i+1},\ a_i > 0,\ i = \overline{1,n}; \tag{4.34}$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} \ge 0,\ i = \overline{1,N}. \tag{4.35}$$

Издержки управления запасами в течение цикла складываются из издержек организации заказа, содержания запасов и закупки, то есть в этой модели оптимальный размер заказа зависит от цены продукта.

Длина цикла возобновления заказа – τ, следовательно, $\tau = \dfrac{Q_i}{d}$.

Издержки содержания запасов в течение цикла пропорциональны средней величине максимального запаса, времени хранения и удельным издержкам хранения в единицу времени, а издержки закупки стоимости единицы продукции – максимальному запасу, то есть издержки цикла

$$C_{i\,\text{ц}} = K + h_i \frac{Q_i}{2}\tau + a_i Q_i .$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим издержки в единицу времени

$$C_i = \frac{K}{\tau} + h_i \frac{Q_i}{2} + a_i \frac{Q_i}{\tau} ;$$

$$C_i = \frac{Kd}{Q_i} + h_i \frac{Q_i}{2} + a_i d . \qquad (4.36)$$

Чтобы найти оптимальный размер заказа, решим уравнение

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q_i} = -\frac{Kd}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} = 0 ,$$

$\dfrac{Kd}{Q_i^2} = \dfrac{h_i}{2}$, следовательно, $Q = \sqrt{\dfrac{2dK}{h_i}}$.

Так как $\dfrac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}Q_i^2} = \dfrac{2Kd}{Q^3} > 0$ для всех $Q_i > 0$, то

$Q_i = \sqrt{\dfrac{2dK}{h_i}}$ доставляет целевой функции (4.36) абсолютный минимум.

Тогда оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h_i}} = \sqrt{\frac{2DK}{H_i}} . \qquad (4.37)$$

Зная оптимальный размер заказа, можно вычислить другие параметры системы:

- удельные издержки хранения $H_i = ma_i$, выраженные в процентах (m) от стоимости единицы продукции (a_i);
- издержки заказа $C_1 = \dfrac{D}{Q}K$;
- издержки хранения $C_2 = \dfrac{Q}{2}H_i$;
- издержки на закупку товара $C_3 = a_i D$;
- совокупные издержки $C = C_1 + C_2 + C_3 = \dfrac{D}{Q}K + \dfrac{Q}{2}H_i + a_i D$;
- точка восстановления $R = dL$;
- оптимальное число заказов за период $N = \dfrac{D}{Q^*}$;
- время цикла (оптимальное время между заказами) $t = \dfrac{Q^*}{d} = \dfrac{T}{N}$.

Издержки в единицу времени в такой системе показаны на рисунке 4.11.

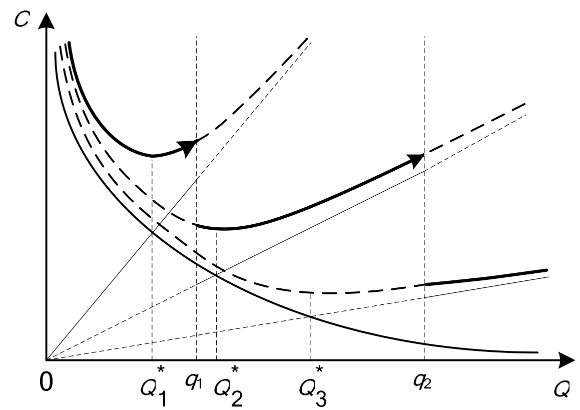


Рисунок 4.11 – График совокупных издержек

Кривые $C_i(Q)$ не пересекаются, причем $C_i(Q) > C_{i+1}(Q)$. Семейство графиков $C_i(Q)$ реализуется с помощью кривой с разрывами. Задача состоит в том, чтобы найти самую нижнюю точку этой кривой. Идея *алгоритма решения* состоит в следующем:

1) находим $\min C_i(Q) = C_i^*$, $Q \in [q_i, q_{i+1})$. Очевидно, Q^* совпадает или с q_i, q_{i+1} или $Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H_i}}$;

2) сравниваются C_i^* по величине и находится наименьшее.

Двухуровневая система скидок

Имеется два уровня цен. Пусть величина размера заказа Q может быть либо $Q < q$, либо $Q \geq q$. При $Q < q$ стоимость единицы продукции a_1, при $Q \geq q$ – a_2, причем $a_1 > a_2$, q – размер заказа, при достижении которого предоставляется скидка.

При $Q < q$:

$$C_1(Q) = \frac{D}{Q_1} K + \frac{Q_1}{2} H_1 + a_1 D.$$

При $Q \geq q$:

$$C_2(Q) = \frac{D}{Q_2} K + \frac{Q_2}{2} H_2 + a_2 D.$$

Используя формулу (4.31), находим $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H_1}}$ и $Q_2^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H_2}}$, а также $C_1^* = \dfrac{D}{Q_1^*} K + \dfrac{Q_1^*}{2} H_1 + a_1 D$ и $C_2^* = \dfrac{D}{Q_2^*} K + \dfrac{Q_2^*}{2} H_2 + a_2 D$.

Очевидно, что $Q_1^* > Q_2^*$, $C_1^* > C_2^*$.

Возможные случаи относительного размещения q, Q_1^* и Q_2^* показаны на рисунках 4.12–4.14.

Если $Q_1^* < q$ и $Q_2^* \geq q$ (см. рисунок 4.12), то учитывая, что $a_1 > a_2$: $C_1^*(Q_1^*) > C_2^*(Q_2^*)$, то есть оптимальная партия $Q_2^* \geq q$.

Если $Q_1^* < q$ и $Q_2^* < q$ (см. рисунок 4.13), то для определения оптимального размера заказа необходимо сравнить $C_1^*(Q_1^*)$ и $C_2(q)$:

- если $C_1^*(Q_1^*) < C_2(q)$, то $Q^* = Q_1^*$;
- если $C_1^*(Q_1^*) \geq C_2(q)$, то $Q^* = q$.

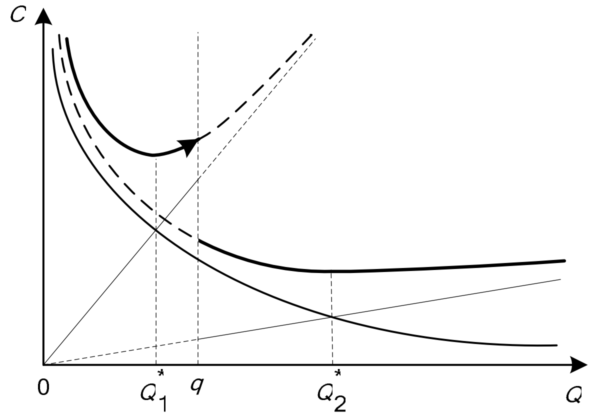


Рисунок 4.12 – График размещения оптимального размера заказа

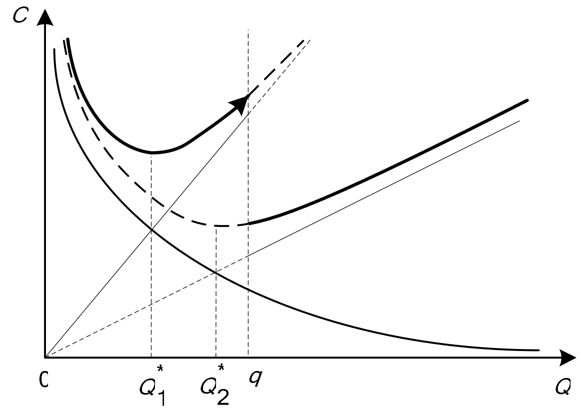


Рисунок 4.13 – График размещения оптимального размера заказа

Если $Q_1^* > q$ и $Q_2^* > q$ (см. рисунок 4.14), то оптимальный размер заказа $Q^* = Q_2^*$.

Алгоритм решения:

1) вычисляем Q_2^*. Если $Q_2^* \geq q$, то оптимальный размер заказа $Q^* = Q_2^*$;

2) если $Q_2^* < q$, то сравниваем $C_1^*(Q_1^*)$ и $C_2(q)$:

- если $C_1^*(Q_1^*) < C_2(q)$, то $Q^* = Q_1^*$;

- если $C_1^*(Q_1^*) \ge C_2(q)$, то $Q^* = q$.

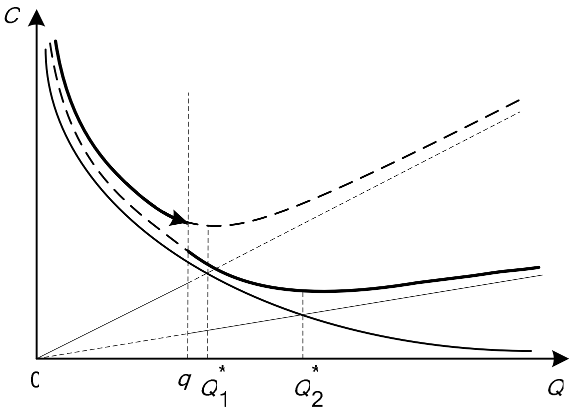


Рисунок 4.14 – График размещения оптимального размера заказа

Трехуровневая система скидок

Имеется три уровня цен. Пусть величина размера заказа Q может быть: $Q < q_1$ при стоимости единицы продукции a_1, $q_1 \le Q < q_2$ – a_2, $Q \ge q_2$ – a_3, причем $a_1 > a_2 > a_3$, q_1 и q_2 – размеры заказа, при достижении которых предоставляется скидка.

При $Q < q_1$:

$$C_1(Q) = \frac{D}{Q_1}K + \frac{Q_1}{2}H_1 + a_1 D.$$

При $q_1 \le Q < q_2$:

$$C_2(Q) = \frac{D}{Q_2}K + \frac{Q_2}{2}H_2 + a_2 D.$$

При $Q \ge q$:

$$C_3(Q) = \frac{D}{Q_3}K + \frac{Q_3}{2}H_3 + a_3 D.$$

Используя формулу (4.31), определяем, что $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H_1}}$, $Q_2^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H_2}}$,

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_3}}, \qquad C_1^* = \frac{D}{Q_1^*}K + \frac{Q_1^*}{2}H_1 + a_1 D, \qquad C_2^* = \frac{D}{Q_2^*}K + \frac{Q_2^*}{2}H_2 + a_2 D,$$

$$C_3^* = \frac{D}{Q_3^*}K + \frac{Q_3^*}{2}H_3 + a_3 D.$$

Возможные случаи относительного размещения q_1, q_2, Q_1^*, Q_2^* и Q_3^* показаны на рисунках 4.15–4.17.

Если $Q_3^* \ge q_2$ (см. рисунок 4.15), то учитывая, что $a_2 > a_3$: $C_2(q_2) > C_3^*(Q_3^*)$, то есть оптимальная пария $Q_3^* \ge q_2$.

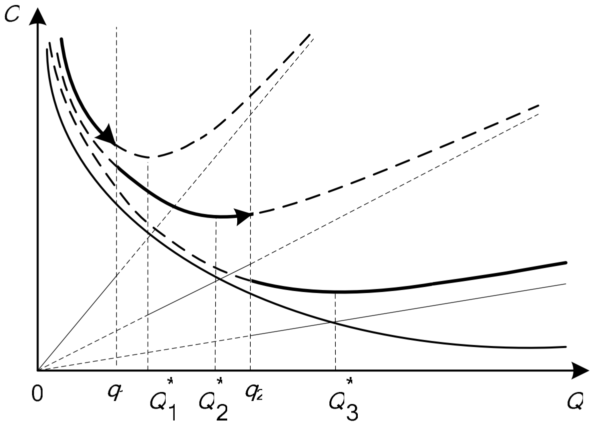


Рисунок 4.15 – График размещения оптимального размера заказа

Если $Q_3^* < q_2$ и $q_1 \le Q_2^* < q_2$ (см. рисунок 4.16), то для определения оптимального размера заказа необходимо сравнить $C_3(q_2)$ и $C_2^*(Q_2^*)$:

- если $C_2^*(Q_2^*) < C_3(q_2)$, то $Q^* = Q_2^*$;
- если $C_2^*(Q_2^*) \ge C_3(q_2)$, то $Q^* = q_2$.

Если $Q_3^* < q_2$ и $Q_2^* < q_1$ (см. рисунок 4.17), то для определения оптимального размера заказа необходимо найти $C_1^*(Q_1^*)$, $C_2(q_1)$ и $C_3(q_2)$ – определяем оптимальные совокупные издержки $C^* = \min\{C_1^*(Q_1^*), C_2(q_1), C_3(q_2)\}$, следовательно, оптимальный размер заказа определяется следующим образом:

- если $C^* = C_1^*(Q_1^*)$, то $Q^* = Q_1^*$;
- если $C^* = C_2(q_1)$, то $Q^* = q_1$;
- если $C^* = C_3(q_2)$, то $Q^* = q_2$.

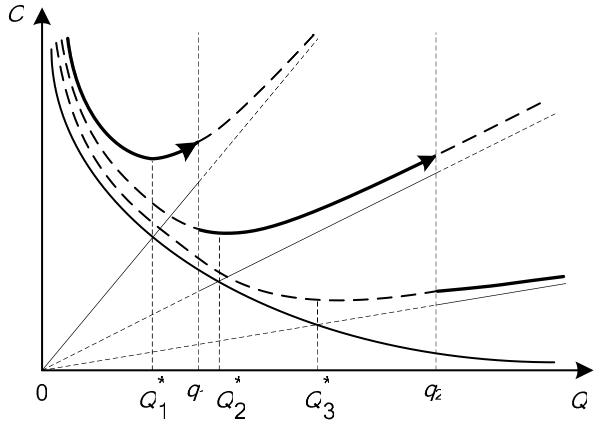


Рисунок 4.16 – График размещения оптимального размера заказа

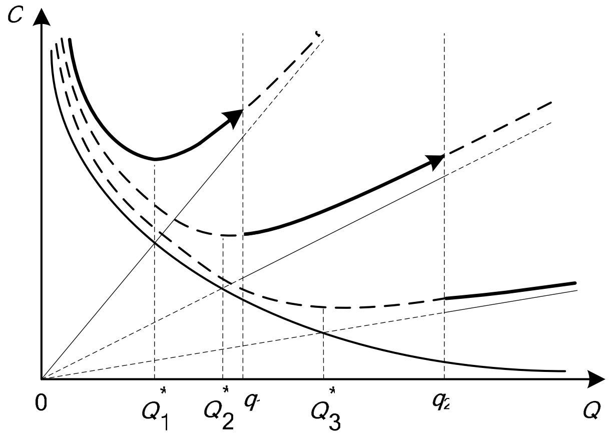


Рисунок 4.17 – График размещения оптимального размера заказа

Алгоритм решения:

1) вычисляем Q_3^*. Если $Q_3^* \geq q_2$, то оптимальный размер заказа $Q^* = Q_3^*$;

2) если $Q_3^* < q_2$ и $q_1 \leq Q_2^* < q_2$, то сравниваем $C_3(q_2)$ и $C_2^*(Q_2^*)$:
- если $C_2^*(Q_2^*) < C_3(q_2)$, то $Q^* = Q_2^*$;
- если $C_2^*(Q_2^*) \geq C_3(q_2)$, то $Q^* = q_2$;

3) если $Q_3^* < q_2$ и $Q_2^* < q_1$, то находим $C_1^*(Q_1^*)$, $C_2(q_1)$, $C_3(q_2)$ и определяем $C^* = \min\{C_1^*(Q_1^*), C_2(q_1), C_3(q_2)\}$:
- если $C^* = C_1^*(Q_1^*)$, то $Q^* = Q_1^*$;
- если $C^* = C_2(q_1)$, то $Q^* = q_1$;
- если $C^* = C_3(q_2)$, то $Q^* = q_2$.

Многоуровневая (*n*-уровневая) система скидок

Пусть внутри интервалов $[q_1, q_2), [q_2, q_3), ..., [q_n, \infty)$ цены остаются постоянными и только проходя через размеры заказов $q_1, q_2, ..., q_n$ снижаются, то есть $a_1 > a_2 > ... > a_n$. Величина размера заказа для каждого уровня цен $Q_1^*, Q_2^*, ..., Q_n^*$.

Алгоритм решения:

1) вычисляем Q_n^*. Если $Q_n^* \geq q_n$, то оптимальный размер заказа $Q^* = Q_n^*$;

2) если $Q_n^* < q_n$ и $Q_{n-1}^* \geq q_{n-1}$, то сравниваем $C(Q_{n-1}^*)$ и $C(q_n)$:
- если $C(Q_{n-1}^*) < C(q_n)$, то $Q^* = Q_{n-1}^*$;
- если $C(Q_{n-1}^*) \geq C(q_n)$, то $Q^* = q_n$;

3) если $Q_n^* < q_n$ и $Q_{n-1}^* < q_{n-1}$, то вычисляем Q_{n-2}^* и сравниваем с q_{n-2}:
- если $Q_{n-2}^* \geq q_{n-2}$, то для определения оптимального размера заказа сравниваем затраты $C(Q_{n-2}^*)$, $C(q_{n-1})$, $C(q_n)$ и находим минимальное значение $C^* = \min\{C(Q_{n-2}^*), C(q_{n-1}), C(q_n)\}$. Минимальному значению затрат соответствует оптимальный размер заказа;
- если $Q_{n-2}^* < q_{n-2}$, то вычисляем Q_i^* пока $Q_i^* \geq q_i$, после чего сравниваем значения затрат $C(Q_i^*)$, $C(q_{i-1})$, …, $C(q_n)$ и находим минимальное значение $C^* = \min\{C(Q_i^*), C(q_{i-1}), ..., C(q_n)\}$. Минимальному значению затрат соответствует оптимальный размер заказа.

4.3 Примеры решения задач управления запасами

Пример 4.1

При строительстве моста длиной 500 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 130 суток, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 10 ден. ед. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 0,625 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, время между заказами. Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q – размер заказа тяжей, T – протяженность периода планирования строительства, D – величина спроса за период планирования, K – издержки заказа, h – удельные издержки хранения 1 т тяжей в сутки.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки на заказ и содержание тяжей:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H \to \min$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0;$$

- условие стоимости рейса

$$K = \text{const},\ K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0;$$

- время доставки тяжей

$$L_{\tau_i} = 0, i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью Уилсона (простейшая модель оптимального размера заказа), (см. формулы (4.3)–(4.7)).

Найдем расход тяжей на срок строительства:
$D = 500\ \text{м} \cdot 130\ \text{кг/м} = 65000\ \text{кг} = 65$ т.

Оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H}} = \sqrt{\frac{2DK}{hT}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 65 \cdot 10}{0{,}625 \cdot 130}} = 4 \text{ т.}$$

Оптимальное время между заказами

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q^*}{D/T} = \frac{4}{65/130} = 8 \text{ сут.}$$

Оптимальное число заказов в течение срока сооружения

$$N = \frac{D}{Q^*} = \frac{65}{4} = 16{,}25,$$ то есть 16 или 17 заказов.

Динамика изменения количества тяжей на складе в модели Уилсона графически представлена на рисунке 4.18.

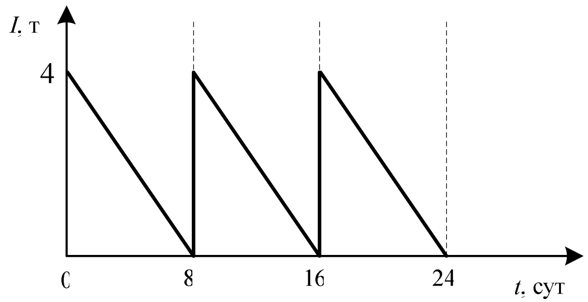


Рисунок 4.18 – График изменения количества тяжей на складе

Минимальные издержки на заказ и на содержание тяжей

$$C^* = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}hT = \frac{65}{4} \cdot 10 + \frac{4}{2} \cdot 0{,}625 \cdot 130 = 325 \text{ ден. ед.}$$

Если бы автомобиль загружался полностью, то минимальные издержки на заказ и на содержание тяжей были бы

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}hT = \frac{65}{5} \cdot 10 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}625 \cdot 130 = 333{,}125 \text{ ден. ед.,}$$

что на 2,5 % больше минимальных.

График издержек управления запасами в модели Уилсона представлен на рисунке 4.19.

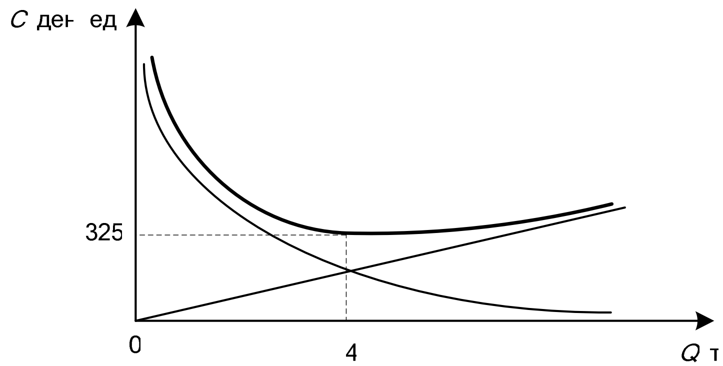


Рисунок 4.19 – График издержек управления запасами

Пример 4.2

Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 600 рулонов. Издержки на заказ равны 800 ден. ед., издержки на хранение на приобъектном складе одного рулона – 24 ден. ед. в год. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки НСМ – 6 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Стоимость одного рулона 130 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа. Чему равно оптимальное число заказов в течение года, точка восстановления заказа, время между заказами и минимальные совокупные издержки?

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q – размер заказа НСМ, T – протяженность периода планирования строительства, D – величина спроса за период планирования, K – издержки заказа, H – удельные издержки хранения за период, L – время выполнения заказа.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки на заказ и хранение:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H \to \min$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0;$$

- условие стоимости заказа

$$K = \mathrm{const},\ K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \mathrm{const},\ D > 0;$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \mathrm{const}, L_{\tau_i} > 0,\ i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения (см. формулы (4.8)–(4.12)).

Оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 800}{24}} = 200 \text{ рулонов.}$$

Оптимальное время между заказами

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q*}{D/T} = \frac{200}{600/300} = 100 \text{ дн.}$$

Точка восстановления (запас рулонов, при котором нужно сделать очередной заказ)

$$R = dL = \frac{D}{T}L = \frac{600}{300} \cdot 6 = 12 \text{ рулонов НСМ.}$$

Оптимальное число заказов в течение года

$$N = \frac{D}{Q^*} = \frac{600}{200} = 3.$$

Минимальные совокупные издержки

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H = \frac{600}{200} \cdot 800 + \frac{200}{2} \cdot 24 = 4800 \text{ ден. ед.}$$

Динамика изменения количества рулонов на складе показана на рисунке 4.20.

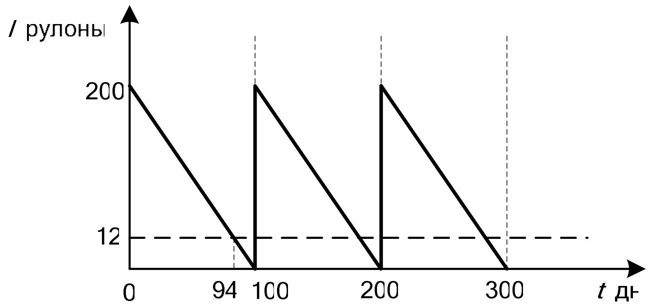


Рисунок 4.20 – График изменения количества рулонов на складе

График издержек управления запасами в модели оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения представлен на рисунке 4.21.

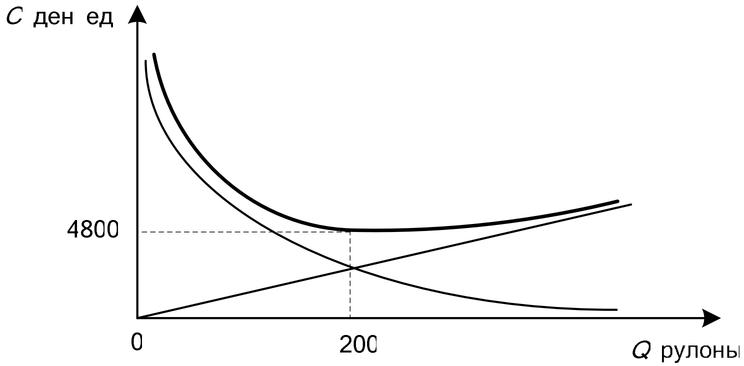


Рисунок 4.21 – График издержек управления запасами

Пример 4.3

При сооружении земляного полотна в зимний период, до начала основных земляных работ, на объектах строительства необходимо выполнить общие подготовительные работы, одна из которых – рыхление мерзлых грунтов, которое в данном случае осуществляется взрывным способом. Объем разрыхленного грунта составляет 2000 м^3 за смену (8 ч), обеспечивающий беспрерывную работу экскаватора. В связи с тем, что температура ниже минус 20 ^{0}С, то взрывы рекомендуется производить в течение суток, время подготовки и выполнения взрывных работ 2 ч. Разрыхленный грунт убира-

ется экскаватором в объеме 500 м^3 в течение смены. Бригады работают в три смены. Оставшийся грунт образует запас, издержки хранения обусловлены механическим рыхлением и составляют 5 ден. ед. за 1 м^3 в смену. Стоимость на подготовку к взрывным работам – 600 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем разрыхленного грунта при взрывных работах? Определить оптимальное время между заказами на взрывание, точку восстановления, общие минимальные издержки и максимальный уровень запасов разрыхленного грунта.

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q – размер заказа разрыхленного грунта, P – темп его производства, D – величина спроса за период планирования, K – издержки заказа, H – удельные издержки хранения за период, L – время выполнения заказа, T – протяженность периода планирования.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки на взрывание и содержание разрыхленного грунта:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H\left(1 - \frac{D}{P}\right) \to \min$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0;$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0;$$

- условие наличия темпа производства

$$P = \text{const},\ P > 0;$$

- условие отсутствия дефицита

$$P > D;$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} > 0,\ i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью с производством (см. формулы (4.15)–(4.21)).

Оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H\left(1-\dfrac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 500\cdot 600}{5\left(1-\dfrac{500}{2000}\right)}} = 400 \text{ м}^3.$$

Оптимальное время между заказами на взрывание

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q^*}{D/T} = \frac{400}{500/8} = 6{,}4 \text{ ч.}$$

Максимальный уровень запасов

$$S^* = Q^*\left(1-\frac{d}{p}\right) = 400\left(1-\frac{500}{2000}\right) = 300 \text{ м}^3.$$

Точка восстановления (запас разрыхленного грунта, при котором нужно сделать очередной заказ)

$$R = dL = \frac{500}{8}\cdot 2 = 125 \text{ м}^3.$$

Динамика изменения объема разрыхленного грунта показана на рисунке 4.22.

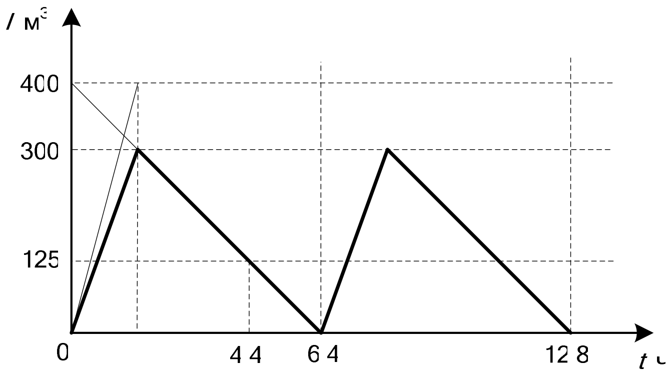


Рисунок 4.22 – График изменения объема разрыхленного грунта

Минимальные совокупные издержки

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}H\left(1-\frac{D}{P}\right) = \frac{500}{400}\cdot 600 + \frac{400}{2}\cdot 5\left(1-\frac{500}{2000}\right) = 1500 \text{ ден. ед.}$$

График издержек управления запасами в модели с производством представлен на рисунке 4.23.

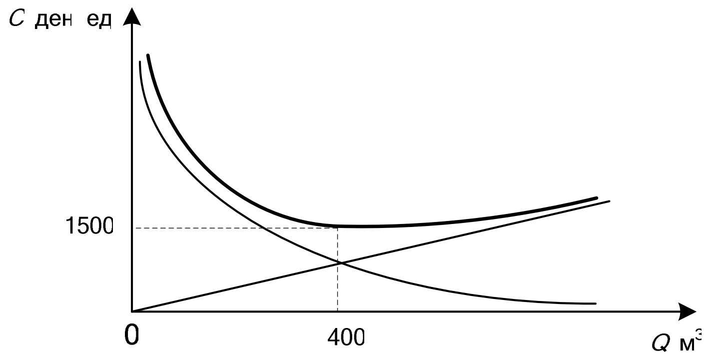


Рисунок 4.23 – График издержек управления запасами

Пример 4.4

Используя условия примера 4.2, рассмотрим вариант планирования дефицита. Допустим, по оценке специалистов упущенная прибыль, связанная с отсутствием НСМ при строительстве, составляет 19 ден. ед. в год за один рулон. Издержки на заказ и на хранение товара не меняются. Определить оптимальный размер заказа при плановом дефиците, общие минимальные издержки, максимальный размер запаса, максимальный дефицит, количество заказов, точку восстановления и оптимальное время между заказами. Требуется ли вводить специалистам строительной организации систему с плановым дефицитом?

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q – размер заказа НСМ, T – протяженность периода планирования строительства, D – величина спроса за период планирования, d – величина спроса в единицу времени, K – издержки заказа, H – удельные издержки хранения за период, h – удельные издержки хранения в единицу времени, L – время выполнения заказа, S – запас за период, b – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая результате дефицита одной единицы продукта, V – уровень дефицита.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки заказа, хранения и дефицита:

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}H + \frac{(Q-S)^2}{2Q}B \to \min$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q > 0;$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const},\ K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const},\ D > 0;$$

- условие наличия издержек дефицита

$$B = \text{const},\ B > 0;$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} > 0,\ i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью оптимального размера заказа с дефицитом (см. формулы (4.24)–(4.29)).

Оптимальный размер заказа

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H}\frac{B+H}{B}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 800}{24}\frac{19+24}{19}} \approx 300 \text{ рулонов.}$$

Максимальный размер запаса

$$S^* = \sqrt{\frac{2DK}{H}\frac{B}{B+H}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 800}{24}\frac{19}{19+24}} \approx 132 \text{ рулона.}$$

Максимальный дефицит

$$V^* = Q^* - S^* = 300 - 132 = 168 \text{ рулонов.}$$

Точка восстановления (запас рулонов (учет спроса), при котором нужно сделать очередной заказ)

$$R = dL = \frac{D}{T}L = \frac{600}{300} \cdot 6 = 12 \text{ рулонов НСМ.}$$

Оптимальное время между заказами

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q^*}{D/T} = \frac{300}{600/300} = 150 \text{ дней.}$$

Оптимальное число заказов в течение года

$$N = \frac{D}{Q^*} = \frac{600}{300} = 2.$$

Совокупные издержки

$$C = \frac{D}{Q}K + \frac{S^2}{2Q}H + \frac{(Q-S)^2}{2Q}B = \frac{600}{300} \cdot 800 + \frac{132^2}{2 \cdot 300} \cdot 24 +$$

$$+ \frac{(300-132)^2}{2 \cdot 300} \cdot 19 = 3190 \text{ ден. ед.}$$

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рисунке 4.24.

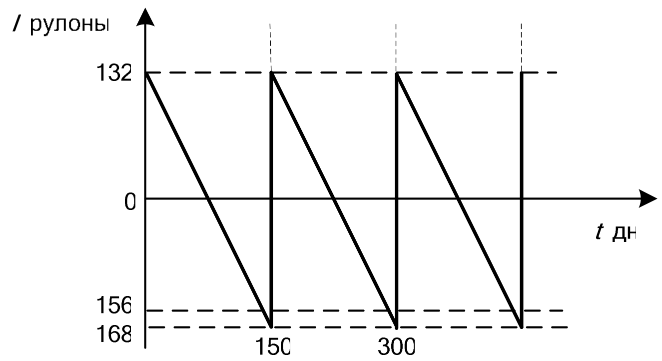


Рисунок 4.24 – График изменения количества рулонов на складе

График издержек управления запасами в модели оптимального размера заказа с дефицитом представлен на рисунке 4.25.

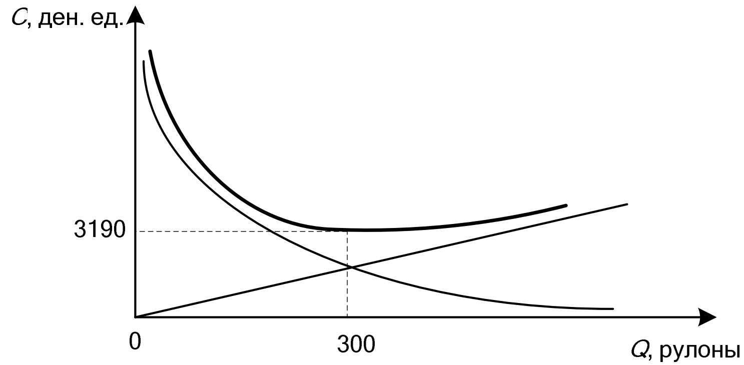


Рисунок 4.25 – График издержек управления запасами

Совокупные издержки при плановом дефиците меньше издержек без дефицита (см. пример 4.2) на $\Delta C = 4800 - 3190 = 1610$ ден. ед.

Следовательно, строительной организации требуется вводить модель с плановым дефицитом.

Пример 4.5

При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 5000 м^3 в год. Издержки на заказ – 500 ден. ед., которые обусловлены доставкой материалов (отходов) с завода. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 4 дня. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 2 % от стоимости материалов. Если заказ менее 3000 м^3, то стоимость 1 м^3 – 40 ден. ед., если же заказ не менее 3000 м^3, то – 32 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q_i – размер заказа золошлаковых материалов, T – протяженность периода планирования строительства, D – величина спроса за период планирования, K – издержки заказа, H – удельные издержки хранения за период, L – время выполнения заказа, a_i – цена единицы товара.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки на заказ, хранение и закупку материалов:

$$\min C_i = C_i^* = \frac{D}{Q_i}K + \frac{Q_i}{2}H_i + a_i D, \quad i = 1, 2$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q_i > 0, \quad i = 1, 2;$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const}, \quad K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const}, \quad D > 0;$$

- условие наличия скидок

$$a_1 > a_2 > 0;$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} > 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью с количественными скидками (см. формулы (4.32)–(4.37)): модель с двухуровневой системой скидок.

Решаем с помощью алгоритма для модели с двухуровневой системой скидок.

По условию задачи величина размера заказа Q может быть: $Q < q$ при стоимости единицы продукции a_1, либо $Q \geq q$ – a_2.

Вычисляем размер заказа:

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{0{,}02 \cdot 32}} = 2795 \text{ м}^3.$$

Так как $Q_2^* < q$ ($2795 < 3000$), то вычисляем размер заказа Q_1^* и сравниваем издержки $C_1^*(Q_1^*)$ и $C_2(q)$:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{0{,}02 \cdot 40}} = 2500 \text{ м}^3.$$

$$C_1^*\left(Q_1^*\right) = \frac{D}{Q_1^*}K + \frac{Q_1^*}{2}H_1 + a_1 D = \frac{5000}{2500} \cdot 500 + \frac{2500}{2} \cdot 0{,}8 + 40 \cdot 5000 =$$
$$= 202000 \text{ ден. ед.}$$

$$C_2\left(q\right) = \frac{D}{q}K + \frac{q}{2}H_2 + a_2 D = \frac{5000}{3000} \cdot 500 + \frac{3000}{2} \cdot 0{,}64 + 32 \cdot 5000 =$$
$$= 161793 \text{ ден. ед.}$$

$C_1^*(Q_1^*) > C_2(q)$, $202000 > 161793$, следовательно:

оптимальный размер заказа
$Q^* = q = 3000$ м^3;

минимальные издержки
$C^* = C_2(q) = 161793$ ден. ед.;

оптимальное время между заказами

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q^*}{D/T} = \frac{3000}{5000/364} = 218 \text{ дн.}$$

Точка восстановления (запас материалов, при котором нужно сделать очередной заказ)

$$R = dL = \frac{D}{T} L = \frac{5000}{364} \cdot 4 = 55 \text{ м}^3.$$

Динамика изменения объема золошлаковых материалов на складе показана на рисунке 4.26.

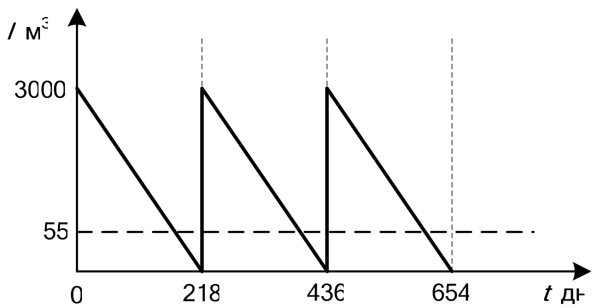


Рисунок 4.26 – График изменения объема материалов на складе

График издержек управления запасами в модели с двухуровневой системой скидок представлен на рисунке 4.27.

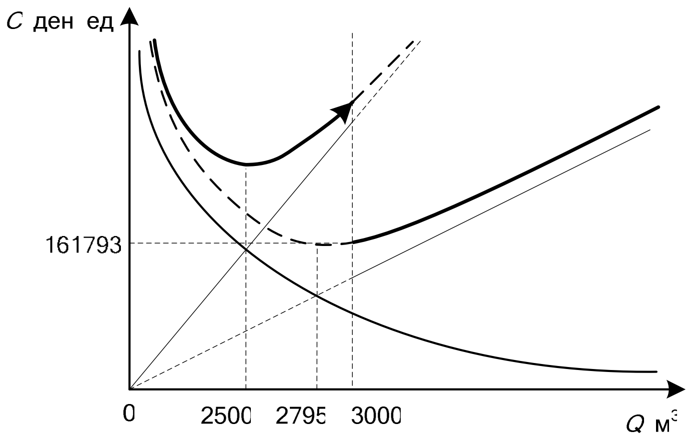


Рисунок 4.27 – График издержек управления запасами

Пример 4.6

Используя условия примера 4.5, рассмотрим другой вариант скидок. Если заказ менее 3000 м^3, то стоимость 1 м^3 – 45 ден. ед., при заказе не менее 3000 м^3 и менее 4000 м^3 – 40 ден. ед., при заказе не менее 4000 м^3 – 32 ден. ед. Издержки на заказ и на хранение товара не меняются. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через Q_i – размер заказа золошлаковых материалов, T – протяженность периода планирования строительства, D – величина спроса за период планирования, K – издержки заказа, H_i – удельные издержки хранения за период, L – время выполнения заказа, a_i – цена единицы товара.

Тогда целевая функция, описывающая совокупные издержки на заказ, хранение и закупку материалов:

$$\min C_i = C_i^* = \frac{D}{Q_i} K + \frac{Q_i}{2} H_i + a_i D, \ i = \overline{1,3}$$

при ограничениях:

- условие выполнения заказа

$$Q_i > 0, \quad i = \overline{1,3};$$

- условие стоимости заказа

$$K = \text{const}, \ K > 0;$$

- условие наличия темпа спроса

$$D = \text{const}, \ D > 0;$$

- условие наличия скидок

$$a_1 > a_2 > a_3 > 0;$$

- время выполнения заказа

$$L_{\tau_i} = \text{const}, L_{\tau_i} > 0, \ i = \overline{1, N}.$$

Данная математическая модель является моделью с количественными скидками (см. формулы (4.32)–(4.37)): модель с трехуровневой системой скидок.

Решаем с помощью алгоритма для модели с трехуровневой системой скидок.

По условию задачи величина размера заказа Q может быть: $Q < q_1$ при стоимости единицы продукции a_1, $q_1 \le Q < q_2$ – a_2, $Q \ge q_2$ – a_3.

Вычисляем размер заказа:

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{0{,}02 \cdot 32}} = 2795 \text{ м}^3.$$

Так как $Q_3^* < q_2$ ($2795 < 4000$), то вычисляем размер заказа:

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{0{,}02 \cdot 40}} = 2500 \text{ м}^3.$$

Поскольку $Q_3^* < q_2$ и $Q_2^* < q_1$ (2795 < 4000 и 2500 < 3000), то находим размер заказа:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2DK}{H_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000 \cdot 500}{0{,}02 \cdot 45}} = 2357 \text{ м}^3.$$

Вычисляем $C_1^*(Q_1^*)$, $C_2(q_1)$, $C_3(q_2)$ и определяем минимальные издержки:

$$C_1^*\left(Q_1^*\right) = \frac{D}{Q_1^*}K + \frac{Q_1^*}{2}H_1 + a_1 D = \frac{5000}{2357} \cdot 500 + \frac{2357}{2} \cdot 0{,}9 + 45 \cdot 5000 =$$
$$= 227121 \text{ ден. ед.}$$

$$C_2\left(q_1\right) = \frac{D}{q_1}K + \frac{q_1}{2}H_2 + a_2 D = \frac{5000}{3000} \cdot 500 + \frac{3000}{2} \cdot 0{,}8 + 40 \cdot 5000 =$$
$$= 202033 \text{ ден. ед.}$$

$$C_3\left(q_2\right) = \frac{D}{q_2}K + \frac{q_2}{2}H_3 + a_3 D = \frac{5000}{4000} \cdot 500 + \frac{4000}{2} \cdot 0{,}64 + 32 \cdot 5000 =$$
$$= 161905 \text{ ден. ед.}$$

Минимальные издержки

$$C^* = \min\left\{C_1^*(Q_1^*), C_2(q_1), C_3(q_2)\right\} = C_3(q_2) = 161905 \text{ ден. ед.}$$

Оптимальный размер заказа

$$Q^* = q_2 = 4000 \text{ м}^3.$$

Оптимальное время между заказами

$$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{Q^*}{D/T} = \frac{4000}{5000/364} = 291 \text{ дн.}$$

Точка восстановления (запас материалов, при котором нужно сделать очередной заказ)

$$R = dL = \frac{D}{T}L = \frac{5000}{364} \cdot 4 = 55 \text{ м}^3.$$

Динамика изменения объема золошлаковых материалов на складе показана на рисунке 4.28.

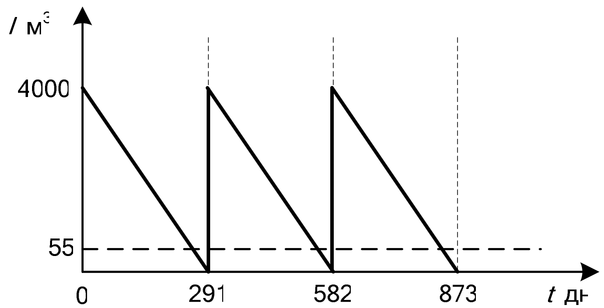


Рисунок 4.28 – График изменения объема материалов на складе

График издержек управления запасами в модели с трехуровневой системой скидок представлен на рисунке 4.29.

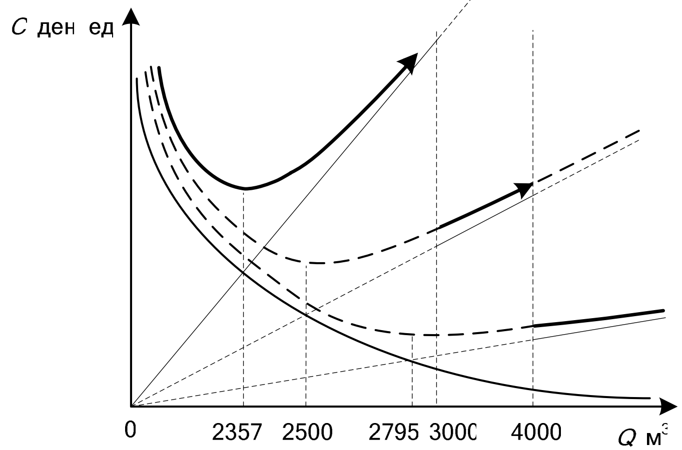


Рисунок 4.29 – График издержек управления запасами

Контрольные вопросы

1 Обоснуйте необходимость управления запасами.
2 Объясните, в чем заключается методика *ABC*-анализа.
3 Объясните, в чем заключается методика 20/80.
4 Задачи управления запасами и их классификация.
5 Назовите особенности задач управления запасами.
6 Сформулируйте основные признаки классификации запасов.
7 Основные понятия теории управления запасами.
8 Какие бывают типы спроса?
9 Опишите основные модели управления запасами.

5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТАБЛИЧНОГО РЕДАКТОРА MICROSOFT EXCEL

5.1 Модель ЛП и ее представление в электронных таблицах

При решении задач следует записывать обе версии модели как математическую, так и табличную. Электронная таблица хорошо подходит для представления моделей ЛП, особенно при проведении анализа «Что-если». Не следует формировать модель ЛП сразу в электронной таблице – данный процесс лучше разбить на три этапа:

1 Составление математической модели и ее анализ с целью выявления возможных логических ошибок.

2 Создание и отладка табличной модели ЛП в Excel. Затем производится проверка полученной табличной модели путем задания различных значений переменных решения с целью выявить возможные очевидные ошибки (например, для заведомо допустимых решений нарушаются ограничения или критерий эффективности оказываются лишенными смысла и т. д.).

3 Оптимизация модели с помощью надстройки «Поиск решения». Если модель некорректно составлена, результатом чаще всего будет сообщение об ошибке. Тогда нужно исправить модель, возможно, вернувшись к первому этапу.

Созданная на первом этапе математическая модель позволяет увидеть всю модель целиком, что облегчает понимание табличной модели в Excel. Для достаточно сложных моделей логично сначала проанализировать структуру математической модели ЛП, а не ее представление в Excel.

Рекомендации по созданию табличной модели ЛП в Excel:

- каждая переменная решения располагается в отдельной ячейке, ячейки группируются по строкам или столбцам;
- каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы;
- переменные решения группируются в отдельный блок столбцов/строк; аналогично ограничения группируются в свой блок строк/столбцов;
- все ячейки, содержащие переменные решения и целевую функцию, имеют заголовки в верхней части своего столбца, а все ограничения имеют заголовки в крайней слева ячейке своей строки;
- коэффициенты целевой функции хранятся в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными решения;

- чтобы модель была понятней, ячейки с переменными решения и целевой функцией выделяются рамкой по границе ячеек или заливкой ячеек;

- ячейки, содержащие правые части ограничений, должны включать константы или формулы, в которые не входят переменные решения, – все формулы в правой части, прямо или косвенно связанные с переменными решения, должны быть перенесены в левую часть с помощью алгебраических преобразований данного неравенства;

- не следует использовать в формулах модели ЛП функции Excel: ЕСЛИ, ABS, MAX, MIN и другие нелинейные функции. Такие функции могут использоваться в формулах рабочего листа, но только в том случае, если они не влияют (прямо или косвенно) на вычисление целевой функции;

- условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства «Поиск решения».

Одним из результатов выполнения этих рекомендаций является то, что все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Кроме того, группирование переменных решения и ограничений позволяет копировать формулы для создания аналогичных формул. Благодаря группированию также упрощается работа со средством «Поиск решения», поскольку для указания переменных решения или ограничений можно использовать диапазоны ячеек рабочего листа.

Надстройка «Поиск решения»

Поиск решения – это надстройка, входящая в поставку Excel, предназначенная для оптимизации моделей при наличии ограничений, в том числе моделей линейного программирования (средство «Поиск решения» позволяет оптимизировать линейные и нелинейные модели). Для этого в надстройке используются методы и алгоритмы математического программирования, которые позволяют находить оптимальные решения. Для задач линейного программирования надстройка «Поиск решения» использует эффективный оптимизационный алгоритм (он подходит только для моделей ЛП) под названием симплекс-метод.

Надстройка «Поиск решения», хотя и входит в поставку Excel, не подключается автоматически к этой программе. Поэтому, если в меню «Сервис» вы не находите команды «Поиск решения», значит, надстройка не подключена. Для ее подключения выполните команду «Сервис» → «Надстройки» и в открывшемся диалоговом окне «Надстройки» установите флажок перед опцией «Поиск решения» → OK.

Использование надстройки «Поиск решения» состоит из следующих действий:

- откройте Excel и выполните операции по созданию табличной модели;

- после отладки модели переходите к этапу оптимизации, выбрав команду «Поиск решения» в меню «Сервис»;

- в открывшемся диалоговом окне «Поиск решения» укажите данные, необходимые для процесса оптимизации;

- после задания необходимых данных (в какой ячейке содержится формула оптимизируемой целевой функции, какие ячейки включают переменные решения и т д.) щелкните на кнопке «Выполнить»;

- поиск решения выполняет процесс оптимизации. Для небольших моделей ЛП современный персональных компьютер тратит на это всего несколько секунд, но для очень больших моделей процесс может длиться несколько минут и дольше;

- если в табличной модели нет ошибок, «Поиск решения» выведет на экран диалоговое окно «Параметры поиска решения», а затем «Результаты поиска решения», где можно указать, обновить ли исходную модель (то есть занести в ячейки значения оптимального решения) и создавать ли отчет (который впоследствии можно распечатать);

- после этого можно продолжить выполнение анализа, чтобы провести анализ чувствительности оптимального решения.

Отчет по результатам. Этот тип отчета содержит сведения о значении целевой функции, исходных значениях управляемых параметров, найденном решении и ограничениях.

Отчет по устойчивости. В этом отчете будет показано, как реагирует решение на изменение формулы или ограничений.

Отчет по пределам. В этом отчете отображается оптимальный план, оптимальное значение целевой функции, а также нижнее и верхнее предельные значения для изменяемых ячеек.

Параметры поиска решения:

Максимальное время – служит для ограничения времени, отпущенного на поиск решения задачи.

Предельное число итераций – управляет временем решения задачи путем ограничения числа вычислительных циклов (итераций).

Относительная погрешность – определяет точность вычислений. Чем меньше значение этого параметра, тем выше точность вычислений.

Допустимое отклонение – предназначен для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. Чем больше значение допуска, тем меньше времени требуется на поиск решения.

Сходимость – применяется только к нелинейным задачам. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле «Сходимость», поиск прекращается.

Линейная модель – служит для ускорения поиска решения путем применения к задаче оптимизации линейной модели. Нелинейные модели предполагают использование нелинейных функций, фактора роста и экспоненциального сглаживания, что замедляет вычисления.

Неотрицательные значения – позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых не было задано соответствующее ограничение в диалоговом окне «Добавить ограничение».

Автоматическое масштабирование – используется, когда числа в изменяемых ячейках и в целевой ячейке существенно различаются.

Показывать результаты итераций – приостанавливает поиск решения для просмотра результатов отдельных итераций.

Загрузить модель – после щелчка на этой кнопке открывается одноименное диалоговое окно, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих модель оптимизации.

Сохранить модель – служит для отображения на экране одноименного диалогового окна, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, предназначенный для хранения модели оптимизации.

Оценка линейная – выберите этот переключатель для работы с линейной моделью.

Оценка квадратичная – выберите этот переключатель для работы с нелинейной моделью.

Разности прямые – используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Увеличивает скорость работы средства «Поиск решения».

Разности центральные – используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдано сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

Метод поиска Ньютона – требует больше памяти, но выполняет меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов.

Метод поиска сопряженных градиентов – реализует метод сопряженных градиентов, для которого требуется меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно большая и необходимо экономить память или если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

5.2 Пример решения задачи об оптимальной загрузке машин и механизмов

На звеносборочной базе имеется двухконсольный козловой кран грузоподъемностью до 10 т и стреловой кран с двигателем внутреннего сгорания грузоподъемностью 6–25 т (в зависимости от вылета стрелы). С помощью этих машин за 8 часов необходимо произвести погрузку на платформы 800 рельсов типа Р50 и 600 рельсов типа Р65 длиной 25 п.м. Причем, один п.м рельсов типа Р50 имеет массу 50 кг, рельсов типа Р65 – 65 кг.

Двухконсольный козловой кран может погрузить рельсов типа Р50 150 т в час, рельсов типа Р65 – 180 т в час. Стреловой кран может погрузить рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 – 200 т в час.

Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т двухконсольным козловым краном рельсов типа Р50, – 10 ден. ед., рельсов типа Р65 – 12 ден. ед., стреловым краном рельсов типа Р50 – 15 ден. ед., рельсов типа Р65 – 18 ден. ед.

Требуется распределить загрузку между грузоподъемными машинами таким образом, чтобы они, работая одинаковое время (единым фронтом), выполнили заданный объем работ, и чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Определим общий объем работ в тоннах по погрузке двух типов рельсов. Необходимо погрузить рельсов типа Р50 $0{,}05 \cdot 25 \cdot 800 = 1000$ т и рельсов типа Р65 $0{,}065 \cdot 25 \cdot 600 = 975$ т.

Условия задачи запишем в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – **Исходные данные задачи**

Вид машины i	Вид работы j				Лимит времени работы машин, ч
	Погрузка рельсов типа Р50		Погрузка рельсов типа Р65		
Двухконсольный козловой кран	150	10	180	12	8
Стреловой кран	200	15	200	18	8
Задание, т	1000		975		

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через x_{11} и x_{12} объём работ (в тоннах) двухконсольного козлового крана по погрузке рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 соответственно; x_{21} и x_{22} объём работ (в тоннах) стрелового крана по погрузке рельсов типа Р50 и рельсов типа Р65 соответственно.

Целевая функция описывает затраты, связанные с выполнением заданного объема работ:

$$z = 10\,x_{11}+12\,x_{12}+15\,x_{21}+18\,x_{22} \to \min$$

при ограничениях

- на лимит рабочего времени:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_{11}}{150}+\frac{x_{12}}{180} \le 8, \\ \frac{x_{21}}{200}+\frac{x_{22}}{200} \le 8, \end{aligned}\right\}$$

- на необходимость выполнить задание:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21} = 1000, \\ x_{12}+x_{22} = 975, \end{aligned}\right\}$$

условие неотрицательности: $x_{ij} \ge 0$ (i, j=1, 2).

Для решения задачи с помощью табличного редактора Microsoft Excel необходимо:

1) создать форму для ввода исходных данных задачи и ввести их;
2) сформировать на рабочем листе Excel элементы математической модели и целевой функции, то есть ввести расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений;
3) настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее;
4) выполнить анализ найденного решения.

Выполнение:

1 Создадим форму для исходных данных (рисунок 5.1).

2 Введем расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений (рисунок 5.2).

Для целевой функции зарезервирована ячейка D20, для переменных x_{ij} – ячейки C17:D18, в них будут занесены результаты решения задачи.

Для вычисления значения целевой функции, выражающей общие затраты, в ячейку D20 запишем формулу:

= C5*C17 + D5*D17 + C7*C18 + D7*D18.

	A	B	C	D
1				
2	Виды машин (*i*)		Виды работ (*j*)	
3			Погрузка рельсов типа Р50	Погрузка рельсов типа Р65
4	Двухконсольный	скорость	150	180
5	козловый кран	стоимость	10	12
6	Стреловой	скорость	200	200
7	кран	стоимость	15	18
8	Задание (т)		1000	975
9	Выполнение задания (т)			
10				
11	Виды машин (*i*)		Лимит времени работы машин (ч)	Время работы машин (ч)
12	Двухконсольный козловый кран		8	
13	Стреловой кран		8	
14				
15	**План загрузки грузоподъемными машинами**			
16	Виды машин (*i*)		Погрузка рельсов типа Р50	Погрузка рельсов типа Р65
17	Двухконсольный козловый кран			
18	Стреловой кран			
19				
20			**Затраты**	

Задание

Рисунок 5.1 – Исходные данные

В ячейки D12, D13 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений на лимит рабочего времени:

- время работы двухконсольного козлового крана:

= C17/C4 + D17/D4;

- время работы стрелового крана:

= C18/C6 + D18/D6.

В ячейки C9, D9 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений на необходимость выполнить задание по погрузке двух типов рельсов:

- объем работ в тоннах по погрузке рельсов типа Р50:

= C17 + C18;

- объем работ в тоннах по погрузке рельсов типа Р65:

= D17 + D18.

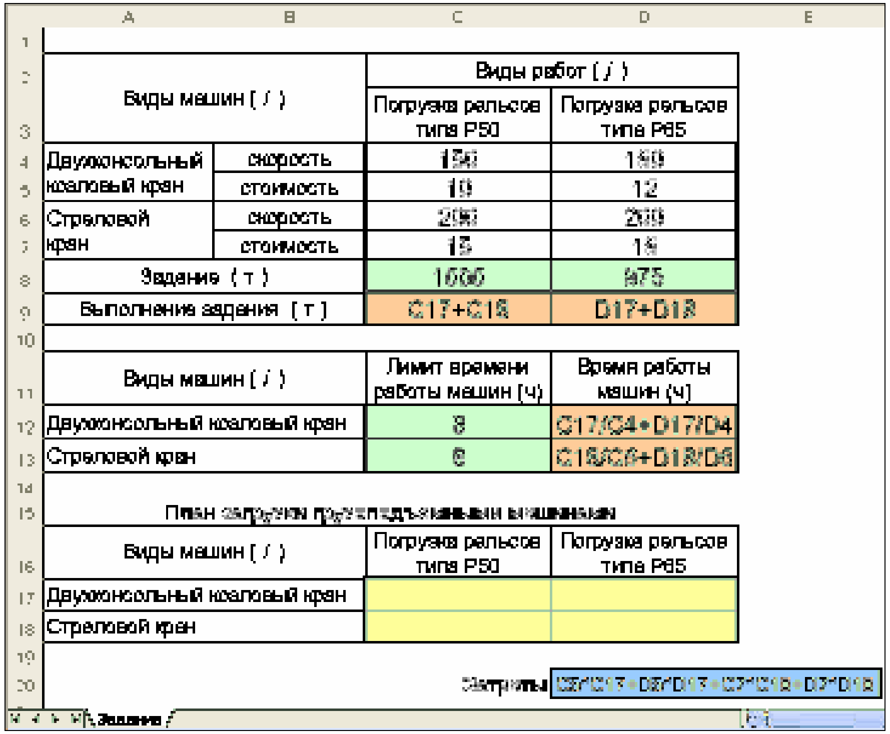


Рисунок 5.2 – Ввод расчетных формул

3 Настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее.

Выберем команду: *Сервис → Поиск решения* (рисунок 5.3).

В диалоговом окне *Поиск решения* требуется ввести:

а) адрес ячейки D20 целевой функции;

б) переключатель в группе *Равной* поставить на минимизацию – *Минимальному значению*;

в) указать диапазоны изменяемых ячеек в поле *Изменяя ячейки*: \$C\$17:\$D\$18;

г) указать ограничения в поле *Ограничения:*

- на лимит рабочего времени:

\$D\$12 < = \$C\$12;

\$D\$13 < = \$C\$13;

- на необходимость выполнить задание:

\$C\$9 = \$C\$8;

\$D\$9 = \$D\$8;

- укажем требования неотрицательности переменных:

В диалоговом окне *Поиск решения* (см. рисунок 5.3) выберем *Параметры*.

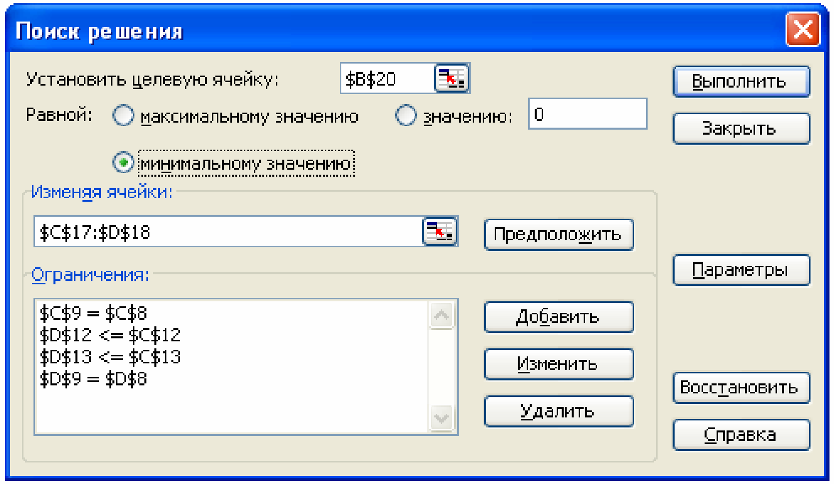


Рисунок 5.3 – Настройка надстройки *Поиск решения*

В появившемся окне *Параметры поиска решения* (рисунок 5.4) требуется установить курсором *Неотрицательные значения;*

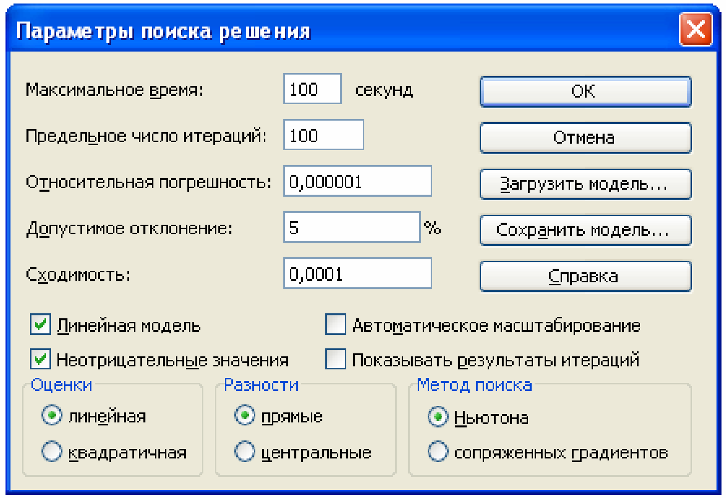


Рисунок 5.4 – Настройка окна *Параметры поиска решения*

д) в окне *Параметры поиска решения* (см. рисунок 5.4) также требуется установить курсором вид математической модели задачи – *Линейная модель*. Далее нажать *ОК* (см. рисунок 5.4), а затем *Выполнить* (см. рисунок 5.3).

После нажатия кнопки *Выполнить* на экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения*. В данном диалоговом окне сделан вывод о том, что найдено оптимальное решение (рисунок 5.5).

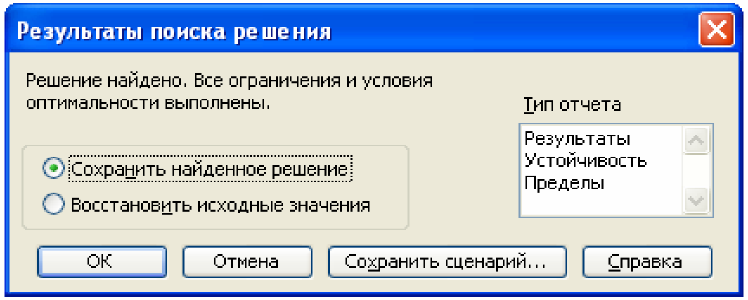


Рисунок 5.5 – Получение результатов поиска решений

Далее необходимо определить, следует ли сохранять найденное решение и какие типы отчетов следует создать и поместить в рабочую книгу.

При сохранении результатов поиска решений нужно помнить, что если изменяемая ячейка содержала формулу, то она будет заменена значением.

Для создания отчета необходимо выделить нужный тип отчета и нажать кнопку *ОК*. Чтобы выделить несколько типов отчетов, щелкните на названиях типов отчетов, удерживая нажатой клавишу *Ctrl*. Каждый отчет Excel помещает на отдельном рабочем листе. При этом в книгу слева от ярлычка рабочего листа добавляются ярлычки новых отчетов.

В результате выполнения программы *Поиск решения* получим на экране в ячейках C17:D18 (C17, D17, C18, D18) оптимальный план перевозок, а в ячейке D20 – минимальные затраты (рисунок 5.6).

Таким образом, оптимальный план
$X^* = (387{,}5;\ 975;\ 612{,}5;\ 0)$.

Значение целевой функции при оптимальном плане
$z^* = z\,(X^*) = 24762{,}5$.

Вывод. Согласно полученному оптимальному плану двухконсольный козловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 387,5 т, рельсов типа Р65 – 975 т. Стреловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 612,5 т. Стоимость всех работ по погрузке будет минимальной и составит 24762,5 ден. ед.

	A	B	C	D
1				
2	Виды машин (*i*)		Виды работ (*j*)	
3			Погрузка рельсов типа Р50	Погрузка рельсов типа Р65
4	Двухконсольный козловый кран	скорость	150	180
5		стоимость	10	12
6	Стреловой кран	скорость	200	200
7		стоимость	15	18
8	Задание (т)		1000	975
9	Выполнение задания (т)		1000	975
10				
11	Виды машин (*i*)		Лимит времени работы машин (ч)	Время работы машин (ч)
12	Двухконсольный козловый кран		8	8
13	Стреловой кран		8	3,0625
14				
15	**План загрузки грузоподъемными машинами**			
16	Виды машин (*i*)		Погрузка рельсов типа Р50	Погрузка рельсов типа Р65
17	Двухконсольный козловый кран		**387,5**	**975**
18	Стреловой кран		**612,5**	**0**
19				
20			**Затраты**	**24762,5**

Отчет по устойчивости 1 / Отчет по пределам 1 / **Задание**

Рисунок 5.6 – Решение задачи

4 Анализ найденного решения.

Диалоговое окно *Результаты поиска решения* (см. рисунок 5.5) сообщает о завершении поиска. То, что программа *Поиск решения* завершила работу, не означает, что она нашла оптимальное решение. Поэтому всегда нужно читать сообщение, отображаемое в верхней части данного окна. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне *Результаты поиска решения* должно присутствовать два ключевых предложения:

1 *Решение найдено.*

2 *Все ограничения и условия оптимальности выполнены.*

Если хотя бы одного из этих предложений нет, программе не удалось оптимизировать модель.

Отчет по результатам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из трех таблиц (рисунок 5.7).

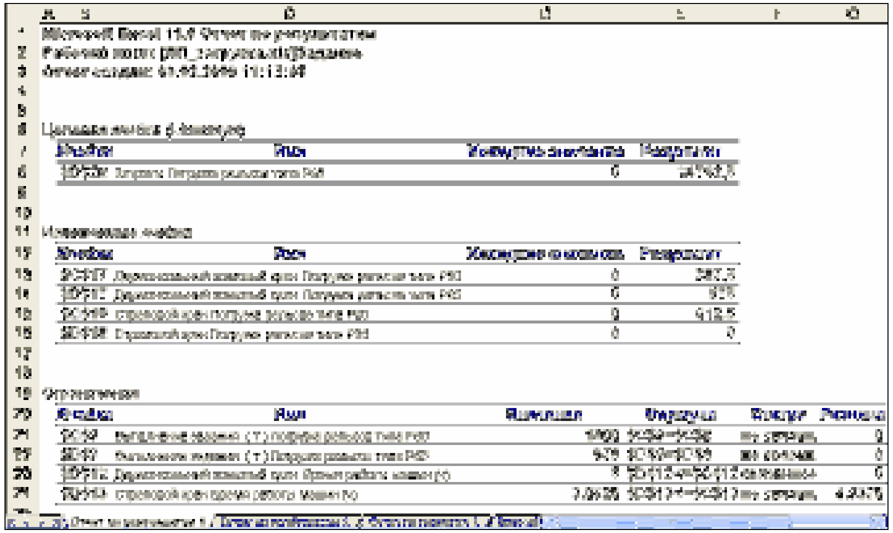


Рисунок 5.7 – Отчет по результатам

Таблица 1 приводит сведения о целевой функции. В столбце *Исходное значение* приведены значения целевой функции до начала вычислений – 0, а в столбце *Результат* – значение целевой функции в оптимальном решении – 24762,5.

Таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи. Двухконсольный козловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 387,5 т, рельсов типа Р65 – 975 т. Стреловой кран должен погрузить рельсов типа Р50 612,5 т.

Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи. В столбце *Формула* – приведены ограничения в том виде, в котором они были введены в диалоговом окне Поиск решения, *Значение* – приведены величины использованного ресурса, *Разница* – показано количество неиспользованного ресурса (резерв), *Статус* – определяет, как выполнены ограничения на оптимальном плане, для ограничений в виде неравенств: *Связанное* – означает, что соответствующее ограничение выполнено как равенство, а *несвязанное* – как строгое неравенство. Время работы двухконсольного козлового крана использовано полностью, стрелового крана неиспользованное время составило 4,9375 ч. Смысл остальных параметров очевиден.

Отчет по устойчивости

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из двух таблиц (рисунок 5.8).

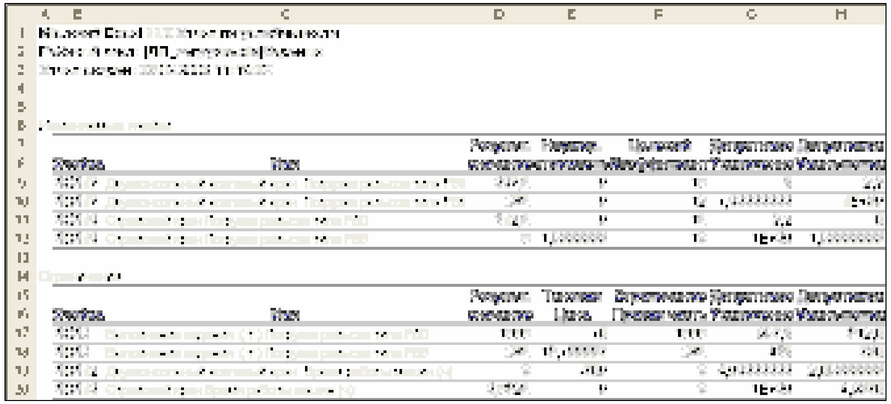


Рисунок 5.8 – Отчет по устойчивости

В столбце *Результирующее значение* таблицы 1 приводится описанный ранее результат решения задачи. Столбец *Нормированная стоимость* показывает на сколько изменится целевая функция при принудительном включении тонны рельсов в оптимальное решение. Это значит, что если в план потребуется включить тонну рельсов типа Р65 для погрузки стреловым краном, то при новом плане целевая функция увеличится на 1,8333333, типа Р50 – не изменится, при погрузке двухконсольным козловым краном обоих типов рельсов целевая функция – не изменится. Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* показывают, что оптимальное решение задачи не изменится, если затраты при погрузке рельсов типа Р50 двухконсольным козловым краном будут изменяться в пределах от 10 – 2,2 до 10 + 5, для рельсов типа Р65 – от 12 – 1Е+30 до 12 + 1,8333333, для стрелового крана при погрузке рельсов типа Р50 – от 15 – 5 до 15 + 2,2, рельсов типа Р65 – от 18 – 1,8333333 до 18 + 1Е+30.

В столбце *Результирующее значение* таблицы 2 приводятся величины использованных ресурсов. *Теневая цена* отражает коэффициент изменения оптимального значения целевой функции при увеличении правой части ограничений. Это значит, что при увеличении задания по загрузке рельсов типа Р50 на единицу (1 т) оптимальное значение целевой функции увеличится на 15, рельсов типа Р65 – увеличится на 16,166667; при увеличении времени работы двухконсольного козлового крана на единицу целевая функция уменьшится на 750, стрелового – не изменится.

Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* задают допустимый диапазон изменений правой части ограничений, в котором теневая цена сохраняет свое значение. Это значит, что если задание по загрузке рельсов типа Р50 будет изменяться в пределах – от 1000 – 612,5 до 1000 + 987,5, рельсов типа Р65 – от 975 – 735 до 975 + 465, а время работы двухконсольного козлового крана – от 8 – 2,58333333 до 8 + 4,08333333, стрелового – от 8 – 4,9375 до 8 + 1E+30, то теневая цена сохранит свое значение.

Отчет по пределам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из одной таблицы (рисунок 5.9).

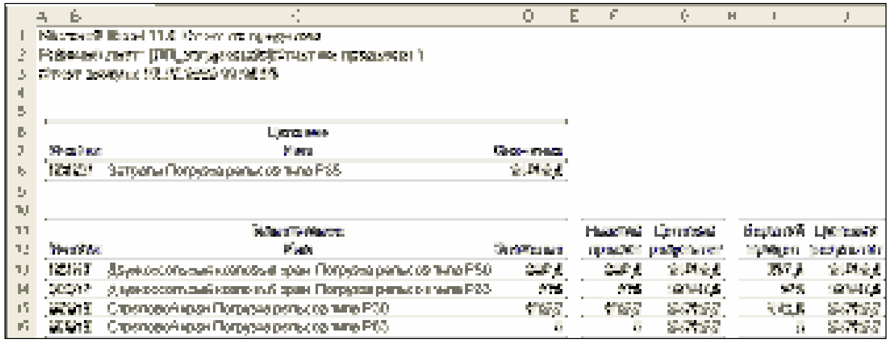


Рисунок 5.9 – Отчет по пределам

Таблица содержит оптимальное значение целевой функции, а также указаны нижние и верхние пределы, в которых может изменяться план загрузки, вошедший в оптимальное решение с соответствующими целевыми результатами.

Нижний предел – это наименьшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка (план выгрузки на грузовом фронте) при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным значениям).

Верхний предел – это наибольшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка (план выгрузки на грузовом фронте) при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксировании (равны оптимальным значениям).

Целевой результат – это значение целевой функции, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.

5.3 Пример решения задачи добычи и производства балласта

Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице 5.2. Потребность в балласте песчано-гравийном не превышает 8 тыс. м^3, в щебеночном – 5 тыс. м^3. Требуется определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль.

Таблица 5.2 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420
Бульдозеры, маш.-ч	8	5	6	100
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720
Прибыль, тыс. ден. ед.	68	70	75	

Решение. Построим математическую модель задачи.

Обозначим через x_1 – объем добычи и производства балласта песчаного, x_2 – песчано-гравийного, x_3 – щебеночного.

Тогда целевая функция описывает прибыль

$z = 68\,x_1 + 70\,x_2 + 75\,x_3 \rightarrow \max$

при следующих ограничениях:

– на использование ресурсов:

- экскаваторов

$$14\,x_1 + 18\,x_2 + 23\,x_3 \le 420;$$

- бульдозеров

$$8\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 \le 100;$$

- трудовых ресурсов

$$32\,x_1 + 45\,x_2 + 54\,x_3 \le 720;$$

– на объемы производства балласта:

- песчано-гравийного

$$x_2 \le 8;$$

- щебеночного

$$x_3 \le 5;$$

условие неотрицательности

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Для решения задачи с помощью табличного редактора Microsoft Excel необходимо:

1) создать форму для ввода исходных данных задачи и ввести их;
2) сформировать на рабочем листе Excel элементы математической модели и целевой функции, то есть ввести расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений;
3) настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее;
4) выполнить анализ найденного решения.

Выполнение:

1 Создадим форму для исходных данных (рисунок 5.10).

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3			Объем ресурсов	Выполнение объема ресурсов
	Балласт песчаный	Балласт песчано-гравийный	Балласт щебеночный		
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420	
Бульдозеры, маш.-ч	6	5	6	100	
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720	
Прибыль, тыс. ден. ед.	68	70	75		
Потребность		8	5		

Объем добычи и производства балласта

	песчаный	песчано-гравийный	щебеночный		
Балласт					
				Прибыль	

Рисунок 5.10 – Исходные данные

2 Введем расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений (рисунок 5.11).

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3			Объем ресурсов	Выполнение объема ресурсов
	Балласт песчаный	Балласт песчано-гравийный	Балласт щебеночный		
Экскаваторы, маш.-ч	14	18	23	420	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;B13:D13)
Бульдозеры, маш.-ч	6	5	6	100	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;B13:D13)
Трудовые ресурсы, чел.-ч	32	45	54	720	=СУММПРОИЗВ(B7:D7;B13:D13)
		8	5		
				Прибыль	=СУММПРОИЗВ(B8:D8;B13:D13)

Рисунок 5.11 – Ввод расчетных формул

Для целевой функции зарезервирована ячейка F15, для переменных x_i – ячейки B13:D13, в них будут занесены результаты решения задачи.

Для вычисления значения целевой функции, выражающей общую прибыль, в ячейку F15 запишем формулу:

= СУММПРОИЗВ(B8:D8;B13:D13).

В ячейки F5, F6, F7 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений на ресурсы:

- выполнение объема ресурсов экскаваторами:

= СУММПРОИЗВ(B5:D5;B13:D13);

- выполнение объема ресурсов бульдозерами:

= СУММПРОИЗВ(B6:D6;B13:D13);

- выполнение объема трудовых ресурсов:

= СУММПРОИЗВ(B7:D7;B13:D13).

3 Настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее.

Выберем команду: *Сервис → Поиск решения* (рисунок 5.12).

В диалоговом окне *Поиск решения* требуется ввести:

а) адрес ячейки F15 целевой функции;

б) переключатель в группе *Равной* поставить на максимизацию – *Максимальному значению*;

в) указать диапазоны изменяемых ячеек в поле *Изменяя ячейки*: $B$13:$D$13;

г) указать ограничения в поле *Ограничения:*
- на выполнение объема ресурсов:
$F$5 < = $E$5;
$F$6 < = $E$6;
$F$7 < = $E$7;
- на объемы производства:
$C$13 < = $C$9;
$D$13 < = $D$9;
- укажем требования неотрицательности переменных:

В диалоговом окне *Поиск решения* (см. рисунок 5.12) выберем *Параметры*.

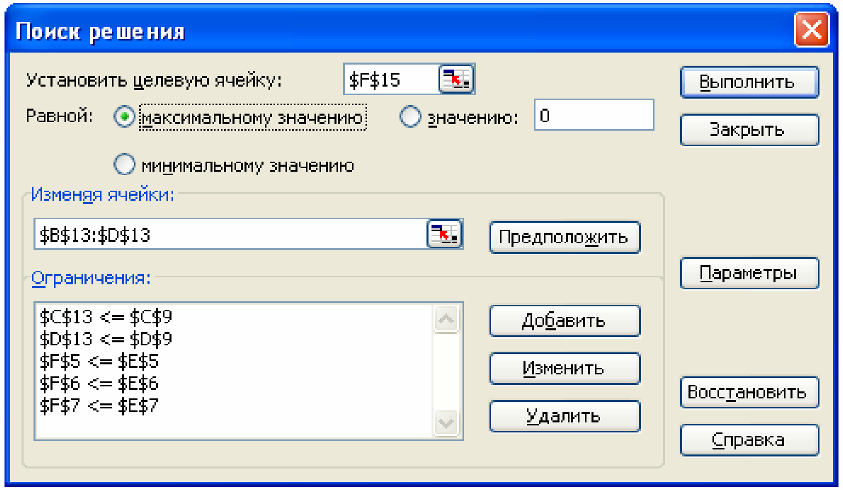


Рисунок 5.12 – Настройка надстройки *Поиск решения*

В появившемся окне *Параметры поиска решения* (рисунок 5.13) требуется установить курсором *Неотрицательные значения*;

д) в окне *Параметры поиска решения* (см. рисунок 5.13) также требуется установить курсором вид математической модели задачи – *Линейная модель*. Далее нажать *ОК* (см. рисунок 5.13), а затем *Выполнить* (см. рисунок 5.12).

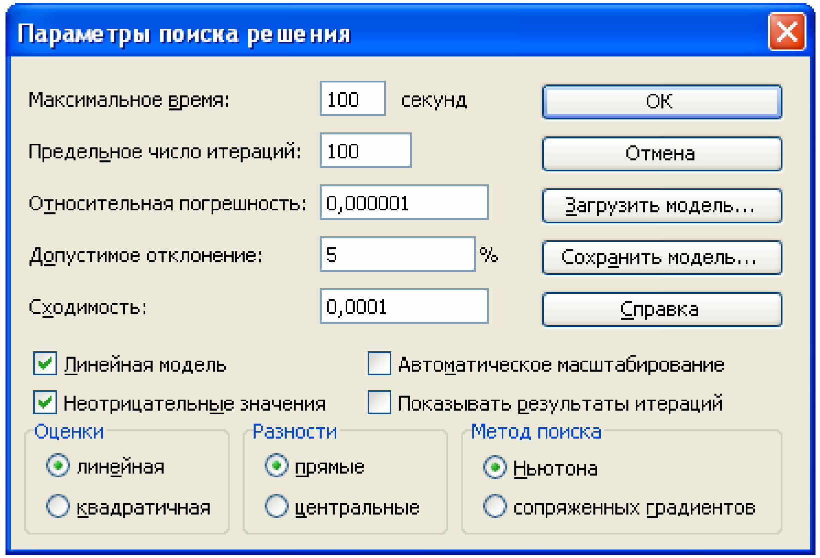


Рисунок 5.13 – Настройка окна *Параметры поиска решения*

После нажатия кнопки *Выполнить*, на экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения*. В данном диалоговом окне сделан вывод о том, что найдено оптимальное решение (рисунок 5.14).

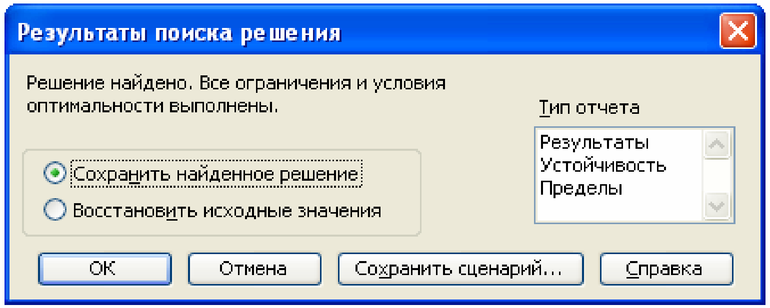


Рисунок 5.14 – Получение результатов поиска решений

Далее необходимо определить, следует ли сохранять найденное решение и какие типы отчетов следует создать и поместить в рабочую книгу.

При сохранении результатов поиска решений нужно помнить, что если изменяемая ячейка содержала формулу, то она будет заменена значением.

Для создания отчета необходимо выделить нужный тип отчета и нажать кнопку *OK*. Чтобы выделить несколько типов отчетов, щелкните на названиях типов отчетов, удерживая нажатой клавишу *Ctrl*. Каждый отчет Excel помещает на отдельном рабочем листе. При этом в книгу слева от ярлычка рабочего листа добавляются ярлычки новых отчетов.

В результате выполнения программы *Поиск решения* получим на экране в ячейках B13:D13 оптимальный план объема добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а в ячейке F15 – максимальный доход (рисунок 5.15).

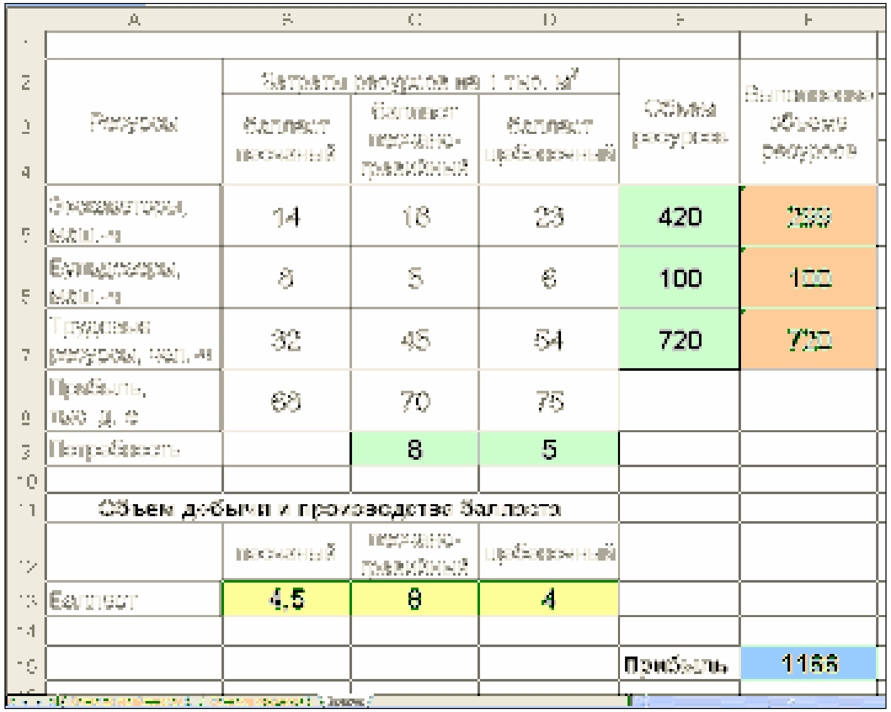


Рисунок 5.15 – Решение задачи

Таким образом, оптимальный план

$X^* = (4{,}5;\ 8;\ 4)$.

Значение целевой функции при оптимальном плане $z^* = z\,(X^*) = 1166$.

Вывод. Для получения максимальной прибыли в размере 1166 денежных единиц необходимо добывать и производить балласта 4,5 тыс. м^3 песчаного, 8 тыс. м^3 песчано-гравийного и 4 тыс. м^3 щебеночного.

4 Анализ найденного решения.

Диалоговое окно *Результаты поиска решения* (см. рисунок 5.14) сообщает о завершении поиска. То, что программа *Поиск решения* завершила работу, не означает, что она нашла оптимальное решение. Поэтому всегда нужно читать сообщение, отображаемое в верхней части данного окна. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне *Результаты поиска решения* должно присутствовать два ключевых предложения:

1 *Решение найдено*.

2 *Все ограничения и условия оптимальности выполнены*.

Если хотя бы одного из этих предложений нет, программе не удалось оптимизировать модель.

Отчет по результатам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из трех таблиц (рисунок 5.16).

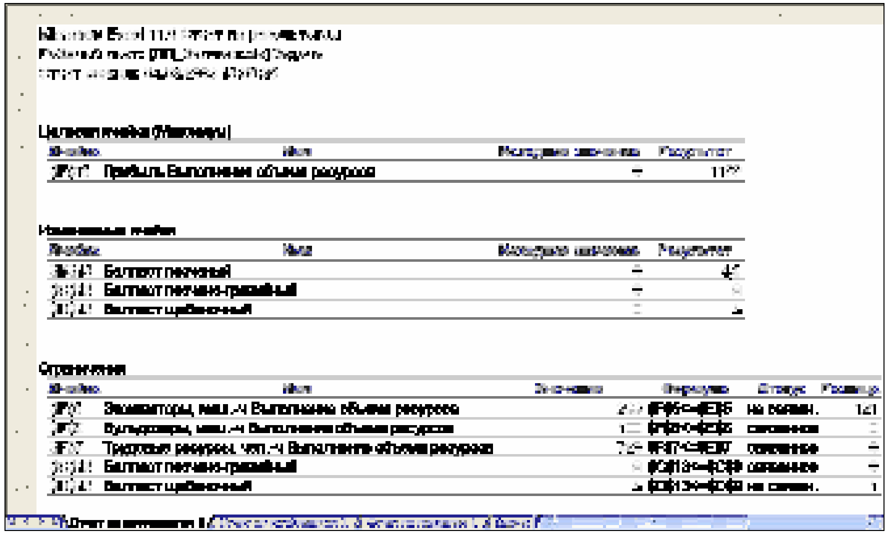


Рисунок 5.16 – Отчет по результатам

Таблица 1 приводит сведения о целевой функции. В столбце *Исходное значение* приведены значения целевой функции до начала вычислений – 0, а в столбце *Результат* – значение целевой функции в оптимальном решении – 1166.

Таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи. Объем добычи и производства балласта песчаного

4,5 тыс. м^3, песчано-гравийного – 8 тыс. м^3, щебеночного – 4 тыс. м^3.

Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи. В столбце *Формула* – приведены ограничения в том виде, в котором они были введены в диалоговом окне Поиск решения, *Значение* – приведены величины использованного ресурса, *Разница* – показано количество неиспользованного ресурса (резерв), *Статус* – определяет, как выполнены ограничения на оптимальном плане, для ограничений в виде неравенств: *Связанное* – означает, что соответствующее ограничение выполнено как равенство, а *несвязанное* – как строгое неравенство. Объем имеющихся ресурсов экскаваторами использован не полностью, неиспользованный объем составил 121 маш.-ч., объем трудовых ресурсов и бульдозеров использован полностью. Объем производства балласта песчано-гравийного равен требуемой потребности, щебеночного – на 1 тыс. м^3 меньше. Смысл остальных параметров очевиден.

Отчет по устойчивости

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из двух таблиц (рисунок 5.17).

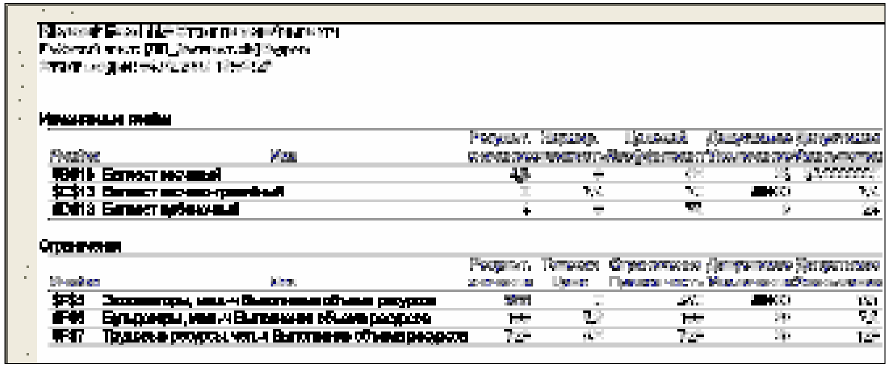


Рисунок 5.17 – Отчет по устойчивости

В столбце *Результирующее значение* таблицы 1 приводится описанный ранее результат решения задачи. Столбец *Нормированная стоимость* показывает на сколько изменится целевая функция при принудительном включении 1 тыс. м^3 балласта в оптимальное решение. Это значит, что если в план потребуется включить 1 тыс. м^3 балласта песчано-гравийного, то при новом плане целевая функция увеличится на 7,5, песчаного и щебеночного – не изменится. Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* показывают, что оптимальное решение задачи не изменится, если при-

быль от реализации балласта песчаного будет изменяться в пределах от 68 – 23,5555556 до 68 + 32, для песчано-гравийного – от 70 – 7,5 до 70 + 1E+30, для щебеночного – от 75 – 24 до 75 + 9.

В столбце *Результирующее значение* таблицы 2 приводятся величины использованных ресурсов. *Теневая цена* отражает коэффициент изменения оптимального значения целевой функции при увеличении правой части ограничений. Это значит, что при увеличении объема ресурсов экскаваторов на единицу оптимальное значение целевой функции не изменится, бульдозеров – увеличится на 5,3, трудовых ресурсов – увеличится на 0,8.

Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* задают допустимый диапазон изменений правой части ограничений, в котором теневая цена сохраняет свое значение. Это значит, что если объем ресурсов экскаваторов будет изменяться в пределах – от 420 – 121 до 420 + 1E+30, бульдозеров – от 100 – 7,5 до 100 + 30, трудовых ресурсов – от 720 – 120 до 720 + 30, то теневая цена сохранит свое значение.

Отчет по пределам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из одной таблицы (рисунок 5.18).

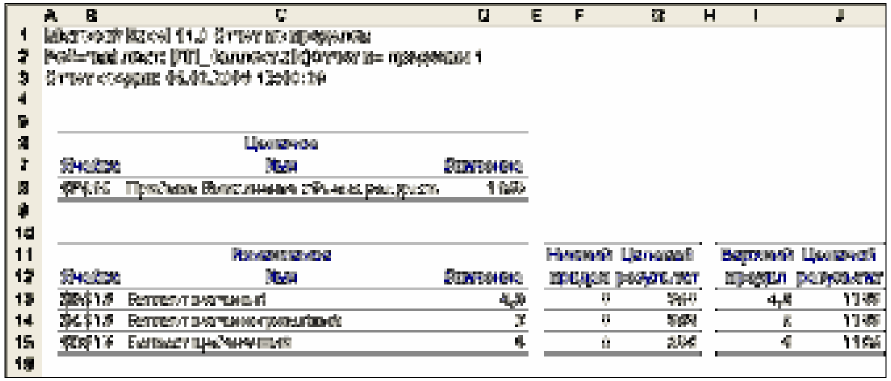


Рисунок 5.18 – Отчет по пределам

Таблица содержит оптимальное значение целевой функции, а также указаны нижние и верхние пределы, в которых может изменяться план загрузки, вошедший в оптимальное решение с соответствующими целевыми результатами.

Целевой результат – это значение целевой функции, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.

5.4 Пример решения задачи прикрепления балластных карьеров к участкам строящейся линии

Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно 35, 60, 85 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно 75, 20, 55, 30 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,4}$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте при минимальных общих затратах на перевозки.

Исходные данные приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	9	6	5	2	$a_1 = 35$
2	11	8	6	7	$a_2 = 60$
3	7	10	4	8	$a_3 = 85$
Спрос потребителей, тыс. м^3	$b_1 = 75$	$b_2 = 20$	$b_3 = 55$	$b_4 = 30$	180 / 180

Суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, что составляет 180 тыс. м^3 (т. е. выполняется условие общего баланса $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$). Следовательно, данная задача является задачей закрытого типа.

Р е ш е н и е. Математическую модель транспортной задачи сформулируем следующим образом. Требуется найти план перевозок

$$X = \|x_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

при ограничениях:

на мощности балластных карьеров:

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 35; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 60; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 85; \end{aligned}$$

на потребности участков строящейся линии в балласте, которые должны быть полностью удовлетворены:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=75; \qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}=20;$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=55; \qquad x_{14}+x_{24}+x_{34}=30;$$

условия неотрицательности, исключающие обратные перевозки,

$$x_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,3};\quad j=\overline{1,4}$$

и чтобы суммарные затраты на перевозку от поставщиков к потребителям были минимальными:

$$z = 9\,x_{11} + 6\,x_{12} + 5x_{13} + 2\,x_{14} + 11\,x_{21} + 8\,x_{22} + 6x_{23} +$$
$$+ 7\,x_{24} + 7x_{31} + 10x_{32} + 4x_{33} + 8\,x_{34}. \to \min.$$

Для решения задачи с помощью табличного редактора Microsoft Excel необходимо:

1) создать форму для ввода исходных данных задачи и ввести их;

2) сформировать на рабочем листе Excel элементы математической модели и целевой функции, то есть ввести расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений;

3) настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее;

4) выполнить анализ найденного решения.

Выполнение:

1 Создадим форму для исходных данных (рисунок 5.19).

2 Введем расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений (рисунок 5.20).

Для целевой функции зарезервирована ячейка G17, для переменных x_{ij} – ячейки B12:E12, B13:E13, B14:E14 ($B$12:$E$14), в них будут занесены результаты решения задачи.

Для вычисления значения целевой функции, минимизирующей стоимость всех перевозок, в ячейку G17 запишем формулу

= СУММПРОИЗВ(B4:E6;B12:E14).

Рисунок 5.19 – Исходные данные

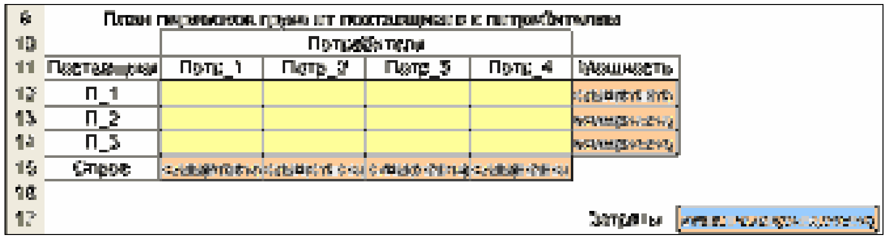


Рисунок 5.20 – Ввод расчетных формул

В ячейки F12, F13, F14 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений на мощность поставщиков:

- поставщик 1:
= СУММ(B12:E12);
- поставщик 2:
= СУММ(B13:E13);
- поставщик 3:
= СУММ(B14:E14).

В ячейки B15, C15, D15, E15 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений на спрос потребителей:

- потребитель 1:
= СУММ (B12:B14);
- потребитель 1:
= СУММ (C12:C14);
- потребитель 1:
= СУММ (D12:D14);
- потребитель 1:
= СУММ (E12:E14).

3 Настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее.
Выберем команду: *Сервис → Поиск решения* (рисунок 5.21).

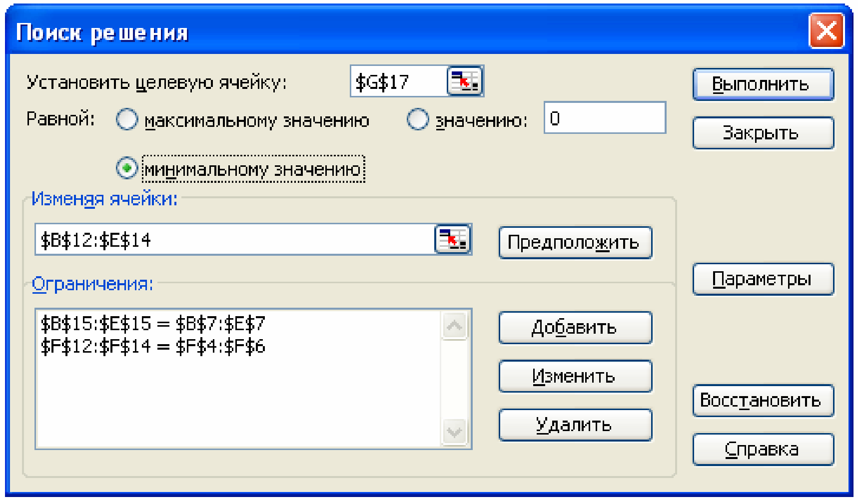


Рисунок 5.21 – Настройка надстройки *Поиск решения*

В диалоговом окне *Поиск решения* требуется ввести:

а) адрес ячейки G17 целевой функции;

б) переключатель в группе *Равной* поставить на минимизацию – *Минимальное значение*;

в) указать диапазоны изменяемых ячеек в поле *Изменяя ячейки*: $B$12:$E$14;

г) указать ограничения в поле *Ограничения:*

- укажем уравнения-ограничения на мощности поставщиков: $F$12:$F$14 = $F$4:$F$6;
- укажем уравнения-ограничения на спрос потребителей: $B$15:$E$15 = $B$7:$E$7;
- укажем требования неотрицательности переменных.

В диалоговом окне *Поиск решения* (см. рисунок 5.21) выберем *Параметры*. В появившемся окне *Параметры поиска решения* (рисунок 5.22) требуется установить курсором *Неотрицательные значения*;

д) в окне *Параметры поиска решения* (см. рисунок 5.22) также требуется установить курсором вид математической модели задачи – *Линейная модель*. Далее нажать *OK* (см. рисунок 5.22), а затем *Выполнить* (см. рисунок 5.21).

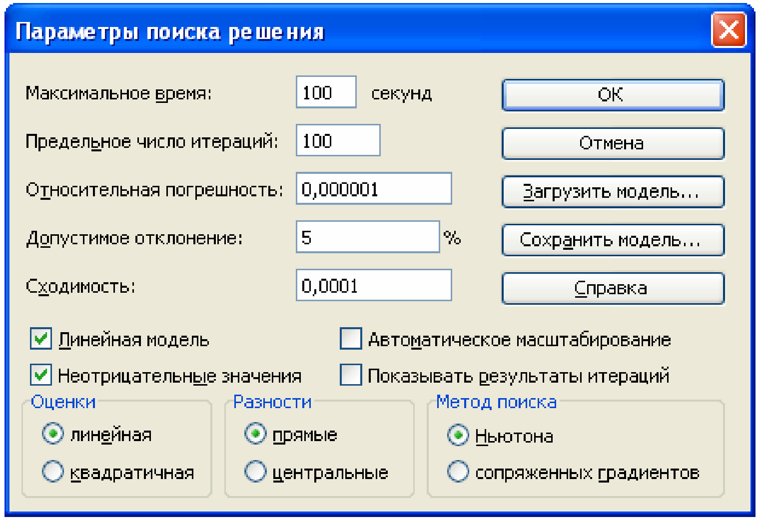


Рисунок 5.22 – Настройка окна *Параметры поиска решения*

После нажатия кнопки *Выполнить* на экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения*. В данном диалоговом окне сделан вывод о том, что найдено оптимальное решение (рисунок 5.23).

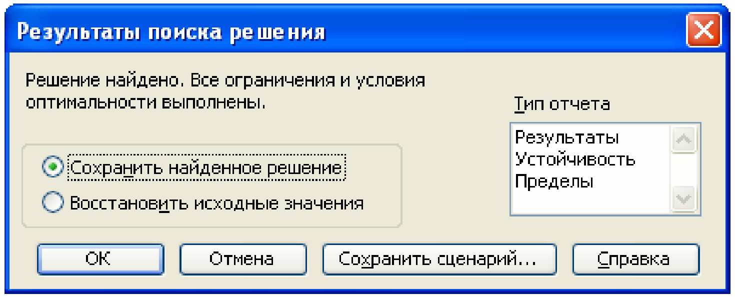


Рисунок 5.23 – Получение результатов поиска решений

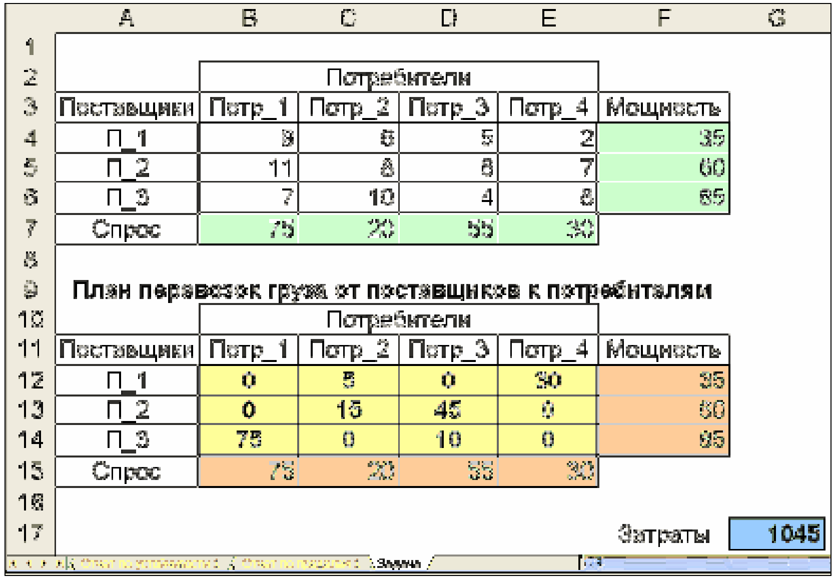
Далее необходимо определить, следует ли сохранять найденное решение

и какие типы отчетов следует создать и поместить в рабочую книгу.

При сохранении результатов поиска решений нужно помнить, что если изменяемая ячейка содержала формулу, то она будет заменена значением.

Для создания отчета необходимо выделить нужный тип отчета и нажать кнопку *OK*. Чтобы выделить несколько типов отчетов, щелкните на названиях типов отчетов, удерживая нажатой клавишу *Ctrl*. Каждый отчет Excel помещает на отдельном рабочем листе. При этом в книгу слева от ярлычка рабочего листа добавляются ярлычки новых отчетов.

В результате выполнения программы *Поиск решения* получим на экране в ячейках B12:E14 оптимальный план перевозок, а в ячейке G17 – минимальную общую стоимость перевозок (рисунок 5.24).



	Потребители				
Поставщики	Потр_1	Потр_2	Потр_3	Потр_4	Мощность
П_1	3	6	5	2	35
П_2	11	8	6	7	60
П_3	7	10	4	8	85
Спрос	75	20	55	30	

План перевозок груза от поставщиков к потребителям

	Потребители				
Поставщики	Потр_1	Потр_2	Потр_3	Потр_4	Мощность
П_1	0	5	0	30	35
П_2	0	15	45	0	60
П_3	75	0	10	0	85
Спрос	75	20	55	30	

Затраты 1045

Рисунок 5.24 – Решение задачи

Таким образом, оптимальный план перевозок

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 45 & 0 \\ 75 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане $z(X^*) = 1045$ ден. ед.

Вывод. Для того чтобы общие затраты на перевозки были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана X^*. В этом случае суммарные затраты будут минимальны и составят 1045 ден. ед.

4 Анализ найденного решения.

Диалоговое окно *Результаты поиска решения* (см. рисунок 5.23) сообщает о завершении поиска. То, что программа *Поиск решения* завершила работу, не означает, что она нашла оптимальное решение. Поэтому всегда нужно читать сообщение, отображаемое в верхней части данного окна. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне *Результаты поиска решения* должно присутствовать два ключевых предложения:

- *Решение найдено*.

- *Все ограничения и условия оптимальности выполнены*.

Если хотя бы одного из этих предложений нет, программе не удалось оптимизировать модель.

Отчет по результатам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из трех таблиц (рисунок 5.25).

Таблица 1 приводит сведения о целевой функции. В столбце *Исходное значение* приведены значения целевой функции до начала вычислений – 0, а в столбце *Результат* – значение целевой функции в оптимальном решении – 1045.

Таблица 2 приводит значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи.

Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи. В столбце *Формула* – приведены ограничения в том виде, в котором они были введены в диалоговом окне *Поиск решения*, *Значение* – приведены величины использованного ресурса, *Разница* – показано количество неиспользованного ресурса (резерв), *Статус* – определяет, как выполнены ограничения на оптимальном плане, для ограничений в виде неравенств: *Связанное* – означает, что соответствующее ограничение выполнено как равенство, а *несвязанное* – как строгое неравенство. Смысл остальных параметров очевиден.

Отчет по устойчивости

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из двух таблиц (рисунок 5.26).

В столбце *Результирующее значение* таблицы 1 приводятся значения искомых переменных. Столбец *Нормированная стоимость* показывает, на какое значение можно уменьшить стоимость перевозки, чтобы было получено эквивалентное оптимальное решение. Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* показывают, что если стоимость перевозки от первого поставщика к первому потребителю будет изменяться в пределах от 9 – 2 до 9 + 1E+30, от первого поставщика ко второму потребителю – от 6 – 3

до 6 + 1, далее аналогично, то оптимальный план перевозок не изменится.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Transp_bal_min.xls]Задача
Отчет создан: 05.02.2009 15:38:45

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$G$17	Затраты	0	1045

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$12	П_1 Потр_1	0	0
$C$12	П_1 Потр_2	0	5
$D$12	П_1 Потр_3	0	0
$E$12	П_1 Потр_4	0	30
$B$13	П_2 Потр_1	0	0
$C$13	П_2 Потр_2	0	15
$D$13	П_2 Потр_3	0	45
$E$13	П_2 Потр_4	0	0
$B$14	П_3 Потр_1	0	75
$C$14	П_3 Потр_2	0	0
$D$14	П_3 Потр_3	0	10
$E$14	П_3 Потр_4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$B$15	Спрос Потр_1	75	$B$15=$B$7	не связан.	0
$C$15	Спрос Потр_2	20	$C$15=$C$7	не связан.	0
$D$15	Спрос Потр_3	55	$D$15=$D$7	не связан.	0
$E$15	Спрос Потр_4	30	$E$15=$E$7	не связан.	0
$F$12	П_1 Мощность	35	$F$12=$F$4	не связан.	0
$F$13	П_2 Мощность	60	$F$13=$F$5	не связан.	0
$F$14	П_3 Мощность	85	$F$14=$F$6	не связан.	0

Отчет по результатам 1 / Отчет по устойчивости 1 / Отчет по пре

Рисунок 5.25 – Отчет по результатам

В столбце *Результирующее значение* таблицы 2 приводятся величины использования ресурсов поставщиков и потребителей. *Теневая цена* для задачи открытого типа отражает коэффициент изменения оптимального значения целевой функции при увеличении правой части ограничений, то есть показывает изменение общих затрат (отрицательные значения – уменьшение затрат, положительные – увеличение, нуль – не изменяются) при увеличении дефицитных ресурсов на единицу. Столбцы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение* задают допустимый диапазон изменений правой части ограничений, в котором теневая цена сохраняет свое значение. Рассматриваемая задача является задачей закрытого типа.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Transp_bal_min.xls]Задача
Отчет создан: 05.02.2009 15:38:46

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$12	П_1 Потр_1	0	2	9	1E+30	2
$C$12	П_1 Потр_2	5	0	6	1	3
$D$12	П_1 Потр_3	0	1	5	1E+30	1
$E$12	П_1 Потр_4	30	0	2	3	1E+30
$B$13	П_2 Потр_1	0	2	11	1E+30	2
$C$13	П_2 Потр_2	15	0	8	3	1
$D$13	П_2 Потр_3	45	0	6	1	4
$E$13	П_2 Потр_4	0	3	7	1E+30	3
$B$14	П_3 Потр_1	75	0	7	2	1E+30
$C$14	П_3 Потр_2	0	4	10	1E+30	4
$D$14	П_3 Потр_3	10	0	4	4	2
$E$14	П_3 Потр_4	0	6	8	1E+30	6

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$15	Спрос Потр_1	75	3	75	10	0
$C$15	Спрос Потр_2	20	2	20	45	0
$D$15	Спрос Потр_3	55	0	55	0	1E+30
$E$15	Спрос Потр_4	30	-2	30	5	0
$F$12	П_1 Мощность	35	4	35	0	5
$F$13	П_2 Мощность	60	6	60	0	45
$F$14	П_3 Мощность	85	4	85	0	10

Отчет по результатам 1 | Отчет по устойчивости 1 | Отчет по пределам 1 | Задача

Рисунок 5.26 – Отчет по устойчивости

Отчет по пределам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из одной таблицы (рисунок 5.27).

Таблица содержит оптимальное значение целевой функции, а также указаны нижние и верхние пределы, в которых может изменяться план перевозок, вошедший в оптимальное решение с соответствующими целевыми результатами.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Transp_bal_min.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: [illegible]

Ячейка	Целевая Имя	Значение
[illegible]	Затраты	1045

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$12	П_1 Потр_1	0	0	1045	0	1045
$C$12	П_1 Потр_2	5	5	1045	5	1045
$D$12	П_1 Потр_3	0	0	1045	0	1045
$E$12	П_1 Потр_4	30	30	1045	30	1045
$B$13	П_2 Потр_1	0	0	1045	0	1045
$C$13	П_2 Потр_2	15	15	1045	15	1045
$D$13	П_2 Потр_3	45	45	1045	45	1045
$E$13	П_2 Потр_4	0	0	1045	0	1045
$B$14	П_3 Потр_1	75	75	1045	75	1045
$C$14	П_3 Потр_2	0	0	1045	0	1045
$D$14	П_3 Потр_3	10	10	1045	10	1045
$E$14	П_3 Потр_4	[illegible]	[illegible]	1045	[illegible]	1045

Отчет по устойчивости 1 | Отчет по пределам 1 | Задача

Рисунок 5.27 – Отчет по пределам

Нижний предел – это наименьшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксированы (равны оптимальным значениям).

Верхний предел – это наибольшее значение, которое может иметь изменяемая ячейка (план выгрузки на грузовом фронте) при условии, что ограничения еще выполняются, а значения остальных изменяемых ячеек фиксировании (равны оптимальным значениям).

Целевой результат – это значение целевой функции, когда значение изменяемой ячейки равно ее нижнему или верхнему пределу.

5.5 Пример решения задачи о назначениях (задача целочисленного линейного программирования)

Для дорог республиканского значения с облегченным покрытием межремонтный срок службы составляет 10 лет. К истекшему сроку ДРСУ (Дорожно-ремонтное строительное управление) запланировало произвести капитальный ремонт автомагистрали. Для этого был объявлен тендер на проведение ремонтных работ, в ходе которого было отобрано 5 строительных организаций-подрядчиков (A_i). Каждая организация дала оценку времени в сутках t_{ij} ($i=\overline{1,5}$; $j=\overline{1,4}$), требующегося ей для выполнения всех работ (B_j): B_1 – уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника), B_2 – ремонт искусственных сооружений, B_3 – укрепление земляного полотна, B_4 – косметический ремонт дорожной одежды. Эти оценки приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – **Выполнение комплекса ремонтных работ организациями**

Организация	Комплекс ремонтных работ			
	Уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника) B_1	Ремонт искусственных сооружений B_2	Укрепление земляного полотна B_3	Косметический ремонт дорожной одежды B_4
	Время выполнения, сут			
A_1	30	70	50	80
A_2	10	20	10	30
A_3	35	35	–	40
A_4	10	18	10	12
A_5	15	20	15	10

Качество выполнения организациями работ одинаковое. Организации, занятые выполнением заказа, потребовали оплату за одни сутки в размере: 1 ден. ед. – первая организация, 3 ден. ед. – вторая, 2 ден. ед. – третья, 5 ден. ед. – четвертая, 4 ден. ед. – пятая. Организация № 3 не выполняет работы, связанные с укреплением земляного полотна. Какая из организаций не получит заказ? Как ДРСУ следует распределить работы между организациями, чтобы минимизировать общие издержки капитального ремонта автомагистрали?

Р е ш е н и е. Определим ***тип задачи о назначениях***. Количество исполнителей равно пяти, а количество работ – четырем, следовательно, данная задача является задачей открытого типа. Преобразуем ее к задаче закрытого типа, введем фиктивную работу B_5.

Построим математическую модель задачи**.** Обозначим через x_{ij} – назначение i-го исполнителя на j-й вид работ, t_{ij} и c_{ij} – время и стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем соответственно.

Математическая модель задачи примет вид:

найти план назначений $X=\left\|x_{ij}\right\|=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$

при следующих ограничениях:

- каждый исполнитель назначается только на одну работу

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,5};$$

- каждая работа выполняется только одним исполнителем

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,5};$$

условие целочисленности

$$x_{ij}\in\{0;1\},\ \ i,j=\overline{1,5},$$

где переменные $x_{ij}=1$, если j-й вид работ выполняется i-м исполнителем, $x_{ij}=0$ – в остальных случаях,

и чтобы общие издержки капитального ремонта автомагистрали были минимальными:

$$z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}\rightarrow \min.$$

Стоимость выполнения работ

$c_{ij}=t_{ij}c'_{ij},\ i,j=\overline{1,5}$,

где c'_{ij} – стоимость выполнения j-й работы i-м исполнителем в сутки.

Стоимость выполнения фиктивной работы B_5 исполнителями равна нулю, то есть элементы c_{15}, c_{25}, c_{35}, c_{45}, c_{55} матрицы стоимостей равны нулю. Так как исполнитель A_3 не выполняет работу B_3, то элемент c_{33} матрицы стоимостей можно полагать очень большим (M). Например, примем $M=1000$.

Составим матрицу стоимостей выполнения работ:

$$C = \left\| c_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 50 & 80 & 0 \\ 30 & 60 & 30 & 90 & 0 \\ 70 & 70 & 1000 & 80 & 0 \\ 50 & 90 & 50 & 60 & 0 \\ 60 & 80 & 60 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи с помощью табличного редактора Microsoft Excel необходимо:

1) создать форму для ввода исходных данных задачи и ввести их;

2) сформировать на рабочем листе Excel элементы математической модели и целевой функции, то есть ввести расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений;

3) настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее;

4) выполнить анализ найденного решения.

Выполнение:

1 Создадим форму для исходных данных и введем их (рисунок 5.28).

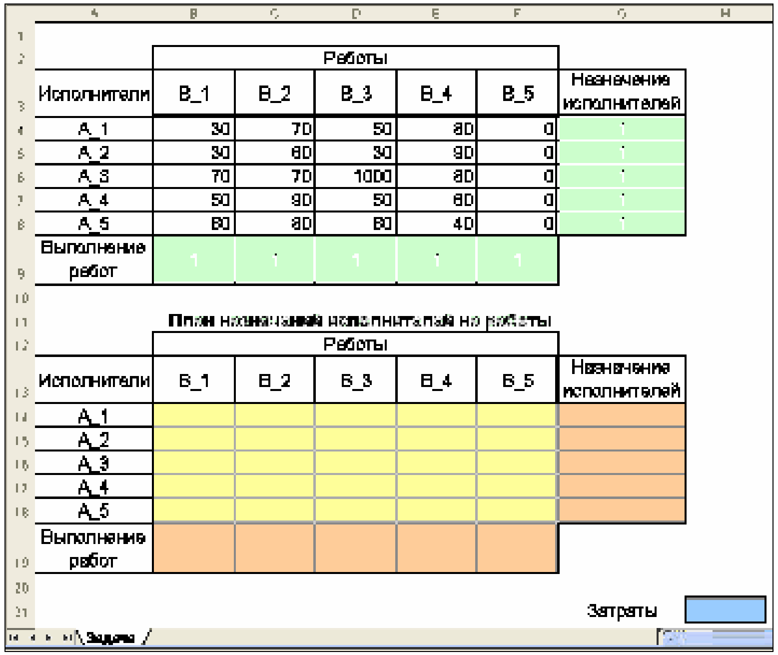


Рисунок 5.28 – Исходные данные

2 Введем расчетные формулы для целевой функции и левых частей системы ограничений (рисунок 5.29).

Для целевой функции зарезервирована ячейка H21, для переменных x_{ij} – ячейки B14:F14, B15:F15, B16:F16, B17:F17, B18:F18 ($B$14:$F$18), в них будут занесены результаты решения задачи.

Для вычисления значения целевой функции, минимизирующей стоимость выполнения всех работ, в ячейку H21 запишем формулу:

= СУММПРОИЗВ(B4:F8;B14:F18).

В ячейки G14, G15, G16, G17, G18 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений по исполнителям, которые назначаются только на одну работу:

- назначение исполнителя A_1:
= СУММ (B14:F14);
- назначение исполнителя A_2:
= СУММ (B15:F15);
- назначение исполнителя A_3:
= СУММ (B15:F15);
- назначение исполнителя A_4:
= СУММ (B15:F15);
- назначение исполнителя A_5:
= СУММ (B15:F15).

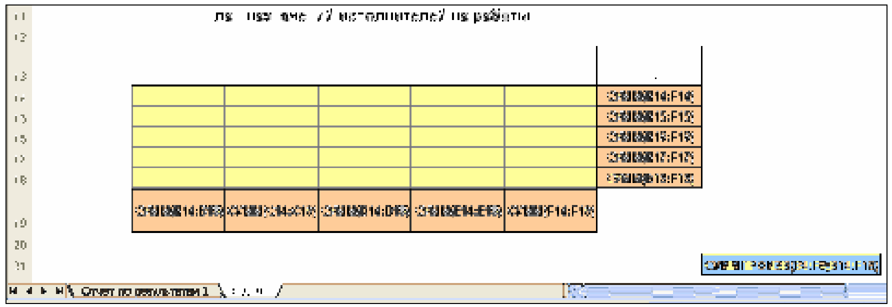


Рисунок 5.29 – Ввод расчетных формул

В ячейки B19, C19, D19, E19, F19 введем формулы для вычисления левых частей уравнений-ограничений по выполнению работ, которые выполняются только одним исполнителем:

- выполнение работы B_1:
= СУММ (B14:B18);
- выполнение работы B_1:
= СУММ (C14:C18);

- выполнение работы B_1:
= СУММ (D14:D18);
- выполнение работы B_1:
= СУММ (E14:E18);
- выполнение работы B_1:
= СУММ (F14:F18).

3 Настроить надстройку *Поиск решения* и выполнить ее.

Выберем команду: *Сервис → Поиск решения* (рисунок 5.30).

В диалоговом окне *Поиск решения* требуется ввести:

а) адрес ячейки H21 целевой функции;

б) переключатель в группе *Равной* поставить на минимизацию – *Минимальному значению*;

в) указать диапазоны изменяемых ячеек в поле *Изменяя ячейки*:
$B$14:$F$18;

г) указать ограничения в поле *Ограничения:*

- укажем уравнения-ограничения по назначению исполнителей на работы:
$G$14:$G$18 = $G$4:$G$8;
- укажем уравнения-ограничения по выполнению работ:
$B$19:$F$19 = $B$9:$F$9;
- укажем условие целочисленности переменных рассматриваемой задачи – задачи с *булевыми* переменными (двоичными), то есть принимающими значения ноль или единица:
$B$14:$F$18 = двоичное ($B$14:$F$18 двоич двоичное);

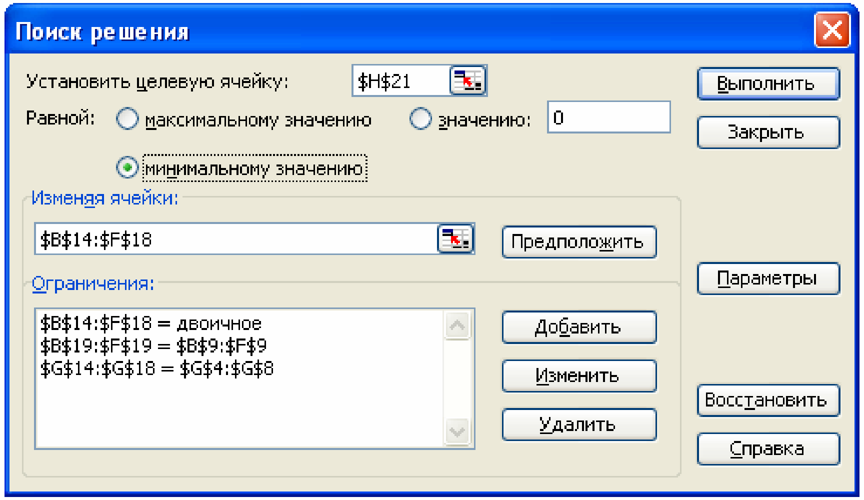


Рисунок 5.30 – Настройка надстройки *Поиск решения*

д) указать вид математической модели задачи:

В диалоговом окне *Поиск решения* (см. рисунок 5.30) выберем *Параметры*.

В появившемся окне *Параметры поиска решения* (рисунок 5.31) требуется установить курсором вид математической модели задачи – *Линейная модель*. Далее нажать *ОК* (см. рисунок 5.31), а затем *Выполнить* (см. рисунок 5.30).

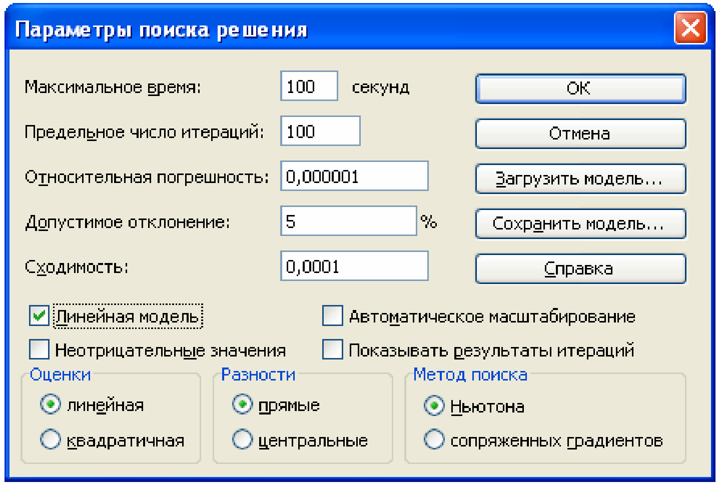


Рисунок 5.31 – Настройка окна *Параметры поиска решения*

После нажатия кнопки *Выполнить*, на экране появится диалоговое окно *Результаты поиска решения*. В данном диалоговом окне сделан вывод о том, что найдено оптимальное решение (рисунок 5.32).

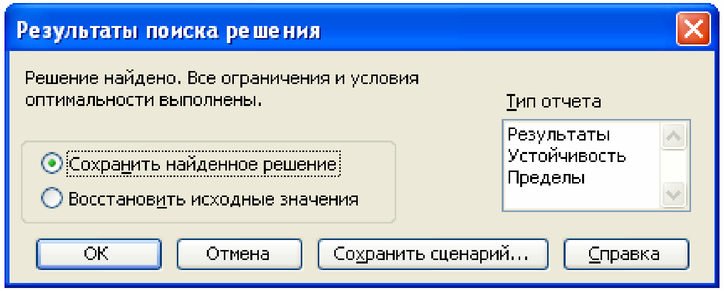


Рисунок 5.32 – Получение результатов поиска решений

Диалоговое окно *Результаты поиска решения* сообщает о завершении поиска. То, что программа *Поиск решения* завершила работу, не означает, что она нашла оптимальное решение. Поэтому всегда нужно читать сообщение, отображаемое в верхней части данного окна. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне *Результаты поиска решения* должно присутствовать два ключевых предложения:

- *Решение найдено*.

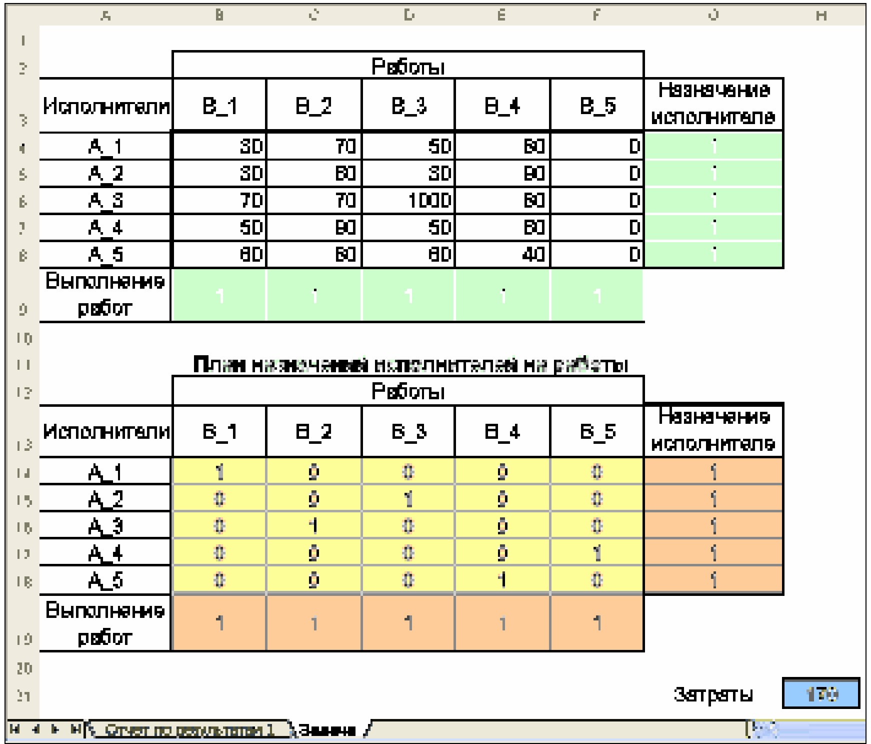
- *Все ограничения и условия оптимальности выполнены*.

Если хотя бы одного из этих предложений нет, программе не удалось оптимизировать модель.

Далее необходимо определить, следует ли сохранять найденное решение и какие типы отчетов следует создать и поместить в рабочую книгу.

При сохранении результатов поиска решений нужно помнить, что если изменяемая ячейка содержала формулу, то она будет заменена значением.

В результате выполнения программы *Поиск решения* получим на экране в ячейках B14:F18 оптимальный план назначений исполнителей на работы, а в ячейке H21 – минимальную общую стоимость выполнения всех работ (рисунок 5.33).



	Работы					
Исполнители	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Назначение исполнителя
A_1	30	70	50	80	0	1
A_2	30	80	30	80	0	1
A_3	70	70	1000	80	0	1
A_4	50	80	50	80	0	1
A_5	80	80	80	40	0	1
Выполнение работ	1	1	1	1	1	

План назначений исполнителей на работы

	Работы					
Исполнители	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Назначение исполнителя
A_1	1	0	0	0	0	1
A_2	0	0	1	0	0	1
A_3	0	1	0	0	0	1
A_4	0	0	0	0	1	1
A_5	0	0	0	1	0	1
Выполнение работ	1	1	1	1	1	

Затраты 170

Отчет по результатам 1 | Задача

Рисунок 5.33 – Решение задачи

Таким образом, оптимальный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значение целевой функции при оптимальном плане

$$z^* = z\left(X^*\right) = 170 \text{ ден. ед.}$$

Вывод. Для того чтобы общие издержки капитального ремонта ДРСУ автомагистрали были минимальными, рекомендуется придерживаться полученного оптимального плана назначений: первая организация выполняет уборку полосы отвода, вторая – укрепление земляного полотна, третья – ремонт искусственных сооружений, пятая – косметический ремонт дорожной одежды. Четвертой организации будет отказано ДРСУ в выполнении заказа на проведение ремонтных работ. В этом случае общие издержки будут минимальны и составят 170 ден. ед.

4 Анализ найденного решения.

Для создания отчета необходимо выделить нужный тип отчета и нажать кнопку *ОК*. Чтобы выделить несколько типов отчетов, щелкните на названиях типов отчетов, удерживая нажатой клавишу *Ctrl* (см. рисунок 5.32). Каждый отчет Excel помещает на отдельном рабочем листе. При этом в книгу слева от ярлычка рабочего листа добавляются ярлычки новых отчетов.

Хотя диалоговое окно *Результаты поиска решения* (см. рисунок 5.32), которое появилось после успешной оптимизации модели, содержит опцию, вроде бы позволяющую вывести отчет по устойчивости и пределам, но после выбора этой опции появляется окно, сообщающее о том, что отчет по устойчивости и пределам не применим для задач с целочисленными переменными (рисунок 5.34). Происходит это вследствие того, что в процессе решения средство *Поиск решения* не собирает информацию о чувствительности оптимального значения целевой функции к изменениям правых частей ограничений или к изменениям коэффициентов целевой функции. Это не означает, что изменения правых частей ограничений или коэффициентов целевой функции не влияют на решение задачи. В действительности решения задач ЦЛП могут быть чрезвычайно чувствительны к изменениям значений параметров модели.

При решении этой или любой другой задачи ЦЛП с помощью средства *Поиск решения* информация о чувствительности не предоставляется. Такую информацию можно получить лишь путем повторной оптимизации модели ЦЛП с новыми значениями параметров.

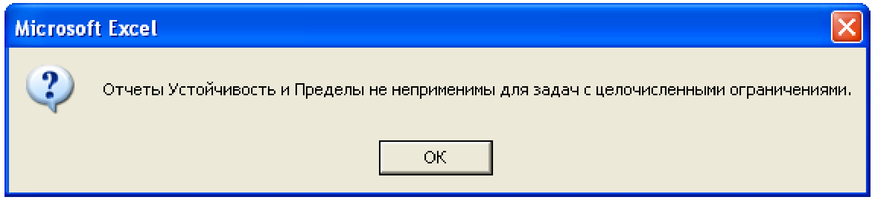


Рисунок 5.34 – Отчет о чувствительности

Отчет по результатам

Данный отчет находится на отдельном листе. Отчет состоит из трех таблиц (рисунок 5.35).

а)

	A	B	C	D	E
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам				
2	Рабочий лист: [O_nazn.xls]Задача				
3	Отчет создан: 05.02.2009 14:45:44				
4					
5					
6	Целевая ячейка (Минимум)				
7		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
8		$H$21	Затраты	0	170
9					
10					
11	Изменяемые ячейки				
12		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
13		$B$14	A_1 B_1	0	1
14		$C$14	A_1 B_2	0	0
15		$D$14	A_1 B_3	0	0
16		$E$14	A_1 B_4	0	0
17		$F$14	A_1 B_5	0	0
18		$B$15	A_2 B_1	0	0
19		$C$15	A_2 B_2	0	0
20		$D$15	A_2 B_3	0	1
21		$E$15	A_2 B_4	0	0
22		$F$15	A_2 B_5	0	0
23		$B$16	A_3 B_1	0	0
24		$C$16	A_3 B_2	0	1
25		$D$16	A_3 B_3	0	0
26		$E$16	A_3 B_4	0	0
27		$F$16	A_3 B_5	0	0
28		$B$17	A_4 B_1	0	0
29		$C$17	A_4 B_2	0	0
30		$D$17	A_4 B_3	0	0
31		$E$17	A_4 B_4	0	0
32		$F$17	A_4 B_5	0	1
33		$B$18	A_5 B_1	0	0
34		$C$18	A_5 B_2	0	0
35		$D$18	A_5 B_3	0	0
36		$E$18	A_5 B_4	0	1
37		$F$18	A_5 B_5	0	0

Отчет по результатам 1 / Задача

Рисунок 5.35 (начало) – Отчет по результатам

б)

	A	B	C	D	E	F	G
40	Ограничения						
41		Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
42		$B$19	Выполнение работ В_1	1	[illegible]	не связан.	0
43		$C$19	Выполнение работ В_2	1	[illegible]	не связан.	0
44		$D$19	Выполнение работ В_3	1	[illegible]	не связан.	0
45		$E$19	Выполнение работ В_4	1	[illegible]	не связан.	0
46		$F$19	Выполнение работ В_5	1	[illegible]	не связан.	0
47		$G$14	А_1 Назначение исполнителей	1	[illegible]	не связан.	0
48		$G$15	А_2 Назначение исполнителей	1	[illegible]	не связан.	0
49		$G$16	А_3 Назначение исполнителей	1	[illegible]	не связан.	0
50		$G$17	А_4 Назначение исполнителей	1	[illegible]	не связан.	0
51		$G$18	А_5 Назначение исполнителей	1	[illegible]	не связан.	0
52		$B$14	А_1 В_1	1	$B$14=двоич	связанное	0
53		$C$14	А_1 В_2	0	$C$14=двоич	связанное	0
54		$D$14	А_1 В_3	0	$D$14=двоич	связанное	0
55		$E$14	А_1 В_4	0	$E$14=двоич	связанное	0
56		$F$14	А_1 В_5	0	$F$14=двоич	связанное	0
57		$B$15	А_2 В_1	0	$B$15=двоич	связанное	0
58		$C$15	А_2 В_2	0	$C$15=двоич	связанное	0
59		$D$15	А_2 В_3	1	$D$15=двоич	связанное	0
60		$E$15	А_2 В_4	0	$E$15=двоич	связанное	0
61		$F$15	А_2 В_5	0	$F$15=двоич	связанное	0
62		$B$16	А_3 В_1	0	$B$16=двоич	связанное	0
63		$C$16	А_3 В_2	1	$C$16=двоич	связанное	0
64		$D$16	А_3 В_3	0	$D$16=двоич	связанное	0
65		$E$16	А_3 В_4	0	$E$16=двоич	связанное	0
66		$F$16	А_3 В_5	0	$F$16=двоич	связанное	0
67		$B$17	А_4 В_1	0	$B$17=двоич	связанное	0
68		$C$17	А_4 В_2	0	$C$17=двоич	связанное	0
69		$D$17	А_4 В_3	0	$D$17=двоич	связанное	0
70		$E$17	А_4 В_4	0	$E$17=двоич	связанное	0
71		$F$17	А_4 В_5	1	$F$17=двоич	связанное	0
72		$B$18	А_5 В_1	0	$B$18=двоич	связанное	0
73		$C$18	А_5 В_2	0	$C$18=двоич	связанное	0
74		$D$18	А_5 В_3	0	$D$18=двоич	связанное	0
75		$E$18	А_5 В_4	1	$E$18=двоич	связанное	0
76		$F$18	А_5 В_5	0	$F$18=двоич	связанное	0

Отчет по результатам 1 / Задача

Рисунок 5.35 (окончание)

Таблица 1 (см. рисунок 5.35, *а*) приводит сведения о целевой функции. В столбце *Исходное значение* приведены значения целевой функции до начала вычислений – 0, а в столбце *Результат* – значение целевой функции в оптимальном решении – 170.

Таблица 2 (см. рисунок 5.35, *а*) приводит значения искомых переменных, полученных в результате решения задачи.

Таблица 3 (см. рисунок 5.35, *б*) показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи. В столбце *Формула* – приведены ограничения в том виде, в котором они были введены в диалоговом окне *Поиск решения*, *Значение* – приведены величины использованного ресурса, *Разница* – показано количество неиспользованного ресурса, *Статус* – определяет, как выполнены ограничения на оптимальном плане, для ограничений в виде неравенств: *Связанное* – означает, что соответствующее ограничение выполнено как равенство, а *несвязанное* – как строгое неравенство. Смысл остальных параметров очевиден.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)
Учебная программа по дисциплине «Исследование операций»

Введение. Предмет и задачи исследования операций. Постановка задачи оптимизации. Допустимое и оптимальное решения.

Линейное программирование. Постановка задачи линейного программирования. Построение математической модели задачи ЛП. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП. Решение задачи ЛП табличным симплексным методом.

Транспортная задача линейного программирования. Постановка транспортной задачи в матричной форме. Математическая модель ТЗ. Закрытая и открытая модели ТЗ. Понятия допустимого и оптимального решения, вырожденного и невырожденного плана. Решение ТЗ в матричной форме. Методы построения начального базисного плана. Метод потенциалов. Определение оптимального плана усложненных транспортных задач.

Состязательные задачи. Элементы теории матричных игр. Математические понятия игры, платёжной матрицы, чистых, смешанных и оптимальных стратегий, функции выигрыша, цены игры. Решение матричной игры методом сведения к задаче ЛП.

Модели на графах. Понятия графа, сети, пропускной способности рёбер, потока, насыщенного и ненасыщенного ребер, мощности потока, разреза сети, пропускной способности разреза, потока через разрез. Свойства потока. Задача о максимальном потоке. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм построения максимального потока.

Модели сетевого планирования. Понятия: сетевой график, работа, действительная и фиктивная работа, работа-ожидание, событие, начальное событие, промежуточное событие, завершающее событие, путь, полный путь, критический путь. Расчёт параметров сетевого графика. Ранний и поздний сроки свершения событий. Критический срок. Резервы времени событий и работ.

Модели динамического программирования. Особенности задач динамического программирования. Общая постановка задачи динамического программирования. Принципы аддитивности целевой функции и отсутствия последействия. Принцип оптимальности Беллмана. Этапы решения задачи динамического программирования. Основное функциональное уравнение динамического программирования.

Нелинейные модели оптимизации. Основные понятия нелинейного программирования (НП). Особенности задач НП. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи НП. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Идея градиентных методов поиска экстремума.

Модели массового обслуживания. Теория массового обслуживания: предмет и основные понятия. Модели и системы массового обслуживания (СМО). Простейший поток требований и его свойства. Схема простейшей СМО: входящий поток, обслуживающие приборы, дисциплины обслуживания, очереди. Классификация СМО. Методы анализа и исследования СМО.

Управление запасами. Основные понятия теории управления запасами. Систематизация задач управления запасами. Основные модели управления запасами, методика *ABC*-анализа и методика 20/80. Детерминированные модели. Простейшая модель оптимального размера заказа (модель Уилсона). Модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения. Модель планирования оптимального размера заказа (модель с производством). Модель оптимального размера заказа с дефицитом. Модель с количественными скидками.

Имитационное моделирование. Имитационное моделирование и условия его применения. Достоинства и недостатки имитационных моделей. Понятия имитационной модели, модельного времени. Этапы построения имитационной модели. Подготовка исходных данных для имитации. Верификация имитационной модели. Исследование свойств имитационной модели. Описательные и технологические возможности системы моделирования GPSS. Применение имитационного моделирования при исследовании СМО.

Теория принятия решений. Принятие решений в условиях неопределённости и риска. Анализ ситуации принятия решений. Классические критерии принятия решений в условиях неопределённости и риска. Экспертное принятие решений: метод анализа иерархий.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(обязательное)

Варианты заданий к расчетно-графическим и лабораторным работам

Вариант каждой задачи соответствует порядковому номеру студента в журнале. При выполнении каждого задания необходимо записать постановку задачи, подставляя числовые значения в соответствии с номером варианта; при необходимости сделать рисунок и нанести на него все необходимые значения; привести полное решение задачи и сделать вывод.

Задание 1 Задача об оптимальной загрузке машин и механизмов

На звеносборочной базе имеется двухконсольный козловой кран грузоподъемностью до 10 т и стреловой кран с двигателем внутреннего сгорания грузоподъемностью 6–25 т (в зависимости от вылета стрелы). С помощью этих машин за 8 часов необходимо произвести погрузку на платформы r_1 рельсов типа Р50 и r_2 рельсов типа Р65 длиной 25 п.м. Причем, один п.м рельсов типа Р50 имеет массу 50 кг, рельсов типа Р65 – 65 кг.

Двухконсольный козловой кран может погрузить рельсов типа Р50 p_{11} т в час, рельсов типа Р65 – p_{12} т в час. Стреловой кран может погрузить рельсов типа Р50 p_{21} т в час и рельсов типа Р65 – p_{22} т в час.

Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т двухконсольным козловым краном рельсов типа Р50, – c_{11} ден. ед., рельсов типа Р65 – p_{12} ден. ед., стреловым краном рельсов типа Р50 – c_{21} ден. ед., рельсов типа Р65 – c_{22} ден. ед.

Требуется распределить загрузку между грузоподъемными машинами таким образом, чтобы они, работая одинаковое время (единым фронтом), выполнили заданный объем работ, и чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной. Варианты заданий приведены в таблице Б.1.

Требуется:

1 Построить математическую модель задачи.

2 Решить задачу графическим методом.

Таблица Б.1 – **Варианты заданий**

Вариант	r_1	r_2	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}
1	800	700	130	140	150	170	11	12	15	18
2	810	710	135	145	155	175	12	13	16	19
3	820	720	140	150	160	180	13	14	17	20
4	830	730	145	155	165	185	14	15	18	21
5	840	740	150	160	170	190	15	16	19	22
6	850	750	155	165	175	195	16	17	20	23

Окончание таблицы Б.1

Вариант	r_1	r_2	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}
7	860	760	160	170	180	200	17	18	21	24
8	870	770	165	175	185	205	18	19	22	25
9	880	780	170	180	190	210	19	20	23	26
10	890	790	175	185	195	215	20	21	24	27
11	900	800	180	190	200	220	21	22	25	28
12	910	810	185	195	205	225	22	23	26	29
13	920	820	190	200	210	230	23	24	27	30
14	930	830	195	205	215	235	24	25	28	31
15	940	840	200	200	200	240	25	26	29	32
16	600	900	150	160	180	180	8	10	12	14
17	620	920	155	165	185	190	9	11	13	15
18	640	940	160	170	190	200	10	12	14	16
19	660	960	165	175	195	210	11	13	15	17
20	680	980	170	180	200	220	12	14	16	18
21	700	1000	175	185	205	230	13	15	17	19
22	720	1020	180	190	210	240	14	16	18	20
23	740	1040	185	185	195	215	15	17	19	21
24	760	1060	190	190	200	220	16	18	20	22
25	780	1080	195	195	205	225	17	19	21	23
26	800	1100	200	200	210	230	18	20	22	24
27	820	1120	205	205	215	235	19	21	23	25
28	840	1140	210	200	200	240	20	22	24	26
29	860	1160	215	195	185	245	21	23	25	27
30	880	1180	220	190	170	250	22	24	26	28

Задание 2 Задача о добыче и производстве балласта

Для добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного используются следующие виды ресурсов: экскаваторы, бульдозеры и трудовые ресурсы. Объем имеющихся ресурсов, нормы расхода ресурсов для добычи и производства 1 тыс. м^3 балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, а также прибыль от его реализации приведены в таблице Б.2. Потребность в балласте песчано-гравийном не превышает p_1 тыс. м^3, в балласте щебеночном – p_2 тыс. м^3. Определить объемы добычи и производства балласта песчаного, песчано-гравийного и щебеночного, обеспечивающие максимальную прибыль. Исходные данные и варианты заданий приведены в таблицах Б.2–Б.4.

Требуется:

1 Построить математическую модель задачи.

2 Решить задачу табличным симплексным методом ЛП.

Таблица Б.2 – **Исходные данные задачи**

Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3 балласта			Объем ресурсов
	песчаного	песчано-гравийного	щебеночного	
Экскаваторы, маш.-ч	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
Бульдозеры, маш.-ч	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
Трудовые ресурсы, чел.-ч	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Прибыль, тыс. ден. ед.	c_1	c_2	c_3	

Таблица Б.3 – **Варианты заданий**

Вариант	Затраты ресурсов на 1 тыс. м^3								
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{31}
1	20	22	32	6	4	9	30	50	44
2	16	24	32	10	6	9	30	50	50
3	17	27	27	9	4	8	52	34	52
4	22	26	29	8	4	9	53	30	54
5	21	40	27	6	3	7	90	65	55
6	22	39	28	7	3	8	95	65	30
7	23	40	22	6	4	6	92	67	30
8	24	38	24	8	5	10	95	65	60
9	25	40	25	6	6	9	96	69	40
10	26	37	32	7	3	9	90	65	41
11	20	22	32	6	4	8	30	50	42
12	18	24	25	10	6	9	30	50	43
13	16	32	32	9	4	6	40	60	44
14	17	25	32	9	5	9	42	55	50
15	18	32	27	9	6	8	43	60	52
16	19	32	22	9	5	4	44	60	50
17	13	27	24	8	4	6	50	30	50
18	14	29	27	9	5	4	52	30	34
19	15	27	26	7	4	4	54	32	30
20	16	28	40	8	6	3	55	30	65
21	20	22	39	6	4	3	30	50	65
22	20	24	40	10	6	4	30	50	67
23	17	25	38	9	5	5	60	55	65
24	17	32	40	9	5	6	40	60	69
25	19	32	37	8	4	3	41	60	65
26	16	25	22	9	5	4	42	55	50
27	20	32	24	6	6	6	43	60	50
28	18	32	32	9	5	4	44	60	60
29	14	27	25	8	4	5	50	30	55
30	13	29	32	5	5	6	52	30	60

Таблица Б.4 – **Варианты заданий**

Вариант	Объем ресурсов			Прибыль		
	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
1	250	72	450	20	30	25
2	270	80	500	15	15	11
3	230	50	650	6	10	8
4	220	52	620	11	8	10
5	340	70	800	5	8	9
6	340	73	780	5	9	4
7	330	70	820	6	10	7
8	320	72	800	7	9	9
9	340	73	840	5	8	6
10	360	70	800	8	12	9
11	250	72	450	40	30	35
12	270	80	500	18	15	17
13	290	80	530	10	12	11
14	300	82	550	8	6	8
15	310	84	560	8	6	7
16	320	86	550	10	12	15
17	230	50	610	6	10	12
18	240	52	600	8	5	6
19	230	50	620	6	10	8
20	250	54	700	7	6	5
21	250	72	450	20	25	22
22	270	80	500	18	28	30
23	290	80	550	8	6	9
24	290	80	550	8	6	5
25	290	80	530	10	12	13
26	300	82	550	8	6	7
27	310	84	560	8	6	5
28	320	86	550	10	12	13
29	230	50	610	6	10	8
30	240	52	600	8	5	7

Задание 3 **Задача прикрепления балластных карьеров к участкам строящейся линии**

Строящаяся линия разбита на четыре различных по протяженности участка, на которых производятся балластировочные работы. Имеются три балластных карьера, мощность которых достаточна для покрытия общей потребности участков в балласте и составляет соответственно a_1, a_2, a_3 тыс. м^3 балласта. Потребность каждого участка в балласте равна соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 тыс. м^3. Карьеры и участки линии связаны между собой транспортной сетью. На основании этой сети установлены расстояния от каждого карьера до любого участка сети, условия перевозки и соответственно затраты на перевозку тыс. м^3 балласта c_{ij} ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$).

Требуется прикрепить балластные карьеры к участкам линии таким образом, чтобы полностью удовлетворить потребности участков в балласте при минимальных общих затратах на перевозки. Исходные данные и варианты заданий приведены в таблицах Б.5 и Б.6.

Таблица Б.5 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители				Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1	2	3	4	
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
Спрос потребителей, тыс. м^3	b_1	b_2	b_3	b_4	

Таблица Б.6 – **Варианты заданий**

Вариант	Стоимость												Мощность поставщиков			Спрос потребителей			
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4
1	9	7	6	3	8	4	9	5	8	7	5	5	23	22	21	16	12	19	19
2	5	5	4	6	7	8	5	7	4	5	9	12	30	24	26	25	15	20	20
3	7	5	10	8	8	5	9	4	7	9	5	7	14	29	31	18	20	14	22
4	5	7	5	8	6	4	6	3	9	7	5	9	24	35	25	15	27	19	23
5	4	6	7	8	4	9	5	6	7	5	7	8	27	22	31	25	20	21	14
6	8	8	7	6	5	5	7	4	5	9	6	5	22	31	25	28	12	20	18
7	6	9	7	8	4	8	7	5	7	5	6	8	25	20	23	20	13	20	15
8	6	10	8	5	6	5	4	7	5	4	5	2	35	25	24	27	15	23	19
9	5	5	6	8	5	2	3	8	4	6	5	10	31	27	22	27	20	14	19
10	5	7	8	5	4	7	9	5	3	10	5	7	22	23	21	19	12	19	16
11	7	5	4	5	2	3	4	5	6	8	2	7	14	29	31	18	20	14	22
12	8	4	6	5	10	7	5	7	6	8	7	9	22	31	25	28	12	20	18
13	5	3	10	5	7	8	8	7	4	8	3	8	23	22	21	16	12	19	19
14	8	9	4	5	7	6	10	8	5	6	5	4	24	35	25	15	27	19	23
15	4	7	9	7	4	5	5	6	8	5	2	3	23	25	20	13	20	15	20
16	6	4	5	3	10	5	7	8	5	4	7	9	27	22	31	29	20	17	14
17	10	9	6	7	4	5	6	7	8	10	4	9	35	25	24	27	15	23	19
18	4	8	8	7	12	9	7	9	8	10	9	11	22	31	25	28	12	20	18
19	6	7	12	7	9	10	5	9	6	10	5	10	25	20	23	20	13	20	15
20	8	6	6	7	9	8	12	10	7	8	7	6	35	25	24	27	15	23	19

Окончание таблицы Б.6

Вариант	Стоимость												Мощность поставщиков			Спрос потребителей			
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4
21	8	5	7	4	5	9	12	5	3	10	5	7	31	27	22	27	20	14	19
22	5	9	4	7	9	5	7	8	9	4	5	7	22	23	21	19	12	19	16
23	10	8	8	5	9	4	7	4	7	9	7	4	14	29	31	18	20	14	22
24	5	8	6	4	6	3	9	6	4	5	3	10	22	31	25	28	12	20	18
25	7	8	4	9	5	6	7	8	7	6	5	5	23	22	21	16	12	19	19
26	5	6	7	8	10	4	9	8	9	4	5	7	24	35	25	15	27	19	23
27	9	7	9	8	10	9	11	4	7	9	7	4	23	25	20	13	20	15	20
28	10	5	9	6	10	5	10	6	4	5	3	10	23	22	21	16	12	19	19
29	8	12	10	7	8	7	6	7	5	4	5	2	30	24	26	25	15	20	20
30	4	9	5	8	7	5	5	8	4	6	5	10	14	29	31	18	20	14	22

Задание 4 **Задача распределения земляных масс при организации работ по сооружению земляного полотна**

Распределение земляных масс при возведении земляного полотна заключается: 1) в определении объема грунта, который требуется переместить в продольном направлении (перемещение грунта из выемки в насыпь) и в поперечном направлении (перемещение грунта из резервов в насыпи, из выемки в кавальер или отвал); 2)нахождении наиболее экономичных и целесообразных соотношений между этими перемещениями.

После определения мест возможного расположения карьеров, отвалов, кавальеров, резервов для отсыпки грунта в насыпь и разработки выемок, а также разбивки продольного профиля на отдельные участки выемок и насыпей, выделено шесть поставщиков земляного грунта, включая карьер и резерв, и пять потребителей, включая кавальер.

Мощность поставщиков a_i ($i = \overline{1,6}$) и спрос потребителей b_j ($j = \overline{1,5}$) грунта, а также стоимость разработки и перемещения единицы грунта c_{ij} ($i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,5}$) от i-го поставщика к j-му потребителю в соответствии с принятым комплексом машин и средней дальностью возки известны и приведены в таблицах Б.8 и Б.9.

Требуется так распределить земляные массы от поставщиков к потребителям, чтобы суммарные затраты на разработку и перемещение грунта были минимальны. Причем выемки являются основными и обязательными поставщиками грунта, и их запас должен быть полностью использован. Карьеры и резервы являются резервными поставщиками. Насыпи являются основными потребителями, а кавальеры и отвалы – резервными. Перемещение грунта из карьера и резерва в отвал или кавальер не допускается («запрещенные возки»). Исходные данные приведены в таблице Б.7.

Таблица Б.7 – **Исходные данные задачи**

Поставщики	Потребители					Мощность поставщиков, тыс. м^3
	1 (насыпь)	2 (насыпь)	3 (насыпь)	4 (отвал)	5 (кавальер)	
1 (выемка)	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
2 (выемка)	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
3 (карьер)	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
4 (выемка)	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	a_4
5 (карьер)	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	a_5
6 (резерв)	c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}	a_6
Спрос потребителей, тыс. м^3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	

Таблица Б.8 – **Варианты заданий**

Вариант	Стоимость														
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}
1	9	7	6	3	8	4	9	5	8	7	5	5	3	8	4
2	5	5	4	6	7	8	5	7	4	5	9	12	6	7	8
3	7	5	10	8	8	5	9	4	7	9	5	7	8	8	5
4	5	7	5	8	6	4	6	3	9	7	5	9	8	6	4
5	4	6	7	8	4	9	5	6	7	5	7	8	8	4	9
6	8	8	7	6	5	5	7	4	5	9	6	5	6	5	5
7	6	9	7	8	4	8	7	5	7	5	6	8	8	4	8
8	6	10	8	5	6	5	4	7	5	4	5	2	5	6	5
9	5	5	6	8	5	2	3	8	4	6	5	10	8	5	2
10	5	7	8	5	4	7	9	5	3	10	5	7	5	4	7
11	7	5	4	5	2	3	4	5	6	8	2	7	5	2	3
12	8	4	6	5	10	7	5	7	6	8	7	9	5	10	7
13	5	3	10	5	7	8	8	7	4	8	3	8	5	7	8
14	8	9	4	5	7	6	10	8	5	6	5	4	5	7	6
15	4	7	9	7	4	5	5	6	8	5	2	3	7	4	5
16	6	4	5	3	10	5	7	8	5	4	7	9	3	10	5
17	10	9	6	7	4	5	6	7	8	10	4	9	7	4	5
18	4	8	8	7	12	9	7	9	8	10	9	11	7	12	9
19	6	7	12	7	9	10	5	9	6	10	5	10	7	9	10
20	8	6	6	7	9	8	12	10	7	8	7	6	7	9	8

Окончание таблицы Б.8

Вариант	Стоимость														
	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	c_{55}	c_{61}	c_{62}	c_{63}	c_{64}	c_{65}
21	8	5	7	4	5	9	12	5	3	10	5	7	5	9	12
22	5	9	4	7	9	5	7	8	9	4	5	7	9	5	7
23	10	8	8	5	9	4	7	4	7	9	7	4	9	4	7
24	5	8	6	4	6	3	9	6	4	5	3	10	6	3	9
25	7	8	4	9	5	6	7	8	7	6	5	5	5	6	7
26	5	6	7	8	10	4	9	8	9	4	5	7	10	4	9
27	9	7	9	8	10	9	11	4	7	9	7	4	10	9	11
28	10	5	9	6	10	5	10	6	4	5	3	10	10	5	10
29	8	12	10	7	8	7	6	7	5	4	5	2	8	7	6
30	4	9	5	8	7	5	5	8	4	6	5	10	7	5	5

Таблица Б.9 – **Варианты заданий**

Вариант	Мощность поставщиков						Спрос потребителей				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	400	250	300	270	340	500	280	330	470	250	730
2	170	220	310	190	280	400	200	210	350	280	530
3	180	170	225	135	205	285	190	215	160	235	400
4	240	320	250	150	280	560	320	250	340	290	600
5	270	190	250	310	180	600	350	340	280	350	480
6	190	150	120	170	230	340	150	200	220	290	340
7	260	310	440	270	370	650	400	450	380	570	500
8	125	140	200	190	145	350	280	175	225	170	300
9	230	340	290	250	190	450	270	430	320	330	400
10	185	115	135	255	210	400	245	250	190	245	370
11	410	260	310	280	350	510	290	340	480	260	750
12	180	230	320	200	290	410	210	220	360	290	550
13	190	180	235	145	215	295	200	225	170	245	420
14	250	330	260	160	290	570	330	260	350	300	620
15	280	200	260	320	190	610	360	350	290	360	500
16	200	160	130	180	240	350	160	210	230	300	360
17	270	320	450	280	380	660	410	460	390	580	520
18	135	150	210	200	155	360	290	185	235	180	320
19	240	350	300	260	200	460	280	440	330	340	420
20	195	125	145	265	220	410	255	260	200	255	390
21	440	290	340	310	380	540	320	370	510	290	810
22	210	260	350	230	320	440	240	250	390	320	610
23	220	210	265	175	245	325	230	255	200	275	480

Окончание таблицы Б.9

Вариант	Мощность поставщиков						Спрос потребителей				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
24	280	360	290	190	320	600	360	290	380	330	680
25	310	230	290	350	220	640	390	380	320	390	560
26	230	190	160	210	270	380	190	240	260	330	420
27	300	350	480	310	410	690	440	490	420	610	580
28	165	180	240	230	185	390	320	215	265	210	380
29	270	380	330	290	230	490	310	470	360	370	480
30	225	155	175	295	250	440	285	290	230	285	450

***Задание 5* Решение задачи о назначениях венгерским методом**

Для дорог республиканского значения с облегченным покрытием межремонтный срок службы составляет 10 лет. К истекшему сроку ДРСУ (Дорожно-ремонтное строительное управление) запланировало произвести капитальный ремонт автомагистрали. Для этого был объявлен тендер на проведение ремонтных работ, в ходе которого было отобрано 5 строительных организаций-подрядчиков (A_i). Каждая организация дала оценку времени в сутках t_{ij} ($i=\overline{1,5}$; $j=\overline{1,4}$), требующегося ей для выполнения всех работ (B_j): B_1 – уборка полосы отвода (вырубка леса и кустарника), B_2 – ремонт искусственных сооружений, B_3 – укрепление земляного полотна, B_4 – косметический ремонт дорожной одежды.

Качество выполнения организациями работ одинаковое. Организации, занятые выполнением заказа, потребовали оплату за одни сутки в размере c_i. Организация № 3 не выполняет работы, связанные с укреплением земляного полотна. Какая из организаций не получит заказ? Как ДРСУ следует распределить работы между организациями, чтобы минимизировать общие издержки капитального ремонта автомагистрали? Исходные данные и варианты заданий приведены в таблицах Б.10–Б.12.

Таблица Б.10 – **Исходные данные задачи**

Организация	Комплекс ремонтных работ				Стоимость работ c_{ij}, ден. ед. / сут
	B_1	B_2	B_3	B_4	
	Время выполнения, сут				
A_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	c_{1j}
A_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}	c_{2j}
A_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}	c_{3j}
A_4	t_{41}	t_{42}	t_{43}	t_{44}	c_{4j}
A_5	t_{51}	t_{52}	t_{53}	t_{54}	c_{5j}

Таблица Б.11 – **Варианты заданий**

Вариант	Время																			
	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}	t_{41}	t_{42}	t_{43}	t_{44}	t_{51}	t_{52}	t_{53}	t_{54}
1	5	16	7	8	10	4	9	8	19	4	5	7	6	5	10	7	5	17	7	6
2	9	7	9	8	10	9	11	4	7	9	7	4	10	5	7	8	8	7	9	17
3	10	5	9	6	10	5	10	6	4	5	3	10	4	5	7	6	10	8	8	5
4	8	12	10	7	8	7	16	7	5	14	5	12	13	8	4	9	6	5	4	12
5	4	9	5	8	7	5	5	8	4	6	5	10	16	7	8	5	5	2	3	9
6	12	25	23	21	18	12	19	20	19	23	16	13	15	29	13	15	29	15	25	14
7	7	27	21	22	17	14	17	22	17	24	15	12	13	36	12	13	36	12	25	23
8	7	31	19	23	16	13	15	29	15	25	14	11	11	43	11	11	43	7	27	21
9	5	35	17	24	15	12	13	36	12	25	23	21	18	12	19	20	19	23	16	13
10	12	39	15	25	14	11	11	43	7	27	21	22	17	14	17	22	17	24	15	12
11	5	3	10	4	5	7	6	10	18	12	19	20	19	23	16	13	15	29	15	22
12	4	5	2	3	8	4	9	6	17	14	17	22	17	24	15	12	13	36	12	29
13	6	5	10	6	7	8	5	5	16	13	15	29	15	25	14	11	11	43	7	36
14	23	16	13	15	29	13	5	6	15	12	13	36	10	4	5	7	6	10	18	43
15	24	15	12	13	36	12	9	7	10	7	5	7	2	3	8	4	9	16	17	10
16	6	7	5	14	5	22	10	5	7	8	8	7	10	6	7	8	15	15	16	6
17	5	8	14	6	5	10	8	12	7	16	10	8	8	22	17	24	15	12	13	20
18	19	20	19	23	16	13	4	9	17	26	10	18	12	29	15	25	14	11	11	22
19	17	22	17	24	15	12	12	25	4	9	16	17	14	36	12	25	23	21	18	13
20	13	15	29	13	15	15	12	13	13	15	29	24	15	12	13	36	12	9	7	19
21	12	13	36	12	13	7	5	14	12	13	36	6	7	5	14	25	22	10	5	17
22	11	11	43	11	11	8	14	6	11	11	43	5	8	14	6	15	10	8	12	16
23	21	18	12	19	20	20	19	23	21	18	12	19	20	19	23	16	13	4	9	15
24	22	17	14	17	22	22	17	24	22	17	14	17	22	17	24	15	12	12	25	14
25	20	19	23	16	13	8	19	4	20	19	23	9	8	19	4	5	7	12	17	14
26	22	17	24	15	12	4	7	9	22	17	24	11	4	7	9	7	4	14	16	13
27	29	15	25	14	11	6	4	5	29	15	25	10	6	4	5	13	10	23	15	12
28	36	10	4	5	7	7	5	14	36	10	4	16	7	5	14	5	12	24	14	11
29	7	12	13	8	4	16	7	5	14	12	23	5	8	4	6	5	10	25	5	7
30	7	10	6	7	8	5	8	4	6	10	6	19	20	19	23	16	13	4	8	4

Таблица Б.12 – **Варианты заданий**

Вариант	Стоимость выполнения i-й организацией j-й работы c_{ij}', ден. ед. / сут					Невыполнение организацией работы	
	c_{1j}	c_{2j}	c_{3j}	c_{4j}	c_{5j}	Организация	Наименование работы
1	2	1	3	1	2	A_1	B_1
2	2	2	3	1	1	A_2	B_2
3	4	3	2	3	4	A_3	B_3

Окончание таблицы Б.12

Вариант	Стоимость выполнения i-й организацией j-й работы c_{ij}', ден. ед. / сут					Невыполнение организацией работы	
	c_{1j}	c_{2j}	c_{3j}	c_{4j}	c_{5j}	Организация	Наименование работы
4	5	4	5	4	4	A_4	B_4
5	3	3	2	3	2	A_5	B_1
6	3	2	2	1	3	A_1	B_2
7	4	4	3	3	3	A_2	B_3
8	3	3	4	3	4	A_3	B_4
9	1	2	3	2	3	A_4	B_1
10	2	2	3	2	2	A_5	B_2
11	1	2	1	2	2	A_1	B_3
12	4	4	5	4	4	A_2	B_4
13	3	3	3	3	2	A_3	B_1
14	3	2	2	1	3	A_4	B_2
15	4	4	3	4	3	A_5	B_3
16	3	2	3	2	3	A_1	B_4
17	1	2	3	2	1	A_2	B_1
18	3	2	1	2	2	A_3	B_2
19	4	4	3	4	4	A_4	B_3
20	5	4	5	4	5	A_5	B_4
21	3	3	2	2	2	A_3	B_4
22	3	1	2	1	3	A_4	B_1
23	4	4	3	4	3	A_5	B_2
24	2	3	4	3	4	A_1	B_3
25	2	2	3	2	3	A_2	B_4
26	1	2	3	2	2	A_3	B_1
27	3	2	3	2	2	A_4	B_2
28	4	3	5	3	4	A_5	B_3
29	3	3	4	3	4	A_1	B_4
30	3	2	2	1	2	A_2	B_1

Задание 6 Решение задач управления запасами

1 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1800 рулонов. Издержки на заказ равны 400 ден. ед. Организация заключила договор на

поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 5 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Издержки хранения одного рулона в год составляют 2 % от его стоимости. Если заказ менее 800 рулонов, то стоимость 1 рулона – 40 ден. ед., при заказе не менее 800 рулонов и менее 1500 рулонов – 38 ден. ед., при заказе не менее 1500 рулонов и менее 1600 рулонов – 34 ден. ед., при заказе не менее 1600 рулонов – 32 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

2 Для обеспечения безопасного содержания автомобильных дорог в зимний период ДРСУ заготовило в осенний период соль и песок. В течение зимнего периода (90 дней) ежедневно первая бригада заготавливает 100 т противогололедных материалов (ПГМ), представляющую собой смесь песка и соли, вторая расходует на участках автомобильных дорог 30 т ПГМ в день. Оставшаяся смесь образует запас, издержки хранения которого составляют 3 ден. ед. за 1 т в зимний период. Затраты на эксплуатацию технологического оборудования, связанные с переналадкой оборудования и подготовительными операциями для приготовления первой бригадой ПГМ, – 400 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем заготовки ПГМ? Определить общие минимальные издержки и максимальный уровень запасов.

3 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах использует НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1000 рулонов. Издержки на заказ равны 600 ден. ед., издержки на хранение на приобъектном складе одного рулона – 30 ден. ед. в год. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа. Чему равно оптимальное число заказов в течение года, время между заказами и минимальные совокупные издержки?

4 При строительстве моста длиной 200 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 100 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 50 ден. ед. Договор заключен на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 4 дня. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 1,7 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, время между заказами. Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

5 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 2400 рулонов. Издержки на заказ равны 600 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 3 дня. Количество рабочих дней в году – 300. Издержки хранения одного рулона в год составляют 2 % от его стоимости. Если заказ менее 1000 рулонов, то стоимость 1 рулона – 40 ден. ед., при заказе не менее 1000 рулонов и менее 2200 рулонов – 35 ден. ед., при заказе не менее 2200 рулонов – 32 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

6 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 5000 м^3 в год. Издержки на заказ – 900 ден. ед., которые обусловлены доставкой материалов (отходов) с завода. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 4 % от стоимости материалов. Стоимость 1 м^3 золошлаковых материалов – 36 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 3 дня. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления заказа, оптимальное число заказов в течение года и оптимальное время между заказами.

7 При строительстве моста длиной 200 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 70 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 65 ден. ед. Договор заключен на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 5 дней. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 13 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. По оценке специалистов упущенная прибыль, связанная с отсутствием тяжей при строительстве, составляет

190 ден. ед. за 1 т в течение срока сооружения. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, максимальный размер запаса, максимальный дефицит, точку восстановления и время между заказами. Требуется ли вводить специалистам строительной организации систему с плановым дефицитом? Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

8 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 2000 м^3 в год. Издержки на заказ – 800 ден. ед. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 2 % от стоимости материалов. Стоимость 1 м^3 золошлаковых материалов – 90 ден. ед. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, оптимальное число заказов в течение года и оптимальное время между заказами.

9 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 2500 рулонов. Издержки на заказ равны 400 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 6 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Издержки хранения одного рулона в год составляют 2 % от его стоимости. Если заказ менее 1000 рулонов, то стоимость 1 рулона – 45 ден. ед., при заказе не менее 1000 рулонов и менее 1500 рулонов – 40 ден. ед., при заказе не менее 1500 рулонов и менее 1900 рулонов – 32 ден. ед., при заказе не менее 1900 рулонов и менее 2200 рулонов – 28 ден. ед., при заказе не менее 2200 рулонов – 26 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

10 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 2800 м^3 в год. Издержки на заказ – 800 ден. ед., которые обусловлены доставкой материалов (отходов) с завода. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Стоимость 1 м^3 золошлаковых материалов – 43 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 6 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления заказа, оптимальное число заказов в течение года и оптимальное время между заказами.

11 При сооружении земляного полотна в зимний период до начала основных земляных работ на объектах строительства необходимо выполнить общие подготовительные работы, одна из которых – рыхление мерзлых грунтов, которое в данном случае осуществляется взрывным способом. Объем разрыхленного грунта составляет 2200 $м^3$ за смену (8 ч), обеспечивающий беспрерывную работу экскаватора. В связи с тем, что температура ниже минус 20 ^{0}С, то взрывы рекомендуется производить в течение суток, время подготовки и выполнения взрывных работ 3 ч. Разрыхленный грунт убирается экскаватором в объеме 900 $м^3$ в течение смены. Бригады работают в три смены. Оставшийся грунт образует запас, издержки хранения обусловлены механическим рыхлением и составляют 6 ден. ед. за 1 $м^3$ в смену. Стоимость на подготовку к взрывным работам – 400 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем разрыхленного грунта при взрывных работах? Определить общие минимальные издержки, максимальный уровень запасов разрыхленного грунта, точку восстановления, оптимальное число заказов на взрывание и оптимальное время между заказами на взрывание в течение смены.

12 При строительстве моста длиной 350 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 300 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 100 ден. ед. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 1,5 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, время между заказами. Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

13 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 4000 $м^3$ в год. Издержки на заказ – 700 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 4 дня. Издержки хранения на приобъектном складе 1 $м^3$ материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Если заказ менее 2500 $м^3$, то стоимость 1 $м^3$ – 32 ден. ед., при заказе не менее 2500 $м^3$ и менее 3500 $м^3$ – 28 ден. ед., при заказе не менее 3500 $м^3$ и менее 5000 $м^3$ – 26 ден. ед., если же заказ не менее 3000 $м^3$, то – 22 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

14 При строительстве моста длиной 350 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 80 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 41 ден. ед. Договор заключен на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 2 дня. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 2,3 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, время между заказами. Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

15 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1600 рулонов. Издержки на заказ равны 200 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 2 дня. Количество рабочих дней в году – 300. Издержки хранения одного рулона в год составляют 2 % от его стоимости. Если заказ менее 1200 рулонов, то стоимость 1 рулона – 32 ден. ед., если же заказ не менее 1200 рулонов, то – 26 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

16 Для обеспечения безопасного содержания автомобильных дорог в зимний период ДРСУ заготовило в осенний период соль и песок. В течение зимнего периода (90 дней) ежедневно первая бригада заготавливает 70 т противогололедных материалов (ПГМ), представляющую собой смесь песка и соли, вторая расходует на участках автомобильных дорог 40 т ПГМ в день. Оставшаяся смесь образует запас, издержки хранения которого составляют 4 ден. ед. за 1 т в зимний период. Затраты на эксплуатацию технологического оборудования, связанные с переналадкой оборудования и подготовительными операциями для приготовления первой бригадой ПГМ, – 350 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем заготовки ПГМ? Определить общие минимальные издержки и максимальный уровень запасов.

17 При сооружении земляного полотна в зимний период до начала основных земляных работ на объектах строительства необходимо выполнить общие подготовительные работы, одна из которых – рыхление мерзлых грунтов, которое в данном случае осуществляется взрывным способом. Объем разрыхленного грунта составляет 1600 м^3 за смену (8 ч), обеспечивающий беспрерывную работу экскаватора. В связи с тем, что температура ниже минус 20 ^{0}С, то взрывы рекомендуется производить в течение суток, время подготовки и выполнения взрывных работ 2 ч. Разрыхленный грунт убирается экскаватором в объеме 1000 м^3 в течение смены. Бригады работают в три смены. Оставшийся грунт образует запас, издержки хранения обусловлены механическим рыхлением и составляют 5 ден. ед. за 1 м^3 в смену. Стоимость на подготовку к взрывным работам – 500 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем разрыхленного грунта при взрывных работах? Определить общие минимальные издержки, максимальный уровень запасов разрыхленного грунта, точку восстановления, оптимальное число заказов на взрывание и оптимальное время между заказами на взрывание в течение смены.

18 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 4500 м^3 в год. Издержки на заказ – 600 ден. ед. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Количество рабочих дней в году – 300. Стоимость 1 м^3 золошлаковых материалов – 80 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, оптимальное число заказов в течение года и оптимальное время между заказами.

19 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1000 рулонов. Издержки на заказ равны 700 ден. ед., издержки на хранение на приобъектном складе одного рулона – 12 ден. ед. в год. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки

НСМ – 4 дня. Количество рабочих дней в году – 300. По оценке специалистов упущенная прибыль, связанная с отсутствием НСМ при строительстве, составляет 21 ден. ед. в год за один рулон. Определить оптимальный размер заказа при плановом дефиците, общие минимальные издержки, максимальный размер запаса, максимальный дефицит, количество заказов, точку восстановления и оптимальное время между заказами. Требуется ли вводить специалистам строительной организации систему с плановым дефицитом?

20 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 3000 м^3 в год. Издержки на заказ – 600 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 3 дня. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Если заказ менее 1500 м^3, то стоимость 1 м^3 – 32 ден. ед., при заказе не менее 1500 м^3 и менее 1950 м^3 – 28 ден. ед., при заказе не менее 1950 м^3 и менее 2100 м^3 – 26 ден. ед., при заказе не менее 2100 м^3 и менее 2400 м^3 – 24 ден. ед., если же заказ не менее 2400 м^3, то – 20 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

21 При сооружении земляного полотна в зимний период, до начала основных земляных работ на объектах строительства необходимо выполнить общие подготовительные работы, одна из которых – рыхление мерзлых грунтов, которое в данном случае осуществляется взрывным способом. Объем разрыхленного грунта составляет 1800 м^3 за смену (8 ч), обеспечивающий беспрерывную работу экскаватора. В связи с тем, что температура ниже минус 20 ^{0}С, то взрывы рекомендуется производить в течение суток, время подготовки и выполнения взрывных работ 2 ч. Разрыхленный грунт убирается экскаватором в объеме 750 м^3 в течение смены. Бригады работают в три смены. Оставшийся грунт образует запас, издержки хранения обусловлены механическим рыхлением и составляют 4 ден. ед. за 1 м^3 в смену. Стоимость на подготовку к взрывным работам – 300 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем разрыхленного грунта при взрывных работах? Определить общие минимальные издержки, максимальный уровень запасов разрыхленного грунта, точку восстановления, оптимальное число заказов на взрывание и оптимальное время между заказами на взрывание в течение смены.

22 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах использует НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1200 рулонов. Издержки на заказ равны 900 ден. ед., издержки на хранение на приобъектном складе одного рулона – 24 ден. ед. в год. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа.Чему равно оптимальное число заказов в течение года, время между заказами и минимальные совокупные издержки?

23 При строительстве моста длиной 250 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 90 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 70 ден. ед. Договор заключен на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 4 дня. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 15 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. По оценке специалистов упущенная прибыль, связанная с отсутствием тяжей при строительстве, составляет 240 ден. ед. за 1 т в течение срока сооружения. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, максимальный размер запаса, максимальный дефицит, точку восстановления и время между заказами. Требуется ли вводить специалистам строительной организации систему с плановым дефицитом? Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

24 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 6000 рулонов. Стоимость одного рулона – 24 ден. ед. Издержки на заказ равны 1000 ден. ед., издержки хранения на приобъектном складе одного рулона за год составляют 2 % от его стоимости. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки НСМ – 5 дней. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа. Чему равно оптимальное число заказов в течение года, точка восстановления заказа, время между заказами и минимальные совокупные издержки?

25 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 600 м^3 в год. Издержки на заказ – 90 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 3 дня. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Если заказ менее 2000 м^3, то стоимость 1 м^3 – 31 ден. ед., если же заказ не менее 2000 м^3, то – 30 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

26 Для обеспечения безопасного содержания автомобильных дорог в зимний период ДРСУ заготовило в осенний период соль и песок. В течение зимнего периода (90 дней) ежедневно первая бригада заготавливает 90 т противогололедных материалов (ПГМ), представляющую собой смесь песка и соли, вторая расходует на участках автомобильных дорог 50 т ПГМ в день. Оставшаяся смесь образует запас, издержки хранения которого составляют 2,7 ден. ед. за 1 т в зимний период. Затраты на эксплуатацию технологического оборудования, связанные с переналадкой оборудования и подготовительными операциями для приготовления первой бригадой ПГМ, – 300 ден. ед. Каким должен быть оптимальный объем заготовки ПГМ? Определить общие минимальные издержки и максимальный уровень запасов.

27 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 1000 м^3 в год. Издержки на заказ – 300 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 5 дней. Издержки хранения на приобъектном складе 1 м^3 материалов в год составляют 3 % от стоимости материалов. Если заказ менее 2000 м^3, то стоимость 1 м^3 – 51 ден. ед., при заказе не менее 2000 м^3 и менее 3500 м^3 – 50 ден. ед., если же заказ не менее 3500 м^3, то – 49 ден. ед. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления и оптимальное время между заказами.

28 При строительстве моста длиной 300 м через водную преграду расходуются специальные тяжи из высокопрочной стали (130 кг/м). Срок сооружения моста – 90 сут, расход тяжей – равномерный. Тяжи доставляются автомобилем грузоподъемностью 5 т. Стоимость рейса, включающая погрузочно-разгрузочные работы, не зависит от числа доставляемых тяжей и равна 29 ден. ед. Издержки содержания тяжей обусловлены возведением приобъектного склада и его эксплуатацией и составляют 1,4 ден. ед. за 1 т тяжей в сутки. Определить оптимальный размер заказа, совокупные издержки, оптимальное число заказов, время между заказами. Если автомобиль загружать полностью, как изменятся совокупные издержки?

29 При возведении земляного полотна строительная организация для повышения прочности земляного полотна, путем укрепления грунта, использует отходы промышленности – золошлаковые материалы. Годовой спрос составляет 3900 $м^3$ в год. Издержки на заказ – 1100 ден. ед., которые обусловлены доставкой материалов (отходов) с завода. Издержки хранения на приобъектном складе 1 $м^3$ материалов в год составляют 2 % от стоимости материалов. Стоимость 1 $м^3$ золошлаковых материалов – 63 ден. ед. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки – 4 дня. Количество рабочих дней в году – 300. Определить оптимальный размер заказа, минимальные издержки, точку восстановления заказа, оптимальное число заказов в течение года и оптимальное время между заказами.

30 Строительная организация при строительстве земляного полотна на болотах закупает на заводе-изготовителе НСМ (нетканые синтетические материалы) – текстильные водопроницаемые рулонные полотна различного вида, выработанные из синтетических волокон. Применяют НСМ в качестве дренирующего, фильтрующего или армирующего элемента в основном в виде прослоек, укладываемых в земляное полотно на контакте слоев различных видов грунтов. Годовой спрос на НСМ составляет 1500 рулонов. Издержки на заказ равны 400 ден. ед., издержки на хранение на приобъектном складе одного рулона – 7 ден. ед. в год. Организация заключила договор на поставку с фиксированным интервалом времени, время поставки НСМ – 3 дня. Количество рабочих дней в году – 300. По оценке специалистов упущенная прибыль, связанная с отсутствием НСМ при строительстве, составляет 45 ден. ед. в год за один рулон. Определить оптимальный размер заказа при плановом дефиците, общие минимальные издержки, максимальный размер запаса, максимальный дефицит, количество заказов, точку восстановления и оптимальное время между заказами. Требуется ли вводить специалистам строительной организации систему с плановым дефицитом?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Афанасьев, М. Ю.** Исследование операций в экономике : учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. – М. : ИНФРА-М, 2006. – 444 с.

2 **Бурдук, Е. Л.** Исследование операций : учеб.-метод. пособие / Е. Л. Бурдук, И. Н. Кравченя. – Гомель : БелГУТ, 2008. – 80 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Исследование операций. Задачи, принципы, методология : учеб. пособие / Е. С. Венцель. – М. : Высш. шк., 2001. – 208 с.

4 **Волков И. К.** Исследование операций : учеб. для вузов / И. К. Волков, Е. А. Загоруйко; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 436 с.

5 **Жогаль, С. И.** Задачи и модели исследования операций. В 3 ч. / С. И. Жогаль, И. В. Максимей. – Гомель : БелГУТ, 1999. – Ч. 1 : Аналитические модели исследования операций : учеб. пособие. – 109 с.

6 Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.]; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.

7 Исследование операций. В 2 т.; пер. с англ. / под ред. Д. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1: Модели и применения. – 677 с.

8 **Косоруков, О. А** Исследование операций : учеб. / О. А. Косоруков, А. В. Мищенко; под общ. ред. Н. П. Тихомирова. – М : Изд-во «Экзамен», 2003. – 448 с.

9 **Костевич, Л. С.** Математическое программирование : информационные технологии оптимальных решений : учеб. пособие / Л. С. Костевич. – Минск : Новое знание, 2003. – 424 с.

10 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Выш. шк., 2001. – 351 с.

11 **Сакович, В. А.** Исследование операций / В. А. Сакович. – Минск : Выш. шк., 1986. – 460 с.

12 **Сигал, И. Х.** Введение в прикладное дискретное программирование : модели и вычислительные алгоритмы : учеб. пособие / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – 2-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.

13 **Таха, Х. А.** Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – 7-е изд.– М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

14 Экономическое моделирование в Microsoft Excel : пер. с англ. / Д. Мур [и др.]. – 6-е изд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.

15 **Этин, Ю. М.** Организация и планирование строительства новой железнодорожной линии. В 3 ч. / Ю. М. Этин. – Гомель : БелГУТ, 2007. – Ч. 2 : Организация работ основного периода : строительство искусственных сооружений и возведение земляного полотна : учеб.-метод. пособие. – 139 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БОЧАРОВ Денис Иванович
КРАВЧЕНЯ Ирина Николаевна

Применение методов математического моделирования при решении производственных задач

Учебно-методическое пособие
для студентов строительного факультета

Редактор Т. М. Ризевская
Технический редактор В. Н. Кучерова
Компьютерный набор и верстка – Д. И. Бочаров, И. Н. Кравченя

Подписано в печать 24.06.2009 г. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 10,28. Тираж 300 экз.
Зак. №   Изд. № 60.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2007 г.
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.