

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”**

**Кафедра «Информационные технологии»**

**Т. Н. ЛИТВИНОВИЧ**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ**  
**КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**MATHCAD**

**Лабораторный практикум по дисциплине «Информатика»**  
**для курсантов I курса военно-транспортного факультета**

**Гомель 2011**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
“БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА”

Кафедра «Информационные технологии»

Т. Н. ЛИТВИНОВИЧ

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Лабораторный практикум по дисциплине «Информатика»  
для курсантов I курса военно-транспортного факультета

*Одобрено методической комиссией  
военно-транспортного факультета*

Гомель 2011

УДК 004.942(076.5)  
ББК 32.81  
Л64

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные технологии» *Ю. А. Пшеничнов* (УО «БелГУТ»).

**Литвинович, Т. Н.**

Л64 Решение задач в системе компьютерной математики MathCAD : лабораторный практикум по дисциплине “Информатика” для курсантов I курса военно-транспортного факультета / Т. Н. Литвинович ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2011. – 126 с.

ISBN 978-985-468-662-2

Кратко изложены теоретические сведения и рассмотрены примеры выполнения заданий по каждой теме. Каждая лабораторная работа содержит варианты индивидуальных заданий и контрольные вопросы для самостоятельной подготовки.

Предназначен для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Информатика» курсантами I курса военно-транспортного факультета.

**УДК 004.942(076.5)**  
**ББК 32.81**

**ISBN 978-985-468-662-2**

© Литвинович Т. Н., 2011

© Оформление. УО «БелГУТ», 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	4
Лабораторная работа № 1 БАЗОВЫЕ ОПЕРАЦИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ .....	5
Лабораторная работа № 2 РАНЖИРОВАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ .....	19
Лабораторная работа № 3 МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА .....	33
Лабораторная работа № 4 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ .....	44
Лабораторная работа № 5 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ .....	52
Лабораторная работа № 6 ПРЕДЕЛЫ. РЯДЫ .....	58
Лабораторная работа № 7 РАБОТА С ПРОИЗВОДНЫМИ .....	64
Лабораторная работа № 8 ИНТЕГРАЛЫ. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ .....	77
Лабораторная работа № 9 СИМВОЛЬНАЯ АЛГЕБРА .....	86
Лабораторная работа № 10 ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГОРИТМОВ .....	99
Лабораторная работа № 11 ПРОГРАММИРОВАНИЕ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ .....	106
Лабораторная работа № 12 ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ .....	118
Список литературы .....	126

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы расширилось применение компьютеров для решения математических задач. Естественно возникает вопрос: какую лучше программу выбрать для решения соответствующей задачи?

В настоящее время разработано и применяется множество различных математических пакетов: *Maple*, *MatLab* и др. Каждая из вышеуказанных систем имеет свои преимущества и недостатки.

В данном пособии предлагается рассмотреть возможности системы *MathCAD 2001* для решения задач.

*MathCAD* изначально создавался как пакет для численного решения математических задач, однако, начиная с 1994 года, когда в него были интегрированы инструменты символьной математики, он стал повсеместно использоваться для решения математических задач различной степени сложности.

*MathCAD* – это универсальный инструмент для решения математических задач. Запись математических задач в нем наиболее приближена к записи их без применения компьютера. Система доступна для массового пользователя, благодаря своей дешевизне.

Повсеместное внедрение компьютеров во все сферы жизни в корне изменило подход к подготовке специалистов. Все окончившие университет специалисты должны уметь работать на компьютере и чувствовать потребность в использовании его как средства для решения возникающих в процессе их практической работы задач.

Материалы пособия предназначены для выполнения лабораторных работ в системе *MathCAD 2001*.

## Лабораторная работа №1

### БАЗОВЫЕ ОПЕРАЦИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

*Цель работы:* научиться выполнять базовые операции в *MathCAD*, а также грамотно форматировать и редактировать документ.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

##### Основные понятия и определения

**Алфавит** системы *MathCAD* содержит строчные и прописные буквы латинского, русского и греческого алфавитов (*s* и *S* для системы различные переменные), арабские цифры, операторы, системные переменные и т. д.

Документ в *MathCAD* состоит из областей.

Все области делятся на две **основные категории**:

- математические;
- текстовые.

*Математическая область* – область, содержащая математическое выражение или график. Она является работающей; это означает, что любое изменение, сделанное в ней, отразится на всех остальных математических областях, расположенных ниже в рабочем документе.

*Текстовая область* – область, предназначенная для кратких пояснений. Она может иметь произвольные размеры и располагаться в любом месте документа.

Расположение блоков в документе, кроме текстовых, имеет принципиальное значение.

Они выполняются слева направо и сверху вниз. Указанный порядок означает, что, например, при построении графика функции сначала выполнятся блоки, задающие саму функцию, а затем блок, задающий построение графика.

**Курсор** *MathCAD* может принимать три различные формы:

- визира “знак плюс” (начало ввода любого блока документа);
- маркера ввода текста – вертикальная красная черточка в текстовых областях;
- маркера ввода математических выражений – уголок (клюшка) синего цвета в математических областях.

**Функция** – это выражение, согласно которому проводятся некоторые вычисления с его аргументами, и определяется его числовое значение. Функции в *MathCAD* могут быть встроенными или определенными пользователем.

**Константы** – это поименованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. В системе применяется особый вид констант – единицы измерения размерных величин.

**Переменные** – это поименованные объекты, имеющие некоторое значение, способное изменяться по ходу выполнения программы.

### **Работа с документом на уровне файловых операций**

После запуска системы *MathCAD* автоматически создается новый документ с именем *Untitled:1*.

Документ системы *MathCAD* является файлом с расширением *\*.mcd*.

Все команды для работы с файлами документов находятся в пункте *File* главного меню системы.

Над файлами в системе *MathCAD* возможно выполнение операций:

1 *New* (Создать) (*Ctrl+N*) – создание нового файла.

2 *Open* (Открыть) (*Ctrl+O*) – открытие существующего файла.

3 *Close* (Закрыть) (*Ctrl+W*) – закрытие текущего документа.

4 *Save* (Сохранить) (*Ctrl+S*) – сохранение текущего документа. Данная команда записывает файл на диск с использованием его текущего имени и с учетом всех изменений. Используется при сохранении ранее созданного документа, которому уже присвоено имя.

5 *Save as* (Сохранить как) – сохранение файла под новым именем и\или в новом месте.

6 *Page Setup* (Установка параметров страницы) – установка параметров печатаемой страницы. При выборе данной команды появляется диалоговое окно, в котором устанавливаются следующие параметры страницы:

– *Size* – устанавливается размер документа (A4).

– *Fields* – размеры полей документа (*left* – левое, *right* – правое, *top* – верхнее, *bottom* – нижнее) в дюймах или миллиметрах.

– *Orientation* – расположение текста документа при распечатке: книжное (*portrait*) или альбомное (*landscape*).

– *Printer* – выбор принтера.

7 *Print Preview* (Предварительный просмотр) – команда просмотра документа перед печатью, позволяющая оценить расположение документа на странице.

8 *Print* (Печать) (*Ctrl+P*) – печать документа.

9 *Exit* (Выход) (*Alt+F4*) – выход из системы *MathCAD*.

### **Определение переменных**

Определение переменной осуществляется по схеме:

<имя переменной><оператор присваивания><выражение>,

где <имя переменной> – любой набор символов латинского алфавита;

<оператор присваивания> – глобальный или локальный оператор;

<выражение> – математическое выражение, константа или переменная.

В *MathCAD* большое значение имеет порядок расположения вычислительных блоков.

При использовании глобального присваивания этот порядок изменяется.

Сначала вычисляются блоки, в которых используется глобальное присваивание, а затем все остальные. Приемы записи оператора присваивания рассмотрены в таблице 1.

Таблица 1 – Ввод оператора присваивания

Локальный	Глобальный
Shift :	Shift ~
<b>:=</b>	<b>≡</b>

**Переменные** могут быть **размерными**, то есть характеризоваться не только своим значением, но и указанием физической величины, значение которой они хранят.

Размерность задается командой **Insert – Unit**.

**Предопределенные переменные** – это особые переменные, которым изначально системой присвоены начальные значения. Значения предопределенных переменных приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Предопределенные переменные

Переменная	Ввод	Назначение	Значение по умолчанию
$\pi$	Ctrl + P	Число "пи"	3,14...
e	e	Основание натурального логарифма	2,71...
$\infty$	Ctrl+Z	Системная бесконечность	10307
%	%	Процент	0,01
<i>TOL</i>	<i>TOL</i>	Погрешность численных методов	0,001
<i>ORIGIN</i>	<i>ORIGIN</i>	Нижняя граница индексации массивов	0

Значения системных переменных могут быть в дальнейшем изменены, как и значения обычных переменных, присваиванием им новых значений.

### Создание формульных областей

Формульная область содержит математическое выражение.

Для облегчения ввода математических формул и математических знаков в *MathCAD* предусмотрена возможность записи формул с помощью клавиатуры и специальных панелей инструментов. Для всех наиболее распространенных операций есть шаблоны, вызываемые командой **View – Tool Bars – Math**.

**Ввод формул осуществляется согласно следующим правилам:**

- для расширения охваченной курсором области используется клавиша пробел *Space Bar*;
- изменения направления охвата курсором того или иного объекта используется клавиша *Insert*;
- удаления символа слева от курсора – клавиша *BackSpace*;
- удаления символа справа от курсора – клавиша *Delete*.



*Примечание* – Часто возникает необходимость вставки в текстовый регион математической области. Такая потребность возникает, например, при формулировке условия задачи. Для решения этой проблемы служит команда *Insert – Math Region*.

### Получение результатов вычислений

Для вычисления значения любого выражения, а также для вывода значения константы или переменной используется оператор вывода результата (знак =).

*MathCAD* может выполнять вычисления в одном из двух режимов: автоматическом и ручном. В автоматическом режиме результат расчета выводится сразу же после ввода знака = после выражения. В ручном режиме для получения результата должна быть нажата клавиша *F9*. Выбор режима вычислений осуществляется соответствующими командами меню **Math**:

- *Automatic Calculation* – автоматический режим;
- *Calculate* – ручной режим.

### Создание текстовых областей

Текстовая область служит для размещения текста между формулами и графиками. Создание текстового региона осуществляется командой **Insert – Text Region**.

#### *Примечания*

1 Для ввода в текстовую область информации на русском языке необходимо выбирать кириллический шрифт, например, *Times New Roman Cyr* или *Arial Cyr*.

2 Переход на новую строку внутри текстовой области производится нажатием на клавишу *Enter*.

3 Альтернативным вариантом создания текстовой области может быть использование комбинации клавиш *Shift + "*.

**Пример.** Вычислить значение выражения

$$s^2 - \frac{\sqrt{2 \cdot a}}{\sin(a + s)}, \text{ если } s = 1,21 \quad a = 2,22$$

1-й вариант решения		
$\hat{A} \hat{a} \hat{i} \hat{a} \hat{e} \hat{n} \hat{o} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{u} \hat{o} \hat{a} \hat{a} \hat{i} \hat{u} \hat{o} :$	$s := 1.21$	$a := 2.22$
$\hat{D} \hat{a} \hat{n} \hat{+} \hat{a} \hat{o} :$	$s^2 - \frac{\sqrt{2 \cdot a}}{\sin(a + s)} = 8.872$	

## 2-й вариант решения

Ввод исходных данных:  $s := 1.21$        $a := 2.22$

Расчет (результат записывается в переменную  $k$ ):

$$k := s^2 - \frac{\sqrt{2a}}{\sin(a + s)} \quad k = 8.872$$

**Пример.** Вычислить объем цилиндра, если радиус основания  $R = 20$  см, а высота  $H = 30$  см.

Ввод исходных данных

$$R := 20 \text{ cm}$$

$$H := 30 \text{ cm}$$

Вычисление объема

$$V := \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V = 0.038 \text{ m}^3$$

## Редактирование документа

Во время подготовки документов их приходится редактировать, т. е. видоизменять и дополнять.

Выделение отдельных элементов текстового или математического блока или всего блока целиком осуществляется клавишами управления курсором совместно с клавишей *Shift* или мышью.

Для выделения всего документа применяется команда **Select All** (*Ctrl+A*) меню *Edit* (Правка).

При работе с текстовыми областями для перемещения в начало строки текстового блока используется клавиша **Home**, в конец – **End**.

Для удаления отдельных символов в выражениях или тексте используются клавиши **Backspace** – для удаления символа слева от курсора, **Delete** – для удаления символа справа от курсора.

Для удаления целого фрагмента используется команда **Delete** (Удалить) (*Ctrl+D*) меню *Edit* (Правка).

Для очистки экрана от штришков, возникающих при удалении, копировании и перемещении блоков, используется команда **Refresh** (Обновить) (*Ctrl+R*) меню *View* (Вид).

Для масштабирования видимой области документа в пределах экрана используется команда **Zoom** (Масштаб) меню *View* (Вид).

Копирование выделенных блоков осуществляется в два этапа:

- копирование в буфер обмена: **Copy** (*Ctrl+C*) меню *Edit*;
- вставка в требуемое место документа: **Paste** (*Ctrl+V*) меню *Edit*.

Перемещение выделенных блоков осуществляется в два этапа:

- перемещение в буфер обмена: **Cut** (*Ctrl+X*) меню *Edit*;
- вставка в требуемое место документа: **Paste** (*Ctrl+V*) меню *Edit*.

Для поиска требуемого объекта в пределах документа используется команда **Find** (Найти) (*Ctrl+F*) меню *Edit*.

Данная команда вызывает окно диалога (рисунок 1), в котором пользователь должен сформировать поисковый запрос и установить требуемые параметры:

- 1) *Find what* – строка поиска, используется для формирования пользовательского запроса;
- 2) *Match whole word only* – искать слова целиком;
- 3) *Match case* – искать с учетом регистра;
- 4) *Find in Text Regions* – искать только в текстовых областях;
- 5) *Find in Math Regions* – искать только в математических областях;
- 6) *Direction* – направление поиска: *Up* – к началу документа; *Down* – к концу документа от текущей позиции курсора;
- 7) *Find Next* – искать.

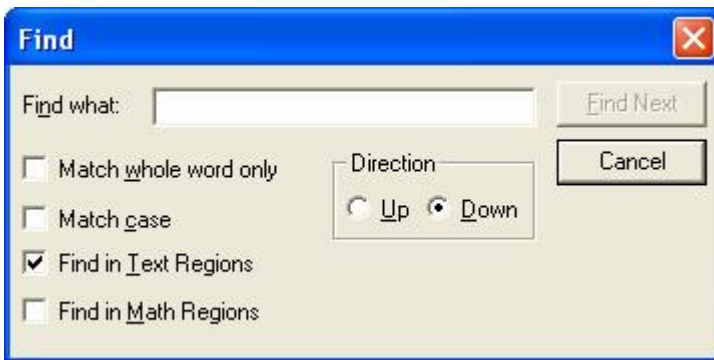


Рисунок 1 – Поиск в среде *MathCAD*

Для поиска и замены требуемого объекта в пределах документа используется команда **Replace** (Заменить) (*Ctrl+H*) меню *Edit*.

Данная команда вызывает окно диалога (рисунок 2), в котором пользователь должен ввести новые и заменяемые данные, и установить требуемые параметры:

- 1) *Replace with* – строка замены, используется для ввода новых данных;
- 2) *Replace* – заменить один объект;
- 3) *Replace All* – заменить сразу все объекты.

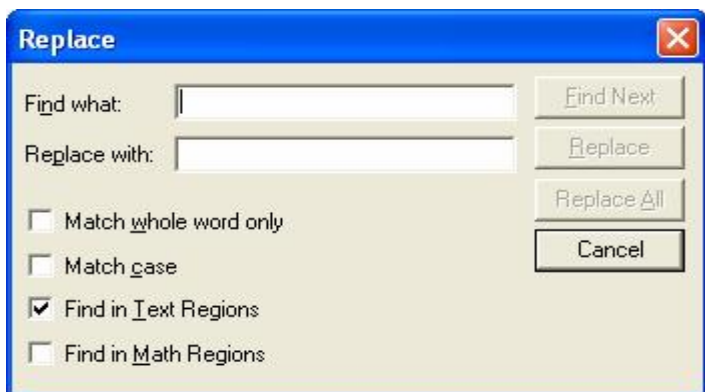


Рисунок 2 – Замена в среде *MathCAD*

Для отмены последней операции редактирования в процессе создания математических или текстовых областей применяется команда *Undo* (*Ctrl+Z*) меню *Edit*.

Для возврата к последней операции редактирования в процессе создания математических или текстовых областей применяется команда *Redo* (*Ctrl+Y*) меню *Edit*.

**Пример.**

Исходный документ
$a^2 + \frac{1}{ab} - \frac{A}{\sin(a + ab)}$ <p>Значения:</p> $a := 2 \quad ab := 2.15 \quad A := 5.12$ $a^2 + \frac{1}{ab} - \frac{A}{\sin(a + ab)} = 10.517$
Заменить <i>a</i> на <i>c</i>

Результат

$$c^2 + \frac{1}{cb} - \frac{c}{\sin(c + cb)}$$

Дано:

$$c := 2 \quad cb := 2.15 \quad c := 5.12$$

$$c^2 + \frac{1}{cb} - \frac{c}{\sin(c + cb)} = 20.542$$

**Пример.**

Исходный документ

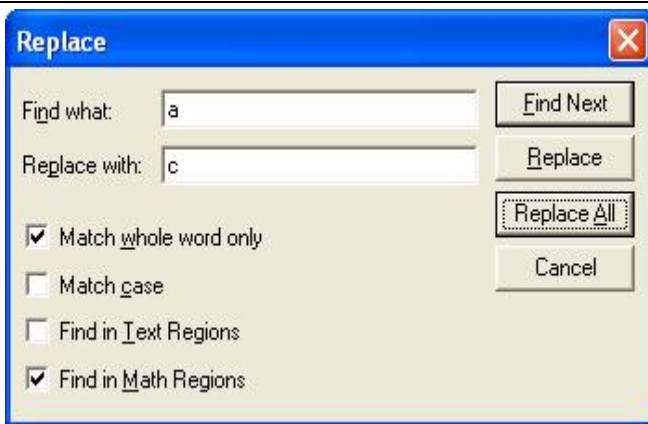
$$a^2 + \frac{1}{ab} - \frac{A}{\sin(a + ab)}$$

Дано:

$$a := 2 \quad ab := 2.15 \quad A := 5.12$$

$$a^2 + \frac{1}{ab} - \frac{A}{\sin(a + ab)} = 10.517$$

Заменить  $a$  на  $c$



Результат		
$c^2 + \frac{1}{ab} - \frac{c}{\sin(c + ab)}$		
Данные:		
$c := 2$	$ab := 2.15$	$c := 5.12$
$c^2 + \frac{1}{ab} - \frac{c}{\sin(c + ab)} = 20.542$		

### Форматирование результатов вычислений

Способ, которым *MathCAD* выводит числа, называется форматом результата. Формат результата может быть установлен для всего документа (глобальный формат) или для отдельного результата (локальный формат).

Глобальный формат устанавливается командой **Format – Result**. В диалоговом окне, появляющемся после выбора этой команды, устанавливается:

- выводимая точность числа – *Number of Decimal places*;
- диапазон показателя степени – *Exponential threshold*;
- точность нуля – *Show Trailing Zeros*.

Для установки формата отдельного результата его предварительно необходимо выделить двойным щелчком левой кнопкой мыши.

### Форматирование математических выражений

Математические выражения имеют сложную структуру. Они содержат переменные, константы, операторы и специальные знаки. С помощью команды **Format – Equation** можно назначить для переменных, надписей, чисел и других символов в математических выражениях другой шрифт и размер шрифта.

После выбора данной команды на экране появляется диалоговое окно, показанное на рисунке 3.

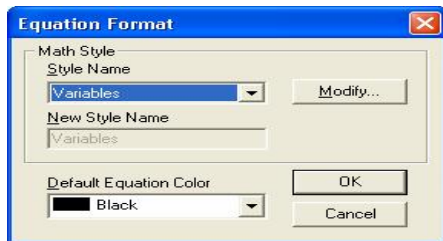


Рисунок 3 – Окно форматирования математических выражений

Рассмотрим команды данного окна:

- **Style Name** – выбор типа форматируемого объекта: переменная (*variables*), константа (*constants*);
- **Default Equation Color** – установка цвета математического выражения;
- **Modify** – кнопка, нажав которую можно открыть окно для настройки параметров шрифта выбранного объекта;
- для принятия изменений служит кнопка **Ok**, для закрытия окна форматирования результата без внесения изменений – **Cancel**.

*Примечание* – Новые параметры форматирования применяются для всех объектов одного типа (например, для всех переменных) в рамках документа.

### Форматирование текста

Команда **Format – Text** используется для установки шрифтов и их параметров. В диалоговом окне, вызываемом данной командой, можно установить следующие параметры:

- **Font** – тип шрифта;
- **Font Style** – начертание шрифта;
- **Size** – размер шрифта;
- **Effects** – видоизменение шрифта: *strikeout* (зачеркнутый), *underline* (подчеркнутый), *subscript* (подстрочный), *superscript* (надстрочный);
- **Color** – цвет текста.

### Вставка в документ колонтитулов

При печати документов нередко требуется внести в заголовок или в нижнюю строку каждой страницы документа некую служебную информацию или надпись, например имя файла, номер страницы, дату создания и др. Такие надписи называют колонтитулами. Для вставки в документ колонтитулов служит команда **Format – Headers/Footers**. Команда выводит диалоговое окно, которое содержит две вкладки: **Header** (верхний колонтитул) и **Footer** (нижний колонтитул).

Каждая вкладка содержит:

- три поля для ввода текста колонтитула (слева, по центру, справа);
- командные кнопки для автоматического занесения в колонтитул следующих данных: *Filename* (имени файла), *page#* (номера страницы), *date* (текущей даты), *time* (текущего времени);
- кнопка *Format* дает возможность выбора подходящего шрифта для текста, вводимого в область колонтитула.

*Примечание* – Колонтитулы в окне документа не видны. Они видны только в режиме предварительного просмотра и на печатных копиях документа.

Для автоматического разделения областей, с целью избегания наложения их друг на друга, используется команда **Separate Regions** меню **Format**.

Для автоматического выравнивания блоков, расположенных в одном горизонтальном ряду, используется команда **Align Regions – Across** меню **Format**.

Для автоматического выравнивания блоков, расположенных в одном горизонтальном ряду, используется команда **Align Regions – Down** меню **Format**.

### Работа с окнами документов в окне программы

Для упорядочивания окон документов, открытых в окне программы, служат команды меню *Window*:

– **CasCADE** – окна открытых документов будут расположены по диагонали;

– **The Horizontal** – окна открытых документов будут расположены одно под другим;

– **The Vertical** – окна открытых документов будут расположены рядом друг с другом;

Переключения между открытыми окнами осуществляются выбором требуемого документа из списка в меню **Window**.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 В личной папке создать каталог *MathCAD*.
- 2 Загрузить *MathCAD*.
- 3 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 1.  
Базовые операции и вычислительные конструкции. Форматирование и редактирование документа в *MathCAD*”.
- 4 Ввести текст: “Задание 1”.
- 5 В соответствии с вариантом выполнить задание 1.
- 6 Создать новый документ.
- 7 Ввести текст: “Задание 2”.
- 8 В соответствии с вариантом выполнить задание 2.
- 9 Создать новый документ.
- 10 Ввести текст: “Задание 3”.
- 11 В соответствии с вариантом выполнить задание 3.
- 12 Сохранить 1, 2 и 3-й документы в файлы *math1\_1*, *math1\_2*, *math1\_3*, соответственно.
- 13 Расположить окна документов горизонтально.
- 14 Скопировать информацию из документов *math1\_2* и *math1\_3* в *math1\_1*.
- 15 Расположить окна документов вертикально.



- 16 В файле math1\_1 создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 17 В файле math1\_1 создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 18 Отформатировать документ math1\_1:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 19 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 20 Показать преподавателю.
- 21 Распечатать документ math1\_1.
- 22 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Вычислить значение выражения для данного набора исходных данных. Задание взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 1

Вариант	Выражение
1	$a = r^3 t - b^2$ , при $r = -0,2$ $t = 2$ $b = -1,3$
2	$b = \frac{g^2 a - 3}{4 \cdot g}$ , при $a = -1,57$ $g = -1,2$
3	$a = \frac{2b^2 r}{3} - \sqrt{b}$ , при $b = 7,21$ $r = 3,6$
4	$b = \pi r^2 - 4a$ , при $r = 5$ $a = 1,2$
5	$a = g - \frac{r^5}{\sqrt{g}}$ , при $g = 3,6$ $r = 0,7$
6	$b = e^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ , при $e = 2,3$ $a = 3$
7	$b = \frac{a}{r^2 - a^2}$ , при $a = 1$ $r = 2$
8	$b = \frac{5}{3} s^2 + a$ , при $s = 4,15$ $a = -3$
9	$c = z^3 + \frac{a}{z}$ , при $z = 1,3$ $a = -6,7$
10	$a = s + \frac{l^2}{\sqrt{s}}$ , при $s = 0,3$ $l = 1,3$
11	$b = \frac{1}{3} k \sqrt[3]{r^2}$ , при $k = 1,6$ $r = 7,2$
12	$a = x^3 + \frac{1}{yx}$ , при $y = -3$ $x = 2,6$

**Задание 2.** Вычислить значение арифметического выражения для заданного набора исходных данных. Установить формат результата  $N$  знаков после запятой. Задание взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 2

Вариант	Выражение	Формат результата $N$
1	$\frac{2 \sin\left(\frac{d}{b}\right)}{b+d^{3-b}} + \frac{1}{2e^{b+d}} + \cos^2(b), \text{ при } b = 2,12 \ d = 3,13$	5
2	$\frac{\ln\left(a + \frac{b^2}{5}\right) - \sqrt{4,12 - \frac{1}{b^{-3}}}}{\sin(a) + \cos^2(b)}, \text{ при } a = 2 \ b = 1,5$	2
3	$\frac{\sin(a) + \frac{\cos^2(b-a)}{1+e^{a-\sqrt{\frac{b}{4}}}}}{b-a^2}, \text{ при } a = 1,5 \ b = 4,66$	4
4	$\frac{\ln^2\left(\frac{m}{n}\right)}{\sin(n^3 - m^3) + \frac{1}{4,55 + \cos(n^3 - m^3)}}, \text{ при } m = \frac{1}{4} \ n = 2,15$	1
5	$x^{-1} + \frac{y^2}{\sin^2(x) - \cos^2\left(\frac{x+1,15}{y-\sqrt{1,15}}\right)}, \text{ при } x = 1 \ y = \frac{1}{2}$	2
6	$\frac{a + \ln(b)}{\sin^3\left(\frac{1}{2+a^b}\right)} + \frac{\cos^3\left(a - \frac{1}{5,15 \cdot b}\right)}{4}, \text{ при } a = 0,25 \ b = 1,75$	4
7	$x + \frac{2}{3y^{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{x + \frac{2}{\sin^2\left(y - \frac{2}{3}\right)}}}, \text{ при } x = 1 \ y = 2,25$	1
8	$\sqrt[3]{\frac{a}{b + \cos^2(0,45 - a)}} + \frac{0,45}{b - \frac{\ln(a)}{a^{\cos(b)}}}, \text{ при } a = \frac{3}{4} \ b = 1,11$	5

Окончание таблицы 4

Вариант	Выражение	Формат результата N
9	$\frac{(n+m)^2}{n + \frac{1}{\cos^2(m) - \sin^2(m)}} + \sqrt{\frac{n}{m-1,12}}, \text{ при } n = 2,2 \ m = 4,2$	2
10	$\frac{a}{b + 5^{a-5}} - \frac{1 - \frac{2}{3\sqrt{a+b}}}{\cos(b) + \sin^2(a)}, \text{ при } a = 1,15 \ b = 5,15$	4
11	$\frac{x^y + y^x}{\sin(x) - \sin(y)} + \frac{1}{2 + \sqrt{x+y}} \frac{2 - \cos^2(x)}{2 + \sqrt{x+y}}, \text{ при } x = 3 \ y = 1,5$	0
12	$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} + \frac{1}{\sin^2(a+b)} + \frac{\cos^3(a - \sqrt{b})}{\frac{1}{4}}, \text{ при } a = 0,5 \ b = 0,75$	1

**Задание 3.** Ввести в документ текст задачи и решить ее. Задание взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 3

Вариант	Задание
1	Вычислить плотность вещества $\rho$ , если его масса $m = 200$ г, а объем $V = 10 \text{ см}^3$
2	Вычислить площадь параллелограмма, заданного следующими параметрами: $a = 200$ см, $b = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$
3	Вычислить объем вещества, если его масса $m = 200$ г, а плотность $\rho = 0,55 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
4	Вычислить радиус основания цилиндра, заданного следующими параметрами: $V = 50 \text{ см}^3$ , $H = 4$ см
5	Вычислить массу вещества, заданного следующими параметрами: объем $V = 50 \text{ см}^3$ , плотность $\rho = 40 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
6	Вычислить площадь трапеции, заданной следующими параметрами: $a = 200$ см, $b = 1,5$ м, $h = 170$ см
7	Вычислить площадь треугольника, заданного следующими параметрами: $a = 200$ см, $b = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$
8	Вычислить площадь треугольника, заданного следующими параметрами: $a = 200$ см, $b = 3$ м, $c = 400$ см

Окончание таблицы 5

Вариант	Задание
9	Вычислить скорость движения пешехода, если за время $t = 30$ мин он проходит расстояние $S = 2,121$ км
10	Вычислить объем $V$ цилиндра, заданного следующими параметрами: $r = 1,2$ м, $h = 5$ м
11	Вычислить объем $V$ цилиндра, заданного следующими параметрами: $d = 1,2$ м, $h = 5$ м
12	Вычислить объем $V$ шара, заданного следующими параметрами: $d = 1,2$ м

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Из каких областей состоит документ *MathCAD*?
- 2 Каков порядок вычислений в *MathCAD*?
- 3 Локальный и глобальный операторы присваивания. Назначение. Комбинация клавиш для ввода.
- 4 Основные правила набора формул.
- 5 Дать определение текстовой области. Как создать текстовый регион?
- 6 Режимы вычислений в *MathCAD*.
- 7 Как осуществляется вставка размерности физических величин?
- 8 Как вывести в окно панель инструментов *Math*?

### Лабораторная работа № 2

#### РАНЖИРОВАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

*Цель работы:* научиться применять ранжированные переменные для решения конкретных задач, а также создавать и форматировать декартовы графики в системе *MathCAD*.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

#### Определение функций в *MathCAD*

**Функция** – выражение, согласно которому проводятся некоторые вычисления с его аргументами, и определяется его числовое значение. Функции в *MathCAD* могут быть встроенными или определенными пользователем.

Для облегчения ввода математических функций служит кнопка  $f(x)$  на панели инструментов или команда **Insert – Function** ( $Ctrl+E$ ), которая выводит окно с полным перечнем функций, разбитым на тематические разделы.

**Определение функции пользователя** осуществляется по следующей схеме:

$$\text{Function\_name}(\text{List of arguments}) := \text{Equation}$$

где *Function\_name* – имя функции (вводится пользователем);

*List of arguments* – список аргументов функции, записанных через запятую. Аргументы могут иметь численное значение, быть константой, определенной ранее переменной или математическим выражением, возвращающим численное значение;

*Equation* – любое выражение, содержащее доступные системе операторы и функции с операндами и аргументами, указанными в списке аргументов.

### Ранжированные переменные

**Ранжированная переменная** определяет ряд значений, в котором каждый последующий элемент отличается от предыдущего на величину шага.

Определение ранжированной переменной можно осуществлять как в сокращенном, так и в полном формате, в зависимости от постановки задачи.

**В сокращенном формате** ранжированная переменная определяется так:

$$\text{Name} := N_{begin} .. N_{end} ,$$

где *Name* – имя ранжированной переменной (вводится пользователем);

$N_{begin}$  – начальное значение переменной;

$N_{end}$  – конечное значение переменной;

Если  $N_{begin} < N_{end}$ , то шаг изменения переменной будет равен +1, в противном случае – 1;

.. – команда – диапазон: вводится клавишей “двоеточие” на клавиатуре в английском регистре или командой *m..n* на математической панели инструментов.

**В полном формате** ранжированная переменная определяется так:

$$\text{Name} := N_{begin} , N_{begin} + \text{Step} .. N_{end} ,$$

где *Step* – шаг изменения переменной: разность между предыдущим и последующим значением. Шаг должен быть положительным, если  $N_{begin} < N_{end}$ , или отрицательным в противном случае.

### Применение ранжированных переменных

1 Используются для расчета значений функции на заданном интервале в конкретных расчетных точках.

2 Применяются в массивах в качестве индекса элемента.

**Пример.** Вывести ряд значений переменной  $x \in [5; 25]$ ,  $dx = 3,1$ .

<p><math>x := 5, 5 + 3.1.. 25</math></p> <p><math>x =</math></p> <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8.1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11.2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">14.3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">17.4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">20.5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">23.6</td></tr> </table>	5	8.1	11.2	14.3	17.4	20.5	23.6	<p><math>x := 5, 8.1.. 25</math></p> <p><math>x =</math></p> <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8.1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11.2</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">14.3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">17.4</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">20.5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">23.6</td></tr> </table>	5	8.1	11.2	14.3	17.4	20.5	23.6
5															
8.1															
11.2															
14.3															
17.4															
20.5															
23.6															
5															
8.1															
11.2															
14.3															
17.4															
20.5															
23.6															

**Пример.** Вывести ряд значений переменной  $b \in [5; 8]$ ,  $db = 1$ .

$b := 5.. 8$	Определение переменной $b$				
$b =$					
<table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">5</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">8</td></tr> </table>	5	6	7	8	Вывод значений переменной $b$
5					
6					
7					
8					

**Пример.** Вывести ряд значений переменной  $b \in [5; 8]$ ,  $db = -1$

$b := 8.. 5$	Ôðàààèàíèà òàðàíàííé	$b$				
$b =$						
<table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">8</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">7</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	8	7	6	5	Âùàîà çíà÷àíéè òàðàíàííé	$b$
8						
7						
6						
5						

**Пример.** Вычислить значение функции

$$y(a) = a^2 - 4a, \text{ в точках } -3 \leq a \leq 12, da = 2,14.$$

$a := -3, -3 + 2.14.. 12$       Определение переменной  $a$

$y(a) := a^2 - 4 \cdot a$       Определение функции  $y(a)$

$a =$        $y(a) =$       Вывод расчетных значений  $a$  и  $y(a)$

-3
-0.86
1.28
3.42
5.56
7.7
9.84
11.98


21
4.18
-3.482
-1.984
8.674
28.49
57.466
95.6

### Построение графика в декартовой системе координат

Существуют две базовые схемы построения декартового графика:

- 1) с предварительным указанием области определения функции (ООФ);
- 2) без предварительного указания ООФ.

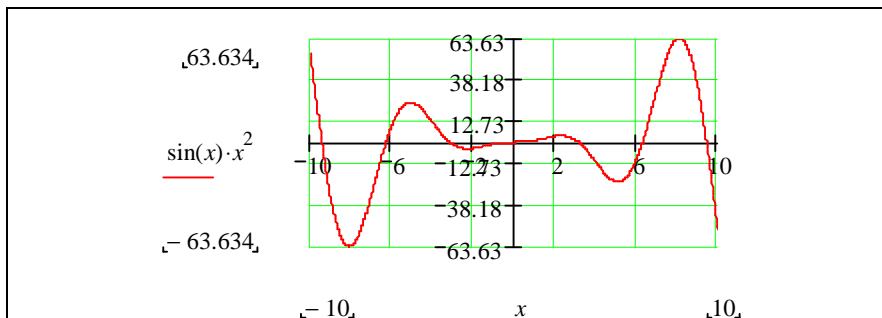
И в том, и в другом случае для построения графика используется специальный шаблон, вывести на экран который можно так:

- 1 Командой главного меню **Insert – Graph – XY-Plot**.
- 2 Комбинацией клавиш **Shift + @**.
- 3 Командой  на панели *Graph*.

Шаблон заполняется следующими основными данными:

- 1) в центральный маркер по оси абсцисс записывается аргумент функции (имя переменной);
- 2) в центральный маркер по оси ординат записывается функция. Запись функции в шаблон осуществляется сокращенно  $f(x)$ , если она была определена заранее или в виде зависимости, например,  $x^2 + 5x$ .

**Пример.** Построить график функции  $s(x) = \sin(x) \cdot x^2$ .



**Пример.** Построить график функции  $f(x) = \cos(x) \cdot x$  на интервале  $x \in [0; 3\pi]$

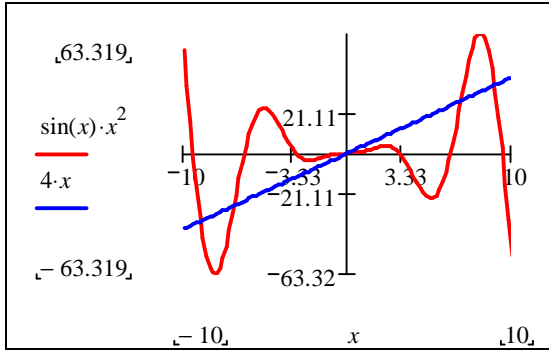
1-й вариант решения	2-й вариант решения
<p>Область определения функции <math>x := 0, 0.1.. 3\pi</math></p> <p>Описание функции <math>f(x) := \cos(x) \cdot x</math></p> <p>Построение графика</p>	<p>Область определения функции <math>x := 0, 0.1.. 3\pi</math></p> <p>Построение графика</p>

*Примечание* – Для построения на одном графике нескольких функциональных зависимостей необходимо ввести соответствующие функции по оси ординат через запятую.

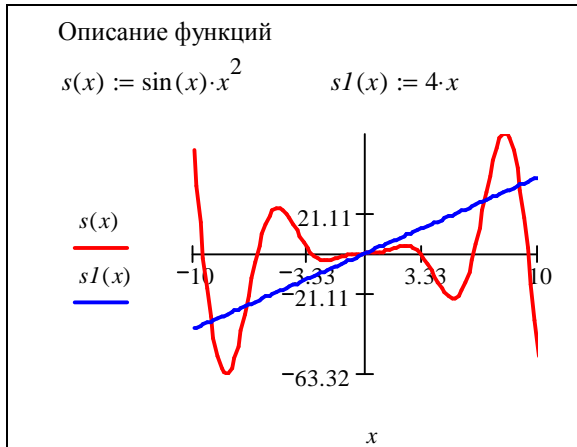
**Пример.** Построить на одной координатной сетке две зависимости:  $s(x) = \sin(x) \cdot x^2$  и  $s1(x) = 4x$ .



### 1-й вариант решения



### 2 -й вариант решения



## Форматирование и редактирование декартовых графиков

### Редактирование графиков

Изменение размеров графика осуществляется при помощи размерных маркеров, расположенных по его периметру (рисунок 1).

Изменение области значений функции или области определения функции осуществляется при помощи специальных полей, находящихся в шаблоне графика (см. рисунок 1).

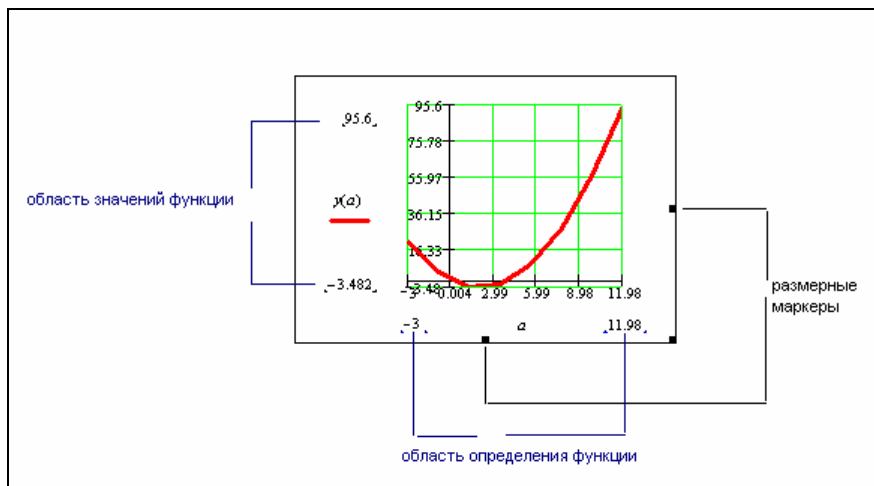


Рисунок 1 – Изменение ОЗФ и ООФ

### Форматирование графиков

Для форматирования графика используется команда **Format – Graph – XY Plot**. Двойной щелчок мышкой по графику, также приведет к вызову окна диалога форматирования графика.

Окно диалога форматирования графика состоит из вкладок, с наборами команд, устанавливающих те или иные параметры форматирования.

На первой вкладке (*X-Y Axis*) расположены команды форматирования осей графика (*x-axis* – ось абсцисс; *y-axis* – ось ординат). В таблице 1 приведен перечень команд для форматирования осей.

Таблица 1 – Форматирование осей

Команда	Описание
<i>Log Scale</i>	Установка по оси логарифмической шкалы
<i>Grid Lines</i>	Установка на оси вспомогательных линий
<i>Numbered</i>	Нумерация оси
<i>AutoScale</i>	Автомасштабирование оси
<i>Show Markers</i>	Установка по оси режима показа меток
<i>AutoGrid</i>	То же автосетки
<i>Numbered of Grids</i>	" размера сетки
<i>Equal Scale</i>	Установка по осям равных масштабов
<i>Boxed</i>	Вывод графика в рамке без осей
<i>Crossed</i>	То же без рамки с осями
<i>None</i>	" без рамки и без осей

На второй вкладке (*Traces*) находятся команды форматирования непосредственно графика. В таблице 2 приведен перечень команд для форматирования графика.

Таблица 2 – Форматирование графика

Команда	Описание
<i>Legend Label</i>	Легенда (название) линии графика
<i>Symbol</i>	Обозначение точек графика ( <i>box</i> – квадрат, <i>dmnd</i> – ромб и т. п.)
<i>Line</i>	Тип линии (применяется для графиков вида линия – <i>lines</i> , либо сглаженная линия – <i>draw</i> ): – <i>solid</i> – сплошная; – <i>dot</i> , <i>dash</i> – пунктирная; – <i>dadot</i> – штрих-пунктирная
<i>Type</i>	Тип графика: – <i>lines</i> – линия; – <i>points</i> – точками; – <i>bar</i> – гистограмма; – <i>step</i> – ступенчатая диаграмма; – <i>stem</i> – столбцовая диаграмма; – <i>draw</i> – сглаженная линия
<i>Weight</i>	Толщина линии графика (только для линейных графиков)
<i>Color</i>	Цвет графика

На третьей вкладке (*Labels*) устанавливаются названия осей и именуется сам график. В таблице 3 приведен перечень соответствующих команд.

Таблица 3 – Форматирование заголовков на графике

Команда	Описание
<i>Title</i>	Текстовое поле для ввода названия графика
<i>Above, Below</i>	Переключатель, устанавливающий расположение названия графика
<i>Show Title</i>	Флажок, управляющий выводом заголовка графика на экран
<i>X-Axis Y-Axis</i>	Текстовые поля для ввода заголовков осей соответственно X и Y

*Примечание* – Операции редактирования и форматирования применяются к выделенному графику.

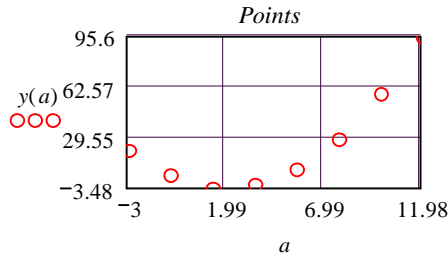
**Пример.** Построить график функции. Тип графика – точечный.  
 $y(a) = a^2 - 4a$ , на интервале  $-3 \leq a \leq 12$   $da = 2,14$ .

Çáäääèì íáèàñòù ìððáääèáíèý ðóíèòèè:

$$a := -3, -3 + 2.14.. 12$$

Îèøàì ðóíèòèèíáèüíð çàèèñèìñòù:

$$y(a) := a^2 - 4a$$



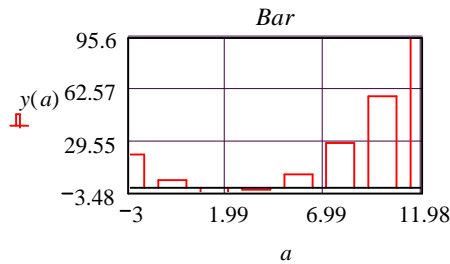
**Пример.** Построить гистограмму значений  $y(a)$ .

Çáäääèì íáèàñòù ìððáääèáíèý ðóíèòèè:

$$a := -3, -3 + 2.14.. 12$$

Îèøàì ðóíèòèèíáèüíð çàèèñèìñòù:

$$y(a) := a^2 - 4a$$



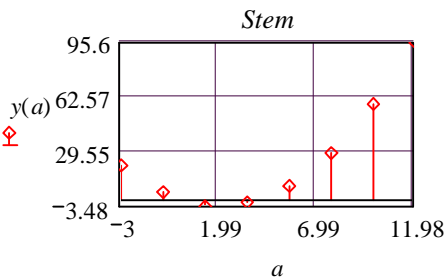
**Пример.** Построить столбцовую диаграмму значений  $y(a)$ .

Çáäääèì íáèàñòù ìððáääèáíèý ðóíèòèè:

$$a := -3, -3 + 2.14.. 12$$

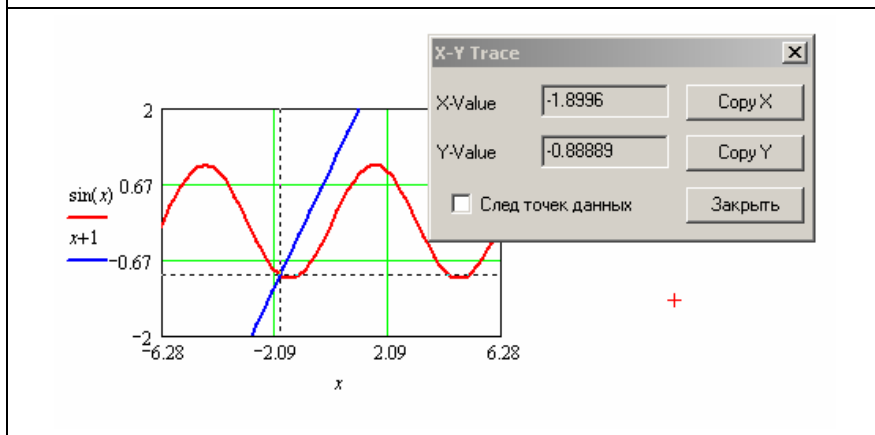
Îèøàì ðóíèòèèíáèüíð çàèèñèìñòù:

$$y(a) := a^2 - 4a$$

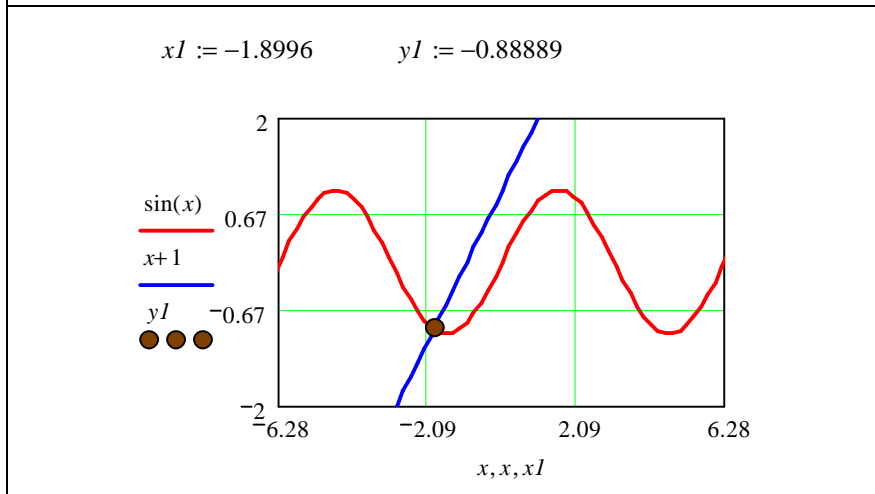


**Пример.** Найти точки пересечения двух кривых. Отметить найденные точки на графике.  $y(x) = \sin(x)$ ;  $y1(x) = x + 1$ ;  $x \in [-2\pi; 2\pi]$ .

Построим график функции, и с помощью функции *Trace* контекстного меню определим последовательно координаты точек пересечения графиков.



Отметим найденную координату на графике



*Примечания*

1 Для поиска координат точек пересечения кривых использовалась команда контекстного меню **Trace**.

2 Обратите внимание на количество параметров, установленных по осям в итоговом графике!

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 2.  
Ранжированные переменные. Построение графиков функций”.
- 3 Ввести текст: “Задание 1”.
- 4 В соответствии с вариантом выполнить задание 1.
- 5 Ввести текст: “Задание 2”.
- 6 В соответствии с вариантом выполнить задание 2.
- 7 Ввести текст: “Задание 3”.
- 8 В соответствии с вариантом выполнить задание 3.
- 9 Ввести текст: “Задание 4”.
- 10 В соответствии с вариантом выполнить задание 4.
- 11 Ввести текст: “Задание 5”.
- 12 В соответствии с вариантом выполнить задание 5.
- 13 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО,  
по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 14 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 15 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 16 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 17 Сохранить документ в файл *math2*.
- 18 Показать преподавателю.
- 19 Распечатать документ.
- 20 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Определить ранжированные переменные и вывести таблицы полученных значений. Вариант задания взять из таблицы 4.

*Таблица 4 – Задание 1*

Вариант	Задание
1	$-14 \leq a \leq 14, \quad da = 3,2; \quad c \in [15; 5], \quad dc = -1;$ $-2 \leq b \leq 12, \quad db = \frac{\sin(2)}{2}$
2	$-10 \leq a \leq 10, \quad da = 1,25; \quad c \in [3; 9], \quad dc = 1;$ $-12 \leq b \leq 1, \quad db = \frac{\ln(2)+3}{3}$
3	$-5 \leq a \leq 5, \quad da = 2,15; \quad c \in [14; 4], \quad dc = -1;$ $2 \leq b \leq 18, \quad db = \frac{\cos(2)+1}{\sqrt{2}}$

Окончание таблицы 4

Вариант	Задание
4	$-3 \leq a \leq 3, da = 0,45; c \in [2;12], dc = 1;$ $-4 \leq b \leq -3, db = \frac{\sin(3)}{\sqrt{3}}$
5	$-1 \leq a \leq 11, da = 1,13; c \in [9;3], dc = -1;$ $-14 \leq b \leq 0, db = \frac{3 - \ln(2)}{2}$
6	$-\frac{15}{4} \leq a \leq \frac{15}{4}, da = 0,7; c \in [0;8], dc = 1;$ $1 \leq b \leq 10, db = \frac{\ln(2)^2 + 2}{2}$
7	$-12 \leq a \leq -2, da = 0,8; c \in [11;1], dc = -1;$ $1 \leq b \leq 5, db = \frac{\cos(2)}{3} + 0,5$
8	$-5 \leq a \leq 0, da = 0,22; c \in [4;15], dc = 1;$ $-8 \leq b \leq -7, db = \frac{\sin(3)}{\sqrt{5}}$
9	$7 \leq a \leq 17, da = 1,44; c \in [-19; -9], dc = -1;$ $-7 \leq b \leq 0, db = \frac{\sqrt{3}}{\ln(4)}$
10	$-4 \leq a \leq 6, da = 1,11; c \in [0;10], dc = 1;$ $-\sqrt{5} \leq b \leq \sqrt{5}, db = \frac{1}{4}$
11	$-3 \leq a \leq 6, da = 1,5; c \in [10;4], dc = -1;$ $-0.5 \leq b \leq 1.5, db = \frac{1}{3^2}$
12	$-1 \leq a \leq 6, da = 0,8; c \in [2;12], dc = 1;$ $-3 \leq b \leq 5, db = \frac{\sqrt{2}}{3}$

**Задание 2.** Вычислить значение функции в заданных точках. Вариант задания взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 2

Вариант	Задание
1	$y(x) = \frac{x-5}{x^2} + \frac{x^2}{x+5},$ при $x \in [-6,1;7] dx = 1,5$

Окончание таблицы 5

Вариант	Задание
2	$y(b) = (b + 2)^3 + \sin(b)b^2$ , при $b \in [0; 5]$ $db = 0,2$
3	$f(x) = x^{\sin(x)+\cos(x)} - 5$ , при $x \in [5; 15]$ $dx = 1,3$
4	$y(a) = \frac{a^2 - \sin(4a)\sqrt{a+10}}{5}$ , при $a \in [-10; 5]$ $da = 1,15$
5	$y(x) = 2 - e^{\cos(2 \cdot x)}$ , при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $dx = \frac{\pi}{12}$
6	$f(b) = 2^{\cos(b)} + \frac{b}{5}$ , при $b \in [-3; 7]$ $db = 0,75$
7	$y(x) = 2^{\cos(x)} + 4\sin(x)$ , при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $dx = \frac{\pi}{13}$
8	$f(x) = x + \sin(x - 2)$ , при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $dx = \frac{\pi}{11}$
9	$a(b) = b^{\sin(b)-2} - 2$ , при $b \in [0; 1; 12]$ $db = 1,13$
10	$y(x) = x^3 - \sin(x) - 3$ , при $x \in [-4; 10]$ $dx = 1,3$
11	$y(b) = \frac{1}{b^2} - \cos(b) - 3$ , при $b \in [-5; 8]$ $db = 1,5$
12	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x + 0,2}$ , при $x \in [-\pi; \pi]$ $dx = \frac{\pi}{8}$

**Задание 3.** Построить график функции из задания 2, на котором установить по своему варианту: линии сетки –  $N$ , цвет линии графика, тип линии графика, толщину –  $W$ . Кроме того, самостоятельно сформировать заголовки осей. Вариант задания взять из таблицы 6.

Таблица 6 – Задание 3

Вариант	Количество линий сетки по осям $N$	Толщина линии графика $W$	Тип линии графика	Цвет линии графика
1	4	3	Пунктирная	Синий
2	5	4	Штрихпунктирная	Сиреневый
3	6	5	Пунктирная	Голубой
4	7	2	Штрихпунктирная	Коричневый
5	4	3	Пунктирная	Синий
6	5	4	Штрихпунктирная	Сиреневый
7	6	5	Пунктирная	Голубой
8	7	3	Штрихпунктирная	Коричневый
9	4	4	Пунктирная	Синий
10	5	5	Штрихпунктирная	Сиреневый
11	6	2	Пунктирная	Голубой
12	7	4	Штрихпунктирная	Коричневый



**Задание 4.** Скопировать полученный график и изменить его тип. Вариант задания взять из таблицы 7.

Таблица 7 – Задание 4

Вариант	1, 5, 9	2, 6, 10	3, 7, 11	4, 8, 12
Тип графика	Точечный	Гистограмма	Ступенчатая диаграмма	Столбцовая диаграмма

**Задание 5.** Определить координаты точек пересечения двух кривых. Отметить точки пересечения на графике. Вариант задания взять из таблицы 8. Область определения функции для всех вариантов  $x \in [-10; 10]$ .

Таблица 8 – Задание 5

Вариант	Задание
1	$y(x) = x^2 - 3; \quad y1(x) = x + 5$
2	$y(x) = 5 \cos(x); \quad y1(x) = -x^2 + 7$
3	$y(x) = 5 \sin(x); \quad y1(x) = x + 8$
4	$y(x) = \sqrt{x} + 5; \quad y1(x) = 15 \cos(x)$
5	$y(x) = 3x - 3; \quad y1(x) = 15 \sin(x)$
6	$y(x) = x + 2; \quad y1(x) = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
7	$y(x) = -x; \quad y1(x) = 4 \cos(x)$
8	$y(x) = \ln(x) + 1,3; \quad y1(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$
9	$y(x) = x - 7; \quad y1(x) = 7 \cos(x)$
10	$y(x) = x^2 - 12; \quad y1(x) = 12 \cos(x) + \sin(x)$
11	$y(x) = -7,5; \quad y1(x) = -x^2$
12	$y(x) = -15x^2 + 150; \quad y1(x) = -x^3 + 50$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Что такое ранжированная переменная?
- 2 Для чего используются ранжированные переменные?
- 3 Описание ранжированной переменной (полная схема).
- 4 Как вызвать шаблон построения двумерного графика?
- 5 Как построить на одном графике несколько функций?
- 6 Как установить сетку на графике?
- 7 Как изменить тип графика?
- 8 Как изменить тип линии графика? Какие типы линий используются?

## Лабораторная работа № 3

### МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА

*Цель работы:* изучить векторные и матричные операторы и функции и применить полученные знания на практике.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

##### Типы массивов в MathCAD

Ранжированная переменная отличается от вектора тем, что невозможно использование ее отдельных значений: она существует “вся сразу”, то есть к отдельным ее значениям доступа нет.

При необходимости иметь доступ к каждому значению переменной с несколькими компонентами она должна быть задана в виде массива – одномерного (вектора) или двумерного (матрицы). Массив, как и любая другая переменная, задается именем. Местоположение элемента задается одним индексом для вектора или двумя индексами для матрицы.

Нижняя граница индексации определяется системной переменной *ORIGIN*, которая может принимать значение 0 или 1 (по умолчанию значение равно 0). Индексы могут быть только целыми положительными числами и нулем. Для ввода индекса используется команда  $\times_n$  на панели “Матрицы” или прямая открывающаяся скобка [ на клавиатуре.

*Примечание* – Для удобства работы с матрицами и векторами системной переменной *ORIGIN* присваивают значение, равное 1. Присвоение осуществляется обычным способом в теле документа или с использованием команды *Math – Options*.

##### Создание векторов и матриц

Векторы и матрицы формируются одним из двух способов:

- при помощи ранжированных переменных, задающих нумерацию их элементов;
- при помощи специальных шаблонов, для создания которых используется команда **Insert – Matrix** (*Ctrl+M*).

**Пример.** Создать матрицу *A*, состоящую из 2 строк и 3 столбцов, при помощи ранжированных переменных.

```
ORIGIN := 1
```

```
i := 1..2
```

```
j := 1..3
```

Введем элементы матрицы. Ввод каждого последующего элемента осуществляется через запятую.

$A_{i,j} :=$

1
2
5
7
8
9

Результат:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

**Пример.** Создать матрицу A, состоящую из 2 строк и 3 столбцов, при помощи специального шаблона.


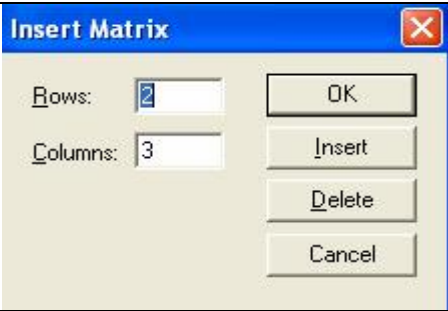
Присвоить переменной <i>ORIGIN</i> значение, равное 1	$ORIGIN := 1$
Ввести имя массива и оператор присваивания	$A := \blacksquare$
Вызвать диалоговое окно построения шаблона матрицы командой <b>Insert</b> – <b>Matrix</b> или командной кнопкой 	
Указать количество строк – <b>Rows</b> и столбцов – <b>Columns</b> матрицы	
Ввести значения элементов матрицы	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$



Таблица 2 – Векторные функции

Функция	Описание
$length(V)$	Возвращает длину вектора
$last(V)$	Возвращает индекс последнего элемента вектора
$reverse(V)$	Изменяет порядок расположения элементов вектора на противоположный
$sort(V)$	Сортирует элементы вектора в порядке возрастания их значений

Таблица 3 – Матричные функции

Функция	Описание
$augment(M1, M2)$	Объединяет в одну матрицы $M1$ и $M2$ , имеющие одинаковое число строк
$stack(M1, M2)$	Объединяет две матрицы $M1$ и $M2$ , имеющие одинаковое число столбцов
$identity(n)$	Создает единичную квадратную матрицу размером $n \times n$
$diag(V)$	Создает диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой являются элементами вектора $V$
$cols(M)$	Возвращает число столбцов матрицы $M$
$rows(M)$	Возвращает число строк матрицы $M$
$rank(M)$	Возвращает ранг матрицы $M$
$tr(M)$	Возвращает сумму диагональных элементов квадратной матрицы $M$
$mean(M)$	Возвращает среднее значение элементов массива $M$
$csort(M, n)$	Осуществляет перестановку строк матрицы таким образом, чтобы отсортированным оказался $n$ -й столбец
$rsort(M, n)$	Осуществляет перестановку столбцов матрицы таким образом, чтобы отсортированной оказалась $n$ -я строка

Таблица 4 – Общие функции

Функция	Описание
$max(M)$	Возвращает максимальный по значению элемент массива
$min(M)$	Возвращает минимальный по значению элемент массива

**Пример.** Создать матрицу  $B$  размером 2 строки и 2 столбца. Выполнить над матрицей следующие действия:

- вычислить определитель;
- транспонировать;
- вычислить обратную матрицу.

Ñíçááíéá ìàòðèòù  $B$ :  $B := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

Ïèñè ìðáááèèòàèý:  $|B| = 39$

Òðáíííèðíááíéá ìàòðèòù:  $B^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Ïèñè ìàðàðíé ìàòðèòù:  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.231 & -0.154 \\ 0.051 & 0.077 \end{pmatrix}$

**Пример.** Создать матрицу  $D$ , состоящую из 2 строк и 2 столбцов и матрицу  $C$ , состоящую из 2 строк и 3 столбцов.

Выполнить над матрицей следующие действия:

- перемножить матрицы и результат записать в матрицу  $A$ ;
- объединить матрицы  $D$  и  $C$  по строкам;
- найти минимальный элемент матрицы  $D$ ;
- найти сумму отрицательных элементов матрицы  $A$ .

*ORIGIN* := 1

Исходные матрицы:  $D := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$   $C := \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Создание матрицы  $A$ :  $A := D \cdot C$   $A = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 82 \\ -35 & 21 & 65 \end{pmatrix}$

Объединение матриц  $C$  и  $D$  по строкам:

$\text{augment}(D, C) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & -5 & 7 \\ -1 & 8 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Поиск минимального элемента матрицы  $D$ :

$\min(D) = -1$

Поиск суммы отрицательных элементов матрицы  $A$ :

$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \text{if}(A_{i,j} < 0, A_{i,j}, 0) = -55$

**Пример.** Создать вектор  $S$ , состоящий из пяти элементов, при помощи ранжированной переменной. Выполнить сортировку элементов вектора по возрастанию, а затем в обратном порядке.

```

ORIGIN := 1

i := 1.. 5      i ÷ ðàíàíàÿ      i ÷ ðàààèÿàð ïíàð ÿèàíàíà à ààèèððà

Ввод элементов вектора:

Si :=

```

-10
5
9
-5
18

Ñíððèðíàèà ÿèàíàíà ààèèððà ïí  
àíçðàñðàíèð çíà÷àíèé:

$$\text{sort}(S) = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 5 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Ñíððèðíàèà ÿèàíàíà ààèèððà ïí  
óáúààíèð çíà÷àíèé:

$$\text{reverse}(\text{sort}(S)) = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 5 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

*Примечание* – Для вычисления суммы отрицательных элементов матрицы использовалась условная функция *if*, имеющая следующий формат: *if*(условие, действие\_true, действие\_false). Для формирования условия используются операции сравнения и логические функции, расположенные на панели *Boolean* (таблица 5).

**Таблица 5 – Операции сравнения и логические функции**

Команда	Описание	Клавиатурный ввод
Операции сравнения		
=	Равно	“Ctrl” + “=”
<	Меньше	<
>	Больше	>

Окончание таблицы 5

Команда	Описание	Клавиатурный ввод
Операции сравнения		
$\leq$	Меньше или равно	“Ctrl” + “9”
$\geq$	Больше или равно	“Ctrl” + “0”
$\neq$	Не равно	“Ctrl” + “3”
Логические функции		
$\neg$	Логическое отрицание	Not или “Ctrl” + “Shift” + “1”
$\wedge$	Логическое умножение	And или “Ctrl” + “Shift” + “7” или *
$\vee$	Логическое сложение	Or или “Ctrl” + “Shift” + “6” или +

### Поиск суммы и произведения элементов массивов

Для поиска суммы или произведения элементов массивов используются операторы, описанные в таблице 6.

Таблица 6 – Операторы суммы и произведения

Оператор	Описание
$\sum_{n=1}^m$	Суммирование элементов массива по указанным индексам
$\prod_{n=1}^m$	Перемножение элементов массива по указанным индексам

### Решение линейных систем уравнений матричным способом

В систему *MathCAD* встроены средства для решения как линейных, так и нелинейных систем уравнений. Для решения систем линейных уравнений (1) применяют метод обратной матрицы.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Для заданной системы уравнений (1) вектор решений  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$  находится по

формуле

$$x = A^{-1} \cdot B, \quad (2)$$

где *A* – матрица коэффициентов при неизвестных,



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$B$  – вектор-столбец свободных членов,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (4)$$

*Примечания*

1 Для поиска решения системы линейных уравнений в *MathCAD* введена встроенная функция  $lsolve(A,B)$ .

2 Если уравнений в системе  $n$ , то размер вектора  $B$  должен быть равен  $n$ , а матрицы  $A$  –  $n \times n$ .

**Пример.**

Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases} \quad \text{методом}$$

обратной матрицы.

Ἰὰ δὲ ὁὰ εἶνυ ὁ δὲ εἰσὶ ὁἰὰ ἰδὲ ἰὰ εἰσὶ ἰὸν ἰὸν:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ἀὰ εἰ ὁἰδὲ ἰὸν ἰὸν ἰὸν:

$$B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ἀὰ εἰ ὁἰδὲ ἰὸν ἰὸν ἰὸν:

$$x := A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ἰὸν ἰὸν ἰὸν:  $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 5$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 3. Матричная алгебра”.
- 3 В соответствии с вариантом выполнить задание № 1. Выполнение задания сопровождать текстовыми комментариями. Вариант задания выбрать из таблицы 7.
- 4 В соответствии с вариантом выполнить задание № 2. Выполнение задания сопровождать текстовыми комментариями. Вариант задания выбрать из таблицы 8.
- 5 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 6 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 7 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 8 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 9 Сохранить документ в файл math3.
- 10 Показать преподавателю.
- 11 Распечатать документ.
- 12 Сформировать отчет.

Таблица 7 – Задание 1

Вариант	Задание
1	Создать квадратную матрицу $A$ размерностью 4. Получить матрицу $B$ , транспонировав $A$ . Найти сумму максимального элемента матрицы $A$ и минимального элемента матрицы $B$ . Найти сумму элементов главной диагонали матрицы $B$ . Найти произведение элементов 2-го столбца матрицы $A$ , больших числа 3
2	Создать матрицу $C$ размером $(2 \times 3)$ и $D$ размером $(2 \times 4)$ . Объединить исходные матрицы в одну. В полученной матрице найти среднее значение элементов. Найти произведение максимального элемента матрицы $C$ и минимального элемента матрицы $D$ . Найти сумму положительных элементов 1-й строки матрицы $C$
3	Создать квадратную матрицу $B$ размерностью 5. Создать единичную матрицу $E$ размерностью 5. Создать матрицу $C$ путем поэлементного сложения матриц $B$ и $E$ . В полученной матрице найти сумму элементов главной диагонали. В матрице $B$ найти минимальный элемент. Выполнить сортировку в порядке возрастания значений элементов 4-го столбца матрицы $B$
4	Создать матрицу $B$ размером $(2 \times 3)$ и квадратную матрицу $A$ размерностью 3. Объединить исходные матрицы в одну. Найти ранг полученной матрицы. Найти произведение отрицательных элементов 1-го столбца матрицы $A$ . Найти определитель матрицы $A$ . Выполнить сортировку в порядке убывания значений элементов 1-й строки матрицы $B$

Окончание таблицы 7

Вариант	Задание
5	Создать квадратную матрицу $A$ размерностью 4. Получить матрицу $B$ , инвертировав $A$ . Найти произведение матриц $A$ и $B$ . Найти сумму элементов главной диагонали в полученной матрице. Найти частное от деления определителя матрицы $A$ на минимальный элемент матрицы $B$ . Осуществить перестановку строк матрицы $A$ так, чтобы отсортированным оказался 3-й столбец
6	Создать матрицу $F$ размером $(3 \times 4)$ и $N$ размером $(3 \times 2)$ . Получить матрицу $M$ , объединив исходные матрицы. Определить количество столбцов в полученной матрице. Транспонировать матрицу $M$ . Найти максимальный элемент матрицы $M$ . Выполнить сортировку в порядке возрастания значений 2-го столбца матрицы $M$
7	Создать квадратную матрицу $B$ размерностью 4. Создать вектор $V$ , состоящий из 4 элементов при помощи ранжированной переменной. Создать диагональную матрицу $D$ из элементов вектора $V$ . Транспонировать матрицу $B$ . Найти сумму диагональных элементов матрицы $D$ . Найти сумму элементов матрицы $B$ , значения которых принадлежат интервалу $[-3; 4]$
8	Создать матрицу $A$ размером $(4 \times 3)$ и вектор-столбец $C$ размером $(4 \times 1)$ . Сортировать элементы вектора $C$ в порядке убывания их значений. Получить матрицу $P$ путем объединения исходных массивов. Вычислить определитель матрицы $P$ . В матрице $P$ вычислить среднее значение ее элементов. Осуществить перестановку столбцов матрицы $A$ так, чтобы отсортированной оказалась 2-я строка
9	Создать вектор $V$ , состоящий из 5 элементов при помощи ранжированной переменной. Создать диагональную матрицу $D$ из элементов вектора $V$ . Найти произведение элементов матрицы $D$ , стоящих на главной диагонали. Найти минимальный элемент вектора $V$ . Получить матрицу $F$ , инвертировав $D$ . Объединить полученные матрицы в одну
10	Создать квадратные матрицы $C$ и $B$ размерностью 3. Найти произведение определителей исходных матриц. Получить матрицу $D$ , объединив исходные массивы по столбцам. Найти минимальный элемент матрицы $D$ . Найти сумму элементов последнего столбца матрицы $D$ , равных минимальному значению. Сортировать элементы первой строки матрицы $C$ в порядке возрастания их значений
11	Создать вектор-строку $C$ размером $(1 \times 3)$ и вектор-столбец $B$ размером $(3 \times 1)$ . Получить матрицу $D$ , перемножив исходные массивы. В полученной матрице найти максимальный элемент. Найти произведение элементов матрицы $D$ , не равных максимальному значению. Найти определитель матрицы $D$ . Осуществить перестановку столбцов матрицы $D$ так, чтобы отсортированной оказалась 1-я строка
12	Создать вектор $V$ , состоящий из 4 элементов, при помощи ранжированной переменной. Создать диагональную матрицу $D$ из элементов вектора $V$ . Найти ранг матрицы $D$ . Создать квадратную матрицу $A$ , размерностью 4. Найти сумму элементов матрицы $A$ , значения которых меньше, чем значение ранга матрицы $D$ . Сортировать элементы вектора $V$ в порядке убывания их значений

Таблица 8 – Задание 2. Найти решения системы уравнений.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\begin{cases} 12a = 3b + 1 \\ 4b + c = 4 \\ a + 5b - 7c - 6 = 0 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 4x_1 + \sin(4)x_3 = 2 - 2x_2 \\ 2x_2 = 4 - \cos(2)x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$
2	$\begin{cases} a_1 + 4a_2 = 2 - a_3 \\ 2a_1 = 3 \\ 11a_1 + 3a_2 = 4 - 7a_3 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \frac{4}{5}a + b = 10 \\ a + \frac{5}{4}b + \sqrt{3}c - 20 = 0 \\ 2b = 30 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 3 \\ \sqrt{2}x_1 + \sqrt{4}x_2 = -3 - 2x_3 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 3b_1 + 6b_2 = 7 \\ 9b_2 = 8 - 12b_3 \\ 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 1,5a + 2b = 1 - 2c \\ 2c - 2 = 0 \\ a + 2,5b - 4c = \frac{1}{2} \end{cases}$	10	$\begin{cases} \ln(3)a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 1 - a_3 \\ \ln(9)a_2 = 4 \\ a_1 - 2a_2 = 7 - \ln(12)a_3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(2)x_1 + 2x_3 = 0,5 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1,5 - \cos(2)x_3 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \sqrt{3}a_3 = 13 \\ \sqrt{2}a_1 = 14 - \frac{1}{2}a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 15 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3b_1 + 2b_2 = \frac{1}{3} - b_3 \\ b_2 = \frac{1}{2} \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = 1 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2b_1 - 4b_2 = 1 \\ \sqrt{2}b_1 = 2 - \sqrt{4}b_3 \\ \cos(2)b_1 + \sin(2)b_2 = 0 \end{cases}$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Какие массивы можно создавать в *MathCAD*?
- 2 Что определяет переменная *ORIGIN*?
- 3 Как ввести индекс элемента массива с клавиатуры?
- 4 Сколько индексов используется при описании вектора, при описании матрицы?
- 5 Назначение функций *augment()* и *stack()*?

- 6 Назначение функции *mean()*?
- 7 Назначение функции *tr()*?
- 8 Что выполняет оператор  $|B|$  ?
- 9 Как найти сумму элементов 2-го столбца матрицы *A*, состоящей из 2 строк и 3 столбцов?
- 10 Как найти произведение элементов 2-й строки матрицы *A*, состоящей из 2 строк и 3 столбцов?

## Лабораторная работа № 4

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

*Цель работы:* освоить правила решения уравнений в *MathCAD* и научиться грамотно применять их для решения конкретных задач.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В систему *MathCAD* встроены средства для решения различных уравнений.

#### Поиск корня нелинейного уравнения

Многие уравнения и системы из них не имеют аналитических решений. Однако они могут решаться численными методами с заданной погрешностью. Погрешность вычислений задается системной переменной *TOL*.

Для простейших уравнений вида  $f(x)=0$  решение находится с помощью функции

*root* (выражение, имя переменной)

Здесь <выражение> – уравнение, корень которого надо найти;  
<имя переменной> – переменная – корень уравнения.

Функция *root* возвращает с заданной точностью значение переменной, при котором выражение равно 0.

Функция реализует вычисления итерационным методом, причем перед ее применением надо задать начальное значение переменной (приближенное значение корня уравнения). Это особенно важно, если возможно несколько решений. Тогда выбор решения определяется выбором начального приближения корня уравнения.

Приближенное значение корня можно определить из предварительно построенного графика функции или аналитически по заданной функциональной зависимости.

Функция *root* может записываться и в другом формате:

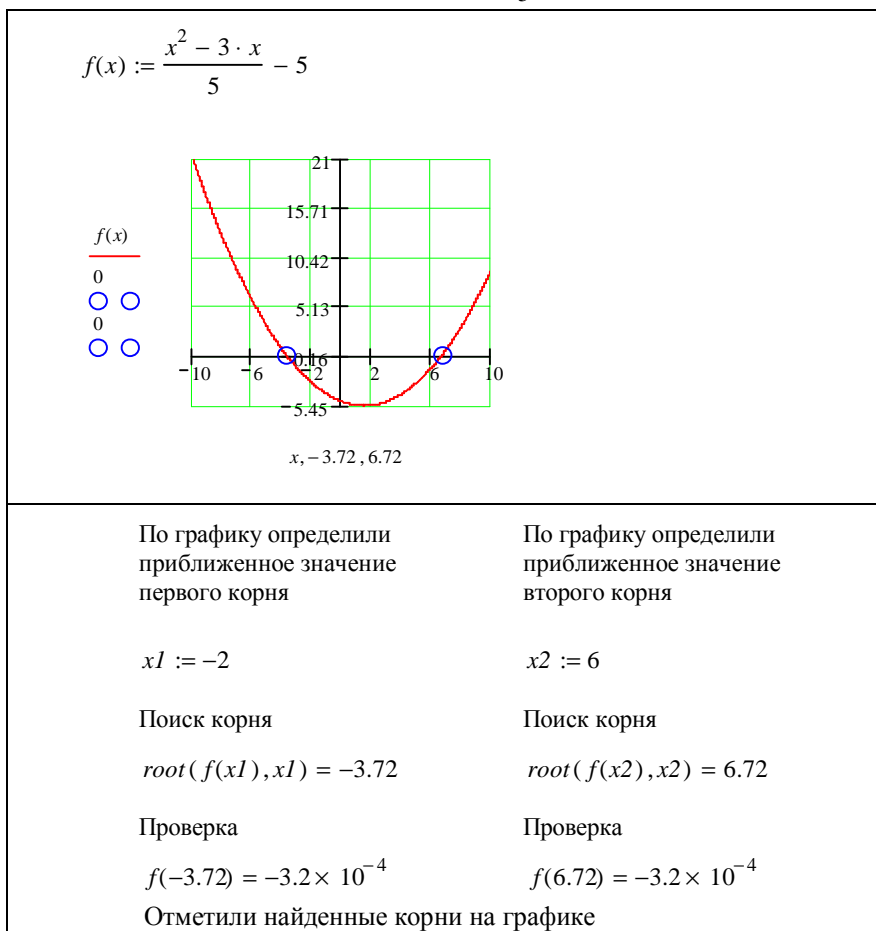
*root* (выражение, имя переменной, *a*, *b*)

Здесь  $a$  и  $b$  – начало и конец интервала, в пределах которого осуществляется поиск корня уравнения.

При таком использовании функции нет необходимости задавать приближенное значение корня, поскольку оно определено в заданном интервале  $[a, b]$ .

*Примечание* – Уравнение, записанное в виде  $f(x) = g(x)$ , необходимо преобразовать к виду  $f(x) = 0$ .

**Пример.** Найти все корни уравнения  $\frac{x^2 - 3x}{5} - 5 = 0$ .



**Пример.** Найти единственный корень уравнения  $\cos\left(\frac{x}{4} + 4\right) = 0$  на интервале  $[0; 8]$

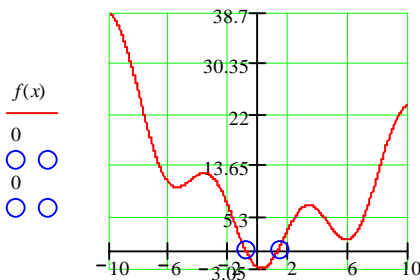
Ἰὲνὲ εἰδῖν:

$$f(x) := \cos\left(\frac{x}{4} + 4\right) \quad x := \text{root}(f(x), x, 0, 8) \quad x = 2.85$$

Ἰόιαᾶδὲᾶ:  $f(x) = 0$

**Пример.** Найти все корни уравнения  $\frac{x^2 - 3 \cdot x}{4} = 5 \cdot \cos(x) - 2$

$$f(x) := \frac{x^2 - 3 \cdot x}{4} - 5 \cdot \cos(x) + 2$$



$x, -0.944, 1.277$

По графику определили  
приближенное значение  
первого корня

$$x1 := -1$$

Поиск корня

$$\text{root}(f(x1), x1) = -0.944$$

Проверка

$$f(-0.944) = -1.981 \times 10^{-3}$$

Отметили найденные корни на графике

По графику определили  
приближенное значение  
второго корня

$$x2 := 1$$

Поиск корня

$$\text{root}(f(x2), x2) = 1.277$$

Проверка

$$f(1.277) = 1.992 \times 10^{-3}$$

*Примечание* – В примерах корни на графике были отмечены после того, как были найдены их значения.

### Поиск корней многочлена

**Многочленами** (полиномами) относительно переменной  $x$  называются выражения вида

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0,$$

где  $n$  – неотрицательное целое число;

$a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) – некоторые числа.

Числа  $a_k$  называют коэффициентами многочлена. Коэффициент  $a_0$  называют свободным членом, коэффициент  $a_n$  – старшим коэффициентом.

Если  $a_n \neq 0$ , то число  $n$  называют степенью многочлена.

Для поиска корней обычного полинома  $p(x)$  *MathCAD* поддерживает функцию **polyroots(v)**. Она возвращает вектор всех корней многочлена степени  $n$ , коэффициенты которого находятся в векторе  $V$ , имеющем длину (количество элементов)  $= n+1$ .

В общем виде нахождение корней полинома сводится к выполнению следующих действий:

1 Составляется вектор-столбец  $V$  из коэффициентов полинома:

$$V = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

2 Осуществляется непосредственный поиск корней полинома функцией *polyroots(V)*.

#### *Примечания*

- 1 Корни полинома могут быть как вещественными, так и комплексными числами.
- 2 Не рекомендуется использовать эту функцию, если степень полинома выше шестой, так как трудно достигнуть малой погрешности в вычислениях.
- 3 Вектор-столбец коэффициентов полинома можно формировать вручную или использовать специальную команду **Symbolics – Polynomial Coefficients**.

**Пример.** Решить уравнение  $x^3 - 2x^2 = 5x + 25$ .



$$f(x) := x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 25$$

$$v := \begin{pmatrix} -25 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -1.208 + 2.05i \\ -1.208 - 2.05i \\ 4.415 \end{pmatrix}$$

Проверка  $f(4.415) = -1.277 \times 10^{-3}$

**Пример.** Решить уравнение  $x^3 - 2x + 12 = 32 + 5x$ .

$$f(x) := x^3 - 2 \cdot x + 12 - 32 - 5 \cdot x$$

$$v := \begin{pmatrix} -20 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -1.777 - 1.572i \\ -1.777 + 1.572i \\ 3.554 \end{pmatrix}$$

Проверка  $f(3.554) = 0.012$

**Пример.** Решить уравнение  $2x^4 = 12 - x$ .

$$f(x) := 2 \cdot x^4 - 12 + x$$

$$v := \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -1.615 \\ 0.051 + 1.566i \\ 0.051 - 1.566i \\ 1.513 \end{pmatrix}$$

Проверка  $f(-1.615) = -9.325 \times 10^{-3}$

$f(1.513) = -6.411 \times 10^{-3}$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 4. Решение уравнений”
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл math4.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Найти все корни уравнения на заданном интервале. Показать найденные решения на графике. Отформатировать построенный график: задать линии сетки – по 5 на каждой оси, толщину линии – 2. Вариант задания взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	$\sin(x-2) - \frac{x}{5} = 0, x \in [-5; 5]$
2	$\cos(x+1) - \sqrt{x} + 3 = 0, x \in [5; 15]$
3	$\arccos\left(\frac{x}{16}\right) + x^2 - 50 = 0, x \in [-10; 10]$
4	$\ln(x+2) + \cos(x) - 1 = 0, x \in [-1; 5]$
5	$\ln x^2 + 2 + x = 0, x \in [-2; 2]$
6	$\sin(x + \sqrt{x}) - \frac{1}{3} = 0, x \in [0; 2]$
7	$\frac{1}{e^x} + 2000 \cos(x) - 2 = 0, x \in [-5; 4]$
8	$x^3 \cos(x) - 100 = 0, x \in [-9; 9]$
9	$x^2 + 10 \sin(2x) = 0, x \in [-2; 4]$
10	$5 \cos(5x) \sqrt{x} = 0, x \in [2; 4]$
11	$\ln(x) \sin(x) = 0, x \in [2; 10]$
12	$\ln(x) + \cos(x) - 2,5 = 0, x \in [4; 8]$

**Задание 2.** Найти единственный корень уравнения на заданном интервале. Вариант задания взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание
1	$y(x) = \sin(x) - \frac{\sqrt{x}}{2}, x \in [2; 3]$
2	$y(b) = (b+2)^3 + \sin(b)b^2 - 100, b \in [2; 4]$
3	$f(x) = x^{\sin(x)+\cos(x)} - 5, x \in [6; 7]$
4	$y(a) = a^2 - \sin(4a) - 30, a \in [0; 6]$
5	$y(x) = 2 - e^{\cos(2x)}, x \in [3; 4]$
6	$f(b) = 2^{\cos(b)} + \frac{b}{5}, b \in [-6; -4]$
7	$y(x) = 2^{\cos(x)} + 4\sin(x), x \in [-7; -6]$
8	$f(x) = x + \sin(x-2), x \in [0; 3]$
9	$a(b) = b^{2\sin(b)} - 2, b \in [1; 2]$
10	$y(x) = \sqrt{x} - \sin(x) - 3, x \in [9; 10]$
11	$y(b) = \sqrt{b^3} - \cos(b) - 4, b \in [0; 5]$
12	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \in [2; 4]$

**Задание 3.** Найти корни многочлена. Выполнить проверку. Полученные значения отобразить на графике. Вариант задания взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 3

Вариант	Задание
1	$5x^4 - 2x^3 = \frac{1}{3}x^2 - x + 12$
2	$5x^3 - 3x^2 = 25 - \frac{x}{5}$
3	$4x^4 + 12x^3 - x^2 + x - 20 = 0$
4	$15x^3 - 5x^2 = 20 - \frac{x}{5}$
5	$5x^5 - 5x^4 + \frac{x}{5} = 10 - 2x^3 + 4x^2$
6	$x^4 - 3x^3 - 14x^2 = 7x - 17$
7	$17x^3 - 7x^2 - 27x + 5 = 0$
8	$17x^4 - x^3 - 27x^2 + 5x = 3$

Окончание таблицы 3

Вариант	Задание
9	$13x^4 - \frac{x^3}{13} - 2x^2 + x = 13$
10	$2x^5 - 4x^4 + \frac{x^3}{4} + x^2 = x + 10$
11	$2x^3 - 4x^2 + x = 10$
12	$2x^4 - 10x^3 = 4x^2 - x$

**Задание 4.** Найти корни многочлена. Полученные значения отобразить на графике. Вариант задания взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 4

Вариант	Задание
1	$p(x) = x^3 + 10x + 5$
2	$p(x) = 2x^4 + 10x^2 + 5x$
3	$p(x) = x^4 + 4x - 14$
4	$p(x) = x^5 - 12x^3 + 4$
5	$p(x) = -3x^4 + x + 12$
6	$p(x) = x^4 - 2x^2 + 12x$
7	$p(x) = -12x^3 + \frac{x}{6} + 5$
8	$p(x) = x^5 + 14x^3 - 14$
9	$p(x) = -9x^3 + 3x + \frac{5}{7}$
10	$p(x) = -7x^4 - 7x^2 + 15$
11	$p(x) = 23x^3 - x + 32$
12	$p(x) = x^4 - 2x^2 - 24$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Какие функции используются для численного решения уравнения? Опишите их формат.
- 2 Какая команда используется для вывода вектора коэффициентов многочлена?
- 3 Какая функция используется для нахождения корней многочлена? Опишите на примере механизм ее работы.

## Лабораторная работа № 5

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

*Цель работы:* изучить на примерах возможности системы *MathCAD* по решению систем уравнений и выполнить индивидуальное задание.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В систему *MathCAD* встроены средства для решения как линейных, так и нелинейных систем уравнений.

Матричный способ для решения линейных систем уравнений был рассмотрен в лабораторной работе № 3. В этой работе будет рассмотрен универсальный способ, который подходит для решения как линейных, так и нелинейных систем уравнений.

#### Решение систем нелинейных уравнений

При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом **Given** и имеющий следующую структуру:

Начальные условия

**Given**

Ограничительные условия

Выражения с функциями **Find**, **Minerr**

*Начальные условия* определяют начальные значения искоемых переменных и задаются в виде:

<имя переменной> := <значение>

Если переменных несколько, то используется векторное представление для начальных условий.

*Уравнения* задаются в виде:

<выражение 1> = <выражение 2>

Для набора знака равенства в данном случае используется комбинация клавиш **Ctrl** = (“жирное равно”).

*Ограничительные условия* задаются в виде неравенств или равенств, которые должны выполняться при решении системы уравнений.

#### **Функции для решения систем нелинейных уравнений:**

*Find()* – возвращает вектор точных решений системы уравнений.

*Minerr()* – возвращает вектор приближенных решений системы уравнений.

*Примечание* – Начальные условия определяются аналитически или, если это возможно, графически.

**Пример.** Найти хотя бы одно решение системы уравнений  $\begin{cases} xy = 6 \\ xz = 10 \\ yz = 15 \end{cases}$ .

$x := 1$      $y := 1$      $z := 1$     ἵδῶσθε ἀλλήλους ἀσφαλῆς ἡνεοαῖνι,  
ἡδῶσθε ἀλλήλους ἀσφαλῆς ἀνεῖ

*Given*

$x \cdot y = 6$

$x \cdot z = 10$

$y \cdot z = 15$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \text{Find}(x, y, z)$

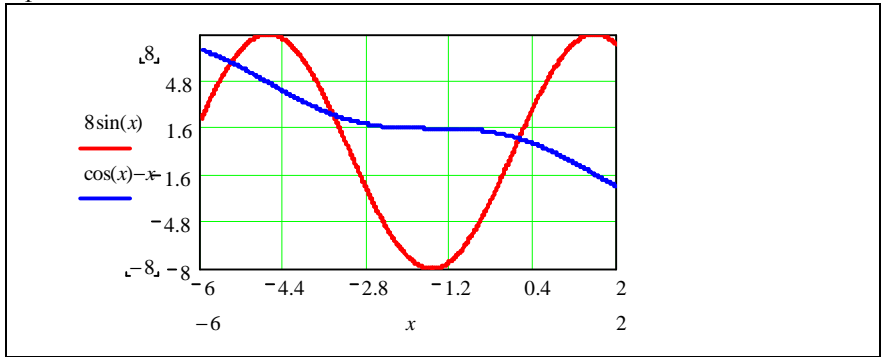
Ἦῶσθε ἡνεοαῖνι ἀσφαλῆς ἡνεοαῖνι ὀδῶσθε

$x = 2$      $y = 3$      $z = 5$

Ἀῦτῆσθε ἡδῶσθε

$x \cdot y = 6$

**Пример.** Найти все решения системы уравнений  $\begin{cases} y = 8 \cdot \sin(x) \\ y + x = \cos(x) \end{cases}$ , при заданных ограничениях  $x \in [-6; 2]$ . Начальные условия определить графически.



Ï ãðàðèèó ñðãããýãì, ÷ðí ñèñòãìà èìããò òðè ðãøãìý

Ïèñè ãðããì ðãøãìý ñèñòãìù:

$x1 := -6$        $y1 := 4.8$       ìðèãèèããìííúã èíñðãèìòù ãðããì ðãøãìý,  
ñðãããèãìííúã ñ ãðàðèèó

Given

$y1 = 8 \cdot \sin(x1)$

$y1 + x1 = \cos(x1)$

$Find(x1, y1) = \begin{pmatrix} -5.421 \\ 6.072 \end{pmatrix}$       ãðããì ðãøãìèã ñèñòãìù òðããìãìèè

Ïèñè àòìðãì ðãøãìý ñèñòãìù:

$x1 := -6$        $y1 := 4.8$       ìðèãèèããìííúã èíñðãèìòù àòìðãì ðãøãìý,  
ñðãããèãìííúã ñ ãðàðèèó

Given

$y1 = 8 \cdot \sin(x1)$

$y1 + x1 = \cos(x1)$

$Find(x1, y1) = \begin{pmatrix} -5.421 \\ 6.072 \end{pmatrix}$       àòìðã ðãøãìèã ñèñòãìù òðããìãìèè

Ïèñè òðãòùããì ðãøãìý ñèñòãìù:

$x1 := -6$        $y1 := 4.8$       ìðèãèèããìííúã èíñðãèìòù òðãòùããì ðãøãìý,  
ñðãããèãìííúã ñ ãðàðèèó

Given

$y1 = 8 \cdot \sin(x1)$

$y1 + x1 = \cos(x1)$

$Find(x1, y1) = \begin{pmatrix} -5.421 \\ 6.072 \end{pmatrix}$       òðãòùã ðãøãìèã ñèñòãìù òðããìãìèè

Âññèìèì ìðìãðèó, ìãðèìãð, ãðããì ðãøãìý, ññòòããèã  
ìãèããìííúã çìããìý ã ãðããì òðããìãìèè ñèñòãìù

$6.072 - 8 \cdot \sin(-5.421) = -2.132 \times 10^{-3}$

*Примечание* – Функции *Find()* и *Minerr()* можно применять и для нахождения корней уравнения.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 5. Решение систем уравнений”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 20 мм.
- 8 Сохранить документ в файл *math5*.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Найти все решения системы уравнений при заданных ограничениях. Начальные условия определить по графику. Выполнить проверку. Задание взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} x^2 + yx = 15 & x \in [-5; 5] \\ xy - x^2 = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} xy - x + y = 7 & x \in [-5; 8] \\ xy + x - y = 13 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x^2 - 2y = 16 & x \in [-5; 6] \\ y = \frac{2}{x + \sin(x)} \end{cases}$
4	$\begin{cases} y = x^3 \\ 10x^2 - \cos(x) = 90 + y & x \in [-4; 11] \end{cases}$
5	$\begin{cases} \cos(2x) = xy + 2y & x \in [-3; 1] \\ 2x = y \end{cases}$



Окончание таблицы 1

Вариант	Задание
6	$\begin{cases} \sin(x) = y - \sqrt{x} & x \in [1; 8] \\ 2\ln(x) = 2y - 1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x + \sqrt{x} = 2y + \frac{xy}{2} & x \in [1; 8] \\ \sqrt{x} + \sin(x) = y \end{cases}$
8	$\begin{cases} \frac{y}{\ln(x)} = 1 \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = y - \sqrt{x} & x \in [3; 9] \end{cases}$
9	$\begin{cases} xy - y = x^3 \\ 20\cos\left(\frac{x}{2}\right) = y - 8 & x \in [-5; 5] \end{cases}$
10	$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{y}{x^2} \\ 80\sin(x) = y + 5 + \ln(x) & x \in [1; 10] \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y}{\cos(x)} \\ y = \ln(x) + \sin(x) & x \in [0,5; 8] \end{cases}$
12	$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{y} = \frac{1}{4\sin(x)} & x \in [1; 8] \\ y - 5 = \cos(x) - x \end{cases}$

**Задание 2.** Найти хотя бы одно решение системы уравнений. Выполнить проверку. Задание взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} 8x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + 16y^3 = 7(x - y) \end{cases}$
2	$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61 \\ x + y - \sqrt{xy} = 7 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5 \\ (x - 2)(y - 1) = 0 \end{cases}$

Окончание таблицы 2

Вариант	Задание
4	$\begin{cases} \sqrt{\frac{5x}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{5x}} = \frac{21}{10} \\ xy + x + y = 11 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x - \frac{x-y}{2} = 4 \\ y - \frac{x+3y}{x+2} = 1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 2 \\ x^2 + 2xy + 5y^2 = 4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x^4 + y^4 = \frac{17}{4}x^2y^2 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$
8	$\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = \frac{5}{2}(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 300 \\ xy + x^2 + y^2 = 37 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x^4 + y^4 + x^3y + xy^3 = \frac{112}{9}x^2y^2 \\ x + y = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{11}{4} \\ x + y = 3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x^2 + 2xy - 4y^2 - 5x + 4 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

- 1 Для чего используется функция *Find()*?
- 2 Для чего используется функция *Minerr()*?
- 3 Какая комбинация клавиш используется для ввода знака “жирное равно” при записи уравнений системы?

## Лабораторная работа № 6

### ПРЕДЕЛЫ. РЯДЫ

*Цель работы:* изучить теоретический материал и применить полученные знания на практике, выполнив индивидуальное задание.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

##### Предел последовательности

Говорят, что последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  имеет своим пределом число  $a$  (сходится к  $a$ ), то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что  $|x_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ .

В частности,  $x_n$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

##### Теоремы о пределах последовательности

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n .$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n .$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} .$$

##### Предел функции

Число  $a$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x_n \neq x_0$ , сходящейся к  $x_0$ , последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $a$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ .

Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

##### Односторонние пределы

Пусть область определения функции  $f(x)$  содержит интервал  $(\alpha; x_0)$ .

Число  $a$  называется пределом слева функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовле-

творяющих неравенствам  $x_0 < \delta < x < x_0$ , выполняется неравенство  $|f(x) - a| < \varepsilon$ .

Предел слева функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \neq 0$  обозначают:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ .

Предел слева функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$  обозначают:  $\lim_{x \rightarrow 0 -} f(x)$ .

Аналогично, в случае, когда область определения функции  $f(x)$  содержит интервал  $(x_0; \beta)$ , вводится понятие предела справа.

Предел справа функции  $f(x)$  в точке  $x_0 \neq 0$  обозначают:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ .

Предел справа функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = 0$  обозначают:  $\lim_{x \rightarrow 0 +} f(x)$ .

Вычисление односторонних пределов в *MathCAD* производится по соответствующим шаблонам:

Предел слева	Предел справа
$\lim_{\rightarrow a -}$	$\lim_{\rightarrow a +}$

### Вычисление значения предела

Вычисление значения предела выполняется по следующему алгоритму:

1 Выбирается подходящий шаблон на соответствующей панели инструментов и заполняется конкретными данными.

2 На клавиатуре нажимается комбинация клавиш “Ctrl” + “:”, далее **Enter**.

**Пример.** Найти предел последовательности  $x_n = \sqrt[3]{8}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8} \rightarrow 1$$

**Пример.** Найти предел функции  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$  в точке  $x = 4$ .

$$f(x) := \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow 2$$

**Пример.** Вычислить односторонние пределы слева и справа от точки  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - |x|}{2x} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - |x|}{2x} \rightarrow 1$$

## Ряды

Числовой ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется сходящимся, если существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , где  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

В противном случае ряд называется расходящимся.

### Признаки сходимости знакостоянных рядов

#### Признак Коши

Если  $a_n \geq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд сходится, а при  $q \geq 1$  расходится.

#### Признак Даламбера

Если  $a_n \geq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то при  $q < 1$  ряд сходится, а при  $q \geq 1$  расходится.

### Вычисление суммы и произведения элементов ряда

Вычисление производится при помощи соответствующих шаблонов, находящихся на панели **Calculus**:

Вычисление суммы		Вычисление произведения	
Шаблон	В документе	Шаблон	В документе
	$\sum_{i=i_1}^{i_n} x_n$		$\prod_{i=i_1}^{i_n} x_n$
Шаблон	В документе	Шаблон	В документе
	$\sum_{i_n} x_n$		$\prod_{i_n} x_n$

где  $i$  – переменная, определяющая номер элемента;

$i_1$  – номер первого суммируемого (перемножаемого) элемента;

$i_n$  – номер  $n$ -го суммируемого (перемножаемого) элемента;

$x_n$  – формула общего элемента ряда.

#### Примеры.

<p>Найти сумму первых пяти элементов ряда <math>x_n = \frac{n^2}{n+1}</math>.</p>	<p>Найти произведение элементов ряда <math>x_n = \frac{n^2}{n+1}</math>, занимающих позиции с 5 по 10.</p>
$S := \sum_{n=1}^5 \frac{n^2}{n+1} \quad S = 11.45$	$P := \prod_{n=5}^{10} \frac{n^2}{n+1} \quad P = 6.873 \times 10^4$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD* .
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 6. Пределы”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл math6.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  . Задание взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$x_n = \frac{9 + \frac{n}{n+1}}{2 + \frac{1}{n}}$	7	$x_n = \frac{n^3 + 3^n}{n + 3^{n+1}}$
2	$x_n = \frac{3 + 0,5^n}{0,3^{n+1} + 5}$	8	$x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n-1}{n+1}$
3	$x_n = \frac{n}{3n+2}$	9	$x_n = \frac{2n^2 - 5n + 3}{n^2 + 1}$
4	$x_n = \frac{2-n}{n+1} + \frac{n \cdot 2^{-n}}{n+2}$	10	$x_n = \frac{\sqrt{n} + \frac{n}{10}}{n+10}$
5	$x_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}$	11	$x_n = \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$
6	$x_n = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 10}$	12	$x_n = \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$

**Задание 2.** Проверить правильность теорем о пределах. Формулу  $x_n$  взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n}}$	7	$y_n = \frac{\sqrt[n]{10} - 2}{1 + \sqrt[n]{0,01}}$
2	$y_n = \left(8 - \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}$	8	$y_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$
3	$y_n = \sqrt[3]{\frac{n+0,25}{8n+1}}$	9	$y_n = \sqrt[4n]{n}$
4	$y_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$	10	$y_n = \frac{\sqrt[n]{n+3}}{3 + \frac{3}{n}}$
5	$y_n = \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{n}{2}}}{\sqrt[3]{n}}$	11	$y_n = \frac{1 + \sqrt[n]{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt[n]{2n}}$
6	$y_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n$	12	$y_n = \sqrt[n]{3^n + n \cdot 2^n}$

**Задание 3.** Вычислить предел функции. Задание взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 3

Вариант	Задание 1	Задание 2
1	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6}$
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2 - x}{x^2}$
5	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}$
6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12}} + 5x^5 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow p/4} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cdot \cos x - 1}$

Окончание таблицы 3

Вариант	Задание 1	Задание 2
7	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$
8	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^8 - 2x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 + \cos x}$
9	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{1 - x^3} + \frac{1}{x - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}$
10	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + x}}{x}$
11	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6 - x} - 1}{3 - \sqrt{x + 4}}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$
12	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^8 - 2x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$

**Задание 4.** Пользуясь признаками Коши и Даламбера, исследовать сходимость следующих рядов. Задание взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 4

Вариант	Задание	
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$
2	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2 \cdot n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n + 1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{n + 0.5}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n - 1}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} - {}^{2n+1}\sqrt{2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n}{n + 1}$



Окончание таблицы 4

Вариант	Задание	
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} 2 + \frac{1}{n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 + 3^{n+1}!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^5$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log_3 n!}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} 9 + \frac{1}{n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 1}}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^2}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + \sqrt[n]{n}}$

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

- 1 Как вычисляется предел функции в конкретной точке? Привести пример.
- 2 Как при помощи пределов можно определять бесконечно большие и бесконечно малые функции?
- 3 Как определить сходимость ряда, используя признак Коши?
- 4 Как определить сходимость ряда, используя признак Даламбера?
- 5 Как вычисляется сумма и произведение элементов ряда? Привести пример: вычислить сумму и произведение первых пяти элементов ряда (задание взять из таблицы 4).

Лабораторная работа № 7

**РАБОТА С ПРОИЗВОДНЫМИ**

*Цель работы:* изучить теоретический материал и применить полученные знания на практике, выполнив индивидуальное задание.

**КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ**

Производной  $f'(x_0)$  функции в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.

## Вычисление производных разных порядков

Оператор производной предназначен для нахождения значения производной функции в заданной точке.

Вызвать оператор производной можно следующими способами:

Используя панель инструментов производных и интегралов <i>Calculus</i>		Используя клавиатуру
$\frac{d}{dx}$	для нахождения производной 1-го порядка	<i>Shift</i> + ?
$\frac{d^n}{dx^n}$	для нахождения производной $n$ -го порядка	<i>Ctrl</i> + <i>Shift</i> + ?

Для нахождения производной требуется:

1) определить точку (или диапазон), в которой будет найдена производная;

2) вызвать шаблон нахождения производной;

3) заполнить шаблон данными.

### Примеры.

Найти первую производную функции $y(x) = x^3$ в точке $x = 2$ .	Найти вторую производную функции $y(x) = x^3$ в точке $x=3,5$ .
$x := 2$	$x := 3.5$
$\frac{d}{dx}x^3 = 12$	$\frac{d^2}{dx^2}x^3 = 21$

**Пример.** Найти первую производную функции  $y(x) = x^3$  в точках  $x \in [-12; 12]$   $dx = 3$ .

$x := -12, -12 + 3.. 12$  $\frac{d}{dx}x^3 =$ <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>432</td></tr> <tr><td>243</td></tr> <tr><td>108</td></tr> <tr><td>27</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>27</td></tr> <tr><td>108</td></tr> <tr><td>243</td></tr> <tr><td>432</td></tr> </table>	432	243	108	27	0	27	108	243	432
432									
243									
108									
27									
0									
27									
108									
243									
432									



Здесь  $k = \operatorname{tg}(\beta)$ ,  $\beta$  – угол наклона касательной к оси  $Ox$ .

Уравнение касательной имеет вид:

$$y(a) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Здесь,

$$f'(a) = k = \operatorname{tg}(\beta).$$

**Пример.** Найти уравнение касательной к функции  $y(x) = \ln(x^2)$ , в точке  $x_0 = 2$  и ее наклон к оси  $Ox$ .

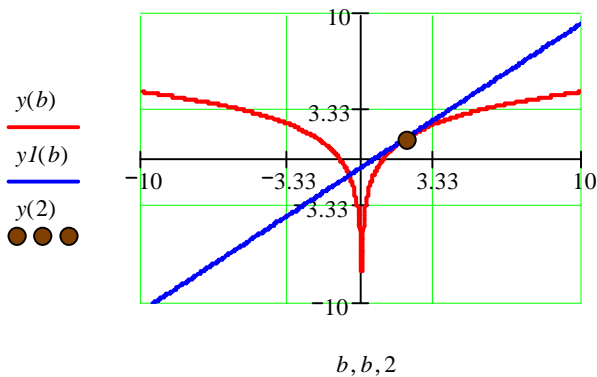
$$x := 2$$

$$y(x) := \ln(x^2)$$

$$k := \frac{d}{dx} y(x) \quad \text{угловой коэффициент касательной}$$

Составим уравнение касательной

$$y_l(b) := y(x) + k \cdot (b - x)$$



Найдем угол наклона касательной к оси  $Ox$

$$\beta := \operatorname{atan}(k) \quad \beta = 45 \operatorname{deg}$$

## Приложения производной

### Нахождение экстремумов функции

Говорят, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  максимум (минимум), если существует такая окрестность точки  $x_0(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , что для всех  $x$  из этой окрестности, отличных от  $x_0$ , выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Иначе говоря, функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  максимум (минимум), если для достаточно малого приращения  $\Delta x$  (любого знака) выполняется неравенство:  $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$  ( $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ ).

Максимум или минимум функции называется **экстремумом**.

**Теорема 1** – необходимое условие существования экстремума: если функция  $f(x)$ , дифференцируемая в интервале  $[a; b]$ , имеет в точке  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$  экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:  $f'(x) = 0$ .

**Теорема 2** – достаточное условие существования экстремума: если производная функции  $f(x)$  обращается в точке  $x_0$  в нуль и при переходе через эту точку  $x$  меняет знак с “плюса” на “минус” или с “минуса” на “плюс”, то в точке  $x_0$  эта функция имеет максимум (минимум).

**Теорема 3** – исследование функции на экстремум с помощью второй производной (второе достаточное условие существования экстремума): пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$ . Тогда функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  минимум (максимум), если  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ).

**Пример.** Найти экстремумы функции  $f(x) = x^3 - 4x^2$ .

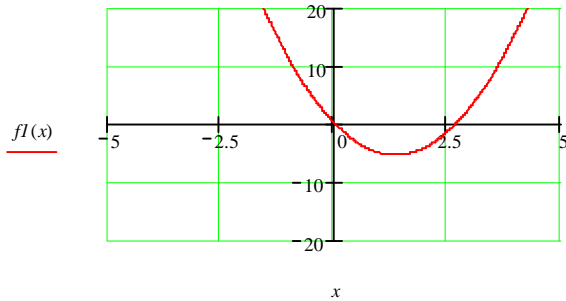
$$f(x) := x^3 - 4x^2$$

Найдем первую производную функции:

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x$$

Найдем экстремумы функции.

Для этого приравняем к нулю  $f'(x)$  и решим полученное уравнение



$$x1 := 0$$

$$x2 := 2.5$$

$$x1 := \text{root}(f1(x1), x1)$$

$$x2 := \text{root}(f1(x2), x2)$$

Найденные экстремумы :  $x1 = 0$  ,  $x2 = 2.667$

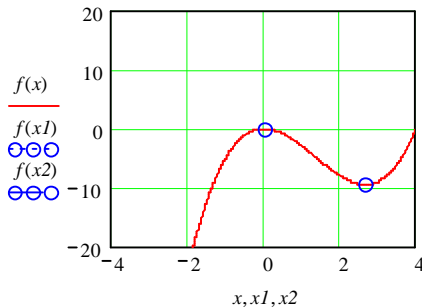
Уточним найденные экстремумы, при помощи второй производной:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 6 \cdot x - 8$$

$$f2(x1) = -8 \quad \text{точка максимума}$$

$$f2(x2) = 8 \quad \text{точка минимума}$$

Итоговый график



**Пример.** Найти экстремумы функции  $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ .

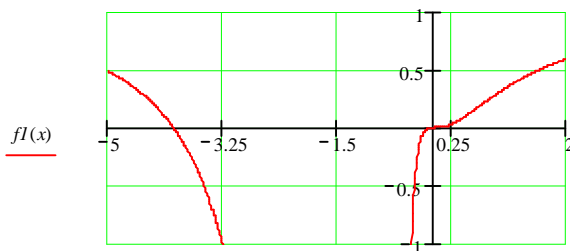
$$f(x) := \frac{x^4}{(x+1)^3}$$

Найдем первую производную функции:

$$f1(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot \frac{x^3}{(x+1)^3} - 3 \cdot \frac{x^4}{(x+1)^4}$$

Найдем экстремумы функции.

Для этого приравняем к нулю  $f1(x)$  и решим полученное уравнение



$x$

$$x1 := 0.25$$

$$x2 := -3$$

$$x1 := \text{root}(f1(x1), x1)$$

$$x2 := \text{root}(f1(x2), x2)$$

Найденные экстремумы:  $x1 = 0.053$  ,  $x2 = -4$

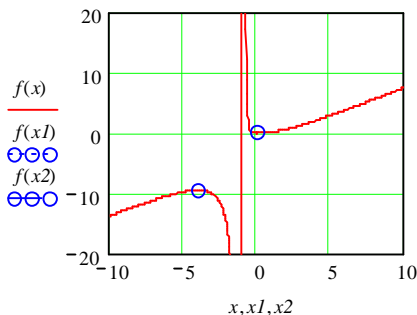
Уточним найденные экстремумы, при помощи второй производной:

$$f2(x) := \frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 12 \cdot \frac{x^2}{(x+1)^3} - 24 \cdot \frac{x^3}{(x+1)^4} + 12 \cdot \frac{x^4}{(x+1)^5}$$

$$f2(x1) = 0.026 \quad \text{точка минимума}$$

$$f2(x2) = -0.791 \quad \text{точка максимума}$$

### Итоговый график



### Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном интервале

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  необходимо:

- 1) найти все точки  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$  этого отрезка, обращающие в нуль первую производную;
- 2) вычислить ординаты  $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$ .

Тогда, наибольшее значение ординаты будет наибольшим значением функции на отрезке  $[a; b]$ , а наименьшее – наименьшим.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, x \in [-1; 2]$

$$f(x) := x^4 - 8 \cdot x^2 + 3$$

Ἰὰ ἐὰν ἰὰ δᾶορ ἰδῖ ἐçáἰáἰορ ὀίεδὲ:

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 - 16 \cdot x$$

Ἰὰ ἐὰν ἄñ çá÷áíεῦ  $x$  ἰὰ ἰὸ δᾶçεᾶ  $[-1; 2]$ ,  
ἰὰ δαὐὰρ πὲᾶ ἰὰ δᾶορ ἰδῖ ἐçáἰáἰορ ἄ 0.

Ἄεῦ ὀίᾶἰ ἰδὲ δᾶáἰῖᾶἰ  $f'(x)$  ἔ ἰόερ ἔ δᾶοεἰ ἰπὲ÷áἰἰᾶ ὀδᾶáἰᾶἰᾶ:



$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x1 := 0 \quad x2 := 2$$

Ψία÷άίεά  $x = -2$  ίά πᾱοίᾱεò, ðᾱé èᾱé ίᾱ πᾱᾱᾱᾱò ᾱ éìòᾱḃᾱᾱé [-1;2]

Íᾱéᾱᾱί ίᾱéìᾱíüøᾱᾱ è ίᾱéᾱíëüøᾱᾱ çίᾱ÷ᾱίεᾱ ðóíëðéè  
ίᾱ çᾱᾱᾱííí éìòᾱḃᾱᾱᾱᾱ:

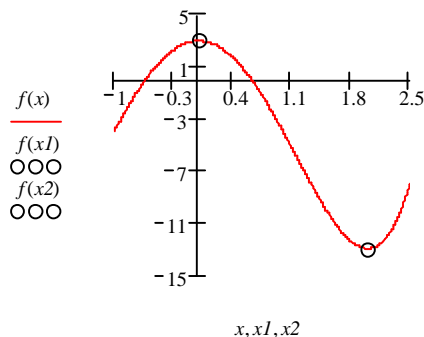
$$f(-1) = -4$$

$$f(2) = -13 \quad \text{ίᾱéìᾱíüøᾱᾱ çίᾱ÷ᾱίεᾱ}$$

$$f(x1) = 3 \quad \text{ίᾱéᾱíëüøᾱᾱ çίᾱ÷ᾱίεᾱ}$$

$$f(x2) = -13$$

Èòᾱᾱᾱᾱᾱᾱ éᾱḃᾱḃᾱᾱᾱ:



## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:
- 3 “Лабораторная работа № 7. Дифференцирование”.
- 4 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 5 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 6 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.

7 Отформатировать документ:

- переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
- константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.

8 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.

9 Сохранить документ в файл math7.

10 Показать преподавателю.

11 Распечатать документ.

12 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Вычислить производную функции 1-го,  $n$ -го порядка сначала в заданной точке, а затем на заданном интервале. Задание взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Функция	Значение аргумента	Диапазон аргументов	Порядок производной
1	$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x}{x+1}$	1	$x \in [-4; 4] \quad dx = 2$	2
2	$f(c) = \frac{c^2 - 2}{c^2 + 2}$	2	$c \in [2; 7] \quad dc = 1,5$	3
3	$f(x) = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^2}$	-1	$x \in [1; 2] \quad dx = 0,25$	2
4	$f(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 3}} + \frac{1}{a+1}$	1	$a \in [-2; 1] \quad da = 0,72$	3
5	$f(x) = \sin 4x + \cos 3x$	$\frac{\pi}{3}$	$x \in [0; 2\pi] \quad dx = \frac{\pi}{8}$	2
6	$f(a) = \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \sin a}$	$\frac{\pi}{2}$	$a \in [0; \pi] \quad da = \frac{\pi}{6}$	3
7	$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt[3]{x-1}}$	2	$x \in [2; 4] \quad dx = 0,3$	2
8	$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{2}{x}$	3	$x \in [3; 5] \quad dx = 0,4$	3
9	$f(b) = \sqrt{\frac{1-b}{1+b^2}}$	0	$b \in [-2; -1] \quad db = 0,2$	2
10	$f(c) = \frac{2^{2c}}{\sqrt{2-2^{2c}}}$	0	$c \in [-3; 0] \quad db = 0,6$	3

Окончание таблицы 1

Вариант	Функция	Значение аргумента	Диапазон аргументов	Порядок производной
11	$f(x) = \sin^3 \frac{x}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$x \in \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right] \quad dx = \frac{\pi}{16}$	2
12	$f(a) = \frac{a^2 + 3}{a - 1}$	0	$a \in [0; 4] \quad da = 0,8$	3

**Задание 2.** Найти формулу для вычисления первой производной функции (см. таблицу 1).

**Задание 3.** Составить уравнение касательной к функции в заданной точке. Определить угол наклона касательной к оси  $Ox$ . Задание взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 3

Вариант	Функция	Точка касания
1	$f(x) = x(\ln x - 1)$	$x = e$
2	$f(x) = \sqrt{5 - x^2}$	$x = 1$
3	$f(x) = x^2 \ln x$	$x = 2$
4	$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$	$x = \frac{4}{3}$
5	$f(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$	$x = 1$
6	$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^3}$	$x = 1$
7	$f(x) =  x - 1  \sqrt[3]{x + 2}$	$x = -1,6$
8	$f(x) = \frac{2}{3} \cos \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right)$	$x = \frac{\pi}{3}$
9	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9$	$x = -1$
10	$f(x) = x^3 - x^2 - 7x + 6$	$x = 4,5$
11	$f(x) = \frac{1}{2} \left( \sin 4x - \frac{\pi}{3} \right)$	$x = \frac{\pi}{6}$
12	$f(x) = \frac{16}{x^2(x - 4)}$	$x = -0,3$

**Задание 4.** Найти экстремумы функции. Задание взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 4

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$y = x^4 - 8x^2 + 12$	7	$y = \left(2 - \frac{x}{2}\right)^3 + x$
2	$y = (x-1)^2(x-6)^3$	8	$y = \frac{15x-5}{x^2+1}$
3	$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$	9	$y = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \sin(x) - 2$
4	$y = \frac{x^3}{3} - x + 3$	10	$y = x^2 \cos\left(\frac{x}{5} + 3\right)$
5	$y = \frac{x - \left(\frac{x}{5}\right)^3}{2}$	11	$y = \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x^2-4}}$
6	$y = x^3 - 5x + 12$	12	$y = \left(\frac{x}{10} + 10\right) \cos\left(\frac{x}{2} + 4\right)$

**Задание 5.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном интервале. Задание взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 5

Вариант	Функция и интервал
1	$y = x^3 - 6x^2 + 9 \quad x \in [-1; 2]$
2	$y = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x \quad x \in [0; 9]$
3	$y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100 \quad x \in (-4; 5]$
4	$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad x \in [-1; 2]$
5	$y =  x^2 + 2x - 3  + 1,5 \ln x \quad x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$
6	$y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \quad x \in [0; 1]$
7	$y = \frac{x^4+1}{x^2+1} \quad x \in [-1; 1]$
8	$y = x - 2\sqrt{x} \quad x \in [0; 5]$
9	$y = x - 2 \ln x \quad x \in \left[\frac{3}{2}; e\right]$

Окончание таблицы 4

Вариант	Функция и интервал
10	$y = x \ln \left( \frac{x}{5} \right) \quad x \in [1; 5]$
11	$y = (x - 3) \cdot e^{ x+1 } \quad x \in [-2; 4]$
12	$y = 2 \sin x + \sin 2x \quad x \in \left[ 0; \frac{3\pi}{2} \right]$

**Задание 6.** Решить задачу, отражающую физический смысл производной. Задание взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 6

Вариант	Задача
1	Тело движется по закону $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$ метров. Найти скорость движения тела и ускорение в момент $t = 9$ секунд
2	Тело движется по закону $s(t) = 0,5t^4 - 5t^3 - 12t^2 - 1$ метров. В какие моменты времени ускорение движения тела равно 0?
3	Тело движется по закону $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0,3t^5$ метров. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.
4	Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями: $s_1(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ , $s_2(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ . Найти ускорения точек в тот момент, когда скорости их равны
5	Движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями: $s_1(t) = 4t^2 + 2$ , $s_2(t) = 3t^2 + 4t - 1$ . Найти скорости движения точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны
6	Две точки движутся по оси Ох. Координата первой точки определяется формулой $x_1 = 3t^2 - 5$ , координата второй $x_2 = 3t^2 - t + 1$ . Найти скорости движения точек в тот момент, когда координаты точек равны
7	Точка с массой $m$ движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{2t-1}$ . Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного расстояния
8	Тело с массой $m = 1,5$ движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1$ . Найти кинетическую энергию тела через 5 секунд после движения (масса задана в килограммах, путь – в метрах)
9	Точка движется по параболе $y = 8x - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = \sqrt{t}$ ( $x$ измеряется в метрах, $t$ – в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 секунд после начала движения?

Окончание таблицы 5

Вариант	Задача
10	Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда радиус становится равным 50 см?
11	По оси абсцисс движутся две точки, имеющие законы движения: $x_1(t) = 100 + 5t$ , $x_2(t) = \frac{t^2}{2}$ . С какой скоростью они удаляются друг от друга в момент встречи ( $x$ измеряется в метрах, $t$ – в секундах)?
12	Высота $h$ снаряда, вылетевшего с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $60^\circ$ к горизонту, изменяется по закону: $h(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$ . В какой момент времени скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю?

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Какая комбинация клавиш используется для вызова шаблона нахождения производной 1-го и  $n$ -го порядков соответственно?
- 2 Какими параметрами нужно заполнить шаблон вычисления производной 1-го,  $n$ -го порядка?
- 3 В чем заключается геометрический и физический смысл производной?
- 4 Опишите механизм использования производных при нахождении экстремумов функции.
- 5 Опишите механизм использования производных при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на интервале.

### Лабораторная работа № 8

## ИНТЕГРАЛЫ. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

*Цель работы:* используя возможности программы, приобрести навыки работы с интегралами.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ


#### Понятие интеграла. Вычисление интегралов в *MathCAD*

##### *Неопределенный интеграл*

Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на промежутке  $(a, b)$  и  $F(x)$  – ее первообразная, то есть  $F'(x) = f(x)$  при  $a < x < b$ , то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad a < x < b, \text{ где } C - \text{произвольная постоянная.}$$

Вычисление неопределенного интеграла производится по следующему алгоритму:

- выбрать шаблон неопределенного интеграла  на соответствующей панели инструментов;
- заполнить шаблон исходными данными;
- нажать на клавиатуре комбинацию клавиш “Ctrl” + “.” И далее **Enter**.

**Пример.** Найти неопределенный интеграл:  $\int (3-x^2)^3 dx$


$$\int (3-x^2)^3 dx \rightarrow \frac{-1}{7} \cdot x^7 + \frac{9}{5} \cdot x^5 - 9 \cdot x^3 + 27 \cdot x$$

### Определенный интеграл

Если существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k$ , не зависящий от способа разбиения отрезка  $[a; b]$  и выбора точек  $\tau_k$ , то этот предел будем называть определенным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и обозначать символом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k$$

Вычисление определенного интеграла производится по следующему алгоритму:

- выбрать шаблон определенного интеграла  на соответствующей панели инструментов;
- заполнить шаблон исходными данными;
- нажать на клавиатуре “=” и далее **Enter**.

**Пример.** Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^1 -\sin x \cdot x^2 dx$ .

$$\int_0^1 -\sin(x) \cdot x^2 dx = -0.223$$

### Свойства определенного интеграла

1 Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx .$$

2 При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

3 Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b .$$

### Применение интегралов для вычисления площадей и объемов геометрических тел

#### Вычисление площади фигуры в прямоугольных координатах

Площадь  $S$  плоской фигуры  $A_1A_2B_1B_2$  (рисунок 1), ограниченной двумя непрерывными кривыми  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  ( $y_2(x) \geq y_1(x)$ ) и двумя прямыми  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ), равна  $S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx$ .

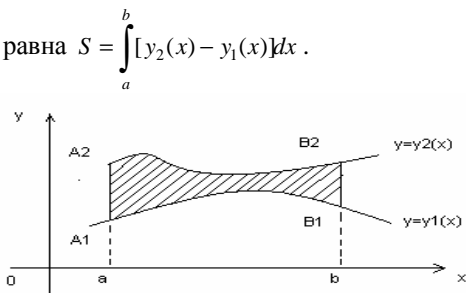
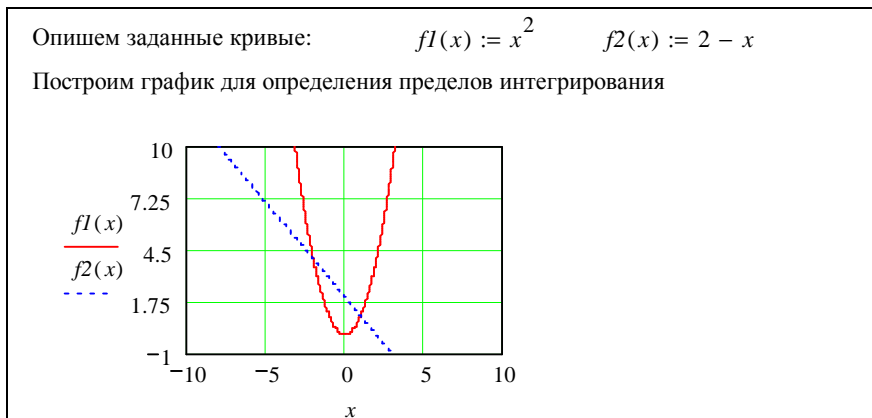


Рисунок 1 – Вычисление площади плоской фигуры

**Пример.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:  $y = x^2$   $x + y = 2$ .





Определим пределы интегрирования:

По графику крайний левый предел приблизительно равен  $a := -3.2$

Вычислим его точное значение:

$$a := \text{root}(f2(a) - f1(a), a) \quad a = -2$$

По графику крайний правый предел приблизительно равен  $b := 2$

Вычислим его точное значение:

$$b := \text{root}(f2(b) - f1(b), b) \quad b = 1$$

Вычислим площадь заданной фигуры:

$$\int_a^b f2(x) - f1(x) dx = 4.5$$

### Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y(x)$  и прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объем тела вращения вычисляется по формуле:

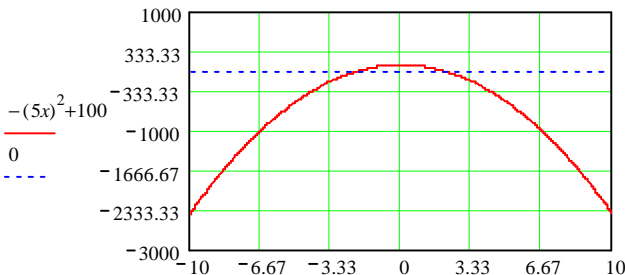
$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Если фигура, ограниченная кривыми  $y_1 = f_1(x)$ ,  $y_2 = f_2(x)$  и  $[0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)]$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

**Пример.** Вычислить объем тела вращения, ограниченного кривыми:  
 $y_1 = -(5x)^2 + 100$ ,  $y_2 = 0$ .

Построим график, для определения пределов интегрирования



Определим пределы интегрирования:

По графику крайний левый предел приблизительно равен  $x1 := -3$

Вычислим его точное значение:  $x1 := \text{root}[-(5x1)^2 + 100, x1]$   $x1 = -2$

По графику крайний правый предел приблизительно равен  $x2 := 3$

Вычислим его точное значение:  $x2 := \text{root}[-(5x2)^2 + 100, x2]$   $x2 = 2$

Вычислим объем:

$$v := p \cdot \int_{x1}^{x2} [-(5x)^2 + 100]^2 dx \quad v = 6.702 \times 10^4$$

### Применение интегралов для вычисления длины дуги кривой

Пусть дуга  $AB$  задана уравнением  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  – функция, имеющая на отрезке  $[a; b]$  непрерывную производную.

Тогда длина дуги вычисляется  $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ .

**Пример.** Вычислить длину дуги данной линии:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$l := \int_0^1 \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \right]^2} dx$$

Длина дуги равна:  $l = 1.546$

*Примечание* – Для изменения точности интегрирования, т. е. для увеличения (уменьшения) значащих цифр результата нужно изменить значение предопределенной переменной **TOL**. Интегрирование – итерационный процесс, который прекращается, когда два последних значения итерации отличаются на величину меньшую, чем значение **TOL**.

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1 Загрузить *MathCAD*.

2 Ввести в поле документа текст:

“Лабораторная работа № 8. Работа с интегралами”.

- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл math8.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Вычислить неопределенные интегралы. Задание взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \int \operatorname{th}^2 x dx$
2	$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx \quad \int \operatorname{cth}^2 x dx$
3	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} \quad \int x(1-x)^{10} dx$
4	$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$
5	$\int (2x-3)^{10} dx \quad \int \frac{dx}{2+3x^2}$
6	$\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad \int \operatorname{th}^2 x dx$
7	$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx \quad \int \operatorname{cth}^2 x dx$
8	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} \quad \int x(1-x)^{10} dx$
9	$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$

Окончание таблицы 1

Вариант	Задание
10	$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx \quad \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$
11	$\int \frac{(1-x)^3}{x^3 \sqrt{x}} dx \quad \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} dx$
12	$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

**Задание 2.** Вычислить определенные интегралы. Задание взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$	5	$\int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{1}{e^x - 1} dx$ $\int_0^{2/\pi} \cos 5x \cos x dx$
2	$\int_0^1 e^{x+e^x} dx$ $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$	6	$\int_1^2 \frac{1}{x^2 + x} dx$ $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$
3	$\int_{-3}^3 \frac{x^2 \sin 2x}{x^2 + 1} dx$ $\int_{-1}^1 x \cdot \operatorname{arctg}(x) dx$	7	$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$
4	$\int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ $\int_{-1}^0 \arccos(x) dx$	8	$\int_1^4 x \cos^2 x dx$ $\int_0^2 x e^{-2x} dx$

Окончание таблицы 2

Вариант	Задание	Вариант	Задание
9	$\int_0^p \cos x dx$ $\int_1^2 \frac{\cos x}{x^3} dx$	11	$\int_{-1}^1 e^t dt$ $\int_{-1}^1 \frac{1}{(11+5t)^3} dt$
10	$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ $\int_0^1 (e^x - x + 2) dx$	12	$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ $\int_{0.1}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

**Задание 3.** Проверить свойства определенного интеграла. Задание взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 3

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ $\int_0^1 e^{x+e^x} dx$	7	$\int_0^{2/\pi} e^x \cos x dx$ $\int_0^{2/\pi} \cos 5x \cos x dx$
2	$\int_0^{\pi/6} \cos x dx$ $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$	8	$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x} dx$ $\int_1^2 \frac{\cos x}{x^3} dx$
3	$\int_1^3 \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx$ $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$	9	$\int_{0.1}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$
4	$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$ $\int_{-1}^1 \arccos(x) dx$	10	$\int_1^4 x \cos^2 x dx$ $\int_1^4 \frac{1}{e^x-1} dx$
5	$\int_{-1}^1 x e^{-2x} dx$ $\int_{-1}^1 x \arctg(x) dx$	11	$\int_{-1}^1 e^t dt$ $\int_{-1}^1 \frac{1}{(11+5t)^3} dt$
6	$\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$ $\int_0^1 (e^x - x + 2) dx$	12	$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$ $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$

**Задание 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными кривыми. Задание взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 4

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = 10x - x^2 \quad x + y = 0$	7	$y = \ln x^3 \quad y + 5 = x$
2	$y = \frac{\cos x}{x} \quad y = 1 - \frac{x}{5}$	8	$y = \ln x + 4 \quad y =  x - 4 $
3	$y = \ln x + 3 \quad y = \frac{x}{2}$	9	$y = x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad y = x - 7$
4	$y = (x + 1)^2 \quad y = x + 26$	10	$y = \ln(x + 2) \quad y = 1 \quad x = 10$
5	$y = 2\cos(x) \quad y - \sqrt{x + 2} = 0$	11	$y = 2 - x^2 \quad y = e^x - 10$
6	$y = -x^2 \quad y = x - 50$	12	$y =  x  \quad y + 4 = x^2$

**Задание 5.** Вычислить длину дуги. Для этого построить график, ООФ которого есть интервал, на котором вычисляется длина дуги. На графике отобразить линии сетки, задать толщину графика – 2, установить цвет. Задание взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 5

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y = \ln \sin x \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	7	$y = \sqrt{\frac{x^3}{2-x}} \quad 0 \leq x \leq \frac{5}{3}$
2	$y = \frac{x^{\ln x}}{x-5} \quad 6 \leq x \leq 8$	8	$y = e^{-x}  \sin x  \quad -3 \leq x \leq 0$
3	$y = \frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq 1$	9	$y = 2x - x^2 \quad -1 \leq x \leq 5$
4	$y = 1 - \ln \cos x \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$	10	$y = 2^x \quad 2 \leq x \leq 5$
5	$y = 2 \ln \frac{4}{4-x^2} \quad 0 \leq x \leq 1,5$	11	$y = x + \sin^3 x \quad 1 \leq x \leq 2$
6	$y = x^{\frac{3}{2}} \quad 0 \leq x \leq 4$	12	$y = \frac{x}{\cos(2-x)} \quad 1 \leq x \leq 1,4$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Какая комбинация клавиш используется для вызова шаблона нахождения неопределенного и определенного интегралов соответственно?

- 2 Какими параметрами заполняется шаблон вычисления определенного интеграла?
- 3 Опишите механизм использования интеграла для вычисления площади фигуры.

## Лабораторная работа № 9

### СИМВОЛЬНАЯ АЛГЕБРА

*Цель работы:* научиться использовать на практике средства символьных вычислений *MathCAD*.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

До сих пор мы занимались нахождением конкретных значений выражений, корней уравнений и т. п.

При использовании возможностей символьной математики в *MathCAD* результатом вычисления выражения является другое выражение. При этом желаемая форма этого другого выражения может быть задана: его можно продифференцировать, упростить или, наоборот, раскрыть и т. п.

Есть два основных способа символьного преобразования выражения:

- использовать соответствующий задаче оператор на панели инструментов **Symbolic** и символьный знак равенства для получения результата, вызываемый нажатием комбинации “*Ctrl*” + “.”;
- использовать соответствующие команды меню **Symbolics** (Символика).

*Примечание* – Результаты, полученные с использованием символьного знака равенства, вычисляются заново всякий раз при внесении изменений в рабочий документ. Результаты, полученные с использованием меню **Символика**, автоматически модифицироваться не будут.

#### Символьные преобразования

В общем случае для символьного преобразования выражения необходимо выполнить следующие действия:

- ввести выражение;
- выделить его синей выделяющей рамкой;
- нажать “*Shift*”+ “*F9*” или выбрать команду **Evaluate – Symbolically**.

В *MathCAD* доступны еще два других способа преобразования выражения:

- при выборе команды **Evaluate – Complex** результаты будут выражены, когда это возможно, в комплексной форме;

– при выборе команды **Evaluate – Floating Point** (с плавающей запятой) результаты будут выражены, когда это возможно, в числовом виде. В появляющемся диалоговом окне можно указать число цифр справа от десятичной точки. По умолчанию это число равно 20.

### Упрощение выражения

Команда **Simplify** (Упростить) меню **Symbolics** или оператор `simplify` выполняет основные алгебраическое и тригонометрическое упрощения выбранного выражения. Упрощение выражения заключается в выполнении арифметических преобразований, сокращении общих множителей, в использовании основных тождеств для тригонометрических и обратных функций, и в упрощении квадратных корней и степеней.

Можно упрощать как части выражений (например, знаменатель дроби, или один член суммы), так и всё выражение целиком.

*MathCAD* иногда может упростить части выражения, даже если он не может упростить выражение целиком. Если преобразование всего выражения не дает желаемый ответ, нужно попытаться выделить и упростить часть выражения.

**Пример.** Упростить выражение  $\frac{a^3 - 25 \cdot a}{6 \cdot a} + \frac{25 - a^2}{6}$ .

$$\frac{a^3 - 25 \cdot a}{6 \cdot a} + \frac{25 - a^2}{6} \text{ simplify} \rightarrow 0$$

### Разложение выражения

Команда **Expand** (Разложить по степеням) меню **Symbolics** или оператор `expand` разлагает все степени и произведения сумм в выделенном выражении. Если выражение – дробь, числитель будет разложен, и выражение будет представлено как сумма дробей. Синусы, косинусы и тангенсы сумм переменных, или целого числа, умноженного на аргумент, будут разложены насколько возможно.

**Пример.** Раскрыть скобки  $(b - 17) \cdot (b + 3) \cdot b$ .

$$(b - 17) \cdot (b + 3) \cdot b \text{ expand, } b \rightarrow b^3 - 14 \cdot b^2 - 51 \cdot b$$

### Разложение выражений в ряды

Команда **Variable – Expand to Series** (Разложить в ряд...) меню **Symbolics** или оператор `series` выполняет разложение выражения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

При использовании команды меню **Symbolics** необходимо выполнить следующие действия:



- выделить переменную в функции или выражении, по которой требуется найти разложение;
- выбрать соответствующую команду;
- в диалоговом окне нужно ввести порядок остаточного члена, который определит число членов формулы.

Затем *MathCAD* выдаст соответствующее разложение выражения по формуле Тейлора.

**Пример.** Разложить в ряд  $\ln(x+1)$  (порядок остаточного члена = 8).

$$\ln(x+1) \text{ series, } x, 8 \rightarrow x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot x^5 - \frac{1}{6} \cdot x^6 + \frac{1}{7} \cdot x^7$$

### Разложение выражения на множители

Команда **Factor** (Разложить на множители...) меню **Symbolics** или оператор **factor** разлагает на множители выбранное выражение. Если выражение представляет целое число, *MathCAD* разложит его на множители по степеням простых чисел. В остальных случаях *MathCAD* будет пытаться преобразовывать выражение в произведение. Эта команда будет объединять сумму дробей в одну дробь и будет упрощать многоэтажную дробь с несколькими дробными чертами.

*Примечание* – *MathCAD* разлагает на множители “только то, что выделено”.

Разлагая на множители, всегда можно немного упростить выражение, выбирая и разлагая на множители подвыражения, даже если выражение в целом не факторизуемо.

Например, если выделить всё выражение  $ab + ac + x$ , то *MathCAD* вернёт это выражение неизменённым, потому что выбранное выражение целиком не разлагается. Но если выбрать только первые два члена, *MathCAD* возвратит  $a(b+c) + x$ .

**Пример.** Разложить на множители число 123.

$$123 \text{ factor} \rightarrow 3 \cdot 41$$

**Пример.** Разложить на множители  $x^4 - 16$ .

$$x^4 - 16 \text{ factor} \rightarrow (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4)$$

## Приведение подобных членов

Команда **Collect** (Разложить по подвыражению...) меню **Symbolics** или оператор `collect` объединяет члены, содержащие одинаковые степени выделенного подвыражения. Результатом является полином от подвыражения. Выбираемое подвыражение должно быть либо простой переменной, либо встроеной функцией вместе с аргументом.

**Пример.** Привести подобные по  $x$  в выражении  $x^2 - ayx^2 + 2y^2x$ .

$$x^2 - a \cdot y \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x \text{ collect, } x \rightarrow (1 - a \cdot y) \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x$$

## Разложение на элементарные дроби

Команда **Variable – Convert to Partion Fraction** меню **Symbolics** или оператор `parfrac` преобразует выражение в сумму элементарных дробей.

Разложение на элементарные дроби заключается в разложении знаменателя выражения на линейные или квадратичные множители, имеющие целочисленные коэффициенты. Если это удастся, то выражение будет преобразовано в сумму дробей с этими множителями в качестве знаменателя. Все константы в выделенном выражении должны быть целыми числами или дробями. *MathCAD* не будет разлагать выражение, которое содержит десятичные точки.

**Пример.** Разложить на элементарные дроби  $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 9x - 18}$ .

$$\frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow \frac{1}{[3 \cdot (x - 3)]} + \frac{14}{[3 \cdot (x + 3)]} - \frac{3}{(x + 2)}$$

## Нахождение коэффициентов полинома

Многие выражения могут быть перезаписаны в виде полиномов от выделенной переменной или относительно подвыражения. Для этого служит команда **Polynomial Coefficients** меню **Symbolics** или оператор `coeffs`.

Для нахождения коэффициентов полинома при помощи соответствующей команды главного меню необходимо:

- выделить переменную, относительно которой требуется разложить выражение в полином;
- выбрать команду.

В результате выполнения указанных действий *MathCAD* возвратит вектор, содержащий коэффициенты требуемого полинома в порядке возрастания степеней.

*Примечание* – Если требуется, чтобы выражение рассматривалось как полином относительно функции, необходимо выделить соответствующую функцию.

**Пример.** Привести подобные по  $x$  в выражении  $x^2 - ax^2 + 2y^2x$  и найти коэффициенты полученного многочлена.

$x^2 - a \cdot y \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x \text{ collect ,x} \rightarrow (1 - a \cdot y) \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x$
$(1 - a \cdot y) \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x \text{ coeffs,x} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot y^2 \\ 1 - a \cdot y \end{pmatrix}$
или
$x^2 - a \cdot y \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 \cdot x \left  \begin{array}{l} \text{collect ,x} \\ \text{coeffs,x} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot y^2 \\ 1 - a \cdot y \end{pmatrix}$

### Замена переменных

Команда **Variable – Substitute** меню **Symbolics** или оператор **substitute** заменяет выделенным выражением заданную переменную.

При использовании команды главного меню необходимо выполнить следующие действия:

- выделить выражение, которое будет заменять переменную;
- скопировать его в буфер обмена, выбирая команду **Copy** из меню **Edit**;
- выделить переменную, которую нужно заменить, и выбрать соответствующую команду – при этом *MathCAD* подставит выражение из буфера обмена вместо выделенной переменной.

**Пример.** Выполнить замену и результат упростить  $\frac{a-3}{a} - \frac{a}{a+3}$ ,  $a = \frac{x}{2}$ .

$\frac{a-3}{a} - \frac{a}{a+3}$	$\text{substitute ,a} = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{-36}{[x \cdot (x + 6)]}$
$\text{simplify}$	

### Вычисление сумм и произведений рядов

Для вычисления суммы или произведения элементов ряда в символьном виде применяется команда **Evaluate – Symbolically** меню **Symbolics**.

*Примечание* – Перед использованием данной команды необходимо заполнить соответствующими данными оператор поиска суммы или произведения.

## Символьные вычисления

### Вычисление производных

Для вычисления производных различных порядков в символьном виде используется команда **Evaluate – Symbolically** меню **Symbolics** или символьный знак равенства для получения результата, вызываемый нажатием комбинации “Ctrl” + “.”. Перед применением указанной команды необходимо заполнить шаблон производной соответствующими данными.

*Примечание* – Кроме того, можно использовать команду **Variable – Differentiate** меню **Symbolics**, которая выполняет дифференцирование выражения (нахождение первой производной) относительно выделенной переменной.

**Пример.** Вычислить производную первого и третьего порядка функции  $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ .

$$\frac{d}{dx}(x^3 - \sqrt{x}) \rightarrow 3 \cdot x^2 - \frac{1}{\left[2 \cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]}$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(x^3 - \sqrt{x}) \rightarrow 6 - \frac{3}{\left[8 \cdot x^{\left(\frac{5}{2}\right)}\right]}$$

### Вычисление неопределенных интегралов

Для вычисления неопределенных интегралов в символьном виде используется команда **Evaluate – Symbolically** меню **Symbolics** или символьный знак равенства для получения результата, вызываемый нажатием комбинации “Ctrl” + “.”. Перед применением указанной команды необходимо заполнить шаблон неопределенного интеграла соответствующими данными.

*Примечание* – Кроме того, можно использовать команду **Variable – Integrate** меню **Symbolics**, которая выполняет интегрирование выражения по выделенной переменной.

**Пример.** Вычислить неопределенный интеграл  $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$ .

$$\int x^3 - \sqrt{x} dx \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

### Решение уравнений

Команда **Variable – Solve** (Решить относительно переменной) меню **Symbolics** или оператор **solve** позволяет решить уравнение относительно

некоторой переменной и выразить его корни через остальные параметры уравнения.

**Пример.** Решить уравнение  $(b-17) \cdot (b+3) \cdot b = 0$ .

$$(b - 17) \cdot (b + 3) \cdot b \text{ solve, } b \rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Решение систем уравнений

Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

- ввести систему уравнений в блок **Given...Find**;
- выделить функцию **Find** и нажать комбинацию клавиш “Ctrl”+”.” для получения решения системы.

**Пример.** Найти в символьном виде решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 5x = b - y \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{Given} \\ \\ x + 2 \cdot y = a \\ 5x = b - y \\ \\ \text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} \cdot a + \frac{2}{9} \cdot b \\ \frac{5}{9} \cdot a - \frac{1}{9} \cdot b \end{pmatrix} \end{array}$$

### Работа с матрицами

Для символьных преобразований матриц используются следующие команды подменю **Matrix** меню **Symbolics**:

- **Transpose** – транспонирование;
- **Invert** – поиск обратной матрицы;
- **Determinant** – нахождение определителя.

*Примечание* – Перед использованием этих команд нужно выделить соответствующую матрицу.

## Представление символьных результатов

Для представления символьных результатов, получаемых применением команд меню **Symbolics**, используются следующие опции команды **Evaluation Style**:

1 **Show Comments** – позволяет вставить текст, описывающий команду символьного преобразования, выполненного над исходным выражением.

2 Для позиционирования символьных результатов применяются следующие опции:

- вертикально (**vertically wethuot...**) – выводит два преобразования рядом (в столбец);
- горизонтально (**horizontally**) – выводит два преобразования рядом (в строку).

3 Иногда нет нужды сохранять шаги преобразования, достаточно просто трансформировать выражение на том же месте. В этом случае нужно установить опцию **Evaluate in Place**.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 9. Символьная алгебра в *MathCAD*”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл math9.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Упростить выражение. Вариант взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	$\frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(3x + a)(a + x)} - 2 + 10 \frac{ax - 3x^2}{a^2 - 9x^2}$

Окончание таблицы 1

Вариант	Задание
2	$\left[ \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^3-1} + \frac{1}{2-2x} + \frac{1}{x^2+x+1} \right] \frac{x^3+x^2+x}{x-1}$
3	$\frac{\frac{x^2}{x+y} - \frac{x^3}{x^2+2 \cdot x \cdot y+y^2}}{\left( \frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2-y^2} \right)}$
4	$\left( \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^{-2} + 3 \right) \div \left( \left( \frac{m+1}{m-1} \right)^{-2} + 3 \right) \div \frac{1+m^{-2}}{1-m^{-3}} - 2m(m-1)^{-1}$
5	$\left( \frac{xy^{-1} - yx^{-1}}{x+y} \right)^{-1} \div \left( \frac{x-x^{-1}y^2}{1-yx^{-1}} + \frac{x^2y^{-1}+y}{xy^{-1}-1} \right)$
6	$\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \left( \frac{1}{a+b} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \div \left( (a^2+b^2+2ab) \frac{1}{ab} \right)$
7	$81a^{0,75} x^{0,7} 3^{-5} a^{-\frac{1}{4}} xa^{1,5} \sqrt{9x^{0,3}}$
8	$\left( \frac{1 - \frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}}{\sqrt{ab}(1-\sqrt[3]{ab}) - \frac{(1-ab)\sqrt[3]{ab}-1}{1+\sqrt{ab}}} \right)^3 - ab$
9	$\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{(x^2+1)(x+3)(x^2-9)}$
10	$\frac{1-b}{(1-\sqrt{b})^2} \sqrt{b} - 2 \frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} + \sqrt{b}$
11	$\frac{1 + \left( a + \frac{1}{a-1} \right)^{-1}}{1 - \left( a + \frac{1}{a-1} \right)^{-1}} \left( 1 - \frac{1-a^2 - \left( \frac{1}{a-1} \right)^2}{2a \frac{1}{a-1}} \right)$
12	$\left( \frac{a^2}{\frac{3}{b^2}} - \frac{1}{\frac{3}{b^2}} (a^2+b^2) + b^2 \right) \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$

**Задание 2.** Разложить на множители. Вариант взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание 1	Задание 2	Задание 3
1	$x^3 + 9x^2 + 11x - 21$	$4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x$	144
2	$8a^3x^2 - 12a^2x$	$3(x - y) - 2a(x - y) + 7b(x - y)$	236
3	$bc(b + c) + ca(c - a) - ab(a + b)$	$ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$	198
4	$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$	$9p^2 - pn + \frac{1}{36}n^2$	204
5	$a^2 - 16b^2 - 6a + 9$	$8a^6 + 12a^4 + 6a^2 + 1$	168
6	$d^3 + 2d + 3$	$64 - 48x + 12x^2 - x^3$	135
7	$x^3 \cdot (x^2 - 7)^2 - 36x$	$x^4 + 4$	212
8	$m^3 + m^2n + 2mn^2 + 2n^3$	$81a^2 + 90ab + 25b^2$	186
9	$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$	$27c^3 + 8$	224
10	$x^3 + 5x^2 + 3x - 9$	$125 - a^3b^3$	312
11	$x^3 - 3x - 2$	$c^3 + 6c^2 + 11c + 6$	368
12	$c^3 + 2c^2 + c + 2$	$a^4 + a^2b^2 + b^4$	410

**Задание 3.** Разложить в ряд указанные функции. Вариант взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 3

Вариант	Функция	Порядок остаточного члена
1	$f(x) = e^x$	6
2	$f(x) = \operatorname{sh}(x)$	5
3	$f(x) = \operatorname{ch}(x)$	6
4	$f(x) = \sin(x)$	4
5	$f(x) = \cos(x)$	7
6	$f(x) = \ln(x + 1)$	6
7	$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$	5
8	$f(x) = 2^x$	4



Окончание таблицы 3

Вариант	Функция	Порядок остаточного члена
9	$f(x) = \sin^2 x$	10
10	$f(x) = \cos^2 x$	6
11	$f(x) = e^{-x^2}$	7
12	$f(x) = \cos 4x$	10

**Задание 4.** Разложить на элементарные дроби. Вариант взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 4

Вариант	Задание
1	$\frac{3x^2 + 2x - 6}{(x+1)(x+2)}$
2	$\frac{a^2 + 2a + 2}{(a+1)^4} - 1$
3	$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^5 - 2x^3 + x}$
4	$\frac{11x^2 + 9x + 1}{x^2 - 3x + 2}$
5	$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x-2)}$
6	$\frac{x^2 - 3x + 7}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}$
7	$\frac{2x - 3}{x(x-1)(x-2)}$
8	$\frac{1}{v^2 - 2v - 3}$
9	$\frac{1}{x^3 - 4x}$
10	$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}$
11	$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$
12	$\frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$

**Задание 5.** Раскрыть скобки, приравнять к нулю полученное выражение, найти корни уравнения. Отметить найденные корни на графике. Вариант взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 5

Вариант	Задание
1	$(x^2 - 4) \cdot (5x - 3)$
2	$(x - 6) \cdot (x^2 + 3x)$
3	$(2 + 2 \cos x) \cdot (3 + \cos x)$
4	$(x + 0,5) \cdot (2x - 3)$
5	$\left(b + \frac{1}{2b}\right) \cdot (b + 2)$
6	$(b + \sin b) \cdot \left(b + \frac{\pi}{6}\right)$
7	$(\cos b - \sin b) \cdot \left(b + \frac{\pi}{3}\right)$
8	$(\sqrt{x} - 4) \cdot (x^2 + 8)$
9	$(x^3 - 4) \cdot (x + 8)$
10	$\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{4}x\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$
11	$\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^2\right) \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$
12	$\sin(x - 2)(x - 2x + \pi)$

**Задание 6.** Решить следующие системы уравнений. Задание общее для всех вариантов (таблица 6).

Таблица 6 – Задание 6

Система 1	Система 2
$\begin{cases} x^2 = (y - b)^2 \\ y^2 = (x + a)^2 \end{cases}$	$\begin{cases} z + y = bx \\ x^2 + \frac{z}{2} = cy \end{cases}$

**Задание 7.** Найти транспонированную, обратную матрицы и определитель. Задание общее для всех вариантов (таблица 7).

Таблица 7 – Задание 7

Матрица 1	Матрица 2
$\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \\ b & a^2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} s & c & b \\ s-1 & c-2 & b-3 \\ b & c & s \end{vmatrix}$

**Задание 8.** В указанном выражении привести подобные члены поочередно по всем переменным и вывести на экран коэффициенты полученных полиномов. Вариант взять из таблицы 8.

Таблица 8 – Задание 8

Вариант	Выражение
1	$x^3z - z^2x + 5xz$
2	$a - (x + 2) \cdot a^2 - x^2 \cdot (a + 4) - a^3x^3$
3	$yx^2 - y \cdot \left(\frac{1}{2} + x\right) - x^3 \cdot (y^2 + 1)$
4	$(a - b)^2 + 5a^3 - a \cdot (b^2 - 5)$
5	$(z + x)^2 - z^2x + (z - 3)^2 \cdot (x + 1)$
6	$\frac{ya^3}{3} - (y^2 + 1) \cdot a + a^2y$
7	$mn^3 - 3m^2n + (n - 1) \cdot (m + 1)$
8	$a - 4x^2 + (x^2 - 2) \cdot a^2x + 8a^3$
9	$cz - (z^3 + c) \cdot c - (z^2 + 4) \cdot c^2$
10	$(a - x) \cdot (x + a^2) - 7ax^3 + 2a^3x$
11	$(x - z^2) \cdot (x + 2) - z^3x + 12x^2 \cdot (z - 2)$
12	$ab - b^3 \cdot (a + 2b) - 4a^3b^2$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Назовите основные способы выполнения символьных преобразований. В чем разница?
- 2 Для чего предназначена команда **Simplify**?
- 3 Какая команда используется для разложения выражения на множители?
- 4 Для чего предназначена команда **Collect**?
- 5 Для чего предназначена команда **Expand**?

6 Какие символьные преобразования предусмотрены над матрицами? Назовите команды.

7 Для чего предназначена команда *Variable – Solve*?

8 Какая команда применяется для получения вектора коэффициентов многочлена?

## Лабораторная работа № 10

### ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГОРИТМОВ

*Цель работы:* приобрести базовые навыки программирования в *MathCAD*.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Любой алгоритм вычисления в *MathCAD* можно реализовать двумя способами:

1 Программированием в тексте документа. Данный способ предполагает вставку в документ операторов и функции, определенных в *MathCAD* и необходимых для решения задачи.

2 Программированием в программе-функции. Данный способ предполагает использование программы-функции, определенной пользователем. Применяется для решения задач, которые невозможно реализовать, используя только операторы и функции *MathCAD*.

#### Программирование с использованием программы-функции

Программирование в программе-функции состоит из двух этапов:

- описание программы-функции;
- вызов программы-функции.

#### Описание программы-функции и локального оператора присваивания

Перед тем как использовать программу-функцию ее нужно определить (описать). Описание включает в себя имя программы-функции, список формальных параметров, тело программы-функции и осуществляется по следующей схеме:

имя_функции(список_формальных_параметров):=	оператор1
	оператор2
	...
	операторn

где <имя функции> – правильный идентификатор *MathCAD*; используется для вызова программы-функции;

<список формальных параметров> – определяет параметры, через которые в программу-функцию передаются данные, необходимые для выполнения вычислений внутри нее. В качестве формальных параметров могут использоваться имена переменных, массивов и функций;

<тело функции> включает любое число операторов: локальных операторов присваивания, условных операторов и операторов цикла, а также вызов других программ-функций и функций пользователя.

#### Примечания

1 Программа-функция может не иметь формальных параметров и тогда данные передаются через имена переменных, определенных выше описания программы-функции.

2 Для ввода вертикальной черты, определяющей тело программы-функции, используется команда **Add Line** на панели **Programming** или прямая открывающаяся скобка на клавиатуре “}”.

3 При определении значений переменных в теле программы-функции используется локальный оператор присваивания “←”, который вводится нажатием соответствующей командной кнопки на панели **Programming** или на клавиатуре “{”.

4 <Оператор *n*> в теле программы-функции определяет (**всегда**) возвращаемое ею значение.

5 Удаление того или иного оператора в теле программы-функции осуществляется командой **Delete**.

**Пример.** Описать функцию, вычисляющую площадь треугольника по формуле Герона.

$$s(a, b, c) := \left\{ \begin{array}{l} p \leftarrow \frac{a + b + c}{2} \\ s1 \leftarrow \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \\ s1 \end{array} \right.$$

*Примечание* – В приведенном примере формальными параметрами являются простые переменные *a*, *b*, *c*, тело программы включает два локальных оператора присваивания, а значение переменной *s1* определяет возвращаемый через имя функции результат выполнения программы-функции.

#### Вызов программы-функции

Для выполнения программы-функции необходимо обратиться к имени программы-функции с указанием списка фактических параметров (если в описании программы присутствует список формальных параметров):

$$s1 := s(a, b, c)$$

Фактические параметры – это конкретные значения, при которых осуществляются вычисления в теле программы. Фактические параметры отделяются друг от друга запятой.

Между фактическими и формальными параметрами должно быть соответствие:

- по количеству;
- порядку следования;
- типу.

Соответствие по типу означает:

- если формальным параметром является переменная, то в качестве фактического параметра может использоваться константа, переменная, арифметическое выражение;
- если формальным параметром является вектор или матрица, то фактическим должен быть вектор или матрица;
- если формальным параметром является имя встроенной функции или другой программы, то и фактическим параметром должен являться тот же объект.

*Примечание* – Обращение к программе-функции должно выполняться после описания программы-функции и к моменту вызова фактические параметры должны быть определены.

**Пример.** Обращение к программе  $s(a,b,c)$ , приведенной выше, может иметь следующий вид:

$s(3, 4, 5) = 6$	$a := 3 \quad b := 4 \quad c := 5$  $s(a, b, c) = 6$
------------------	--

*Примечание* – Имена фактических параметров при вызове программы-функции могут не совпадать с именами ее формальных параметров.

Передать данные внутрь программы-функции можно, используя внутри программы переменные, определенные до описания программы-функции.

**Пример.**

$c := 2$  $f := \left  \begin{array}{l} c \leftarrow c^2 + 4 \\ c \end{array} \right.$  $f = 8 \quad c = 2$	
---	--

Значение переменной  $c$  изменилось внутри программы-функции, однако вне описания программы-функции эта переменная сохранила свое прежнее значение.

### Программирование в программе-функции линейных алгоритмов

Под линейным алгоритмом понимается вычислительный процесс, в котором действия выполняются в строгой последовательности (друг за другом). Операторы, реализующие этот алгоритм в теле программы-функции, также выполняются последовательно, начиная с первого и заканчивая последним.

**Пример.** Составить программу-функцию для вычисления корней квадратного уравнения:  $ax^2 + bx + c = 0$ . Вычислить корни, взяв в качестве параметров константы и переменные.

$qq(a, b, c, sig) :=$ $a := 2 \quad b := 5 \quad c := 2$ $qq(a, b, c, 1) = -0.5$ $qq(2, 5, 2, -1) = -2$	$d \leftarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x \leftarrow \frac{-b + sig \sqrt{d}}{2 \cdot a}$ $x$ $i\grave{a}d\grave{a}u\acute{e} \acute{e}i\grave{d}\acute{a}i\ddot{u}$ $\grave{a}o\grave{i}d\acute{e} \acute{e}i\grave{d}\acute{a}i\ddot{u}$
---	--

*Примечание* – Программа  $qq$  имеет четыре параметра. Смысл первых трех понятен, а четвертый определяет знак перед корнем квадратным: задавая  $sig = 1$ , получаем корень  $x_1$ ,  $sig = -1$ , получаем корень  $x_2$ .

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 10. Программирование в *MathCAD* линейных алгоритмов”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:

- переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
- константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл math10.
- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Написать программу-функцию для решения задачи, указанной в таблице 1. Решить поставленную задачу для разных наборов данных.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	Определить мощность $N$ постоянного тока $I$ при прохождении его по проводнику сопротивлением $R$ . Для определения мощности использовать формулу $N = I^2 R$
2	Определить силу $F$ , действующую на отрезок проводника длиной $l$ , в магнитном поле с индукцией $B$ , по которому течет ток $I$ . Для определения силы использовать формулу $F = IB l \sin \alpha$
3	Определить напряженность магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником, по которому течет ток $I$ , в точках, лежащих на расстоянии $r$ от проводника. Для определения напряженности использовать формулу $H = \frac{I}{2\pi r}$
4	Определить период $T$ собственных электромагнитных колебаний контура, состоящего из катушки индуктивности $L$ и конденсатора $C$ . Для определения периода колебаний использовать формулу $T = 2\pi\sqrt{LC}$
5	Вычислить количество теплоты, переданной от одного тела другому, если известна масса тела $m$ , начальная $t_1$ и конечная $t_2$ температуры и удельная теплоемкость вещества $c$ . Для определения количества теплоты использовать формулу $Q = cm(t_2 - t_1)$
6	Определить длину световой волны $\lambda$ , если известна частота ее колебаний $f$ и скорость света $v$ . Для определения длины волны использовать формулу $\lambda = \frac{f}{v}$
7	Определить зависимость сопротивления металлического проводника $R$ от температуры $t$ , если известен его температурный коэффициент $\alpha$ и сопротивление $R_0$ при температуре 0 градусов. Для определения сопротивления использовать формулу $R_t = R_0(1 + \alpha t)$
8	Вычислить период $T$ колебания математического маятника, если известна его длина $l$ . Для определения периода колебаний использовать формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$



Окончание таблицы 1

Вариант	Задание
9	Найти силу $F$ взаимодействия двух точечных зарядов $q_1$ и $q_2$ в вакууме, если известно расстояние между ними $r$ . Для определения силы использовать формулу $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2/\text{Кл}^2$
10	Определить энергию $W$ конденсатора, заряженного зарядом $q$ до разности потенциалов $U$ . Для определения энергии использовать формулу $W = \frac{qU}{2}$
11	Найти емкость $C$ конденсатора, если известен его заряд $q$ на одной из обкладок и разность потенциалов $\phi$ между ними. Для определения емкости использовать формулу $C = \frac{q}{\phi}$
12	Найти сопротивление $R$ проводника, если известно удельное сопротивление материала $\rho$ , из которого он изготовлен, его длина $l$ и площадь поперечного сечения $S$ . Для определения сопротивления использовать формулу $R = \frac{\rho l}{S}$

**Задание 2.** Решить задачу. Вариант взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание
1	Описать функцию <i>Dist</i> , находящую расстояние от точки $P$ с координатами $(x_P, y_P)$ до прямой $AB$ , заданной координатами $(x_A, y_A, x_B, y_B)$ по формуле $R = \frac{2S_{PAB}}{AB}$ . С помощью этой функции найти расстояние от точки $P(1,1)$ до прямой $AB(0,6; 6,1)$
2	Описать функцию <i>RingS</i> , находящую площадь кольца, заключенного между двумя окружностями с общим центром и радиусами $R_1$ и $R_2$ . С ее помощью найти площади трех колец, для которых даны внешние и внутренние радиусы. Воспользоваться формулой площади круга радиуса $R$ : $S = \pi R^2$
3	Описать функцию <i>Perim</i> , находящую периметр треугольника по координатам его вершин. С помощью этой функции найти периметры треугольников $ABC, ABD, ACD$ , если даны координаты точек $A(2; 12), B(5; 7), C(10; 5), D(7; 1)$
4	Описать функцию <i>TriangleP</i> , находящую периметр треугольника по его углам и радиусу описанной вокруг него окружности. С помощью этой функции найти периметры двух треугольников, для которых даны соответствующие параметры. Воспользоваться формулой $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ . Углы задавать в градусах

Окончание таблицы 2

Вариант	Задание
5	Описать функцию <i>Romb</i> , которая отыскивает площадь ромба, заданного координатами своих диагоналей. С помощью этой функции найти площади ромбов, заданные следующими координатами: (5, 1, 8, 6, 2, 6, 511) и (6, 2, 9, 7, 3, 7, 6, 12)
6	Описать процедуру <i>Skvadrat</i> , вычисляющую площадь $S$ квадрата, по координатам $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ вершин его диагонали. С помощью этой процедуры найти площади трех квадратов, заданных координатами вершин своих диагоналей
7	Описать процедуру <i>Rokr</i> , которая определяет радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности, заданного координатами своих вершин. Вычисление радиуса производить по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$ . Вычислить радиусы двух вписанных окружностей, предварительно задавшись координатами вершин
8	Описать функцию <i>Square</i> , находящую площадь параллелограмма по координатам его диагоналей и углу между ними. С помощью этой функции найти площадь параллелограмма, заданного следующими параметрами (2, 1, 11, 5, 4, 5, 9, 1, 34°). Площадь параллелограмма находится по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$
9	Описать функцию <i>Rokr</i> , которая определяет радиус описанной вокруг треугольника окружности, заданного двумя сторонами и углом. Для определения длины третьей стороны воспользоваться формулой $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ . С помощью этой функции найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника с параметрами: $b=7, c=5, \alpha=55^\circ$
10	Описать функцию <i>TriangleP</i> , находящую периметр равнобедренного треугольника по его основанию $a$ и высоте $h$ , проведенной к основанию. С помощью этой функции найти периметры трех треугольников, для которых даны основания и высоты. Для нахождения боковой стороны $b$ треугольника применять теорему Пифагора: $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$
11	Описать функцию <i>Square</i> , находящую площадь треугольника по координатам его вершин. С помощью этой функции найти площади треугольников $ABC, ABD, ACD$ , если даны координаты точек $A(2; 2), B(5; 7), C(10; 5), D(7; 1)$ .
12	Описать функцию <i>Vpiramida</i> , находящую объем пирамиды по формуле: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$ , где $S$ – площадь основания пирамиды, $H$ – высота. Основанием пирамиды является ромб, заданный координатами своих диагоналей. С помощью этой функции найти объемы двух пирамид, для которых даны соответствующие параметры

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Как описать программу-функцию?
- 2 Как осуществляется вызов программы-функции?
- 3 Какие объекты могут использоваться в качестве формальных параметров?
- 4 Какая связь должна существовать между формальными и фактическими параметрами?

### Лабораторная работа № 11

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ АЛГОРИТМОВ

*Цель работы:* научиться применять условные функции и условные операторы *MathCAD* для решения прикладных задач.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Процесс вычислений в разветвляющихся алгоритмах зависит от выполнения или не выполнения заданного условия. В данных типах алгоритмов присутствует несколько ветвей вычислительного процесса. Каждая ветвь выполняется, если выполняется какое-то заранее заданное условие.

**Условие** – это логическое выражение, состоящее из выражений-отношений и (или) связывающих их логических операций и круглых скобок.

**Выражения-отношения** осуществляют сравнение двух арифметических выражений, двух констант, двух переменных и других данных между собой и составляются согласно схеме:

$\langle$ арифм. выражение 1 $\rangle$ $\langle$ операция отношения $\rangle$ $\langle$ арифм. выражение 2 $\rangle$
--

В качестве операций отношения выступают символы, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Операции отношения

Знак отношения	Описание	Ввод
$>$	Больше	$>$
$<$	Меньше	$<$
$\geq$	Больше или равно	Ctrl + 0
$\leq$	Меньше или равно	Ctrl + 9
$=$	Равно	Ctrl + =
$\neq$	Не равно	Ctrl + 3

Если заданное отношение выполняется, то выражение принимает значение равное 1 ("истина"), в противном случае – 0 ("ложь").

## Логические операции

*Логическая операция ИЛИ (логическое сложение, объединение).* Обозначается знаком  $\vee$  и записывается в виде:

$\langle \text{лог. выражение } 1 \rangle \vee \langle \text{лог. выражение } 2 \rangle \vee \dots \vee \langle \text{лог. выражение } n \rangle$

Результат операции равен 0, если результаты вычислений всех логических выражений равны 0, и равен 1 для всех остальных результатов исходов.

*Логическая операция И (логическое умножение, пересечение).* Обозначается знаком  $\wedge$  и записывается в виде:

$\langle \text{лог. выражение } 1 \rangle \wedge \langle \text{лог. выражение } 2 \rangle \wedge \dots \wedge \langle \text{лог. выражение } n \rangle$

Результат операции равен 1, если результаты вычислений всех логических выражений равны 1, и равен 0 для всех остальных результатов исходов.

*Логическая операция НЕ (логическое отрицание).* Вводится знаком  $\neg$  и записывается в виде:

$\neg \langle \text{лог. выражение} \rangle$

Результат операции равен 1, если результат вычисления логического выражения равен 0 и наоборот.

### Примечания

- 1 Операция ИЛИ может также вводиться знаком + или комбинацией клавиш Ctrl+Shift+6.
- 2 Операция И может также вводиться знаком \* или комбинацией клавиш Ctrl+Shift+7.
- 3 Операция НЕ может также вводиться комбинацией клавиш Ctrl+Shift+1.
- 4 Для ввода знаков отношений и логических операций можно также использовать панель Boolean.

**Логическим выражением** называется конструкция, составленная из выражений-отношений, логических операций и круглых скобок. Значение логического выражения вычисляется слева направо с учетом приоритета выполнения операций.

Список приоритетов (по их убыванию):

- круглые скобки;
- логическая операция И;
- логическая операция ИЛИ.

**Пример.** Вычислить значение логического выражения:  $x \notin [0; 5]$ .

$f(x) := (x < 0) \vee (x > 5)$	$f(x) := (x < 0) + (x > 5)$
$f(4) = 0$	$f(4) = 0$
$f(-6) = 1$	$f(-6) = 1$

**Пример.** Вычислить значение логического выражения:  $x \in [0; 5]$ .

$f(x) := 0 \leq x \leq 5$	$f(x) := (x \geq 0) \wedge (x \leq 5)$	$f(x) := (x \geq 0) \cdot (x \leq 5)$
$f(4) = 1$ $f(-6) = 0$	$f(4) = 1$ $f(-6) = 0$	$f(4) = 1$ $f(-6) = 0$

### Условная функция

Для программирования разветвляющихся алгоритмов в *MathCAD* применяется условная функция **if** и аналогичный условный оператор.

Условная функция реализует один из двух возможных вариантов вычислений, в зависимости от результата проверки условия.

Данная функция записывается так:

$$\boxed{\text{if}(\langle \text{условие} \rangle, \langle \text{арифм. выраж.1} \rangle, \langle \text{арифм. выраж.2} \rangle)}$$

где  $\langle \text{условие} \rangle$  – логическое выражение;

$\langle \text{арифм. выраж.} \rangle$  – константа, переменная или арифметическое выражение.

Правило вычисления условной функции:

Если результатом вычисления условия является значение 1 – “истина”, то функция принимает значение, равное значению арифметического выражения 1; если результатом вычисления условия является значение 0 – “ложь”, то функция принимает значение, равное значению арифметического выражения 2.

**Пример.** Вычислить  $y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0 \\ \sin(x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Построить график указанной функции.

Определим область значений функции, проанализировав условие задачи

$$x := -1, -1 + 0.2..1$$

Значение шага выбирается самостоятельно.  
В данном случае выбрано число 0.2

Определим функцию

$$y(x) := \text{if} \left( x \geq 0, \sqrt{x}, \sin \left( \frac{x \cdot 180}{\pi} \right) \right)$$

Анализ области значений функции

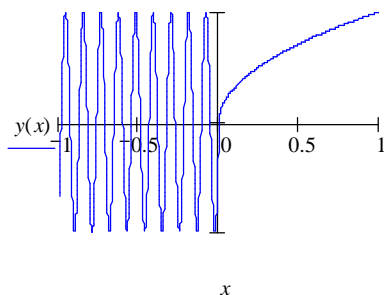
x =

y(x) =

Интервал

-1	-0.68
-0.8	-0.96
-0.6	-0.179
-0.4	0.8
-0.2	0.894
0	-1.272·10 <sup>-14</sup>
0.2	0.447
0.4	0.632
0.6	0.775
0.8	0.894
1	1

$$x := -1, -1 + 0.001..1$$



## Условный оператор

**Условный оператор** используется **только** в теле программы-функции.

Существуют два варианта использования условного оператора.

В кратком формате условный оператор записывается так:

$$\langle \text{оператор} \rangle \text{ if } \langle \text{условие} \rangle,$$

где <оператор> – один или несколько операторов, которые будут выполнены, если результатом вычисления условия станет значение 1 – “истина”;

<условие> – логическое выражение.

*Примечание* – Если результатом вычисления условия станет значение 0 – “ложь”, то программа-функция перейдет к выполнению следующего за оператором условия действия.

В полном формате условный оператор записывается так:

$$\langle \text{оператор} \ 1 \rangle \text{ if } \langle \text{условие} \rangle \\ \langle \text{оператор} \ 2 \rangle \text{ otherwise}$$

где <оператор 1> – один или несколько операторов, которые будут выполнены, если результатом вычисления условия станет значение 1 – “истина”;

<оператор 2> – один или несколько операторов, которые будут выполнены, если результатом вычисления условия станет значение 0 – “ложь”;

<условие> – логическое выражение;

*otherwise* – идентификатор, показывающий, что <оператор 2> будет выполнен, только тогда, когда результатом вычисления условия станет значение 0 – “ложь”.

**Пример.** Вычислить  $y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0, \\ \sin(x), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Îðãããèè òóíéöèð	$y(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{if } x \geq 0 \\ \sin\left(\frac{x \cdot 180}{\pi}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$
Âú÷èñèè çíà÷áéäá òóíéöèè â òí÷éâ	$x=8 \quad y(8) = 2.828$
Âú÷èñèè çíà÷áéäá òóíéöèè â òí÷éâð	$x \text{ íà éíòáðäáéâ } [-2; 2], \text{ òãã } dx=0.5$
Çããããè ïáéãñòù ððãããéáíý òóíéöèè	$x := -2, -2 + 0.5.. 2$
Ðãçóëüòàð: $x =$	$y(x) =$
-2	-0.997
-1.5	0.9
-1	-0.68
-0.5	0.365
0	0
0.5	0.707
1	1
1.5	1.225
2	1.414

*Примечание* – В программе можно использовать несколько следующих друг за другом условных операторов с одним выражением перед служебным словом *otherwise*.

**Пример.** Вычислить  $y(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{если } x > 0, \\ \cos(x), & \text{если } x \in [-1,5; 0], \\ x^3, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Определим функцию  $y(x) := \begin{cases} \ln(x) & \text{if } x > 0 \\ \cos\left(\frac{x \cdot 180}{\pi}\right) & \text{if } -1.5 \leq x \leq 0 \\ x^3 & \text{otherwise} \end{cases}$

Вычислим значение функции в точке  $x = e$   $y(e) = 1$

$x = -1$   $y(-1) = 0.734$

$x = -3$   $y(-3) = -27$

$x$   $\in$   $[-3; 2]$ ,  $dx=0.5$

$x := -3, -3 + 0.5.. 2$

Результат:

$x =$	$y(x) =$
-3	-27
-2.5	-15.625
-2	-8
-1.5	-0.435
-1	0.734
-0.5	-0.931
0	1
0.5	-0.693
1	0
1.5	0.405
2	0.693

### Примечания

1 Функция  $y(x)$  получит значение  $x^3$  только тогда, когда не выполняются условия, записанные в двух вышестоящих строках.

2 Если ввести оператор  $x^3$  без слова *otherwise*, то он будет выполняться всегда вне зависимости от выполнения выше заданных условных операторов.

**Пример.** В зависимости от введенного действия вычислить сумму, произведение или разность двух переменных  $a$  и  $b$ .



$$f(a,b,d) := \begin{cases} rez \leftarrow a + b & \text{if } d = "+" \\ rez \leftarrow a \cdot b & \text{if } d = "*" \\ rez \leftarrow a - b & \text{if } d = "-" \\ rez & \end{cases}$$

$$f(3,4,"+") = 7 \qquad f(3,4,"*") = 12$$

**Пример.** В двузначном числе определить, все ли его цифры одинаковые и выдать соответствующее сообщение.

$$f(ch) := \begin{cases} ch1 \leftarrow mod(ch,10) \\ ch10 \leftarrow trunc\left(\frac{ch}{10}\right) \\ "ïäèíâúâ" & \text{if } ch1 = ch10 \\ "ðàçíúâ" & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(53) = "ðàçíúâ" \qquad f(55) = "ïäèíâúâ"$$

*Примечание* – Для решения примера были использованы функции *mod()* и *trunc()*. Функция *mod()* вычисляет остаток от деления целого на целое. Функция *trunc()* отбрасывает дробную часть вещественного числа без округления. Помимо данных функций для решения задач можно использовать функцию *round()*, которая округляет вещественное число до ближайшего целого.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*.
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 11. Программирование в *MathCAD* разветвляющихся алгоритмов”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл *math11*.

- 9 Показать преподавателю.
- 10 Распечатать документ.
- 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Сформировать два логических выражения и вычислить их значения для разных наборов исходных данных. Вариант задания взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 1

Вариант	Высказывание 1	Высказывание 2
1	Треугольник $ABC$ равнобедренный	Значения переменных $a, b, c$ неотрицательны
2	Треугольник $ABC$ прямоугольный	Значение переменной $x$ принадлежит одному из промежутков (3; 5) и (7; 8)
3	Треугольник $ABC$ тупоугольный	Значение переменной $x$ принадлежит отрезку [8; 12] с точкой разрыва 10
4	Окружность радиуса $r$ вписана в треугольник $ABC$	Для $a, b, c$ хотя бы одна переменная больше 5
5	Известно, что стороны треугольника $ABC$ равны $a, b, c$ . Доказать, что он существует	Значения переменных $a, b, c, d$ возрастают последовательно
6	Параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником	Значение переменной $x$ принадлежит всей числовой оси, кроме промежутка $(-2; 9)$
7	Треугольник $ABC$ равносторонний	Областью определения переменной $f$ являются промежутки (1; 5] и (7; 19]
8	Треугольник $ABC$ остроугольный	Среди переменных $a, b, c$ хотя бы одна отрицательная
9	Окружность радиуса $R$ описана вокруг треугольника $ABC$	Значения переменных $t$ и $l$ принадлежат промежутку $(-3; 3]$
10	Треугольник $ABC$ равен треугольнику $DKE$	Значение переменной $t$ принадлежит одному из промежутков (3, 7] и [8, 13)
11	Известно, что углы треугольника равны $\alpha, \beta, \gamma$ . Доказать, что он существует	Переменные $a, b, c$ образуют возрастающую последовательность
12	Прямоугольник $ABCD$ является квадратом	Переменные $x, y, z$ образуют убывающую последовательность

**Задание 2.** Вычислить значения функции  $y(x)$  в заданных точках и построить ее график. Для определения функции использовать **условную функцию**. Полученный график отформатировать по своему усмотрению. Вариант задания взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 2

Вариант	Задача
1	$y(x) = \begin{cases} \ln x^2, & \text{если } x \in [-5; 5] \\ \cos 5x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
2	$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{ x }, & \text{если } x \in [-3; 3] \\ \sin 2x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3	$y(x) = \begin{cases} 50 \cos 5x, & \text{если } x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{10}, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
4	$y(x) = \begin{cases} 8 \sin 4x, & \text{если } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ x^2, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5	$y(x) = \begin{cases} - e^x , & \text{если } x \in [-3; 3] \\ 4 \cos 4x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
6	$y(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & \text{если } x \leq 0 \\ \frac{\sin 3x}{3}, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
7	$y(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x > 0 \\ \cos x + \sin x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
8	$y(x) = \begin{cases}  x , & \text{если } -2 \leq x \leq 2 \\ \sin 2x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
9	$y(x) = \begin{cases}  \sin 2x , & \text{если } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \\ - \sin x , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
10	$y(x) = \begin{cases} x^4, & \text{если } x \in [-2; 2] \\ - 4 \sin x , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Окончание таблицы 3

Вариант	Задача
11	$y(x) = \begin{cases} \cos 3x, & \text{если } x \leq 2 \\  x^{\sin x} , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
12	$y(x) = \begin{cases} 2^{\cos 2x}, & \text{если } x \in [-4; 4] \\  x , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

**Задание 3.** Построить график функции  $f(x)$ . Для определения функции использовать **условный оператор**. Полученный график отформатировать по своему усмотрению. Вариант задания взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Задание 3

Вариант	Задача
1	$f(x) = \begin{cases} -3x + 2, & \text{если } x \leq 0 \\ 2, & \text{если } 0 < x \leq 3 \\ x - 1, & \text{если } x > 3 \end{cases}$
2	$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{если } -1 \leq x < 0 \\ x \cdot (3 - x), & \text{если } 0 \leq x < 3 \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{если } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$
3	$f(x) = \begin{cases} \sin 4x, & \text{если } x > 4 \\ \ln x, & \text{если } x \in [0,5; 1,5] \\ \cos x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
4	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 2 \\  \sin x , & \text{если } x < -5 \\ 2^x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5	$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \in [-2; 2] \\ \cos x, & \text{если } x < -2 \\ \ln x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
6	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \in [-10; -3] \\ 2, & \text{если } x > -3 \\ \sin 4x, & \text{если } x \geq 5 \end{cases}$

Окончание таблицы 4

Вариант	Задача
7	$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \leq -1 \\ \cos 5x, & \text{если } x \in (-1; 5] \\ -3, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
8	$f(x) = \begin{cases} \cos(x-2), & \text{если } x \leq -2 \\ -x, & \text{если } x \in (-2; 2] \\ \sin(2x-2), & \text{если } x > 2 \end{cases}$
9	$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x > 0 \\ \cos 4x, & \text{если } x < -5 \\ x - e^x, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
10	$f(x) = \begin{cases}  x , & \text{если } x < -5 \\ \sin x^2, & \text{если } x \in [-5; 5] \\  x , & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
11	$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x < -3 \\ 2, & \text{если } x \in [-3; 3] \\ \sqrt{x}, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
12	$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in \left[-3\pi; \frac{-\pi}{2}\right) \\ 3, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \\ \cos x, & \text{если } x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right) \\ -3, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

**Задание 4.** Решить задачу. Для решения задачи описать программу-функцию, выполняющую указанные действия. Проверить работу программы для разных наборов исходных данных. Вариант задания взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Задание 4

Вариант	Задача
1	По введенной первой букве названия стандартной программы ОС <i>Windows</i> вывести ее полное наименование. <i>С</i> – Калькулятор; <i>N</i> – Блокнот; <i>P</i> – Графический редактор
2	Для введенной команды описать действие, которое она выполняет: <i>Rename, Copy, Cut, Paste</i>

Окончание таблицы 5

Вариант	Задача
3	Для введенной команды, описать действие, которое она выполняет: New, Open, Save, Save as
4	По введенной букве описать, какой вид начертания будет применен к тексту: <i>B</i> – полужирный; <i>I</i> – курсив; <i>U</i> – подчеркнутый
5	По введенному наименованию функции для работы с матрицами, вывести описание действия, которое она выполняет: <i>tr</i> ; <i>max</i> ; <i>cols</i> ; <i>stack</i>
6	Для выбранной команды вывести комбинацию клавиш для ее выполнения: <i>Copy</i> ; <i>Cut</i> ; <i>Paste</i>
7	Ввести первую букву названия тригонометрической функции и угол. В зависимости от результата осуществить вычисление: $t - \text{tg}x$ ; $c - \text{cos}x$ ; $s - \text{sin}x$
8	В зависимости от выбранного варианта осуществить соответствующее действие над матрицей: 1 – поиск определителя; 2 – транспонирование; 3 – инверсия
9	В зависимости от введенного символа применить соответствующую функцию к частному от деления <i>a</i> на <i>b</i> : $r - \text{round}()$ ; $t - \text{trunc}()$
10	В зависимости от выбранного варианта осуществить соответствующее действие над матрицей: 1 – найти минимальное значение; 2 – найти максимальное значение; 3 – найти среднее значение элементов
11	В зависимости от выбранного варианта осуществить соответствующее действие над вектором: 1 – найти длину вектора; 2 – сортировать элементы вектора по возрастанию
12	По введенному наименованию функции для работы с матрицами, вывести описание действия, которое она выполняет: <i>tr</i> ; <i>mean</i> ; <i>augment</i> ; <i>rows</i> ; <i>min</i>

**Задание 5\***. Решить задачу. Для решения использовать сначала **условную функцию**, а затем **условный оператор**. Вариант задания взять из таблицы 6. Протестировать программу для разных наборов исходных данных.

Таблица 6 – Задание 5

Вариант	Задача
1	Дано натуральное число. Верно ли, что оно заканчивается нечетной цифрой?
2	Определить, является ли число <i>A</i> делителем числа <i>B</i> ?
3	Дано двузначное число. Определить, является ли сумма его цифр двузначным числом?
4	Дано двузначное число. Определить, кратна ли сумма его цифр 4?
5	Дано трехзначное число. Определить, какая из его цифр больше: первая или последняя?
6	Дано двузначное число. Определить, все ли его цифры различны?
7	Дано целое число. Определить, является ли оно четным?
8	Дано целое число. Определить, оканчивается ли оно цифрой 7?
9	Дано двузначное число. Определить, какая из его цифр больше: первая или вторая?

Окончание таблицы 6

Вариант	Задача
10	Дано двузначное число. Определить, кратна ли сумма его цифр числу $D$ ?
11	Дано двузначное число. Определить, больше ли числа $A$ сумма его цифр?
12	Дано натуральное число. Верно ли, что оно заканчивается четной цифрой?

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Синтаксис и результат работы логической операции ИЛИ. Какой знак используется для обозначения данной операции? Как его ввести с клавиатуры?
- 2 Синтаксис и результат работы логической операции И. Какой знак используется для обозначения данной операции? Как его ввести с клавиатуры?
- 3 Синтаксис условной функции *if* и ее применение.
- 4 Синтаксис условного оператора *if* (две схемы) и его применение.

### Лабораторная работа №12

#### ПРОГРАММИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

*Цель работы:* научиться использовать циклические операторы для решения задач в *MathCAD*.

#### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

**Цикл** – многократно повторяющийся участок вычислительного процесса. Команда, предназначенная для выполнения циклических вычислений, называется **оператором цикла**.

Можно выделить две категории операторов цикла:

- *арифметические*;
- *итерационные*.

Если заранее известно количество необходимых повторений, то цикл называется арифметическим. Если же количество повторений заранее неизвестно, то говорят об итерационном цикле.

В итерационных циклах производится проверка некоторого условия, и в зависимости от результата этой проверки происходит либо выход из цикла, либо повторение выполнения тела цикла.

#### Арифметический цикл

Для программирования таких циклов используется оператор *for*, вызов которого осуществляется одноименной кнопкой на панели *Programming*.







**Пример.** Найти сумму положительных элементов вектора  $V$ . Вектор задавать в отдельной программе.

Опишем программу-функцию для формирования вектора:

$$V(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ v_i \leftarrow \text{rnd}(5) - 2 \\ v \end{cases}$$

Опишем функцию, которая находит сумму элементов вектора, стоящих на четных позициях:

$$\text{SumV}(Vekt) \leftarrow \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..length(Vekt) \\ S \leftarrow S + Vekt_i \text{ if } mod(i,2) = 0 \\ S \end{cases}$$

Решим поставленную задачу.

Сформируем вектор, состоящий из 6 элементов

$$Vekt := V(6) \quad Vekt = \begin{pmatrix} 0.658 \\ 1.009 \\ -1.169 \\ 0.254 \\ -1.715 \\ 1.917 \end{pmatrix}$$

Найдем сумму элементов вектора, стоящих на четных позициях:

$$\text{SumV}(Vekt) = 3.179$$

*Примечания*

- 1 Функция  $\text{rnd}(N)$  генерирует случайное число из диапазона  $[0; N - 1]$ ;
- 2 В данной программе формируется вектор с числом элементов, равных  $n$ .

**Пример.** Найти произведение отрицательных элементов матрицы  $B$ , состоящей из  $n$  строк и  $m$  столбцов. Матрицу задавать в отдельной программе.

Опишем программу-функцию для формирования матрицы:

$$\text{Matr}(n, m) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..m \\ \quad \quad b_{i, j} \leftarrow \text{rnd}(5) - 2 \\ \quad \quad \quad b \end{array} \right.$$

Опишем функцию для поиска произведения отрицательных элементов матрицы  $B$

$$\text{PrB}(B) := \left| \begin{array}{l} P \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1.. \text{rows}(B) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{cols}(B) \\ \quad \quad P \leftarrow P \cdot B_{i, j} \text{ if } B_{i, j} < 0 \\ \quad \quad \quad P \end{array} \right.$$

Решим поставленную задачу.

Сформируем матрицу  $B$ , состоящую из 3 строк и 2 столбцов

$$B := \text{Matr}(3, 2) \quad B = \begin{pmatrix} 0.995 & 1.675 \\ 0.862 & -1.242 \\ 0.126 & 0.586 \end{pmatrix}$$

Найдем произведение отрицательных элементов матрицы  $B$ :

$$\text{PrB}(B) = -1.242$$

### Дополнительные операторы программирования циклов в *MathCAD*

#### *Оператор break*

Позволяет выйти из цикла или приостановить исполнение программы при выполнении заданного в операторе *break* условия.

#### *Оператор continue*

Используется для продолжения выполнения цикла путем возврата в начало тела цикла.

#### *Оператор return*

Прерывает выполнение программы-функции и возвращает значение операнда, стоящего за ним.

**Пример.** Найти наибольший общий делитель двух чисел.

```
conbr(num1,num2) := for cdiv ∈ num1,num1 – 1.. 1
                    | continue if (mod(num2,cdiv) ≠ 0)
                    | return cdiv if mod(num1,cdiv) = 0
```

conbr (15,3) = 3!

*Примечание* – В примере применен цикл *for* для перебора возможных кандидатов *cdiv* в наибольший общий делитель. Критерий делимости – равенство нулю остатка от деления. Если кандидат не является делителем числа *num2*, по команде *Continue* начинается следующий проход цикла. Если кандидат *cdiv* делится на числа *num2* и *num1* без остатка, значит он является общим делителем двух чисел. Поскольку перебор идет от больших значений к меньшим, значит первый найденный делитель является наибольшим. Выводим его и выходим из цикла командой *Return*.

### Оператор on error

Этот оператор является обработчиком возникающих при выполнении вычислений ошибок и определяется так:

`<выражение 1> on error <выражение 2>`

Принцип работы: выполняется <выражение 1>, если при выполнении <выражения 2> возникает ошибка; если ошибка не возникает, то выполняется <выражение 2>.

Для вывода диагностических сообщений при возникновении в вычислениях ошибки используется функция *error()*, которая записывается так:

`error ("<сообщение пользователя >")`

*Примечание* – Все перечисленные дополнительные функции (*break*, *continue*, *return*, *error*) используются в левом поле условного оператора *if*.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1 Загрузить *MathCAD*
- 2 Ввести в поле документа текст:  
“Лабораторная работа № 12. Программирование в *MathCAD* циклических алгоритмов”.
- 3 Выполнить задания, сопровождая их текстовыми комментариями.
- 4 Создать верхний колонтитул: ввести по левому краю ФИО, по центру – вариант, по правому краю – группу.
- 5 Создать нижний колонтитул: ввести по центру нумерацию страниц.
- 6 Отформатировать документ:
  - переменные выделить шрифтом: размер – 11, начертание – полужирное;
  - константы выделить шрифтом: размер – 9, начертание – курсивное.
- 7 Установить параметры страниц документа: все поля – 15 мм.
- 8 Сохранить документ в файл *math12*.

- 9 Показать преподавателю.  
 10 Распечатать документ.  
 11 Сформировать отчет.

**Задание 1.** Вычислить значения функции  $f(x)$  в точках  $x \in [x1; x2]$ , шаг равен  $dx$ . Вариант задания взять из таблицы 1. Для решения задачи сначала воспользоваться оператором *while*, а затем оператором *for*.

Таблица 1 – Задание 1

Вариант	Задание
1	$f(x) = \frac{x-5}{x^2} + \frac{x^2}{x+5}$
2	$f(x) = (x+2)^3 + \sin(x) \cdot x^2$
3	$f(x) = x^{\sin(x)+\cos(x)} - 5$
4	$f(x) = \frac{x^2 - \sin(4x)\sqrt{x+10}}{5}$
5	$f(x) = 2 - e^{\cos(2 \cdot x)}$
6	$f(x) = 2^{\cos(x)} + \frac{x}{5}$
7	$f(x) = 2^{\cos(x)} + 4\sin(x)$
8	$f(x) = x + \sin(x-2)$
9	$f(x) = b^{\sin(x) \cdot 2} - 2$
10	$f(x) = \sqrt{x^3} - \sin(x) - 3$
11	$f(x) = \sqrt{x^3} - \cos(x) - 3$
12	$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

**Задание 2.** Решить задачу. Вариант задания взять из таблицы 2.

Таблица 2 – Задание 2

Вариант	Задание
1	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти минимальный четный элемент
2	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти сумму элементов, стоящих на нечетных позициях
3	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти количество элементов равных числу $d$
4	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти произведение отрицательных элементов

Окончание таблицы 2

Вариант	Задание
5	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти максимальный нечетный элемент
6	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти количество элементов равных максимальному значению
7	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти произведение элементов больших числа 5
8	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти сумму элементов, стоящих на позициях кратных 2
9	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти максимальный по модулю элемент
10	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов, найти количество элементов, кратных 7
11	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов найти произведение элементов, значения которых находятся в интервале $[a, b]$
12	В векторе $V$ , состоящем из $n$ элементов найти сумму элементов не равных минимальному значению

**Задание 3.** Решить задачу. Вариант задания взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Задание 3

Вариант	Задание
1	Дана квадратная матрица $M$ порядка $N$ . Определить количество элементов главной диагонали, равных минимальному значению
2	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Найти сумму максимальных элементов всех строк
3	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Вывести на экран номер строки с максимальной суммой элементов. Считать, что такая строка одна
4	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Найти количество элементов матрицы, равных числу $c$
5	Дана квадратная матрица $M$ порядка $N$ . Найти сумму отрицательных элементов, находящихся выше главной диагонали
6	Дана квадратная матрица $M$ порядка $N$ . Найти произведение четных элементов, находящихся ниже главной диагонали
7	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Вывести на экран строку с максимальной по модулю суммой элементов
8	Дана квадратная матрица $M$ порядка $N$ . Найти количество элементов, равных минимальному и находящихся на главной диагонали
9	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Найти произведение элементов, кратных числу $b$
10	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Вывести на экран номер столбца, в котором находится нулевой элемент матрицы. Считать, что в матрице только один нулевой элемент
11	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Вывести на экран номер строки, в которой находится минимальный элемент матрицы. Считать, что в матрице только один минимальный элемент
12	Дана матрица $M$ размером $n \times m$ . Найти произведение минимальных элементов всех столбцов

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Синтаксис оператора *for* и его применение?
- 2 Синтаксис оператора *while* и его применение?
- 3 Дополнительные операторы программирования циклов и их применение (*break, return, continue*).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев [и др]. – М. : Наука, 1984. – 513 с.
- 2 *Баврин, И. И.* Курс высшей математики / И. И. Баврин. – М. : Просвещение, 1992. – 368 с.
- 3 *Кудрявцев, Е. М.* MathCAD 8 / Е. М. Кудрявцев. – М. : ДМК, 2002. – 296 с.

Учебное издание

*ЛИТВИНОВИЧ Татьяна Николаевна*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ  
КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATHCAD

Лабораторный практикум по дисциплине «Информатика»  
для курсантов I курса военно-транспортного факультета

Редактор Т. М. Ризевская  
Технический редактор В. Н. Кучерова  
Корректор Т. А. Пугач

Подписано в печать 20.04.2011 г. Формат бумаги 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 7,08. Тираж 100 экз.  
Зак. № . Изд. № 55.

Издатель и полиграфическое исполнение  
Белорусский государственный университет транспорта:  
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.  
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.  
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.