

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

Г. М. КУЗЕМКИНА, И. Е. КРАКОВА, Д. А. ЧЕРНОУС

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «Статика»

(Обзор материала
и задания для контрольных работ)

Учебно-методическое пособие

Одобрено методической комиссией факультета безотрывного обучения

2-е издание, исправленное

Гомель 2009

УДК 531.2 (075.8)
ББК 22.21
К89

Рецензент – зав. кафедрой “Техническая физика и теоретическая механика”,
канд. техн. наук, доцент, А. В. Заворотный (УО «БелГУТ»).

Куземкина, Г. М.

К89 Теоретическая механика. Раздел «Статика» (Обзор материала и задания для контрольных работ) : учеб.-метод. пособие.– 2-е изд., испр./ Г. М. Куземкина, И. Е. Кракова, Д. А. Черноус ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2009. – 67 с.

ISBN 978-985-468-531-1

Изложены краткие сведения из раздела «Статика» курса теоретической механики в соответствии с программой технических вузов. Разобраны примеры решения задач по изучаемым темам. Приведены задания контрольных работ по теоретической механике.

Предназначено для студентов факультета безотрывного обучения.

УДК 531.2(075.8)
ББК 22.21

ISBN 978-985-468-531-1

© Г. М. Куземкина, И. Е. Кракова, Д. А. Черноус, 2003
© Г. М. Куземкина, И. Е. Кракова, Д. А. Черноус,
2009, с изменениями
© Оформление. УО «БелГУТ», 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1 Равновесие тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил	6
1.1 Некоторые положения теории	6
1.1.1 Понятие о силе. Распределенные и сосредоточенные силы	6
1.1.2 Механические связи и их реакции	7
1.1.3 Проекция вектора на координатные оси	8
1.1.4 Момент силы относительно точки	9
1.1.5 Пара сил и ее момент	10
1.1.6 Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости	10
1.2 Пример решения задачи типа С-1	12
1.3 Условие задания С-1. Равновесие плоской рамы	14
2 Равновесие с учетом сил трения	20
2.1 Основные понятия и определения	20
2.2 Образец выполнения задания С-2	20
2.3 Условие задания С-2. Равновесие тела с учетом сил трения сцепления	22
3 Равновесие системы тел	28
3.1 Некоторые сведения из теории	28
3.2 Пример решения задачи о равновесии системы тел	28
3.3 Условие задания С-3. Определение реакций связей рамной конструкции	31
4 Расчет плоских ферм	37
4.1 Краткие сведения из теории	37
4.1.1 Понятия о ферме	37
4.1.2 Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов	37
4.1.3 Расчет плоских ферм способом сечений	38
4.2 Пример расчета плоской фермы	39
4.3 Условие задания С-4. Расчет сил, действующих на плоскую ферму	42
5 Равновесие тела, находящегося под действием пространственной системы сил	48
5.1 Краткие сведения из теории	48
5.1.1 Равновесие тела, на которое действует система сходящихся в пространстве сил	48
5.1.2 Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил	48
5.2 Пример решения задачи типа С-5	50
5.3 Условие задания С-5. Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил	53
6 Центр тяжести	59
6.1 Краткие сведения из теории	59
6.2 Пример решения задачи	60
6.3 Условие задания С-6. Определение координат центра тяжести плоского сечения	62
Список рекомендуемой литературы	66
Приложение А Программа раздела «Статика» курса теоретической механики	67

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие содержит краткий обзор материала раздела «Статика» курса теоретической механики, соответствующего приведенной в приложении А программе. Здесь же приводятся примеры решения задач и задания для контрольных работ студентам безотрывной формы обучения. По указанию преподавателя объем контрольной работы может быть сокращен для студентов отдельных специальностей.

Каждое задание содержит 30 вариантов задач. **Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по двум последним цифрам учебного шифра** с использованием таблицы 1. Буква «С» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Статика».

Перед выполнением каждого задания контрольной работы студент должен ознакомиться с теорией, опираясь не только на материал, изложенный в пособии, но и на учебники [1–4]. Затем он должен разобрать приведенный пример решения задачи, а уже после этого приступить к индивидуальному заданию.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На обложке указываются: название кафедры, название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждой задачи обязательно следует начинать *с новой страницы*. Оформление задачи начинается с указания номера и варианта задачи, ее названия, далее выполняется чертеж и записывается, что дано и что необходимо опрелелить (текст условия задачи полностью не переписывают). Чертеж должен быть выполнен в соответствии с требованиями инженерной графики с применением чертежных инструментов, а его размеры должны быть таковы, чтобы можно было четко показать все векторы сил и другие детали. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно *обязательно*. Все записи должны быть сделаны доступным для чтения шрифтом. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы использованы, откуда получены те или иные результаты и т. д.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице *должны оставаться поля* для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переоформления. К работе, предъявляемой к повторной проверке (если она выполнена в другой тетради), должна *обязательно* прилагаться незачтенная работа.

Ко дню экзамена (зачета) работа должна быть защищена у проверяющего ее преподавателя. При этом все отмеченные рецензентом погрешности должны быть устранены.

Таблица 1 – Варианты заданий для выполнения контрольной работы

Учебный шифр	Варианты заданий														
	C-1, C-4	C-2, C-5	C-3, C-6		C-1, C-4	C-2, C-5	C-3, C-6		C-1, C-4	C-2, C-5	C-3, C-6		C-1, C-4	C-2, C-5	C-3, C-6
01	11	5	19	26	1	7	19	51	24	4	22	76	7	3	16
02	24	19	9	27	9	15	26	52	30	22	11	77	26	14	8
03	22	29	11	28	4	25	28	53	22	17	3	78	11	27	29
04	2	8	15	29	16	2	13	54	8	8	20	79	18	2	17
05	15	18	29	30	11	28	30	55	5	19	26	80	22	25	1
06	21	26	17	31	6	30	17	56	14	20	13	81	4	16	20
07	18	3	12	32	17	26	4	57	9	9	24	82	1	6	14
08	26	27	9	33	30	11	22	58	20	23	7	83	14	28	2
09	9	25	30	34	14	29	8	59	12	5	16	84	21	11	8
10	4	10	13	35	26	17	11	60	7	28	25	85	8	9	15
11	16	23	28	36	27	13	5	61	15	14	9	86	16	22	10
12	13	1	23	37	30	28	1	62	25	30	4	87	25	12	23
13	23	16	6	38	13	24	9	63	2	10	18	88	29	24	7
14	6	7	20	39	24	6	30	64	23	24	1	89	15	4	19
15	29	13	2	40	7	22	14	65	10	12	14	90	23	20	4
16	3	26	21	41	28	26	3	66	17	29	7	91	12	13	24
17	17	21	10	42	15	9	12	67	19	16	23	92	19	30	3
18	28	22	5	43	12	20	25	68	29	1	19	93	10	7	18
19	14	2	26	44	19	8	6	69	6	21	12	94	3	27	12
20	5	29	17	45	2	21	21	70	13	6	21	95	9	10	22
21	10	17	25	46	3	12	24	71	16	27	2	96	27	5	14
22	1	24	15	47	25	19	5	72	21	25	10	97	5	23	16
23	27	15	6	48	8	3	18	73	18	11	27	98	13	18	10
24	20	30	11	49	20	15	27	74	4	3	15	99	20	1	28
25	12	23	29	50	28	4	16	75	11	18	13	00	6	14	27

1 РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

1.1 Некоторые положения теории

1.1.1 Понятие о силе. Распределенные и сосредоточенные силы

Сила – это мера механического действия на данное тело со стороны других тел, характеризующая величину и направление этого действия.

Действие силы на рассматриваемое тело определяется тремя факторами: *точкой приложения, направлением, численным значением*. В Международной системе единиц (СИ) в качестве единицы силы используется *ньютон*.

Совокупность сил, приложенных к телу, называют *системой сил*. Если систему сил можно заменить одной силой так, что при этом движение тела не изменится, то такая сила называется *равнодействующей* системы сил.

Силы, приложенные к какой-нибудь одной точке тела, называются *сосредоточенными*, а силы, действующие на некоторую часть линии, площади или объема, – *распределенными*.

Распределенные силы характеризуются *интенсивностью* q . Интенсивность силы, приложенной к линии, представляет собой силу, приходящуюся на единицу длины линии. Она измеряется в *ньютоннах на метр* – Н/м.

При решении задач статики распределенные силы, как правило, заменяют сосредоточенными равнодействующими силами.

Распределенную нагрузку с постоянной интенсивностью можно заменить сосредоточенной силой, равной произведению интенсивности на длину участка действия распределенной нагрузки ($Q = ql$) и приложенной к середине участка действия этой распределенной нагрузки (в центре тяжести параллелограмма, изображающего нагрузку, как это показано на рисунке 1.1).

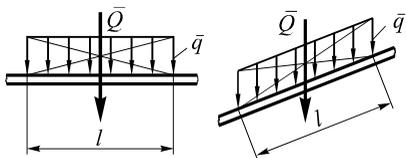


Рисунок 1.1

Если распределенная сила изменяется по закону треугольника, то значение равнодействующей сосредоточенной силы

$$Q = q_{\max} \frac{l}{2},$$

а ее линия действия проходит через точку пересечения медиан треугольника, изображающего закон изменения нагрузки, на расстоянии $\frac{l}{3}$ от основания (рисунок 1.2).

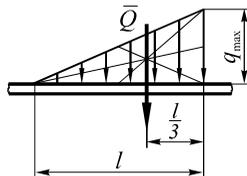


Рисунок 1.2

1.1.2 Механические связи и их реакции

Все силы, действующие на тела, делятся на активные и силы реакций механических связей.

Под *активными* понимаются силы, побуждающие тела к движению (на приведенных в этом пункте рисунках активными являются сила тяжести \vec{G} и сила \vec{F}).

Тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела, называются *механическими связями*, а силы, которыми связи действуют на рассматриваемое тело, — *реакциями связей*.

Рассмотрим виды механических связей, наиболее часто встречающихся на практике.

Гладкая поверхность (опора без трения). Такая связь имеет место при опирании одного тела на другое. Реакция гладкой поверхности направляется перпендикулярно касательной к поверхности, проведенной в точке контакта тел, в сторону рассматриваемого тела. На рисунке 1.3 изображены разные случаи расстановки реакции гладкой поверхности, а также показаны варианты схематичного обозначения этой связи.

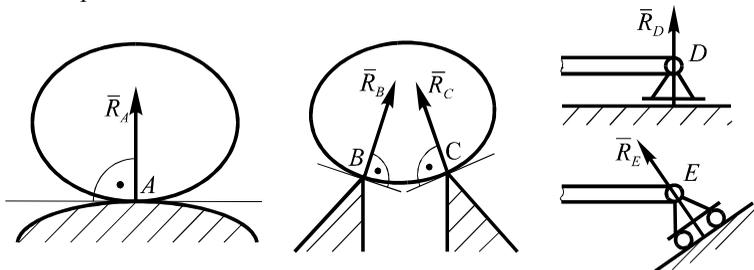


Рисунок 1.3

Цилиндрический шарнир. Это соединение твердых тел допускает их относительное вращение. Реакция цилиндрического шарнира \vec{R} может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрического шарнира. При решении задач, как правило, определяют не саму силу \vec{R} , а ее составляющие (проекции на оси координат) \vec{R}_x и \vec{R}_y (рисунок 1.4).

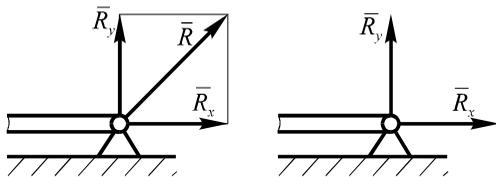


Рисунок 1.4

Невесомый стержень. Стержень, соединяющий два тела, препятствует изменению расстояния между точками соединения стержня со взаимодействующими телами. Сила реакции прямолинейного невесомого стержня направляется вдоль него (рисунок 1.5).

Гибкая нить. Ею могут моделироваться тросы, канаты, цепи и т. д. Нить способна препятствовать только тем действиям, которые пытаются ее растянуть. В случае сжатия нити она сминается и не оказывает сопротивления этому воздействию. Поэтому сила натяжения невесомой гибкой нити направляется по этой нити в сторону точки подвеса, как это показано на рисунке 1.6.

Заделка (зашемление). Данная связь (например, крепление кронштейна к стене) исключает любые перемещения взаимодействующего с ней тела. При решении задач, как правило, рассчитывают составляющие силы реакции заделки \bar{R}_x , \bar{R}_y и момент заделки M (рисунок 1.7).

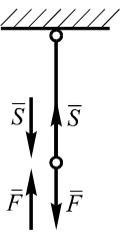


Рисунок 1.5

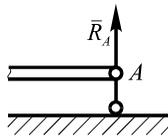


Рисунок 1.6

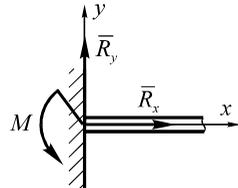
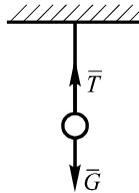


Рисунок 1.7

1.1.3 Проекция вектора на координатные оси

Проекцией силы на ось называется направленный отрезок на оси, заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора силы на ось (рисунок 1.8).

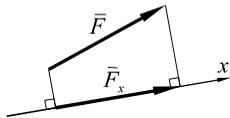


Рисунок 1.8

Значение проекции вектора силы на ось равно произведению модуля силы на косинус угла между ее вектором и осью. Если направление проекции совпадает с направлением оси, то проекция вектора на ось положительна, в противном случае – отрицательна.

На рисунке 1.9 показаны случаи нахождения проекций сил на ось координат.

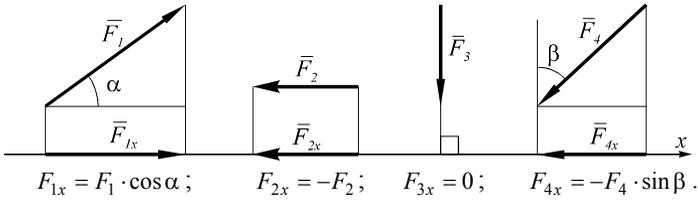


Рисунок 1.9

1.1.4 Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо:

$$M_o(\vec{F}) = Fh.$$

Плечо силы – это длина перпендикуляра, опущенного из точки, относительно которой определяется момент, на линию действия силы.

Если сила стремится повернуть тело по отношению к точке *против хода часовой стрелки*, то момент силы относительно этой точки считается *положительным*, в противном случае – *отрицательным*. Если линия действия силы проходит через данную точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю. Например, моменты сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ относительно точки А (рисунок 1.10) соответственно равны:

$$M_A(\vec{F}_1) = \vec{F}_1 h_1; M_A(\vec{F}_2) = -\vec{F}_2 h_2; M_A(\vec{F}_3) = 0.$$

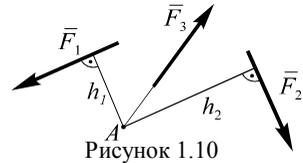


Рисунок 1.10

В случаях, когда нахождение плеча затруднено, для вычисления момента силы относительно точки целесообразно использовать *теорему Вариньона*: *момент равнодействующей силы относительно некоторой точки равен алгебраической сумме моментов сил, составляющих систему, относительно той же точки*:

$$M_o(\vec{R}) = \sum M_o(\vec{F}_i).$$

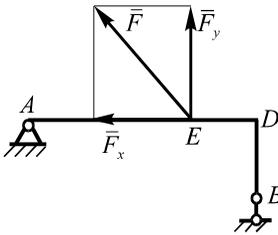


Рисунок 1.11

При решении задач для нахождения момента силы \vec{F} относительно точки с помощью теоремы Вариньона силу раскладывают на составляющие, моменты которых относительно рассматриваемой точки легко определяются. Затем искомый момент получают как алгебраическую сумму моментов составляющих. Например, для схемы, изображенной на рисунке 1.11, имеем

$$\begin{aligned} M_B(\vec{F}) &= M_B(\vec{F}_x) + M_B(\vec{F}_y) = F_x \cdot BD - F_y \cdot DE = \\ &= F \cos \alpha \cdot BD - F \sin \alpha \cdot DE. \end{aligned}$$

1.1.5 Пара сил и ее момент

Пара сил – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположных по направлению сил.

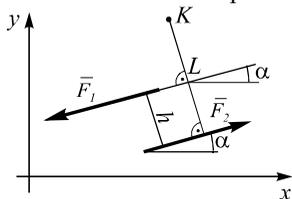


Рисунок 1.12

Из рисунка 1.12 видно, что сумма проекций сил пары на оси координат всегда равна нулю:

$$\sum F_{ix} = -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = 0.$$

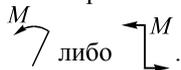
Найдем сумму моментов сил пары относительно произвольной точки плоскости K :

$$M_K = -F_1 \cdot KL + F_2 \cdot (KL + h) = F_2 \cdot h.$$

Из полученного выражения видно, что результат не зависит от расстояния KL (следовательно, от положения точки K), а определяется только расстоянием h . Расстояние h между линиями действия сил пары называют *плечом пары*.

Момент пары считается положительным, если она стремится повернуть тело при действии против хода часовой стрелки, и отрицательным – при действии по ходу часовой стрелки.

На расчетных схемах для обозначения пар сил применяются символы



1.1.6 Условия равновесия тел, находящихся под действием сил, расположенных в одной плоскости

Основной задачей статики является изучение равновесия тел под действием приложенных к ним сил. *Равновесием тела* называют состояние его покоя или движение, при котором все точки тела двигаются прямолинейно равномерно.

Количество уравнений, составляемых при решении задач о равновесии тел, зависит от расположения векторов сил, приложенных к рассматриваемому телу.

Силы, действующие на тело, называются *сходящимися*, если линии их действия пересекаются в одной точке (рисунок 1.13).

Для равновесия тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех сил, приложенных к нему, была равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0.$$

В аналитической форме уравнения равновесия

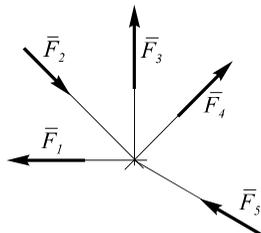


Рисунок 1.13

тела, на которые действуют сходящиеся силы, имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Таким образом, для равновесия тела, находящегося *под действием системы сходящихся сил*, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из координатных осей. Если же силы не сходятся в одной точке, помимо уравнений (1.1) следует составлять еще и уравнение моментов. Для равновесия тела, находящегося *под действием произвольной плоской системы сил*, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной точки плоскости равнялись нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{iA} = 0. \end{cases}$$

При решении задач о равновесии тела, на которое действует произвольная плоская система сил, можно использовать и иные наборы уравнений, включающие:

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum M_{iC} = 0 \quad (A \notin BC); \end{cases}$$

– равенство нулю алгебраических сумм моментов всех сил системы относительно двух любых точек и алгебраической суммы их проекций на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через две выбранные точки:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = 0; \\ \sum M_{iB} = 0; \\ \sum F_{ix} = 0. \end{cases}$$

При решении задач о равновесии тел с применением приведенных уравнений целесообразно придерживаться следующей *последовательности дей-*

стей:

1 Изображают исследуемые тела с наложенными на них механическими связями.

2 Выявляют узловое тело системы. Под *узловым* понимается тело, на которое действуют известные силы и силы, подлежащие определению.

3 На рисунке изображают векторы активных сил, приложенных к узловому телу.

4 Определяют виды механических связей, наложенных на узловое тело, и расставляют векторы соответствующих сил реакций связей.

5 Проводят оси координат так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы со всеми векторами рассматриваемых сил.

6 Устанавливают вид системы сил, приложенных к узловому телу, и составляют уравнения равновесия, соответствующие полученной системе сил.

7 Путем решения системы уравнений равновесия находят величины, подлежащие определению по решению задачи.

1.2 Пример решения задачи типа С-1

Рама, изображенная на рисунке 1.14, шарнирно закреплена в точке A , а в точке B удерживается в равновесии с помощью стержня. Пренебрегая весом рамы, определить реакции механических связей. Размеры конструкции и действующие силовые факторы указаны на рисунке.

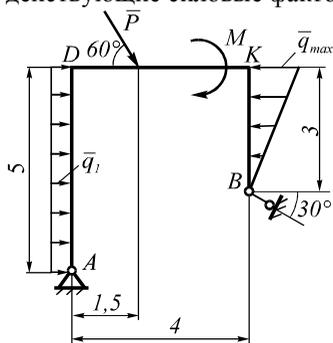


Рисунок 1.14

Дано: $q = 1 \text{ кН/м}$; $q_{\max} = 2 \text{ кН/м}$; $P = 10 \text{ кН}$;
 $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Определить: реакции связей.

Решение.

1 Изображаем раму с наложенными на нее механическими связями.

2 Поскольку заданные и искомые силы действуют на раму, именно это тело является узловым.

3 Активные силы, действующие на раму, – сосредоточенная сила P , равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q_1 , распределенная нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника с максимальной интенсивностью q_{\max} , а также пара сил с моментом M .

Распределенные силы заменим их равнодействующими. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q_1 заменяем силой Q_1 , которую прикладываем в центре прямоугольника, изображающего эту нагрузку (рисунок 1.15). Значение силы

$$Q_1 = q_1 \cdot AD = 1 \cdot 5 = 5 \text{ кН}.$$

Распределенную нагрузку, изменяющуюся по закону треугольника, заменяем равнодействующей Q_2 . Ее прикладываем на расстоянии $\frac{BK}{3}$ от места приложения q_{\max} . Численное значение силы

$$Q_2 = q_{\max} \frac{BK}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ кН.}$$

4 Расставляем векторы сил реакций механических связей. Реакцию невисокого стержня \vec{R}_B направляем вдоль стержня. Для цилиндрического шарнира указываем две составляющие реакции – горизонтальную \vec{R}_{Ax} и вертикальную \vec{R}_{Ay} .

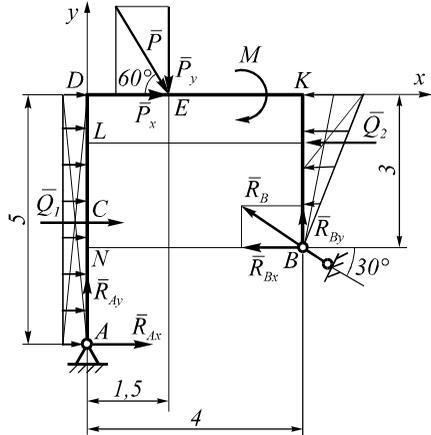


Рисунок 1.15

5 Изображаем систему отсчета: ось Dx направляем горизонтально, ось Dy – вертикально.

6 Силы, действующие на раму, не сходятся в одной точке, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} + Q_1 + P \cos 60^\circ - Q_2 - R_B \cos 30^\circ = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \cos 30^\circ + R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum M_A(F) = 0; -Q_1 \cdot AC - P_x \cdot AD - P_y \cdot DE - M + Q_2 \cdot AL + R_{Bx} \cdot AN + R_{By} \cdot NB = 0. \quad (1.4)$$

Замечания:

1 В качестве моментной выбрана точка A , так как через нее проходят линии действия неизвестных сил и их моменты относительно этой точки равны нулю.

2 При вычислении моментов сил \vec{P} и \vec{R}_B они разложены на составляющие \vec{P}_x и \vec{P}_y , \vec{R}_{Bx} и \vec{R}_{By} , а затем в соответствии с теоремой Вариньона моменты названных сил найдены как алгебраическая сумма моментов составляющих.

7 Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные реакции связей.

Учитывая, что выражения составляющих сил \vec{P} и \vec{R}_B могут быть записаны в виде

$$P_x = P \cos 60^\circ; P_y = P \sin 60^\circ; R_{Bx} = R_B \cos 30^\circ; R_{By} = R_B \sin 30^\circ,$$

из уравнения (1.4) находим

$$R_B = \frac{Q_1 \cdot 2,5 + P \cos 60^\circ \cdot 5 + P \cos 30^\circ \cdot 1,5 + M - Q_2 \cdot 4}{\cos 60^\circ \cdot 4 + \cos 30^\circ \cdot 2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 2,5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 5 - 3 \cdot 4}{0,5 \cdot 4 + 0,866 \cdot 2} = 11,65 \text{ кН};$$

Из уравнения (1.3) имеем

$$R_{Ay} = P \cos 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,866 - 11,65 \cdot 0,5 = 2,83 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1.2) находим

$$R_{Ax} = -Q_1 - P \cos 60^\circ + Q_2 + R_B \cos 30^\circ = -5 - 10 \cdot 0,5 + 3 + 11,65 \cdot 0,866 = 3,09 \text{ кН.}$$

Равнодействующая силы реакции цилиндрического шарнира

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{3,09^2 + 2,83^2} = 4,19 \text{ кН.}$$

8 Для проверки правильности решения задачи составим уравнение моментов относительно точки E , через которую не проходят линии действия искомых сил:

$$\sum M_E(F) = 0; Q_1 \cdot 2,5 - M - Q_2 \cdot 1 - R_{Bx} \cdot 3 + R_{By} \cdot 2,5 + R_{Ax} \cdot 5 - R_{Ay} \cdot 1,5 =$$

$$= 5 \cdot 2,5 - 5 - 3 \cdot 1 - 11,65 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 + 11,65 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2,5 + 3,09 \cdot 5 - 2,83 \cdot 1,5 = 0.$$

Полученный результат подтверждает правильность расчетов.

1.3 Условие задания С-1

Равновесие плоской рамы

Для рам, схемы которых приведены на рисунке 1.16, рассчитать реакции связей. Выполнить проверку правильности решения. Исходные данные взять из таблицы 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные к заданию С-1

Номер варианта	P_1 , Н	P_2 , Н	M , Нм	q , Н/м	q_{max} , Н/м	Номер варианта	P_1 , Н	P_2 , Н	M , Нм	q , Н/м	q_{max} , Н/м
1	12	10	20	–	3	16	10	8	9	–	4
2	14	7	6	–	5	17	8	6	10	4	–
3	10	20	10	4	–	18	12	9	5	2	4
4	10	8	12	5	–	19	15	7	6	–	3
5	20	12	5	6	–	20	10	5	8	2	–
6	15	7	10	–	4	21	8	12	15	–	6
7	10	8	9	6	–	22	10	10	7	–	4
8	16	–	10	2	3	23	16	–	6	5	6
9	10	15	8	5	–	24	9	11	8	6	–
10	6	–	6	4	5	25	10	8	5	1	–
11	5	10	8	–	4	26	12	10	6	2	–
12	7	5	10	5	–	27	7	14	9	–	4
13	6	–	12	3	3	28	8	6	5	–	2
14	12	–	9	3	2	29	9	12	7	–	5
15	14	–	6	4	2	30	12	5	10	–	5

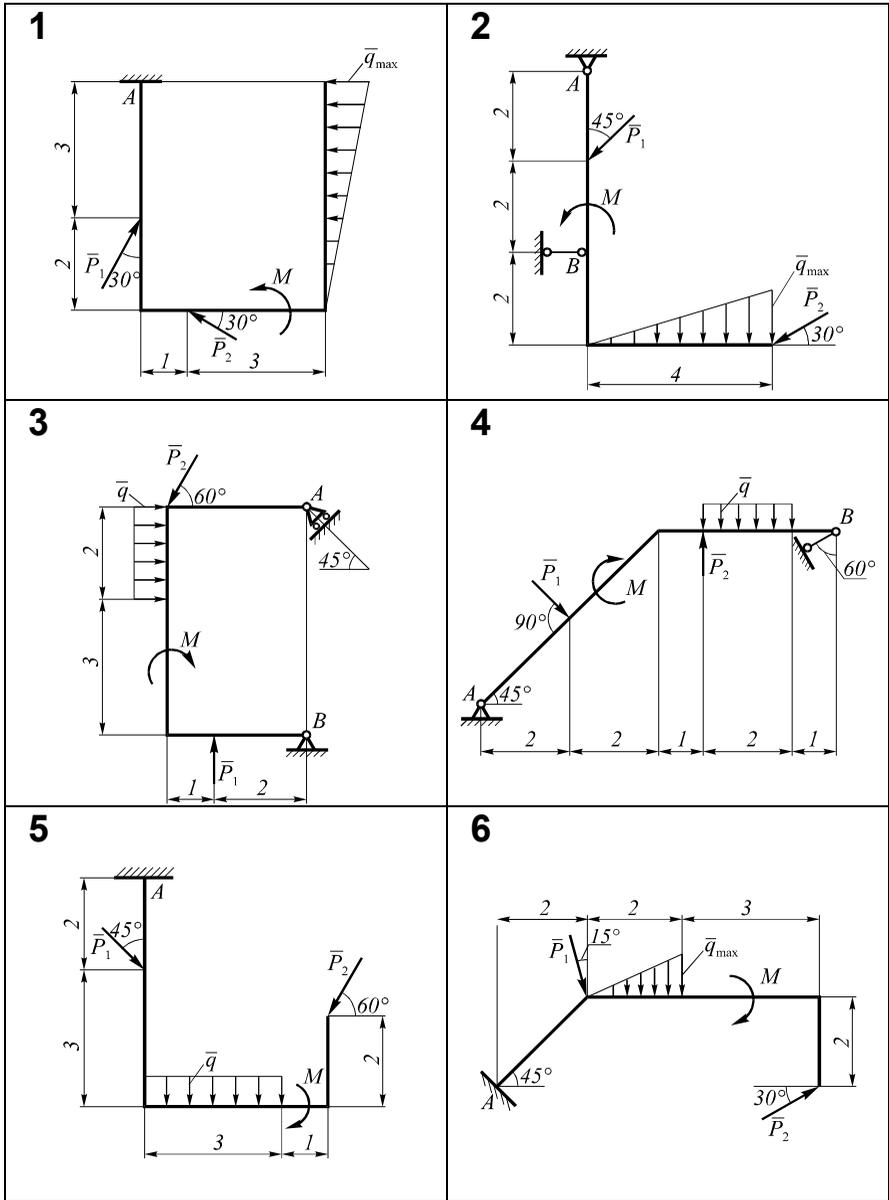


Рисунок 1.16 (начало)

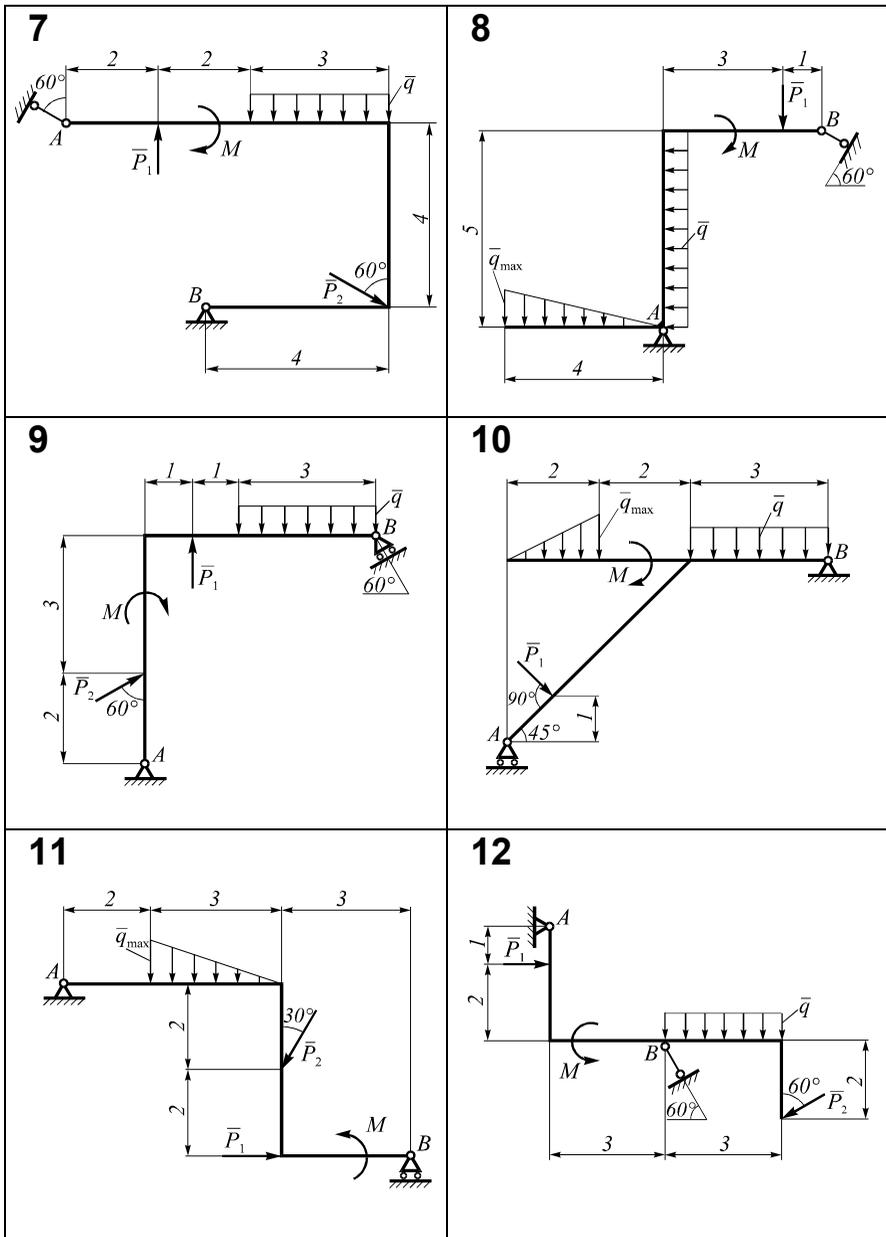


Рисунок 1.16 (продолжение)

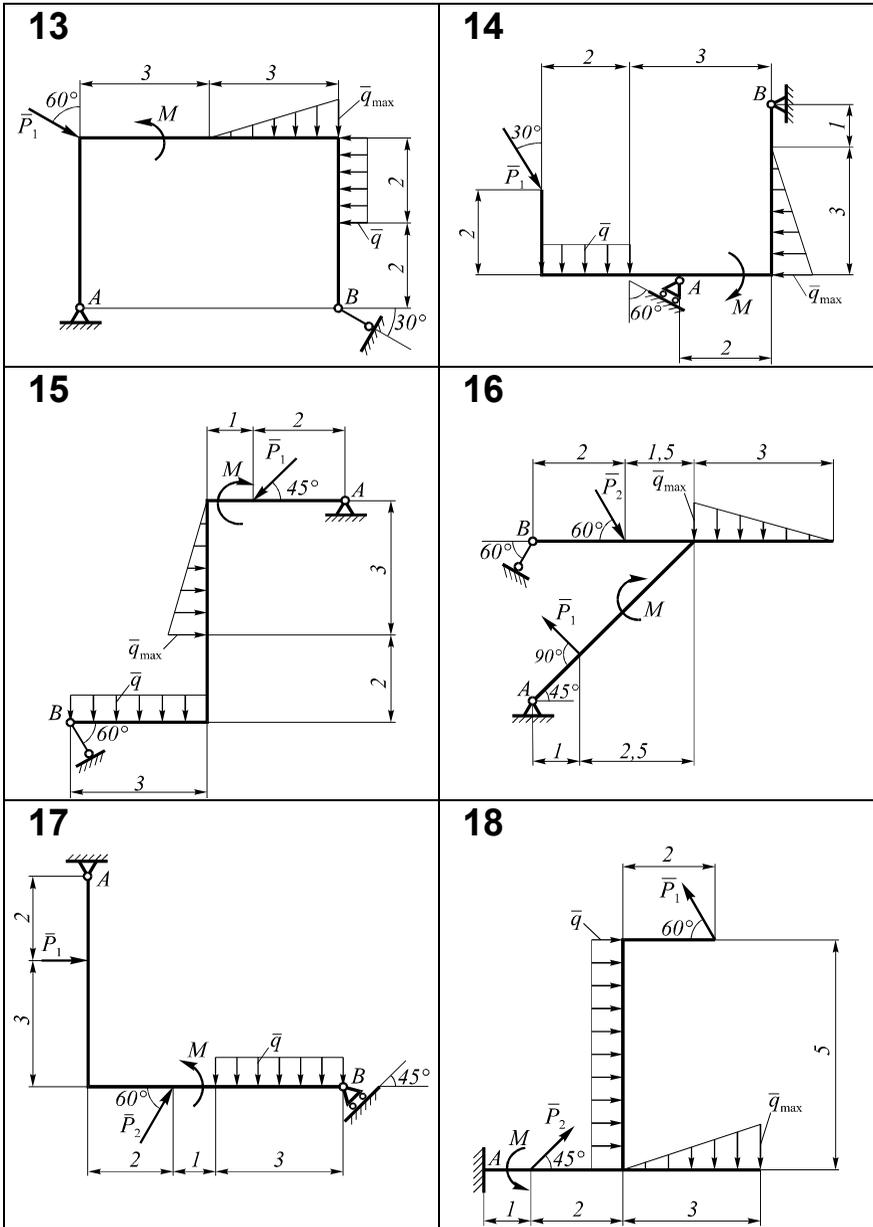


Рисунок 1.16 (продолжение)

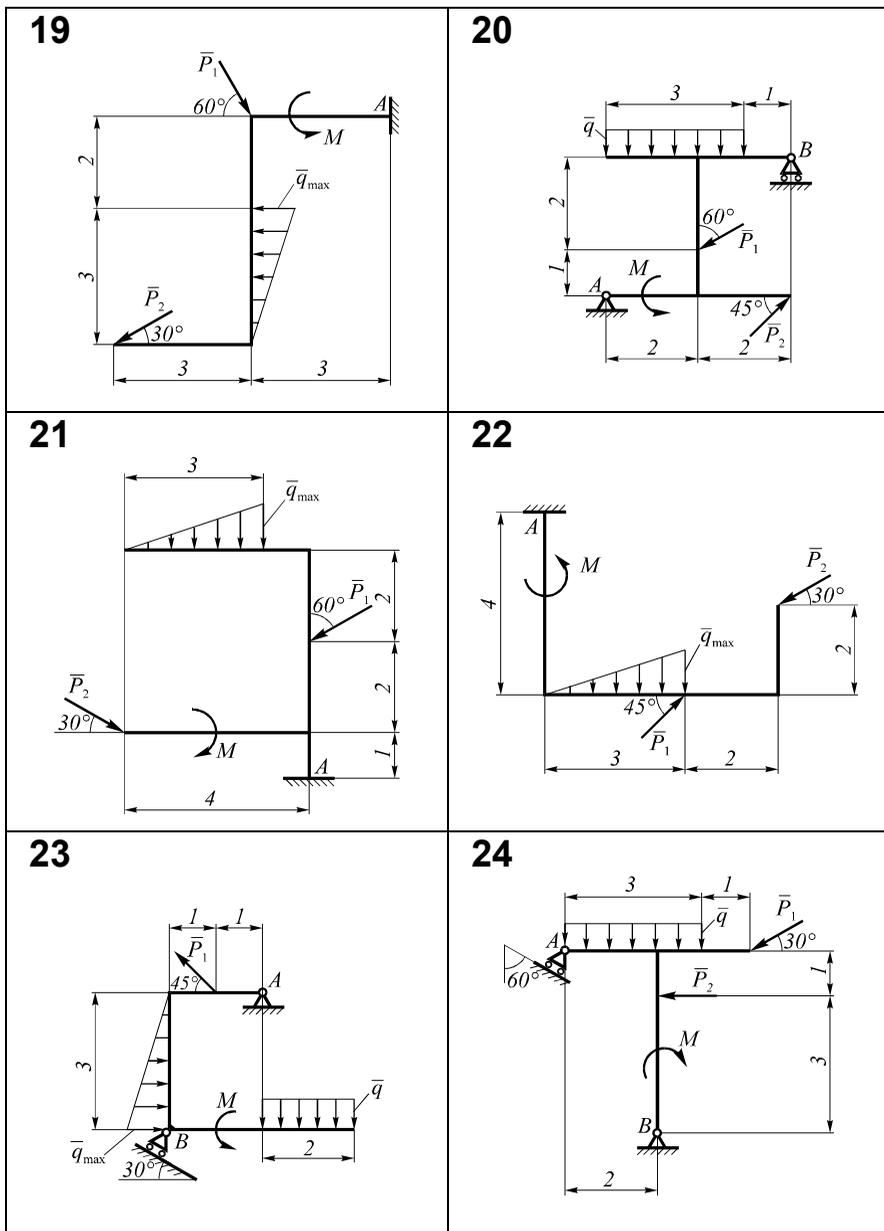


Рисунок 1.16 (продолжение)

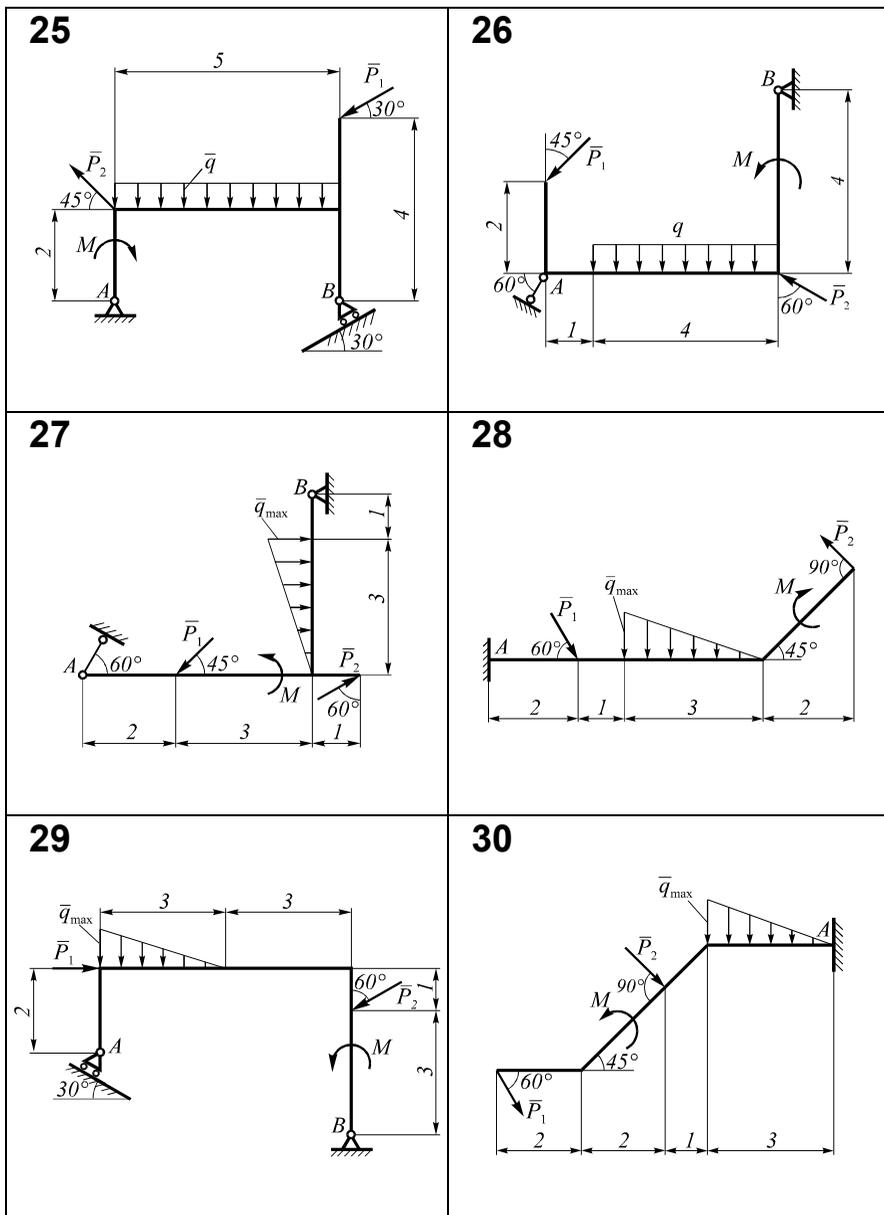


Рисунок 1.16 (окончание)

2 РАВНОВЕСИЕ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

2.1 Основные понятия и определения

Сила взаимодействия двух тел с шероховатыми поверхностями включает две составляющие: нормальную \vec{N} , перпендикулярную поверхности контакта, и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, лежащую в плоскости контакта тел (рисунок 2.1).

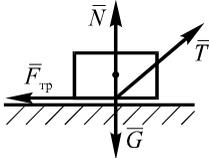


Рисунок 2.1

Сила трения сцепления препятствует скольжению одного тела по поверхности другого и соответственно направляется в сторону, противоположную возможному относительному смещению взаимодействующих точек соприкасающихся тел.

Поэтому для нахождения направления силы трения нужно мысленно представить, куда будет двигаться тело при отсутствии силы трения, а затем направить вектор силы трения в сторону, противоположную этому возможному движению.

В соответствии с законом Кулона максимальное значение силы трения сцепления пропорционально нормальной силе взаимодействия между телами:

$$F_{\text{тр. max}} = fN.$$

Безразмерный коэффициент f называется *коэффициентом трения скольжения*. Его значение определяется физическими свойствами материалов тел и размерами неровностей их поверхностей, но не зависит от площади соприкосновения тел.

Значение силы трения равно произведению коэффициента трения на силу нормальной реакции только в том случае, если заранее известно, что при бесконечно малом изменении приложенных активных сил начнется движение тела. В общем же случае значение силы трения определяется неравенством

$$F_{\text{тр. max}} \leq fN.$$

Решение задач о равновесии тел с учетом трения выполняется в той же последовательности, как это описано в п. 1.1.6.

2.2 Образец выполнения задания С-2

Однородный цилиндр веса G опирается на плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и ступеньку с высотой h (рисунок 2.2). Коэффициент трения сцепления равен f . Определить максимальное значение горизонтальной силы F , при которой тело будет оставаться в равновесии. Найти также равнодействующие реакций связей.

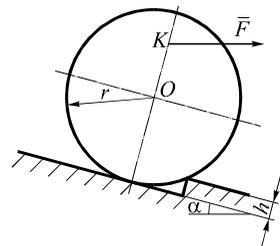


Рисунок 2.2

Дано: $R = 20$ см; $OK = 14$ см; $f = 0,1$; $h = 5$ см; $G = 2$ кН; $\alpha = 15^\circ$.

Определить: максимальное значение силы F ; реакции связей R_A, R_B .

Решение.

1 Изображаем тело с наложенными на него механическими связями (рисунок 2.3). Активными силами, действующими на тело, являются сила тяжести \vec{G} и сила \vec{F} , стремящаяся привести его в движение. Препятствуют движению цилиндра опоры в точках A и B . Их нормальные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B направляются перпендикулярно касательным к поверхности цилиндра, поэтому они проходят через его центр O . При отсутствии трения цилиндр под действием силы \vec{F} начнет поворачиваться по ходу часовой стрелки. Силы трения $\vec{F}_{трA}$ и $\vec{F}_{трB}$ препятствуют этому его возможному движению.

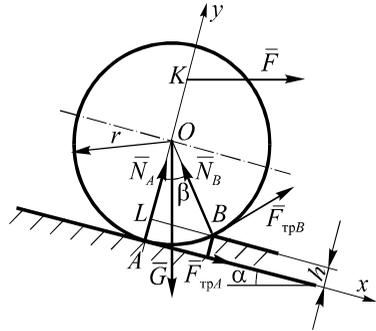


Рисунок 2.3

2 Изображаем систему отсчета: ось Ax направляем вдоль поверхности, ось Ay – перпендикулярно ей.

3 На тело действует система произвольно расположенных в плоскости сил, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; F_{трA} + G \sin \alpha - N_B \sin \beta + F_{трB} \cos \beta + F \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; N_A - G \cos \alpha + N_B \cos \beta + F_{трB} \sin \beta + F \sin \alpha = 0; \\ \sum M_{iO} = 0; -F \cos \alpha \cdot OK + F_{трB} R + F_{трA} R = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Из треугольника OLB находим: $\cos \beta = \frac{R-h}{R} = \frac{20-5}{20} = 0,75$, $\sin \beta = 0,66$.

При максимальном значении силы \vec{F} , соответствующем состоянию равновесия тела, выполняются равенства: $F_{трA} = fN_A$, $F_{трB} = fN_B$. Подставим их в систему уравнений (2.1), одновременно переносим известные в правую часть:

$$\begin{aligned} fN_A + N_B(-\sin \beta + f \cos \beta) + F \cos \alpha &= -G \sin \alpha; \\ N_A + N_B(\cos \beta + f \sin \beta) + F \sin \alpha &= G \cos \alpha; \\ -F \cos \alpha \cdot OK + fN_B R + fN_A R &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом получена система трех уравнений с тремя неизвестными величинами: N_A, N_B, F .

4 Так как в каждом уравнении присутствует по три неизвестных, то для упрощения вычислений сразу подставим численные значения величин. После преобразований получаем:

$$\begin{cases} 0,1N_A - 0,585N_B + 0,966F = -0,518; & (2.2) \\ N_A + 0,816N_B + 0,259F = 1,932; & (2.3) \\ -13,524 \cdot F + 2N_B + 2N_A = 0. & (2.4) \end{cases}$$

5 Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные силы. Из уравнения (2.4) получаем

$$N_A = 6,762F - N_B. \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.3), имеем

$$6,762F - N_B + 0,816N_B + 0,259F = 1,932.$$

Отсюда

$$N_B = 38,157F - 10,5. \quad (2.6)$$

После подстановки (2.5) и (2.6) в (2.2) получаем уравнение с одной неизвестной силой F :

$$0,1(6,762F - 38,157F + 10,5) - 0,585(38,157F - 10,5) + 0,966F = -0,518.$$

Последнее уравнение дает $F = 0,315$ кН.

В результате подстановки в (2.6) и (2.5) находим:

$$N_B = 38,157 \cdot 0,315 - 10,5 = 1,512 \text{ кН}; \quad N_A = 6,76 \cdot 0,315 - 1,512 = 0,617 \text{ кН}.$$

Замечание. При выполнении контрольной работы для решения полученной системы уравнений можно применить вычислительную технику. В этом случае не следует подробно описывать ход решения системы, но к работе надо приложить распечатку расчетов.

Следовательно,

$$F_{\text{тр}A} = fN_A = 0,1 \cdot 0,617 = 0,0617 \text{ кН}; \quad F_{\text{тр}B} = fN_B = 0,1 \cdot 1,512 = 0,1512 \text{ кН}.$$

6 Определяем равнодействующие сил реакций опорных поверхностей.

Поскольку силы N и $F_{\text{тр}}$ перпендикулярны, то их равнодействующую можно рассчитать, применяя теорему Пифагора. Тогда

$$R_A = \sqrt{N_A^2 + F_{\text{тр}A}^2} = \sqrt{0,617^2 + 0,0617^2} = 0,620 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{N_B^2 + F_{\text{тр}B}^2} = \sqrt{1,512^2 + 0,1512^2} = 1,520 \text{ кН}.$$

2.3 Условие задания С-2

Равновесие тела с учетом сил трения сцепления

Тела, изображенные на рисунке 2.4, находятся в равновесии. Используя приведенные исходные данные, рассчитать максимальное значение силы F , при котором сохраняется равновесие. Найти для этого случая равнодействующие реакций опорных поверхностей.

В условии приняты следующие обозначения: G – сила тяжести; M – момент приложенной к телу пары сил; f – коэффициент трения между исследуемым телом и всеми опорными поверхностями.

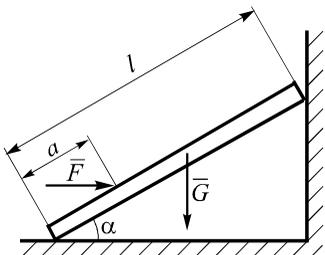
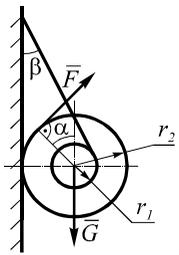
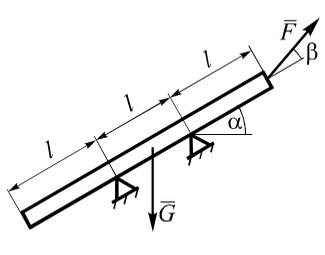
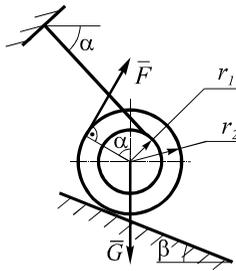
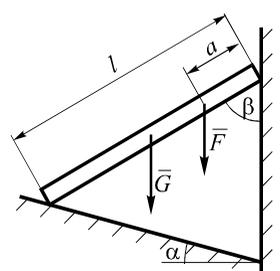
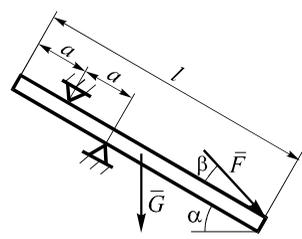
<p>1</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 200 \text{ Н}$, $f = 0,3$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 60 \text{ см}$, $a = 15 \text{ см}$.</p>	<p>2</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $r_2 = 40 \text{ см}$, $r_1 = 20 \text{ см}$.</p>
<p>3</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 200 \text{ Н}$, $f = 0,38$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $l = 20 \text{ см}$.</p>	<p>4</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,1$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $r_2 = 40 \text{ см}$, $r_1 = 25 \text{ см}$.</p>
<p>5</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 200 \text{ Н}$, $f = 0,55$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 20 \text{ см}$, $l = 80 \text{ см}$.</p>	<p>6</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 350 \text{ Н}$, $f = 0,32$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $l = 100 \text{ см}$, $a = 20 \text{ см}$.</p>

Рисунок 2.4 (начало)

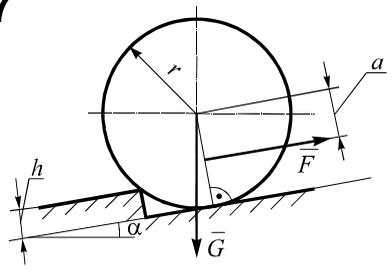
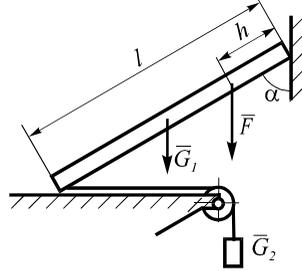
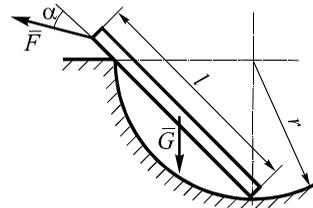
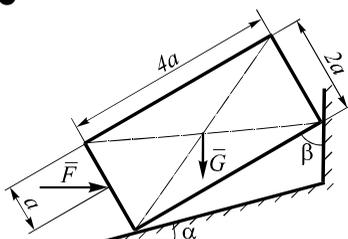
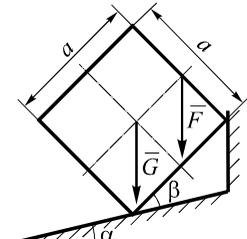
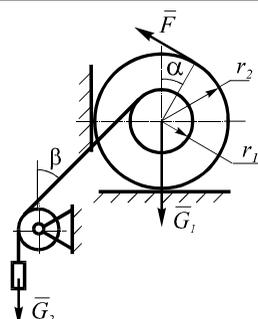
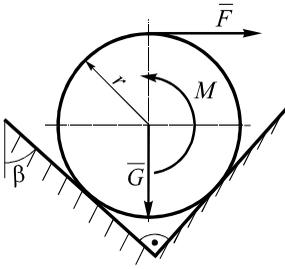
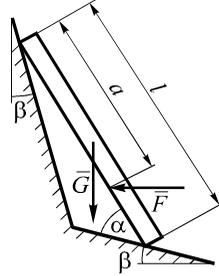
<p>7</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 460 \text{ Н}$, $f = 0,12$, $\alpha = 15^\circ$, $r = 30 \text{ см}$, $h = 10 \text{ см}$, $a = 20 \text{ см}$.</p>	<p>8</p>  <p><i>Дано:</i> $G_1 = 120 \text{ Н}$, $G_2 = 300 \text{ Н}$, $f = 0,3$, $\alpha = 60^\circ$, $l = 80 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$.</p>
<p>9</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,25$, $\alpha = 30^\circ$, $r = 30 \text{ см}$, $l = 55 \text{ см}$.</p>	<p>10</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 350 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 15 \text{ см}$.</p>
<p>11</p>  <p><i>Дано:</i> $G = 400 \text{ Н}$, $f = 0,35$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $a = 30 \text{ см}$</p>	<p>12</p>  <p><i>Дано:</i> $G_1 = 150 \text{ Н}$, $G_2 = 80 \text{ Н}$, $f = 0,46$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $r_2 = 40 \text{ см}$, $r_1 = 20 \text{ см}$.</p>

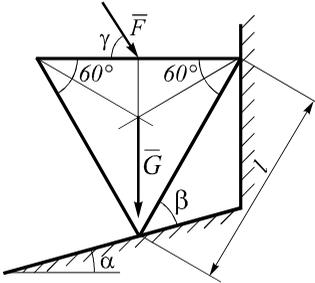
Рисунок 2.4 (продолжение)

13

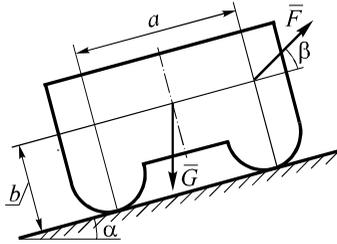
Дано: $G = 250 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\beta = 60^\circ$,
 $r = 30 \text{ см}$, $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

14

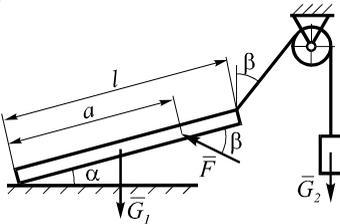
Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\alpha = 45^\circ$,
 $\beta = 15^\circ$, $a = 60 \text{ см}$, $l = 80 \text{ см}$.

15

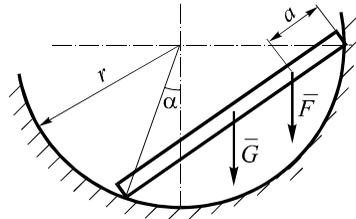
Дано: $G = 100 \text{ Н}$, $f = 0,25$, $\alpha = 15^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $l = 30 \text{ см}$.

16

Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,1$, $\alpha = 15^\circ$,
 $\beta = 30^\circ$, $a = 50 \text{ см}$, $b = 30 \text{ см}$.

17

Дано: $G_1 = 200 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\alpha = 15^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $a = 45 \text{ см}$, $l = 60 \text{ см}$.

18

Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,25$, $a = 20 \text{ см}$,
 $r = 50 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$.

Рисунок 2.4 (продолжение)

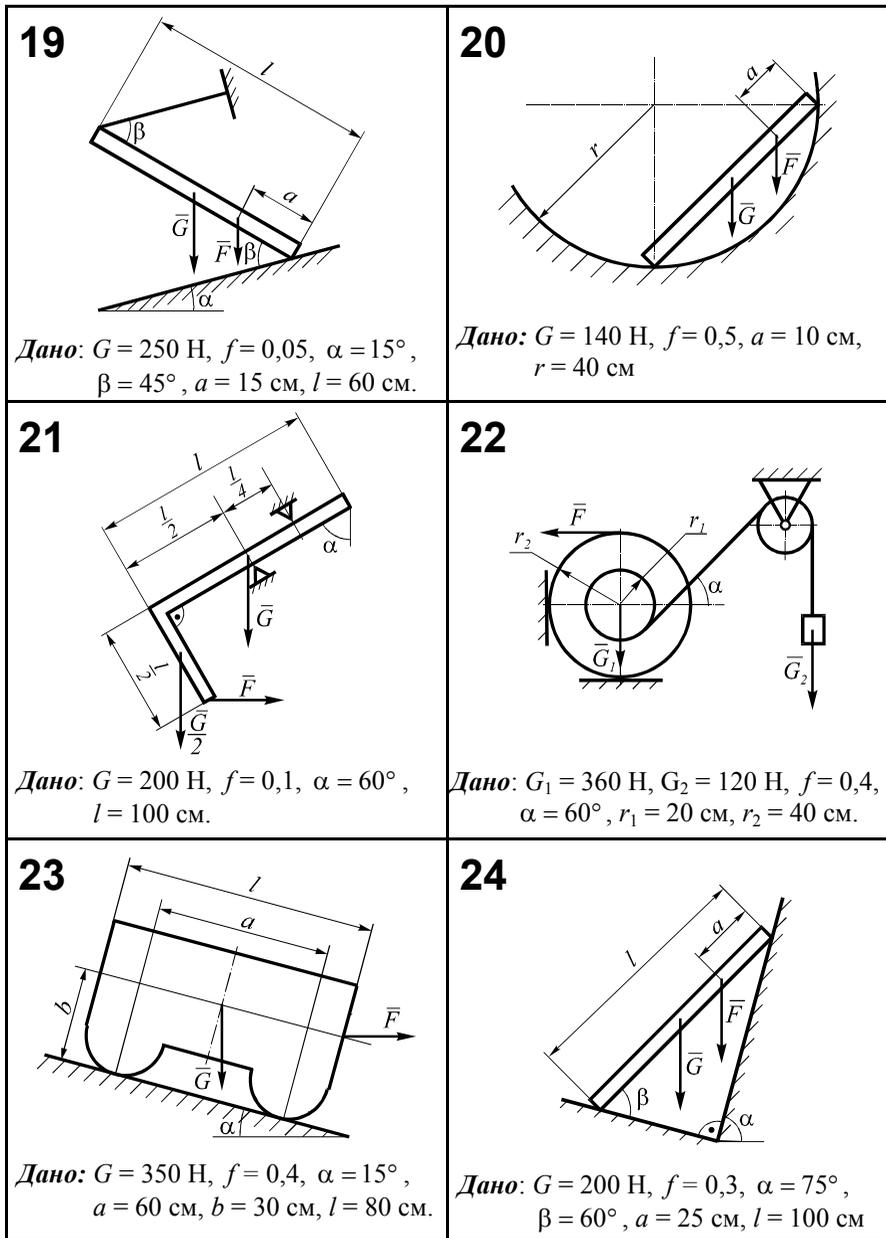
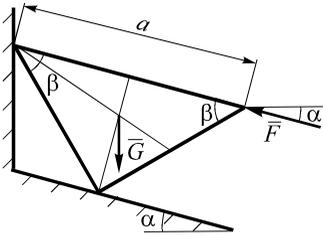
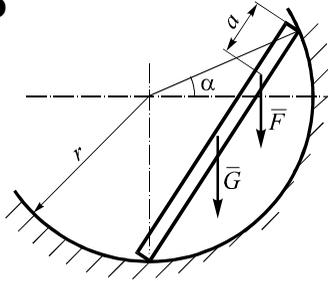


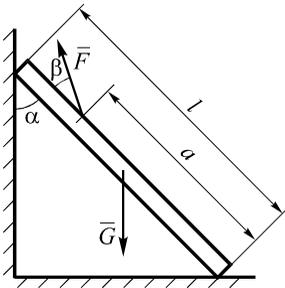
Рисунок 2.4 (продолжение)

25

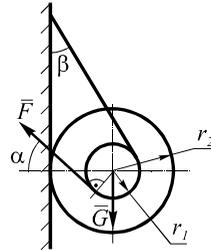
Дано: $G = 200 \text{ Н}$, $f = 0,25$, $\alpha = 15^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $a = 60 \text{ см}$.

26

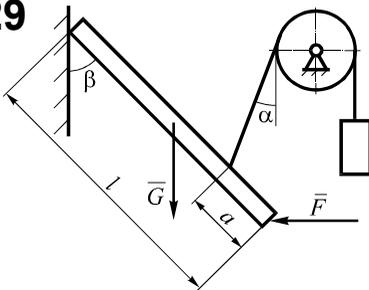
Дано: $G = 200 \text{ Н}$, $f = 0,55$, $\alpha = 30^\circ$,
 $a = 15 \text{ см}$, $r = 30 \text{ см}$.

27

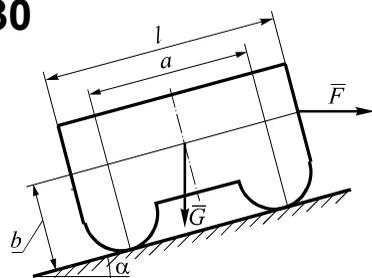
Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,4$, $\alpha = 45^\circ$,
 $\beta = 15^\circ$, $a = 70 \text{ см}$, $l = 100 \text{ см}$.

28

Дано: $G = 400 \text{ Н}$, $f = 0,05$, $\alpha = 60^\circ$,
 $\beta = 45^\circ$, $r_1 = 15 \text{ см}$, $r_2 = 30 \text{ см}$.

29

Дано: $G_1 = 400 \text{ Н}$, $f = 0,2$, $\alpha = 30^\circ$,
 $\beta = 60^\circ$, $a = 15 \text{ см}$, $l = 60 \text{ см}$.

30

Дано: $G = 300 \text{ Н}$, $f = 0,1$, $\alpha = 15^\circ$,
 $a = 60 \text{ см}$, $b = 40 \text{ см}$, $l = 80 \text{ см}$.

Рисунок 2.4 (окончание)

3 РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

3.1 Некоторые сведения из теории

Системой тел называется конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой через какие-нибудь связи, допускающие относительные перемещения этих тел (они могут соединяться шарнирами, гибкими нитями, опираться друг на друга и т. п.).

Силы, действующие на тела системы, делятся на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих этой системе.

Внутренними называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

При равновесии системы тел как каждое тело, так и вся система в целом находятся в равновесии. В связи с этим имеется два способа решения задач, связанных с исследованием равновесия системы тел:

1 Поскольку каждое тело системы находится в равновесии, то составляют уравнения равновесия каждого из тел (тогда уравнения равновесия системы в целом могут быть использованы для проверки правильности решения).

2 Сначала записывают уравнения равновесия системы в целом, а затем уравнения равновесия отдельных тел системы (в этом случае нет необходимости в составлении уравнений равновесия по крайней мере одного из тел системы, но они могут быть применены для проверки).

Замечания:

1 При составлении уравнений равновесия всей системы в целом она рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому в эти уравнения не войдут силы взаимодействия между отдельными телами системы.

2 Силы, которыми тела системы действуют друг на друга, в соответствии с аксиомой о действии и противодействии (третий закон Ньютона), равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

3 Если внешняя сила приложена к точке контакта исследуемых тел, ее следует относить только к одному из тел системы.

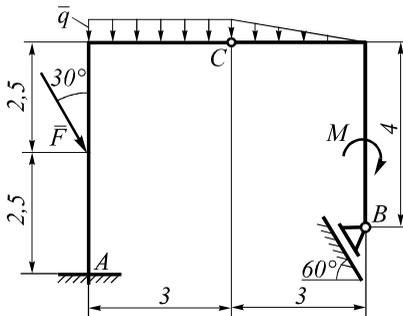


Рисунок 3.1

3.2 Пример решения задачи о равновесии системы тел

Составная рамная конструкция, части которой соединены шарниром в точке С, находится в равновесии под действием указанных на рисунке 3.1 силовых факторов. Определить реакции внешних связей и значение силы взаимодействия между частями конструкции.

Дано: $q = 2 \text{ кН/м}$; $F = 5 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Определить: реакции связей.

Решение.

1 Рассматриваем равновесие правой части рамы (рисунок 3.2). На нее действует пара сил с моментом M . Распределенную нагрузку, изменяющуюся по линейному закону, заменяем равнодействующей силой Q_2 , которую прикладываем на расстоянии $CD/3$ от точки C . Ее численное значение

$$Q_2 = q \frac{CD}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ кН}.$$

2 Расставляем векторы сил реакций механических связей. Реакцию гладкой поверхности \vec{R}_B направляем перпендикулярно этой поверхности. Для цилиндрического шарнира указываем две составляющие реакции – горизонтальную \vec{R}_{Cx} и вертикальную \vec{R}_{Cy} .

3 Изображаем систему отсчета: ось Ox направляем горизонтально, ось Oy – вертикально.

4 Силы, действующие на правую часть конструкции, не сходятся в одной точке, поэтому составляем три уравнения равновесия.

$$\sum F_{ix} = 0; R_B \cos 30^\circ + R_{Cx} = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_B \cos 60^\circ + R_{Cy} - Q_2 = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum M_{Ci} = 0; R_B \cos 60^\circ \cdot 3 + R_B \cos 30^\circ \cdot 4 - M - Q_2 \cdot 1 = 0. \quad (3.3)$$

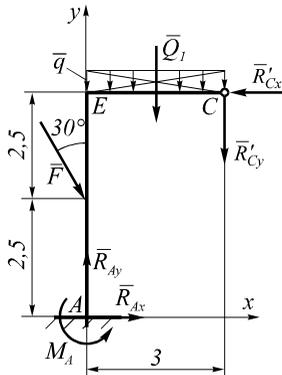


Рисунок 3.3

Замечание. Момент силы \vec{R}_B найден с использованием теоремы Вариньона. Для этого сила была разложена на две составляющие: $R_{Bx} = R_B \cos 30^\circ$, $R_{By} = R_B \cos 60^\circ$.

5 Рассмотрим равновесие левой части конструкции. На нее действуют активная сила \vec{F} и равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q , которую заменяем сосредоточенной силой $Q_1 = q \cdot CE = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}$, приложенной в центре прямоугольника, изображающего эту нагрузку (рисунок 3.3).

6 Связи на левую часть рамы наложены в точках A и C . Для заделки в точке A указываем две составляющие реакции – горизонтальную \vec{R}_{Ax} и

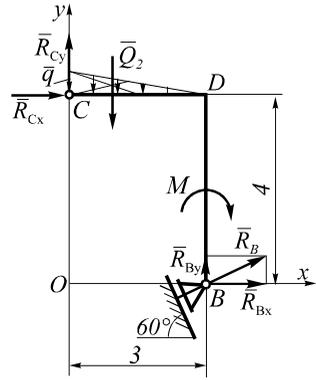


Рисунок 3.2

вертикальную \bar{R}_{Ay} и момент заделки M_A . Реакция шарнира С включает две составляющие \bar{R}'_{Cx} и \bar{R}'_{Cy} . В соответствии с аксиомой о действии и противодействии они равны по значениям и противоположны по направлениям силам \bar{R}_{Cx} и \bar{R}_{Cy} (см. рисунок 3.2).

7 На левую часть составной конструкции действует произвольная плоская система сил, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} + F \cos 60^\circ - R'_{Cx} = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - F \cos 30^\circ - Q_1 - R'_{Cy} = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -F \cos 60^\circ \cdot 2,5 + M_A - Q_1 \cdot 1,5 + R_{Cx} \cdot 5 - R_{Cy} \cdot 3 = 0. \quad (3.6)$$

Замечание. Здесь сразу учтено, что $R'_{Cx} = R_{Cx}$; $R'_{Cy} = R_{Cy}$.

8 Решая полученную систему уравнений (3.1)–(3.6), находим неизвестные реакции связей.

Из уравнений (3.3), (3.1), (3.2) последовательно получаем:

$$R_B = \frac{M + Q_2}{3 \cos 60^\circ + 4 \cos 30^\circ} = \frac{11}{3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,866} = 2,22 \text{ кН};$$

$$R_{Cx} = -R_B \cos 30^\circ = -2,22 \cdot 0,866 = -1,92 \text{ кН};$$

$$R_{Cy} = Q_2 - R_B \cos 60^\circ = 3 - 2,22 \cdot 0,5 = 1,89 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3.4) имеем

$$R_{Ax} = R'_{Cx} - F \cos 60^\circ = -1,92 - 5 \cdot 0,5 = -4,42 \text{ кН}.$$

Уравнение (3.5) дает

$$R_{Ay} = F \cos 30^\circ + Q_1 + R'_{Cy} = 5 \cdot 0,866 + 6 + 1,89 = 12,22 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3.6) находим

$$\begin{aligned} M_A &= F \cos 60^\circ \cdot 2,5 + Q_1 \cdot 1,5 - R'_{Cx} \cdot 5 + R'_{Cy} \cdot 3 = \\ &= 5 \cdot 0,5 \cdot 2,5 + 6 \cdot 1,5 + 1,92 \cdot 5 + 1,89 \cdot 3 = 30,52 \text{ кН}. \end{aligned}$$

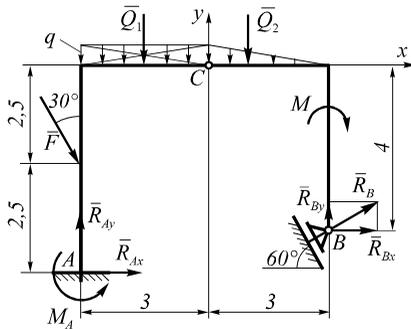


Рисунок 3.4

9 Для проверки правильности решения рассмотрим равновесие всей системы в целом. На расчетной схеме (рисунок 3.4) помимо активных сил показываем силы реакций внешних связей: заделки в точке А и опоры в точке В. Внутренние силы в точке С компенсируют друг друга и поэтому на схеме не показаны. Реакцию \bar{R}_B разложим на две составляющие (см. рисунок 3.2).

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} + F \cos 60^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; F \cos 30^\circ + Q_1 - Q_2 + R_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_{Ki} = 0; M_A + R_{Ax} \cdot 2,5 - Q_1 \cdot 1,5 - Q_2 \cdot 4 - M + R_{Bx} \cdot 1,5 + R_{By} \cdot 6 = 0.$$

Подставляя в них численные значения, имеем:

$$-4,42 + 5 \cdot 0,5 + 2,22 \cdot 0,866 = 0 \quad (\text{верно});$$

$$12,22 - 5 \cdot 0,866 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1,5 + 2,22 \cdot 0,5 = 0 \quad (\text{верно});$$

$$30,52 - 4,42 \cdot 2,5 - 6 \cdot 1,5 - 3 \cdot 4 - 8 + 2,22 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 2,22 \cdot 0,5 \cdot 6 = 0 \quad (\text{верно}).$$

Поскольку получены верные равенства, то расчет выполнен правильно.

10 Находим равнодействующие сил реакций заделки и цилиндрического шарнира:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-4,42)^2 + 12,22^2} = 13,00 \text{ кН};$$

$$R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2} = \sqrt{(-1,92)^2 + 1,89^2} = 2,69 \text{ кН}.$$

3.3 Условие задания С-3

Определение реакций связей рамной конструкции

Рассчитать реакции внешних и внутренних связей конструкций, изображенных на рисунке 3.5. Исходные данные взять из таблицы 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные к заданию С–3

номер варианта	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	$q_{2\max}$, кН/м	M , кН·м	номер варианта	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	$q_{2\max}$, кН/м	M , кН·м
1	6	13	2	2	20	16	11	14	1,1	1,1	16
2	5	9	1,6	2	18	17	4	12	1,8	2	26
3	4	12	1,8	1,5	15	18	16	8	0,8	2	21
4	6	12	1,2	1,8	10	19	12	4	2	1	19
5	8	5	1,6	1	22	20	5	9	1,6	1,4	25
6	3	10	2	0,8	24	21	9	3	2	1,1	22
7	5	8	1	1,4	22	22	3	8	1	2,4	20
8	11	7	1,6	1	20	23	4	13	1,8	2	16
9	9	12	3,2	2	14	24	2	9	1	2	26
10	10	5	1,2	2	20	25	6	11	0,8	3	22
11	5	6	1,1	3,2	26	26	10	8	1,6	2	18
12	7	13	1,4	2,2	17	27	4	11	1,1	2,4	15
13	10	8	2,2	1,8	15	28	12	4	1,8	2,5	19
14	10	7	1,5	2	24	29	5	13	1,2	2,4	21
15	3	8	1,6	4	18	30	8	4	1,7	1,2	25

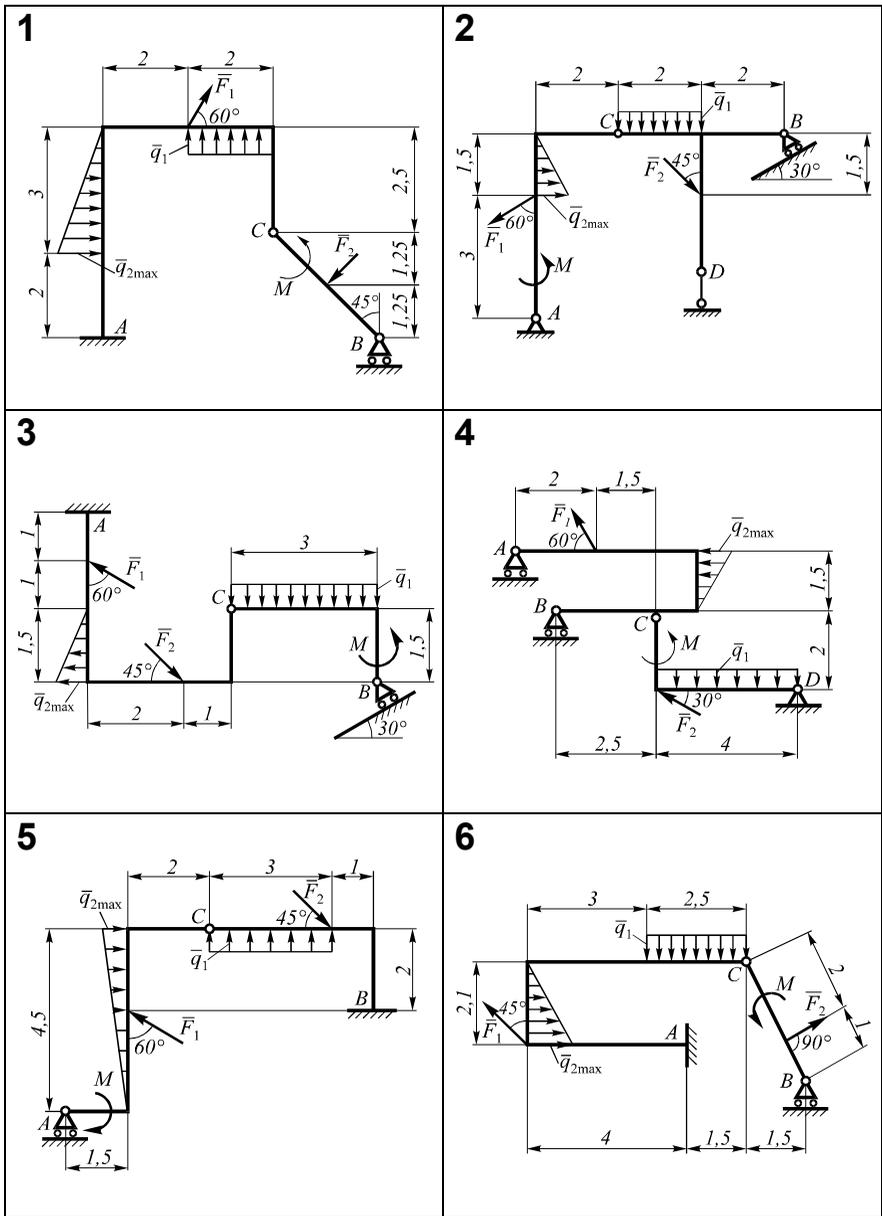


Рисунок 3.5 (начало)

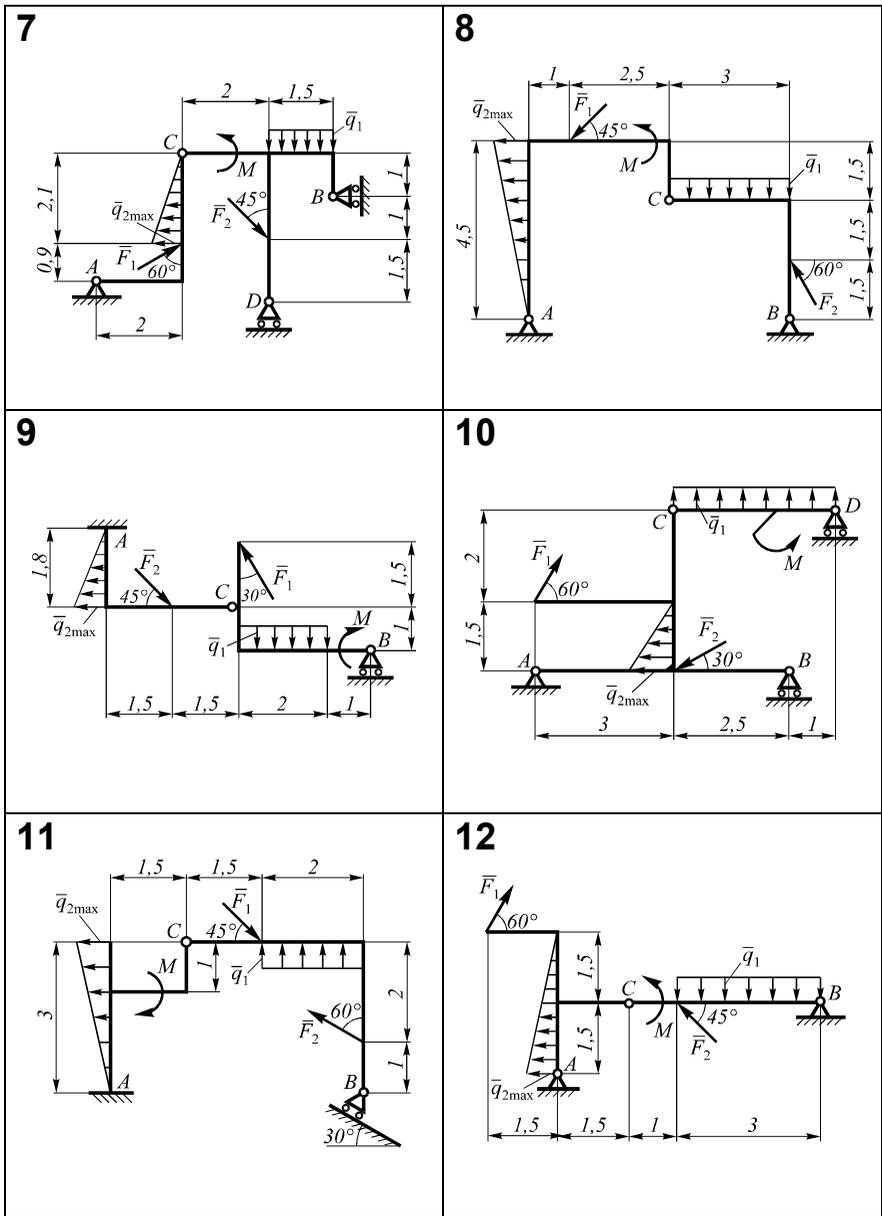


Рисунок 3.5 (продолжение)

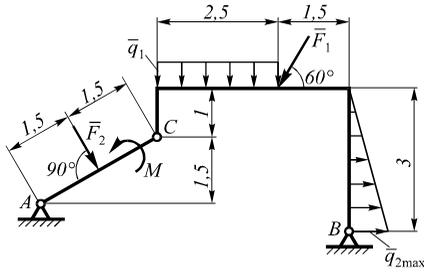
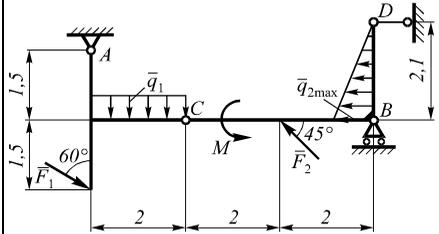
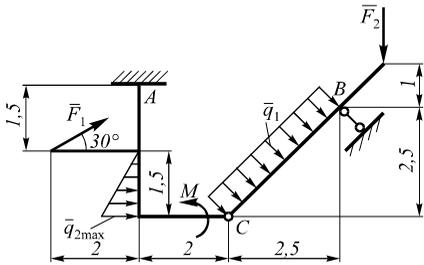
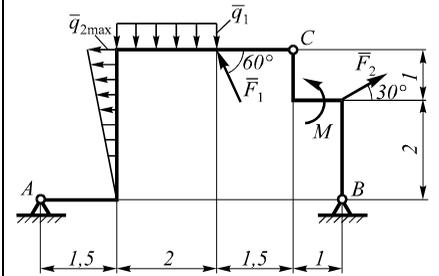
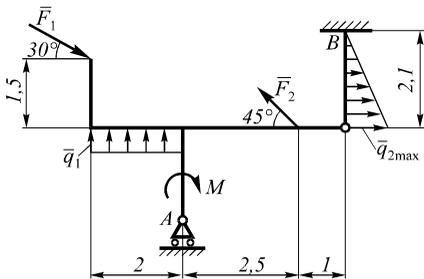
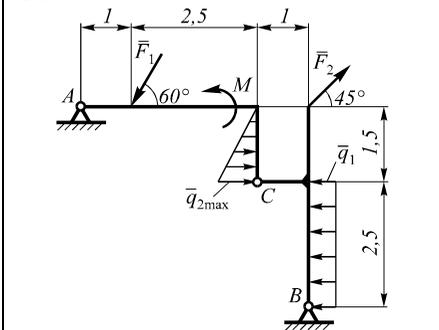
13**14****15****16****17****18**

Рисунок 3.5 (продолжение)

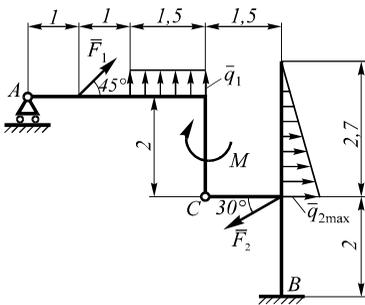
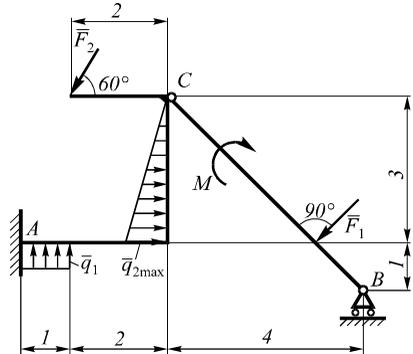
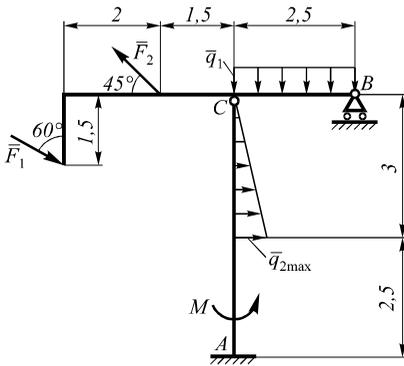
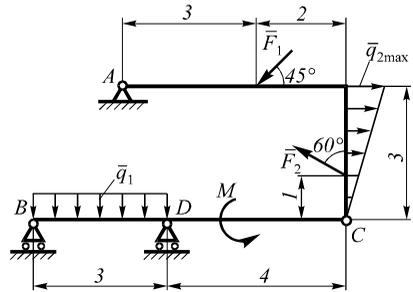
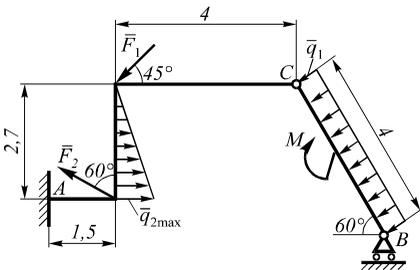
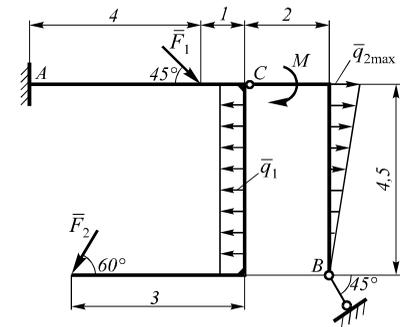
19**20****21****22****23****24**

Рисунок 3.5 (продолжение)

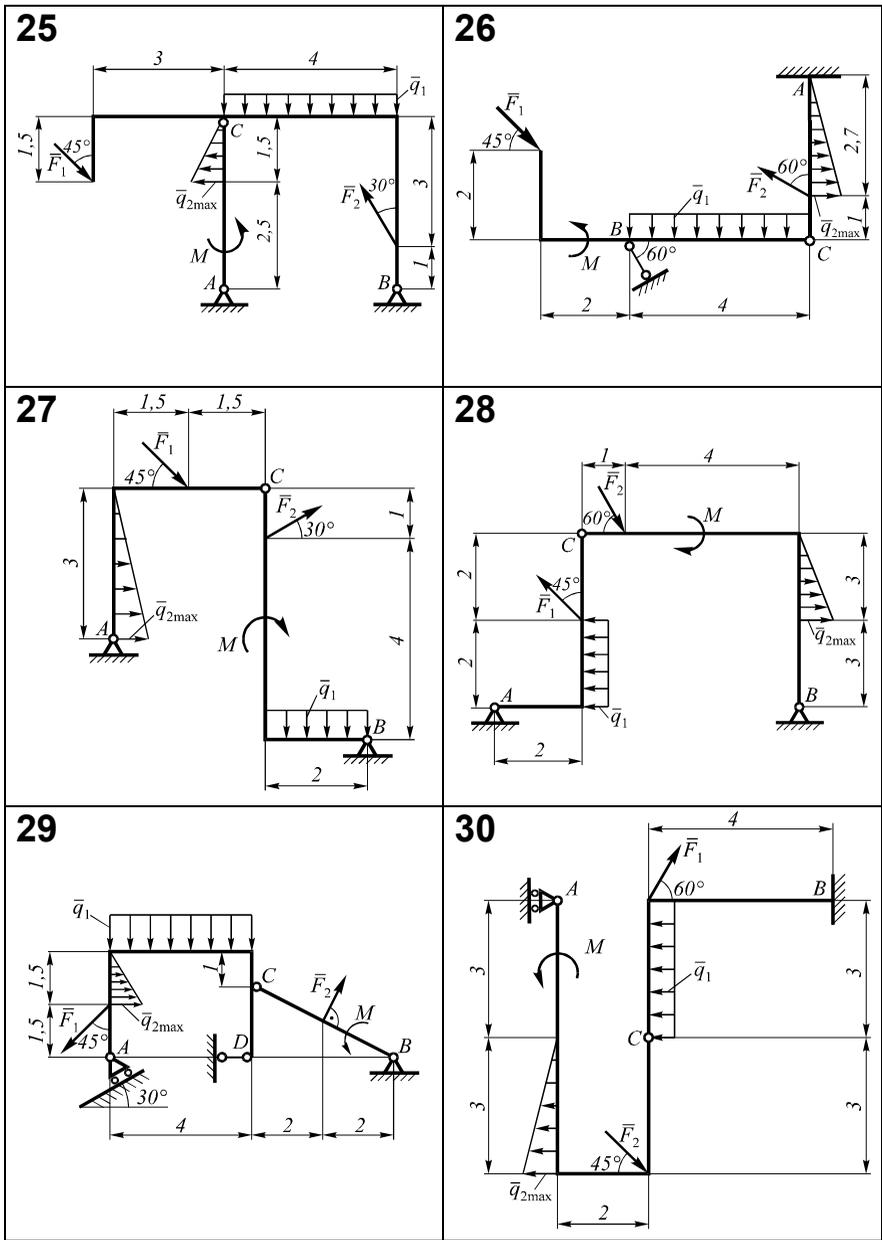


Рисунок 3.5 (окончание)

4 РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

4.1 Краткие сведения из теории

4.1.1 Понятие о ферме

Фермой называется конструкция, состоящая из стержней, которые образуют геометрически неизменяемую систему (рисунок 4.1).

Места соединения двух или более стержней называют *узлами*. При расчете сил, действующих на узлы ферм, обычно исходят из следующих упрощающих предположений:

- внешние силы приложены только к узлам фермы;

- вес стержней пренебрежимо мал (его можно учесть, разнося по узлам соответствующих стержней);

- в узлах фермы находятся шарниры, трение которых отсутствует.

При таких допущениях силы, действующие на узлы фермы со стороны стержней, всегда направлены вдоль линий, проходящих через концы стержней. Если стержни фермы прямолинейные, то они при этом либо растягиваются, либо сжимаются.

Расчет фермы включает две задачи: определение реакций внешних связей и вычисление сил реакций стержней. Как правило, вначале вычисляют реакции внешних связей. К основным методам расчета внутренних сил относятся способы вырезания узлов и сечений.

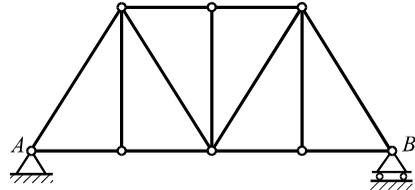


Рисунок 4.1

4.1.2 Определение внутренних сил фермы способом вырезания узлов

Ферма может быть представлена как система тел (узлов), соединенных между собой связями (стержнями). На каждый узел действует система сходящихся сил, следовательно, могут быть составлены два независимых уравнения равновесия, из которых можно найти только две неизвестные силы. В связи с этим расчет следует начинать с того узла, к которому приложены только две неизвестные внутренние силы. И в дальнейшем необходимо рассматривать равновесие узлов в таком порядке, чтобы в каждом последующем было не более двух неизвестных сил. Причем надо учитывать, что в соответствии с аксиомой о действии и противодействии силы, которыми стержень действует на взаимодействующие с ним узлы, равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

Поэтому при необходимости расчета внутренних сил фермы способом вырезания узлов следует придерживаться такой последовательности:

1 Изображают ферму, показывают действующие на нее активные силы и силы реакций внешних связей. Составляют уравнения равновесия фермы в целом, из которых вычисляют силы реакций внешних связей.

2 Выбирают узел, в котором имеется *не более двух неизвестных* внутренних сил. Узел изображают с действующими на него внешними силами и силами реакций стержней. Для удобства расчета силы реакций стержней целесообразно направлять от рассматриваемого узла.

3 Составляют уравнения равновесия выбранного узла фермы:

$$\sum F_{ix} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0.$$

4 Вычисляют неизвестные реакции стержней, входящие в записанные уравнения равновесия. Полученный при расчетах знак “минус” говорит о том, что действительное направление силы противоположно изображенному на рисунке.

5 Если определены не все искомые силы, повторяют операции, указанные в пунктах 3–5.

Замечание. Для вычисления всех реакций стержней нет необходимости рассматривать все узлы. Последний узел может быть использован для проверки правильности решения.

Достоинство способа: простой алгоритм.

Недостаток: ошибка на начальной стадии расчета ведет к необходимости повторного полного перерасчета.

4.1.3 Расчет плоских ферм способом сечений

В качестве отдельного тела, составляющего ферму, может быть принята *часть конструкции*, включающая *два узла и более*. В этом случае внутренние силы, действующие между частями системы тел, уже не будут сходиться в одной точке. Для получаемой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия, из которых будут определены три неизвестных силы.

Порядок расчета простых плоских ферм способом сечений выглядит так:

1 На схеме фермы показывают действующие на нее активные силы и силы реакций внешних связей. Составляют уравнения равновесия фермы как единого целого, из которых вычисляют силы реакций внешних связей.

2 Ферму мысленно рассекают на две части, причем в каждой должно быть не менее двух узлов и в сечении не должно быть *более трех стержней с неизвестными силами*.

3 Изображают одну из частей фермы по ту или иную сторону от сечения с действующими на нее активными силами и силами реакций рассеченных стержней.

4 Составляют уравнения равновесия рассматриваемой части фермы в одной из форм (см. п. 1.1.6).

5 Из полученных уравнений определяют искомые реакции.

Замечание. Чтобы получить в каждом уравнении только одну неизвестную силу, немецкий ученый Риттер предложил составлять суммы моментов относительно точек пересечения линий действия двух других неизвестных реакций стержней. Если линии действия каких-либо двух сил параллельны, целесообразно составить сумму проекций сил на ось, перпендикулярную указанным линиям действия. Такой метод расчета внутренних сил называют методом Риттера [1].

Достоинство способа: можно определить силу реакции конкретного стержня, не рассчитывая остальные внутренние силы.

4.2 Пример расчета плоской фермы

Плоская ферма, изображенная на рисунке 4.2, находится в равновесии под действием сил F_1 , F_2 , F_3 . Определить реакции внешних связей и внутренние силы, действующие со стороны стержней на узлы плоской фермы.

Дано: $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 6$ кН, $F_3 = 10$ кН.

Решение.

1 Определяем реакции внешних связей.

Реакция цилиндрического шарнира (точка A) включает составляющие R_{Ax} и R_{Ay} (рисунок 4.3). В точке B конструкция взаимодействует с гладкой поверхностью, реакция которой R_B перпендикулярна поверхности.

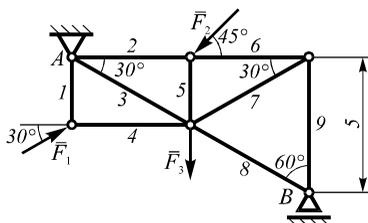


Рисунок 4.2

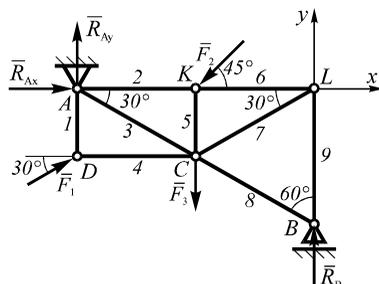


Рисунок 4.3

На ферму действует система несходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - F_2 \cos 45^\circ + F_1 \cos 30^\circ = 0; \quad (4.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ - F_3 + R_B = 0; \quad (4.2)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; -F_2 \cos 45^\circ \cdot AK - F_3 \cdot AK + R_B \cdot AL + F_1 \cos 30^\circ \cdot AD = 0. \quad (4.3)$$

Рассматривая геометрию фермы, находим:

$$AK = BL \cos 30^\circ, \quad AL = 2BL \cos 30^\circ, \quad AD = \frac{BL}{2}.$$

Замечание. При составлении уравнения моментов использована теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил (см. п. 1.1.4).

Решаем полученную систему уравнений. Из уравнения (4.1) получаем

$$R_{Ax} = F_2 \cos 45^\circ - F_1 \cos 30^\circ = 6 \cdot 0,707 - 2 \cdot 0,866 = 2,51 \text{ кН.}$$

Уравнение (4.3) дает:

$$R_B = \frac{F_2 \cos 45^\circ + F_3 - 0,5F_1}{2} = \frac{6 \cdot 0,707 + 10 - 0,5 \cdot 2}{2} = 6,62 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4.2) находим:

$$R_{Ay} = F_2 \cos 45^\circ - F_1 \cos 60^\circ + F_3 - R_B = 6 \cdot 0,707 - 2 \cdot 0,5 + 10 - 6,62 = 6,62 \text{ кН.}$$

Выполним проверку. Для этого составим уравнение моментов относительно точки C , через которую не проходят линия действия искомым реакций:

$$\sum M_{Ci} = 0;$$

$$R_B \cdot KL - F_1 \cos 60^\circ \cdot AK - R_{Ay} \cdot AK - R_{Ax} \cdot AD + F_2 \cos 45^\circ \cdot KC = 0. \quad (4.4)$$

Из схемы фермы находим: $KL = 5 \cos 30^\circ$, $KC = 5 \cos 60^\circ$.

Подставляем в уравнение (4.4) численные значения реакций, полученные в результате решения системы уравнений (4.1)–(4.3):

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6,62 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6,62 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2,51 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ (верно).}$$

Замечание. При правильных расчетах полученное значение не должно превышать 0,5 % от наибольшего (по модулю) слагаемого уравнения.

2 Рассчитаем внутренние силы, действующие на узлы фермы, способом вырезания узлов.

Обозначим узлы буквами, как это показано на рисунке 4.3. На каждый из них действуют силы реакций стержней фермы, которые пока неизвестны. Поэтому число неизвестных сил, действующих на каждый узел, в данный момент равно числу стержней, сходящихся в нем. Таким образом, наименьшее число неизвестных сил (по две) действуют на узлы B и D .

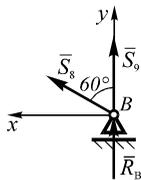


Рисунок 4.4

Расчет начнем с узла B (рисунок 4.4).

$$\sum F_{ix} = 0; S_8 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_9 + S_8 \cos 60^\circ + R_B = 0.$$

Так как $S_8 = 0$, то находим, что $S_9 = -R_B = -6,62 \text{ кН}$.

Теперь определим по две неизвестные силы в узлах L и D . Вырезаем узел L (рисунок 4.5). Его уравнения равновесия имеют вид:

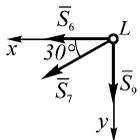


Рисунок 4.5

$$\sum F_{ix} = 0; S_6 + S_7 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_9 + S_7 \cos 60^\circ = 0.$$

Решая их, находим:

$$S_7 = -\frac{S_9}{\cos 60^\circ} = -\frac{(-6,62)}{0,5} = 13,24 \text{ кН};$$

$$S_6 = -S_7 \cos 30^\circ = -13,24 \cdot 0,866 = -11,47 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим равновесие узла K (рисунок 4.6).

Его уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; S_2 + F_2 \cos 45^\circ - S_6 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_5 + F_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Из них получаем:

$$S_5 = -F_2 \cos 45^\circ = -6 \cdot 0,707 = -4,24 \text{ кН};$$

$$S_2 = S_6 - F_2 \cos 45^\circ = -11,47 - 6 \cdot 0,707 = -15,71 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие узла D (рисунок 4.7). Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; S_4 + F_1 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_1 + F_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Решая их, находим:

$$S_4 = -F_1 \cos 30^\circ = -2 \cdot 0,866 = -1,73 \text{ кН};$$

$$S_1 = -F_1 \cos 60^\circ = -2 \cdot 0,5 = -1 \text{ кН}.$$

Для определения реакции стержня 3, рассмотрим равновесие узла A (рисунок 4.8):

$$\sum F_{ix} = 0; S_2 + R_{Ax} + S_3 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - S_1 - S_3 \cos 60^\circ = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда

$$S_3 = -\frac{S_2 + R_{Ax}}{\cos 30^\circ} = \frac{15,71 - 2,51}{0,866} = 15,24 \text{ кН}.$$

Уравнение (4.4) используем с целью проверки. Для этого подставим в него численные значения величин и проверим выполнение равенства:

$$6,62 + 1 - 15,24 \cdot 0,5 = 0 \text{ (верно)}.$$

Остался нерассмотренным узел C (рисунок 4.9). Его также используем для проверки. Запишем уравнения равновесия этого узла:

$$\sum F_{ix} = 0; S_7 \cos 30^\circ - S_3 \cos 30^\circ + S_8 \cos 30^\circ - S_4 = 0.$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_7 \cos 60^\circ + S_3 \cos 60^\circ - S_8 \cos 60^\circ + S_5 - F_3 = 0.$$

Подставляем найденные численные значения:

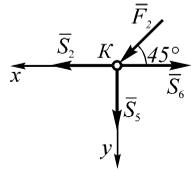


Рисунок 4.6

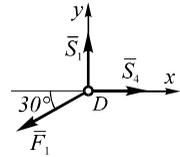


Рисунок 4.7

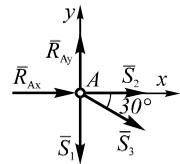


Рисунок 4.8

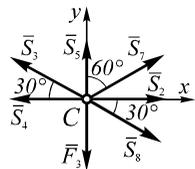


Рисунок 4.9

$$13,24 \cdot 0,866 - 15,24 \cdot 0,866 + 0 + 1,732 = 0 \text{ (верно);}$$

$$-4,24 + 15,24 \cdot 0,5 + 13,24 \cdot 0,5 - 10 = 0 \text{ (верно).}$$

Равенство нулю последних выражений подтверждает правильность расчетов по определению внутренних сил, действующих на узлы фермы.

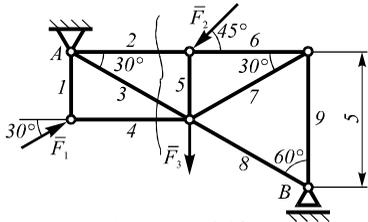


Рисунок 4.10

3 Рассчитаем внутренние силы, действующие на узлы фермы, методом сечений.

Рассечение фермы выполним по стержням 2-4 (рисунок 4.10).

Рассмотрим равновесие части фермы, расположенной левее сечения. При расстановке сил учитываем активные силы и силы взаимодействия частей конструкции: S_2, S_3, S_4 (рисунок 4.11). Таким образом, на

отсеченную часть действует система несходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Запишем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad S_2 + R_{Ax} + S_3 \cos 30^\circ + F_1 \cos 30^\circ + S_4 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - S_3 \cos 60^\circ + F_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad S_4 \cdot 5 \cos 60^\circ + F_1 \cos 30^\circ \cdot 5 \cos 60^\circ = 0.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$S_4 = -F_1 \cos 30^\circ = -2 \cdot 0,866 = -1,732 \text{ кН};$$

$$S_3 = \frac{R_{Ay} + F_1 \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{6,62 + 2 \cdot 0,5}{0,5} = 15,24 \text{ кН};$$

$$S_2 = -R_{Ax} - S_3 \cos 30^\circ - F_1 \cos 30^\circ - S_4 =$$

$$= -2,51 - 15,24 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,866 + 1,732 = 15,71 \text{ кН}.$$

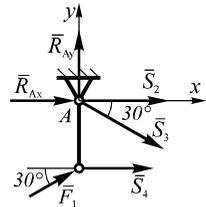


Рисунок 4.11

Численные значения реакций стержней, полученные при использовании методов вырезания узлов и сечений, совпали. Это подтверждает правильность полученных результатов.

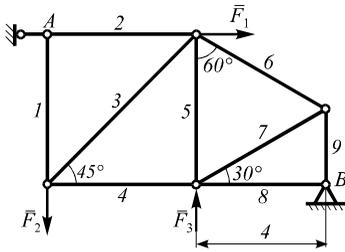
4.3 Условие задания С-4

Расчет сил, действующих на плоскую ферму

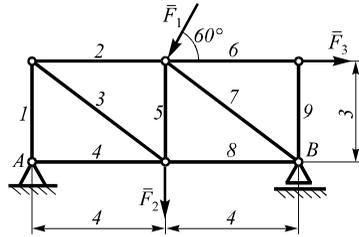
1 Определить реакции внешних связей, наложенных на ферму (рисунок 4.12). Выполнить проверку. Для этого составить уравнение моментов относительно точки, через которую не проходят линии действия искомых реакций.

2 Рассчитать все внутренние силы фермы способом вырезания узлов.

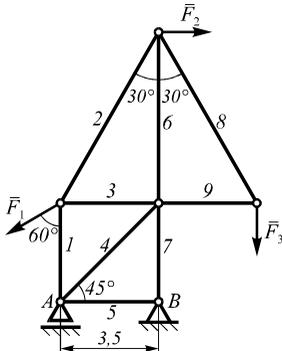
3 Выполнить рассечение фермы на две части и рассчитать внутренние силы в стержнях, попавших в сечение.

1

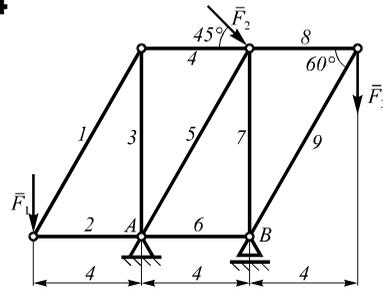
Дано: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 7$ кН.

2

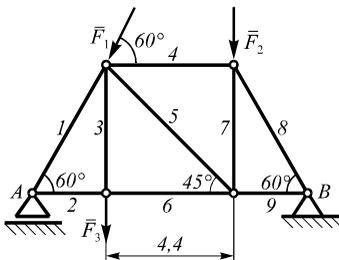
Дано: $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 4$ кН.

3

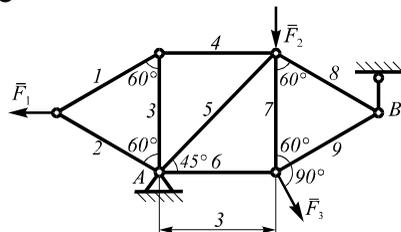
Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 6$ кН, $F_3 = 3$ кН.

4

Дано: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 8$ кН, $F_3 = 3$ кН.

5

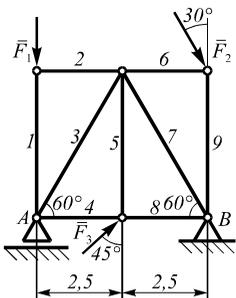
Дано: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 2$ кН.

6

Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 5$ кН.

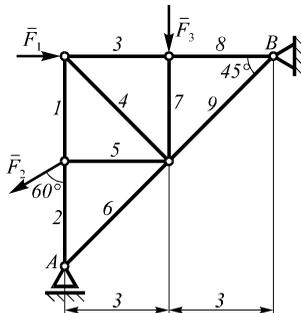
Рисунок 4.12 (начало)

7



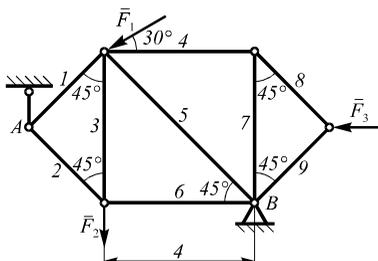
Дано: $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 8$ кН.

8



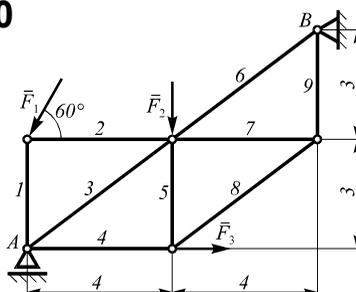
Дано: $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 9$ кН.

9



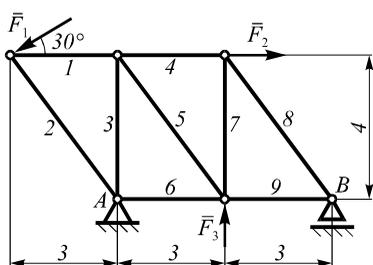
Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 5$ кН.

10



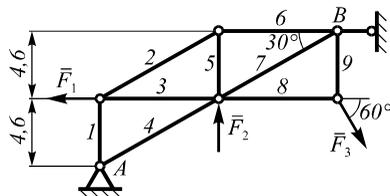
Дано: $F_1 = 9$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 6$ кН.

11



Дано: $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 5$ кН.

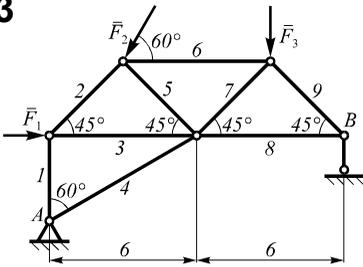
12



Дано: $F_1 = 7$ кН, $F_2 = 6$ кН, $F_3 = 2$ кН.

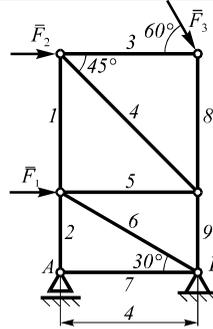
Рисунок 4.12 (продолжение)

13



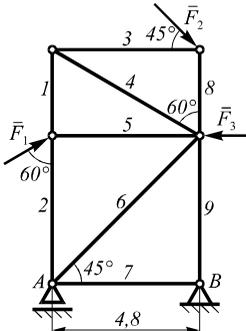
Дано: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 3$ кН.

14



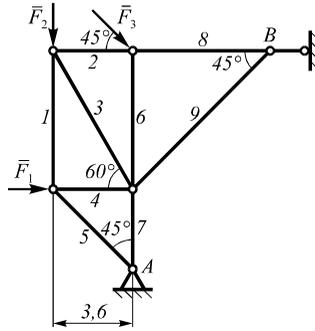
Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 9$ кН, $F_3 = 4$ кН.

15



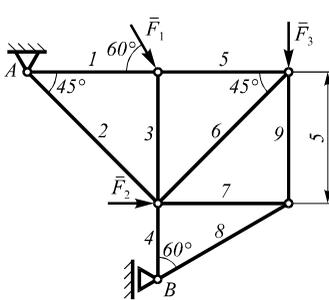
Дано: $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 6$ кН.

16



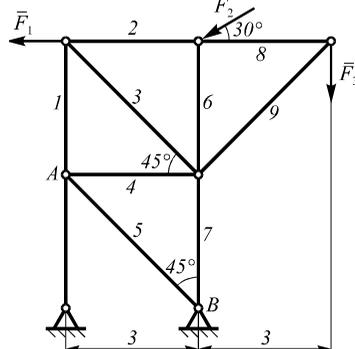
Дано: $F_1 = 3$ кН, $F_2 = 7$ кН, $F_3 = 8$ кН.

17



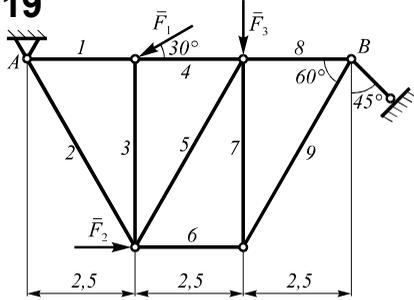
Дано: $F_1 = 7$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 6$ кН.

18

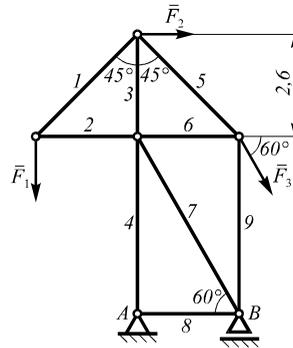


Дано: $F_1 = 2$ кН, $F_2 = 10$ кН, $F_3 = 6$ кН.

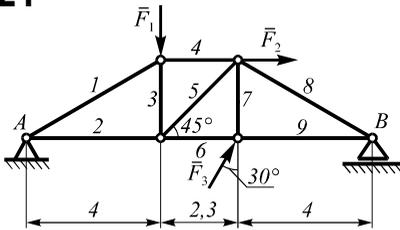
Рисунок 4.12 (продолжение)

19

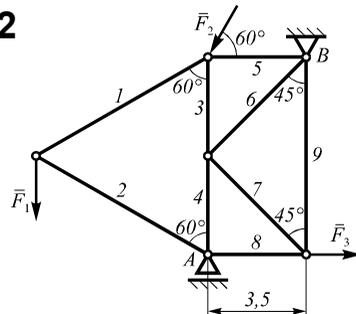
Дано: $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 2$ кН.

20

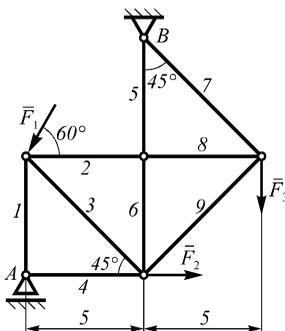
Дано: $F_1 = 7$ кН, $F_2 = 10$ кН, $F_3 = 3$ кН.

21

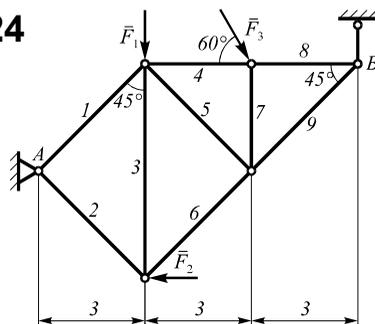
Дано: $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 3$ кН.

22

Дано: $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 10$ кН.

23

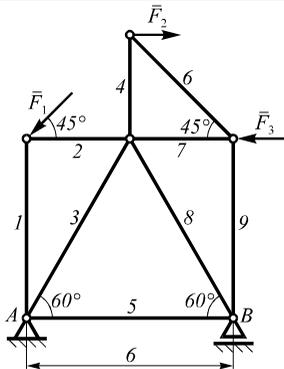
Дано: $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 8$ кН, $F_3 = 3$ кН.

24

Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 5$ кН, $F_3 = 2$ кН.

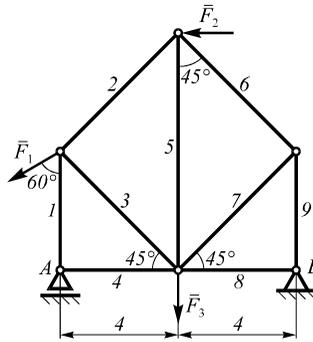
Рисунок 4.12 (продолжение)

25



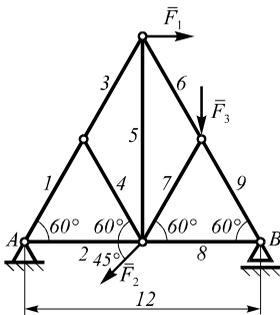
Дано: $F_1 = 12$ кН, $F_2 = 6$ кН, $F_3 = 2$ кН.

26



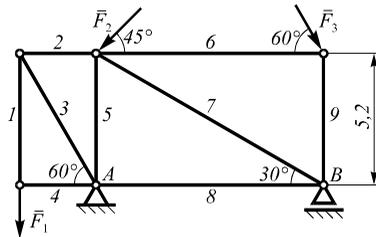
Дано: $F_1 = 9$ кН, $F_2 = 4$ кН, $F_3 = 6$ кН.

27



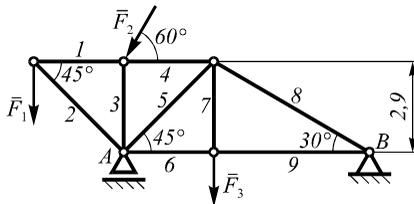
Дано: $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 10$ кН, $F_3 = 7$ кН.

28



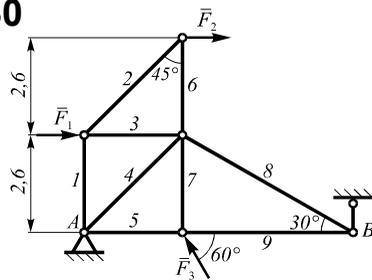
Дано: $F_1 = 8$ кН, $F_2 = 2$ кН, $F_3 = 5$ кН.

29



Дано: $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 9$ кН, $F_3 = 12$ кН.

30



Дано: $F_1 = 5$ кН, $F_2 = 3$ кН, $F_3 = 10$ кН.

Рисунок 4.12 (окончание)

5 РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

5.1 Краткие сведения из теории

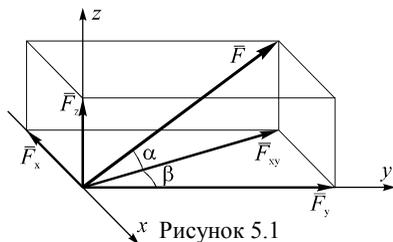
5.1.1 Равновесие тела, на которое действует система сходящихся в пространстве сил

При рассмотрении равновесия тел, на которые действуют пространственные системы сил, необходимо составлять большее число уравнений равновесия, чем для случая плоских систем сил (см. п. 1.1.6).

Если на тело действует *система сходящихся сил* в пространстве, то должны быть равны нулю алгебраические суммы проекций всех сил на три оси координат:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0. \end{cases}$$

В тех случаях, когда в условии задачи отсутствует известный угол между вектором силы и осью, часто используют *метод двойного проецирования*. Суть его заключается в следующем. Сначала определяют проекцию вектора силы на координатную плоскость, угол между которой и вектором силы известен. Затем ее, в свою очередь, проецируют на координатные оси.



На рисунке 5.1 приведен пример, в котором вектор \vec{F} спроецирован вначале на плоскость xy , а затем на координатные оси x и y :

$$F_{xy} = F \cos \alpha;$$

$$F_x = -F_{xy} \cos(90^\circ - \beta) = -F \cos \alpha \sin \beta;$$

$$F_y = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

5.1.2 Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Для равновесия тела, находящегося под действием *произвольной пространственной системы сил*, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат и суммы моментов всех сил относительно этих осей:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0; \\ \sum M_{Ox} = 0; \\ \sum M_{Oy} = 0; \\ \sum M_{Oz} = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти *момент силы относительно оси*, следует спроецировать эту силу на плоскость, перпендикулярную оси, а затем определить момент полученной проекции относительно точки пересечения оси с названной плоскостью.

Момент силы относительно оси считается положительным, если при наблюдении с конца оси видно, что сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки. При действии по ходу часовой стрелки момент считается отрицательным.

Если вектор силы лежит в одной плоскости с осью, то момент силы относительно оси равен нулю.

На рисунке 5.2 приведен пример нахождения момента силы \vec{F} относительно оси z :

$$M_z(\vec{F}) = F_{\Pi} \cdot h.$$

Как и в случае нахождения момента силы относительно точки, так и для определения момента силы относительно оси, при необходимости можно применить теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей силы относительно оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси.

Прежде чем перейти к разбору решения задачи, уточним некоторые моменты, касающиеся расстановки сил реакций связей.

В пространственных конструкциях встречаются два вида шарниров: цилиндрический и сферический.

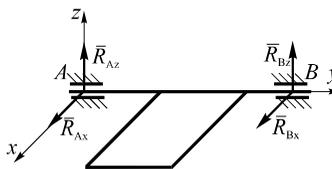


Рисунок 5.3

Цилиндрический шарнир (подшипник) не допускает перемещения связываемого тела в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Поэтому его реакция лежит в этой плоскости. При решении задач рассчитывают проекции реакции цилиндрического шарнира на две оси координат (рисунок 5.3).

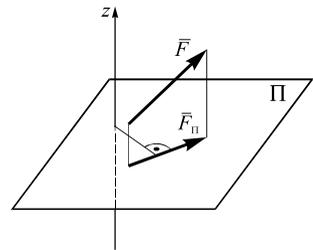


Рисунок 5.2

Сферический шарнир закрепляет одну точку тела и допускает лишь его поворот вокруг этой точки. Точно также и *подпятник* не допускает перемещения связанной точки тела. Поэтому реакции этих связей направляются произвольным образом в пространстве. При решении задач вычисляют проекции реакций сферического шарнира и подпятника на оси координат, как это показано на рисунке 5.4.

Заделка запрещает линейные и угловые перемещения по любому направлению. Поэтому реакция заделки в пространстве включает три проекции силы реакции на оси координат и три момента пар сил реакции относительно осей координат (рисунок 5.5).

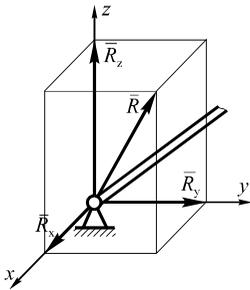


Рисунок 5.4

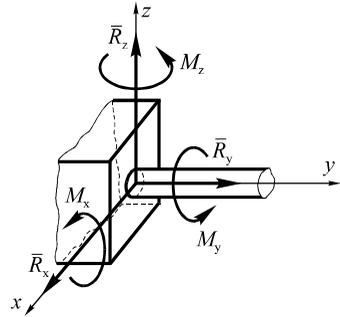
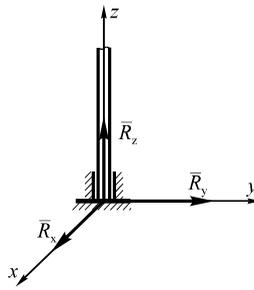


Рисунок 5.5

5.2 Пример решения задачи типа С-5

Однородная плита $ABCD$ (рисунок 5.6) находится под действием силы тяжести G , сосредоточенной силы P и равномерно распределенной нагрузки интенсивности q .

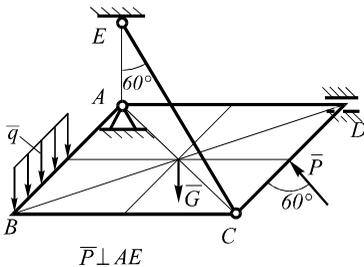


Рисунок 5.6

Дано: $AB = 1$ м; $BC = 2$ м; $P = 9$ кН; $q = 12$ кН/м, $G = 10$ кН.

Определить: реакции связей.

Решение.

1 Изображаем плиту и действующие на нее силы (рисунок 5.7). Силу тяжести однородной плиты \vec{G} прикладываем к центру масс (геометрическому центру). Равномерно распределенную

нагрузку заменяем сосредоточенной силой $Q = q \frac{AB}{2} = 6$ кН. Силу \vec{Q} прикладываем в центре распределения нагрузки.

2 Реакцию невесомого стержня EC , обозначенную буквой \bar{S} , направляем вдоль стержня. Реакцию сферического шарнира A раскладываем на три составляющие: R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} . Реакцию цилиндрического шарнира D раскладываем на две составляющие: R_{Dx} , R_{Dz} . Начало системы координат помещаем в точку A , так как в ней сходятся линии действия трех из шести неизвестных сил.

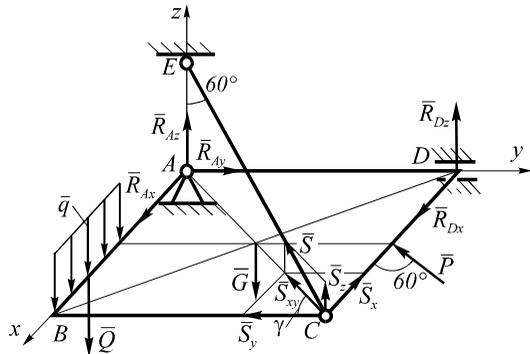


Рисунок 5.7

3 Составляем уравнения равновесия плиты. Поскольку на нее действует произвольная пространственная система сил, то имеем шесть уравнений:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; R_{Ax} + R_{Dx} - P \cos 60^\circ - S \sin 60^\circ \sin \gamma = 0; \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; R_{Ay} - P \sin 60^\circ - S \sin 60^\circ \cos \gamma = 0; \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; R_{Az} + R_{Dz} - G - Q + S \cos 60^\circ = 0; \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0; R_{Dz} \cdot AD + S \cos 60^\circ \cdot AD - G \cdot \frac{AD}{2} = 0; \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0; -S \cos 60^\circ \cdot AB + G \cdot \frac{AB}{2} + Q \cdot \frac{3}{4} AB = 0; \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0; -R_{Dx} \cdot AD - P \sin 60^\circ \cdot \frac{AB}{2} + P \cos 60^\circ \cdot BC = 0. \quad (5.6)$$

Из рисунка 5.7 видно, что γ – угол между проекцией силы \bar{S} на плоскость xu и осью x . Из треугольника ABC находим $\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894$, $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447$. При определении момента силы \bar{P} относительно оси z применена теорема Вариньона.

Замечание. Для составления уравнений равновесия можно изобразить чертеж пластины в проекциях на координатные плоскости (рисунок 5.8). Тогда по проекции на плоскость zOy можно составить уравнения (см. рисунок 5.5, а):

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_{iOx} &= 0.\end{aligned}$$

Аналогично по проекциям на плоскость xOz (см. рисунок 5.8, б):

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_{iOy} &= 0\end{aligned}$$

и плоскость xOy (рисунок 5.8, в):

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_{iOz} &= 0.\end{aligned}$$

Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться в правильности уравнений (5.1)–(5.6), составленных с использованием описанного подхода.

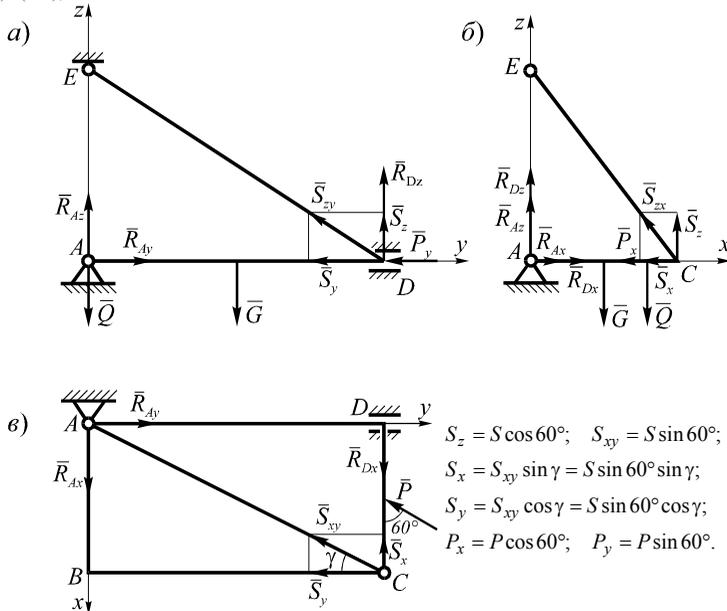


Рисунок 5.8

4 Решаем полученную систему уравнений. Из уравнения (5.5) находим

$$S = \frac{0,5G + 0,75Q}{\cos 60^\circ} = \frac{0,5 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6}{0,5} = 19 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5.6) имеем

$$R_{Dx} = \frac{1}{2} [P(2 \cos 60^\circ - 0,5 \sin 60^\circ)] = \frac{1}{2} [9 \cdot (2 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,866)] = 2,551 \text{ кН.}$$

Уравнение (5.4) дает

$$R_{Dz} = \frac{G}{2} - 2S \cos 60^\circ = \frac{10}{2} - 2 \cdot 19 \cdot 0,5 = -4,5 \text{ кН.}$$

Знак «минус», получившийся при расчете реакции R_{Dz} , показывает, что ее действительное направление противоположно изображенному на рисунке 5.2.

Из уравнений (5.3), (5.2) и (5.1) находим оставшиеся неизвестные:

$$R_{Az} = G + Q - S \cos 60^\circ - R_{Dz} = 10 + 6 - 19 \cdot 0,5 + 4,5 = 11 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = S \sin 60^\circ \cos \gamma + P \sin 60^\circ = 19 \cdot 0,866 \cdot 0,894 + 9 \cdot 0,866 = 22,52 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= P \cos 60^\circ + S \sin 60^\circ \sin \gamma - R_{Dx} = \\ &= 9 \cdot 0,5 + 19 \cdot 0,866 \cdot 0,447 - 2,551 = 9,301 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Равнодействующая силы реакции сферического шарнира A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{9,301^2 + 22,52^2 + 11^2} = 26,53 \text{ кН.}$$

Равнодействующая силы реакции цилиндрического шарнира D

$$R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dz}^2} = \sqrt{2,551^2 + 4,5^2} = 5,173 \text{ кН.}$$

5.3 Условие задания С-5

Равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил

Однородные плиты, изображенные на рисунке 5.9, находятся в равновесии под действием силы тяжести \bar{G} , силы \bar{P} и равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , значения которых приведены в таблице 5.1. Размеры плиты $AB = 1 \text{ м}$; $BC = 2 \text{ м}$. Определить реакции связей. В вариантах 25-30 $CE = BC$.

Таблица 5.1 – Исходные данные к задаче С-5

Номер варианта	P , кН	G , кН	q , кН/м	Номер варианта	P , кН	G , кН	q , кН/м	Номер варианта	P , кН	G , кН	q , кН/м
1	7	10	8	11	12	6	6	21	6	8	5
2	9	12	10	12	8	10	5	22	7	11	12
3	5	8	4	13	7	19	3	23	10	7	4
4	4	14	6	14	13	5	7	24	12	16	10
5	10	5	5	15	10	16	8	25	8	20	5
6	12	15	7	16	12	11	10	26	15	17	6
7	6	11	8	17	15	15	10	27	12	13	4
8	11	9	5	18	11	11	6	28	10	18	8
9	5	7	9	19	9	10	8	29	9	9	12
10	8	12	10	20	10	18	9	30	14	6	8

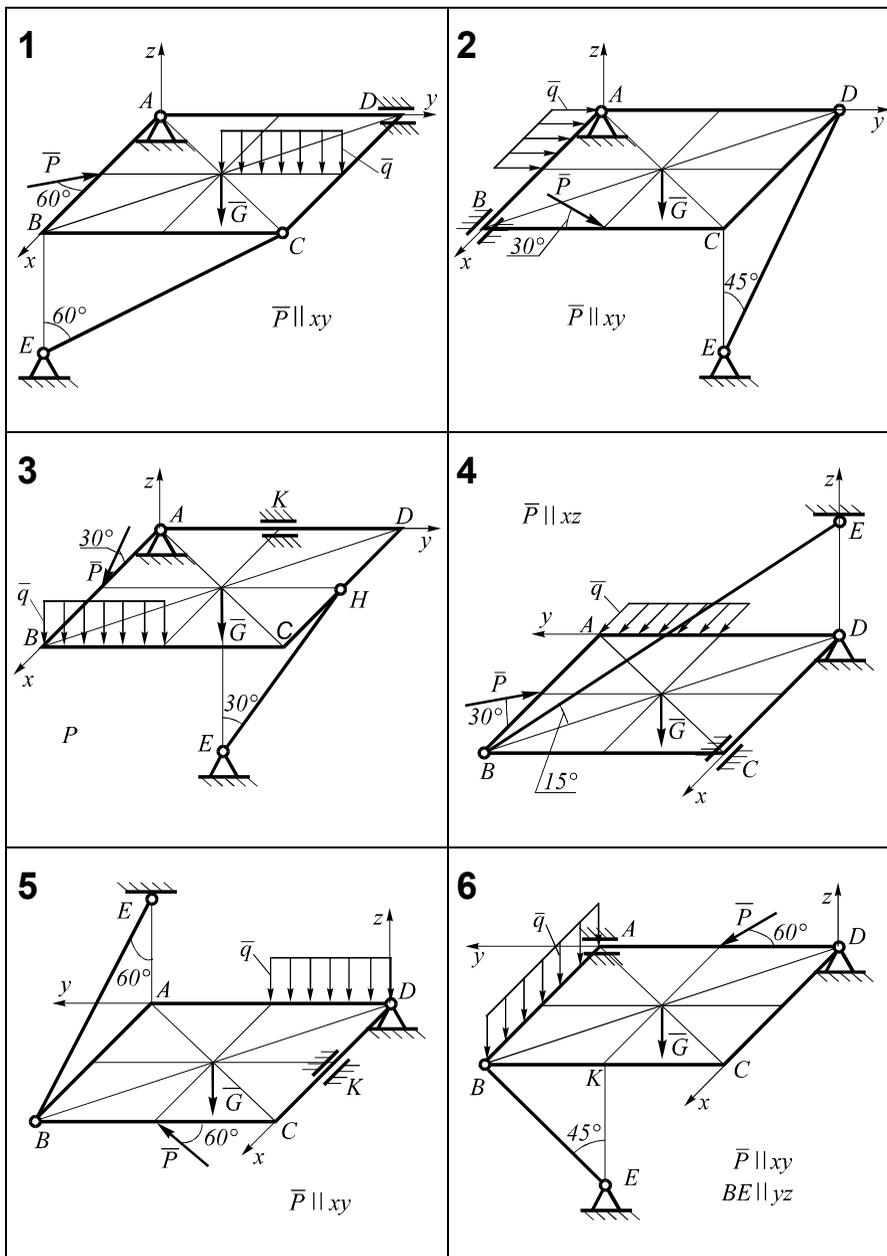


Рисунок 5.9 (начало)

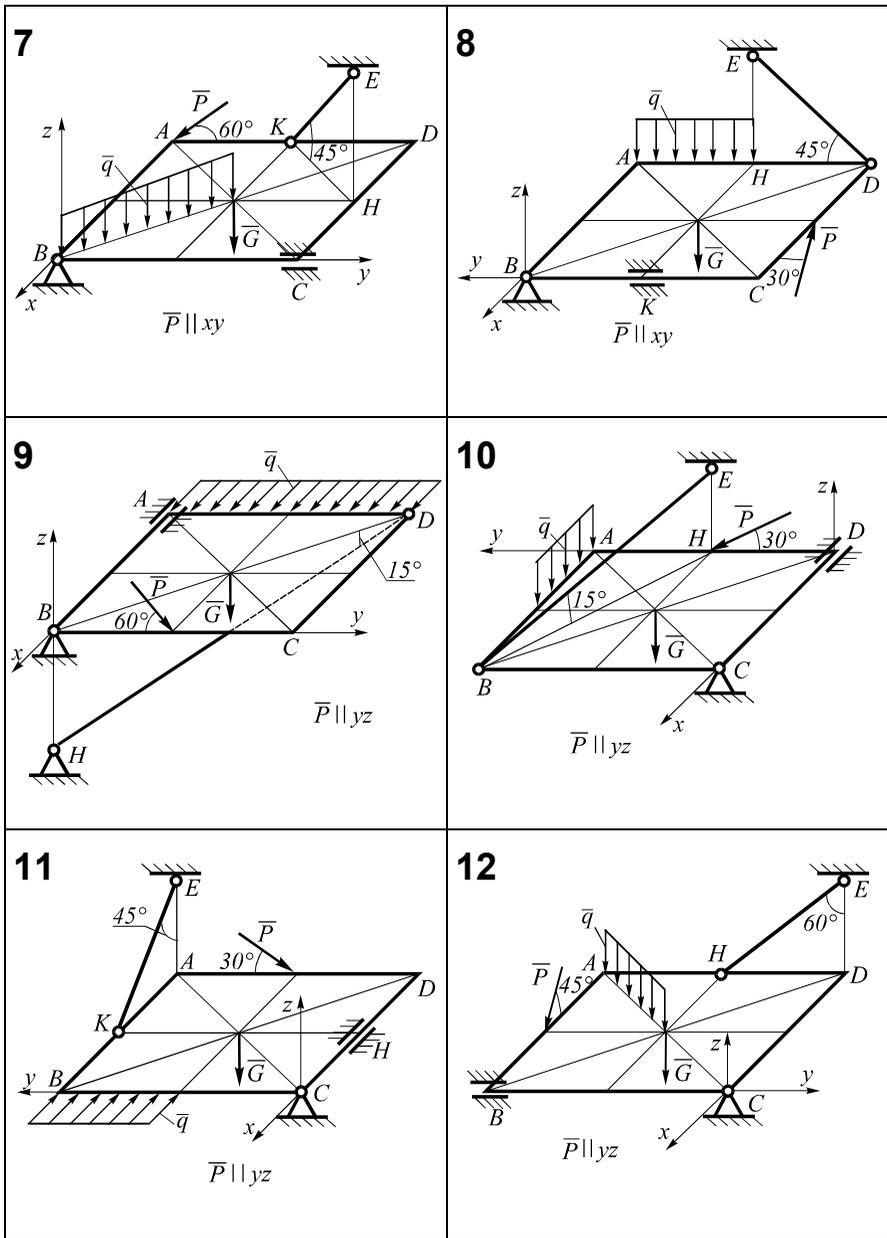


Рисунок 5.9 (продолжение)

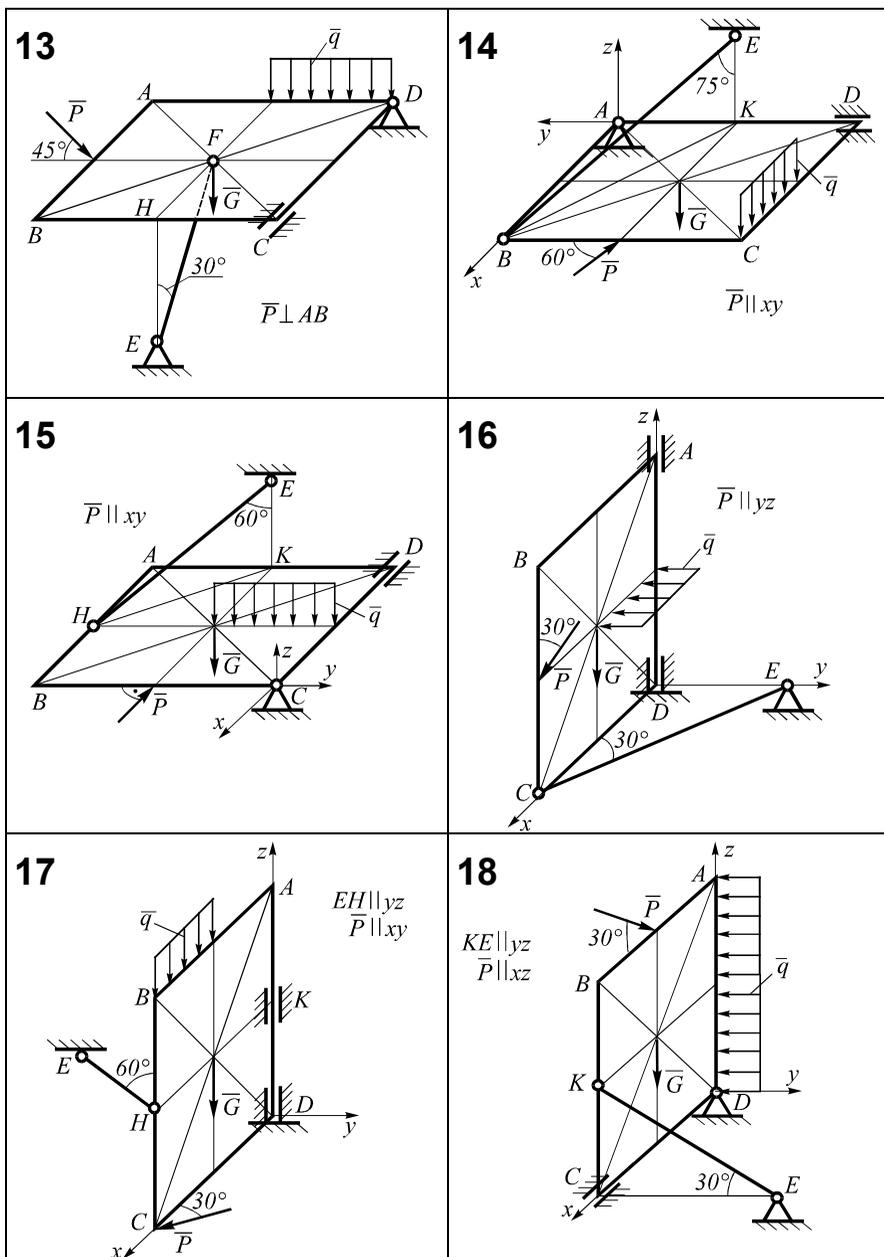


Рисунок 5.9 (продолжение)

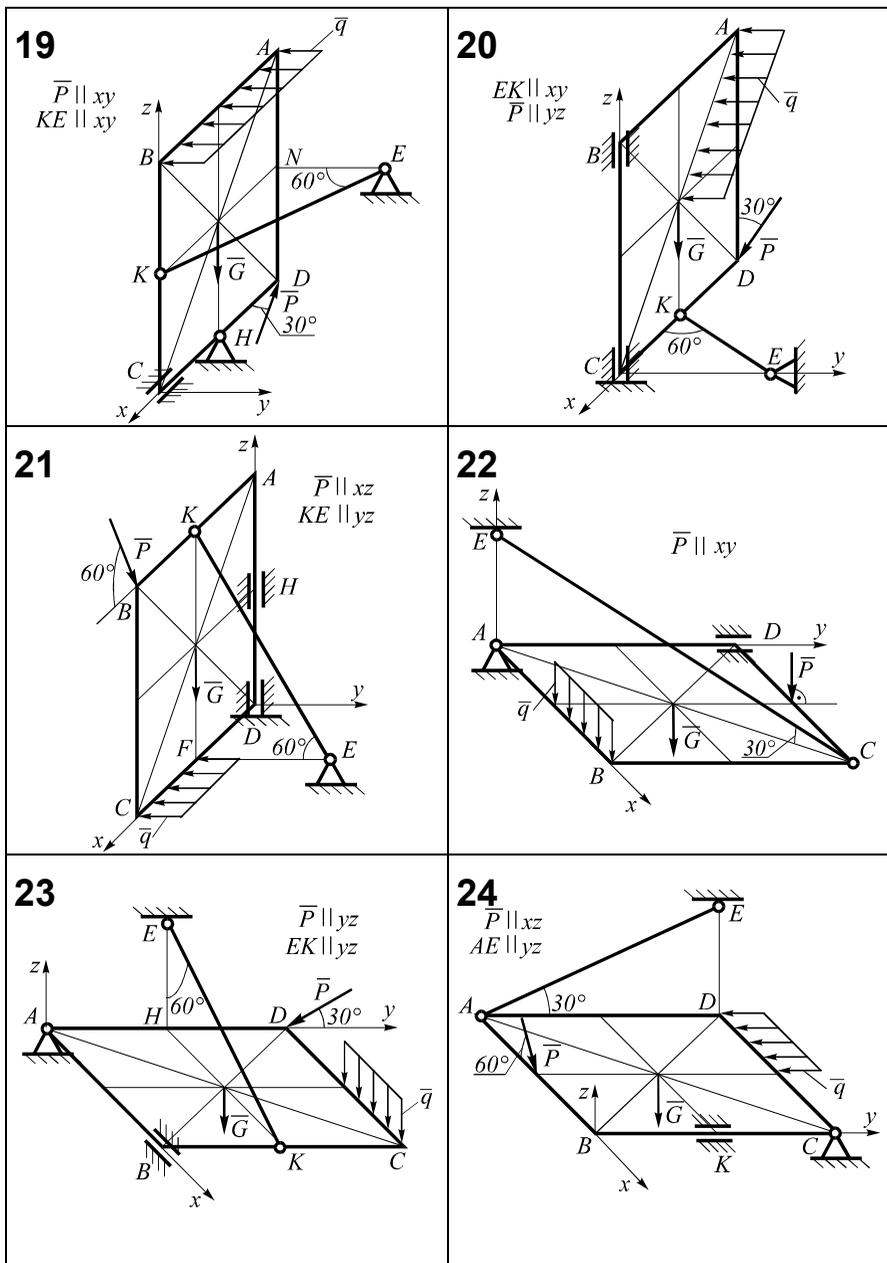


Рисунок 5.9 (продолжение)

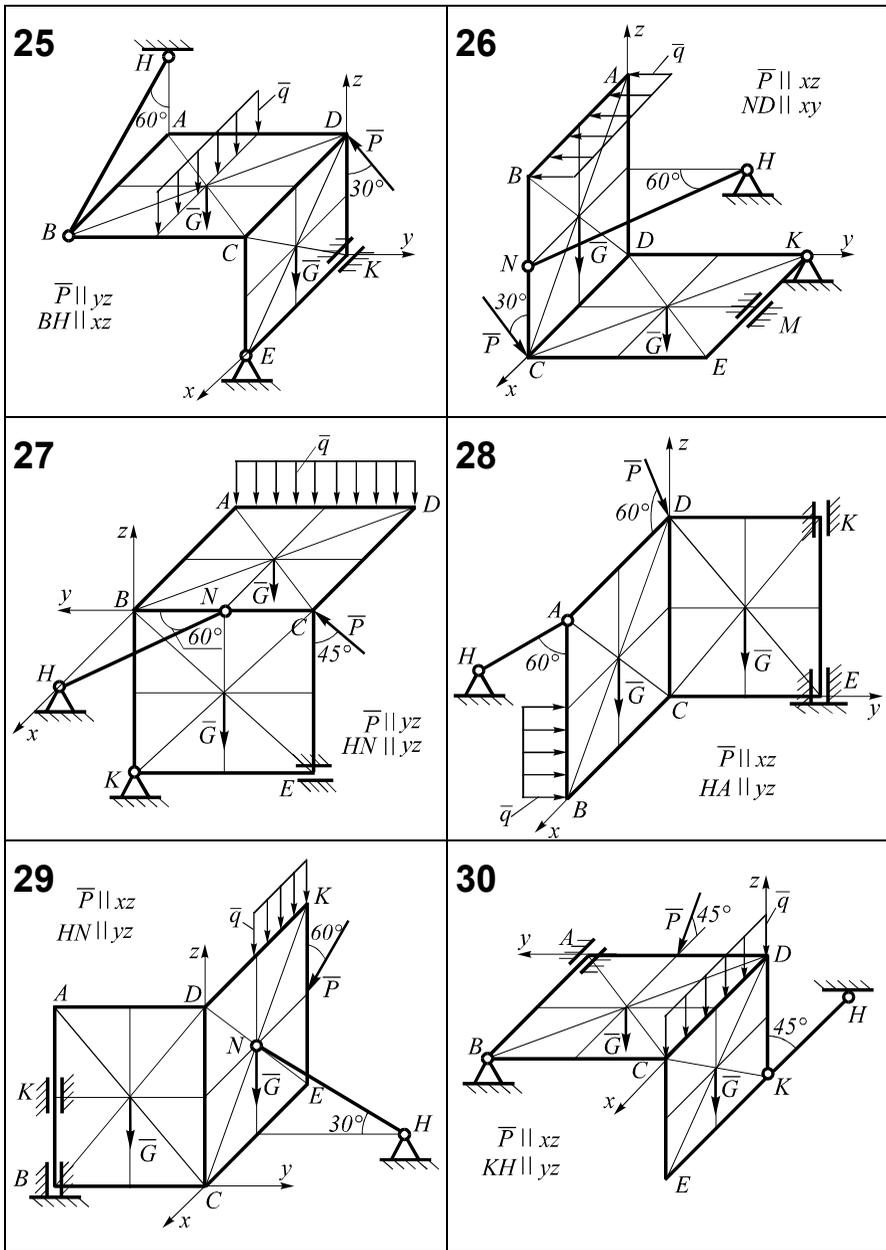


Рисунок 5.9 (окончание)

6 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

6.1 Краткие сведения из теории

Центром тяжести тела называется точка приложения его силы тяжести.

Для нахождения положения центра тяжести используют следующие способы:

1 Метод симметрии. У однородного тела, имеющего плоскость, ось или центр симметрии, центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

2 Метод разбиения на части. Если тело имеет сложную форму, его разбивают на части, положения центров тяжести которых известны (формулы для расчета площадей и координат центров тяжести некоторых плоских фигур приведены в таблице 6.1). В таком случае положения центров тяжести тела определяют с использованием следующих выражений.

Координаты центра тяжести объемного тела постоянной плотности находятся по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i V_i}{\sum V_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i V_i}{\sum V_i}; \quad z_c = \frac{\sum z_i V_i}{\sum V_i},$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центров тяжести элементарных частей,

V_i – объем i -й части.

Если тело представляет собой однородную пластину постоянной толщины, то координаты ее центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}, \quad (6.1)$$

где A_i – площадь i -го элемента.

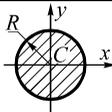
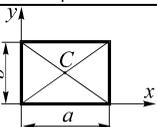
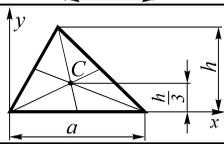
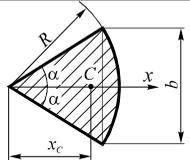
Для стержневых конструкций, образованных стержнями одинаковой плотности и постоянного поперечного сечения, координаты центра тяжести определяют по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i}; \quad y_c = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i}; \quad z_c = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i},$$

где l_i – длина элемента линии.

3 Метод отрицательных сил тяжести. При нахождении положения центра тяжести тела, имеющего вырезы, полости, отверстия и т. п., используют метод разбиения на части, причем считается, что полости (их площади, объемы) имеют отрицательный вес.

Таблица 6.1 – Площади и координаты центров тяжести плоских фигур

Наименование	Расчетная схема	Площадь	Координаты центра тяжести
Круг		$A = \pi R^2$	$x_C = 0$; $y_C = 0$
Прямоугольник		$A = ab$	$x_C = \frac{a}{2}$; $y_C = \frac{b}{2}$
Треугольник		$A = \frac{1}{2} ah$	$x_C = \frac{1}{3} a$; $y_C = \frac{1}{3} h$
Круговой сектор		$A = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3A}$

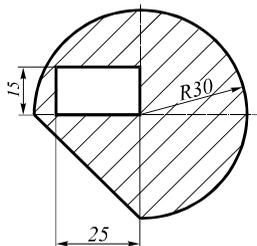


Рисунок 6.1

6.2 Пример решения задачи

Дано: схема плоской фигуры (рисунок 6.1). Размеры указаны в сантиметрах.

Определить координаты центра тяжести изображенной на рисунке пластины.

Решение.

1 Чтобы найти площадь заштрихованной фигуры, нужно от суммы площадей полукруга, сектора (четверти круга) и треугольника отнять площадь выреза (прямоугольника). Обозначим эти элементы цифрами, как это показано на рисунке 6.2, и укажем расположение их центров тяжести C_i .

2 Начало координат поместим в центре круга, а оси координат Ox и Oy направим горизонтально и вертикально.

3 Площадь полукруга и координаты его центра тяжести находим по формулам для кругового сектора из таблицы 6.1, учитывая, что $\alpha = \pi/2$ рад:

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{2} = 1413 \text{ см}^2; \quad x_1 = 0; \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 30}{3 \cdot 3,14} = 12,74 \text{ см}.$$

4 Для нахождения площади и координат центра тяжести C_2 сектора 2 также воспользуемся таблицей 6.1. Размеры этого сектора определяются уг-

лом $\alpha = \frac{\pi}{4}$ рад. Поэтому

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{4} = 706,5 \text{ см}^2;$$

$$OC_2 = \frac{2R \sin \frac{\pi}{4}}{3\pi/4} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 0,707}{3 \cdot 3,14/4} = 18,09 \text{ см}.$$

$$x_2 = OC_2 \sin 45^\circ = 18,09 \cdot 0,707 = 12,84 \text{ см};$$

$$y_2 = -x_2 = -12,84 \text{ см}.$$

5 Центр тяжести прямоугольного равнобедренного треугольника 3 находится на пересечении его медиан (в точке C_3). Медиана OM является также и высотой, поэтому

$$OM = OL \cos 45^\circ = R \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad OC_3 = \frac{2}{3} OM = \frac{2}{3} R \frac{\sqrt{2}}{2} = R \frac{\sqrt{2}}{3} = 14,14 \text{ см}.$$

Тогда площадь и координаты центра тяжести треугольника 3:

$$A_3 = \frac{R^2}{2} = \frac{30^2}{2} = 450 \text{ см}^2;$$

$$x_3 = -OC_3 \sin 45^\circ = -R \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{R}{3} = -\frac{30}{3} = -10 \text{ см};$$

$$y_3 = -OC_4 \cos 45^\circ = -R \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -10 \text{ см}.$$

6 Найдем площадь и координаты центра тяжести прямоугольника. Так как он является вырезом, его площадь берем со знаком “-”. Центр тяжести прямоугольника находится в точке пересечения его диагоналей. Следовательно,

$$A_4 = -15 \cdot 25 = -375 \text{ см}^2; \quad x_4 = -\frac{25}{2} = -12,5 \text{ см}; \quad y_4 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см}.$$

7 Координаты центра тяжести рассматриваемой пластины определяем по формулам (6.1):

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{1413 \cdot 0 + 706,5 \cdot 12,84 + 450 \cdot (-10) - 375 \cdot (-12,5)}{1413 + 706,5 + 450 - 375} = 4,219 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{1413 \cdot 12,74 + 706,5 \cdot (-12,84) + 450 \cdot (-10) - 375 \cdot 7,5}{1413 + 706,5 + 450 - 375} = 0,737 \text{ см}.$$

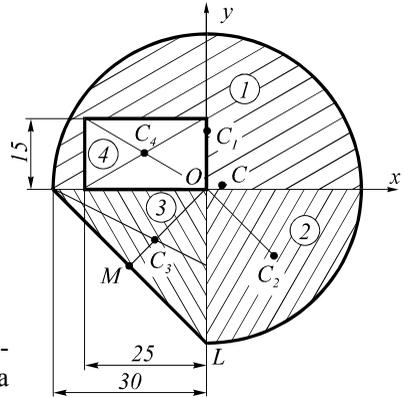


Рисунок 6.2

7 По результатам расчета изображаем на рисунке точку С, являющуюся центром тяжести пластины.

6.3 Условие задания С-6

Определение координат центра тяжести плоского сечения

На рисунке 6.3 изображены плоские сечения. Вычертить сечение в масштабе. Определить координаты его центра тяжести. Показать на чертеже центр тяжести сечения.

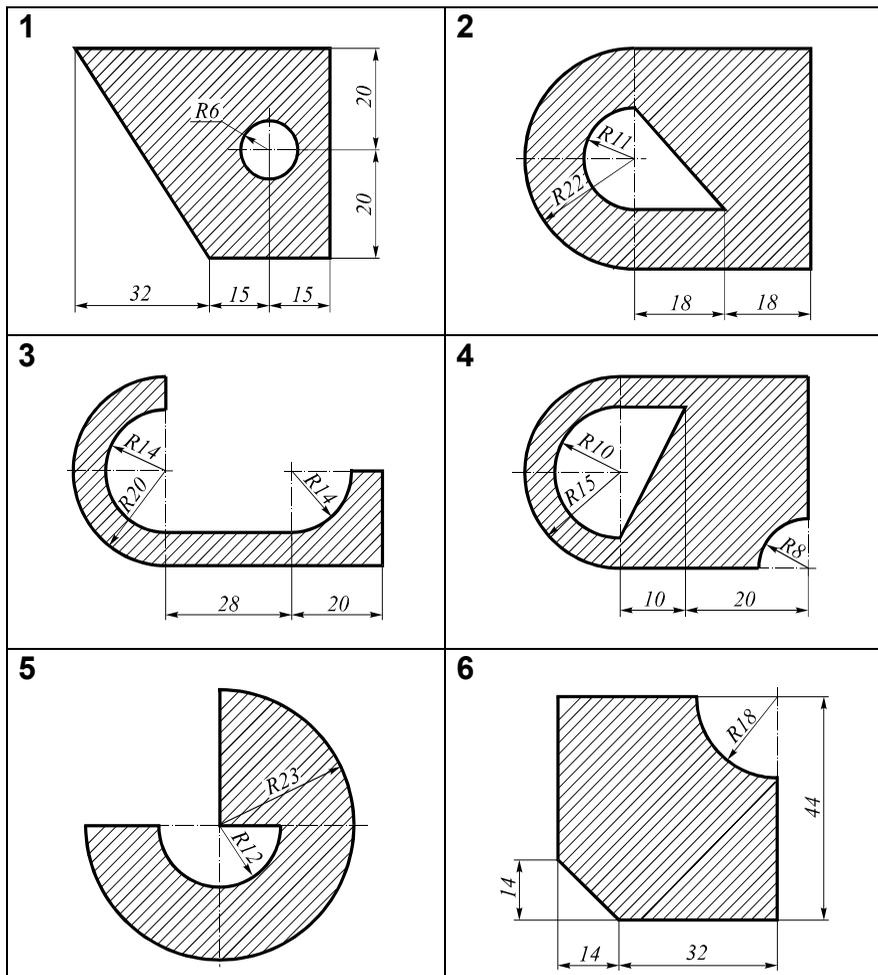


Рисунок 6.3 (начало)

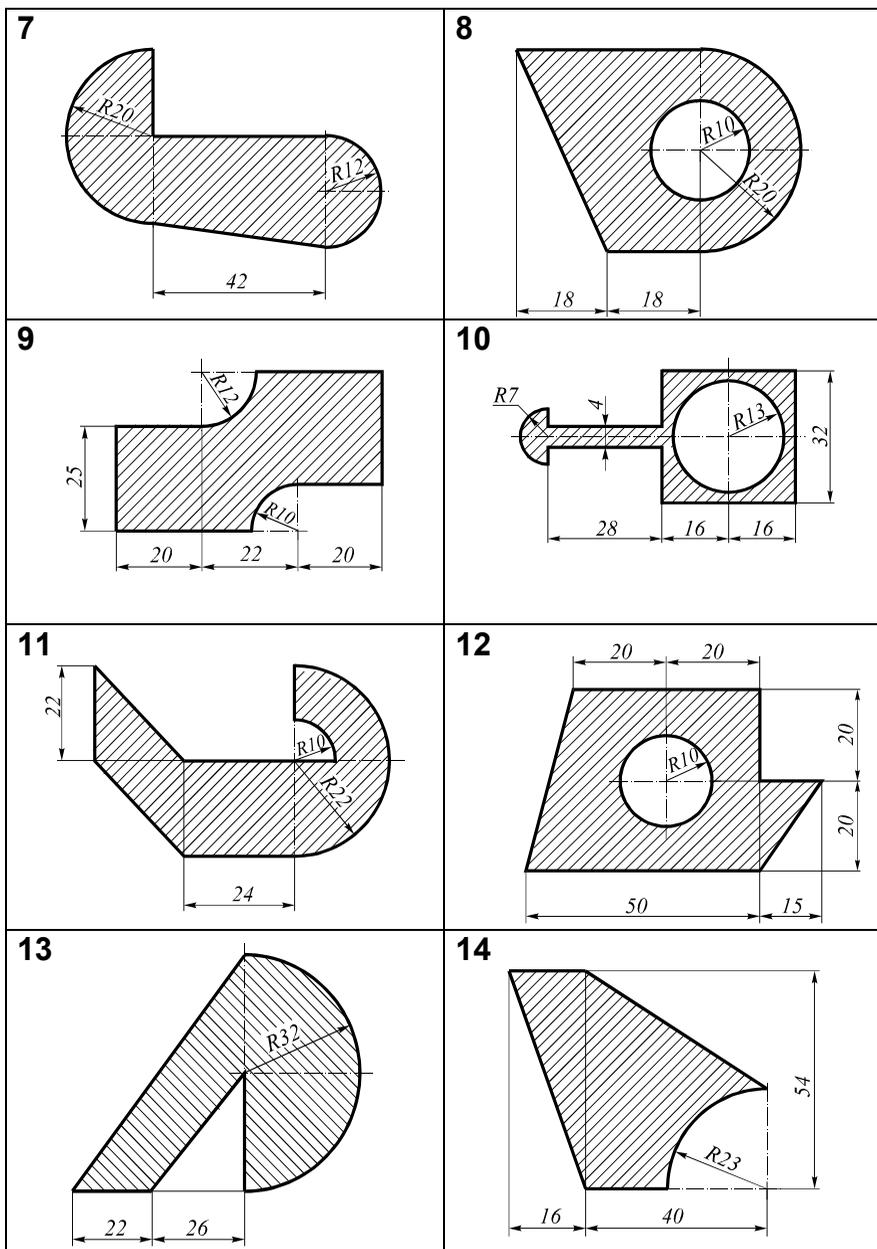


Рисунок 6.3 (продолжение)

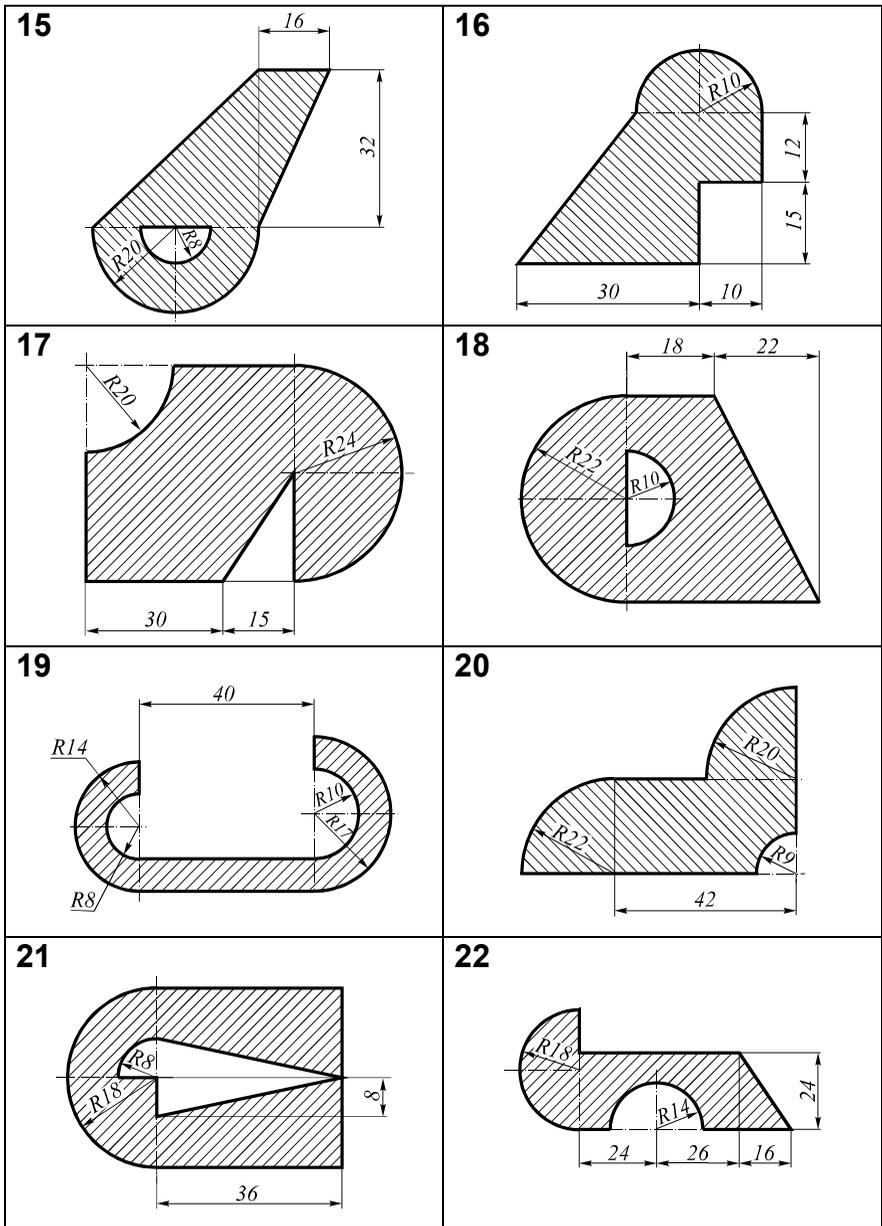


Рисунок 6.3 (продолжение)

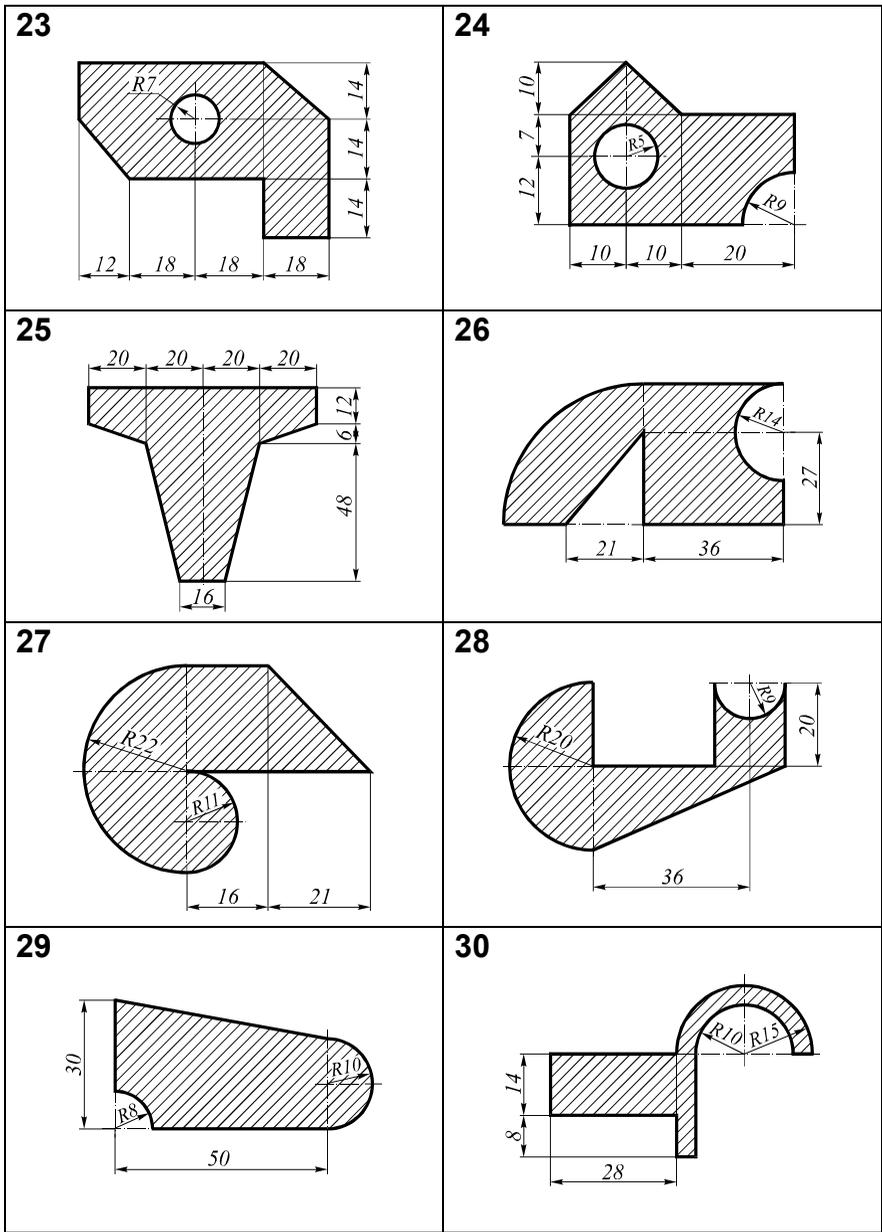


Рисунок 6.3 (окончание)

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Изд-во «Лань», 1998. – 736 с.

2 *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 1995. – 416 с.

3 *Шимановский, А. О.* Теоретическая механика. Ч. 1. Статика / А. О. Шимановский. – Гомель : БелГУТ, 1998. – 72 с.

4 *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1. Статика и кинематика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – 670 с.

Учебное издание

КУЗЕМКИНА Галина Михайловна

КРАКОВА Ирина Евгеньевна

ЧЕРНОУС Дмитрий Анатольевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

РАЗДЕЛ «СТАТИКА»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

Учебно-методическое пособие

Редактор И.И. Эвентов

Технический редактор В.Н. Кучерова

Подписано в печать 12.01.2009 г. Формат бумаги 60×84 ¹/₁₆.

Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.

Усл. печ. л. 3,95. Уч. изд. л. 4,36. Тираж 500 экз.

Зак. № _____. Изд. № 100 _____.

Издатель и полиграфическое исполнение

Белорусский государственный университет транспорта:

ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2004 г.

ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.

246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.

ПРИЛОЖЕНИЕ А (справочное)

Программа раздела «Статика» курса теоретической механики

1 Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики – изучение механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Содержание основных разделов механики. Теоретическая механика как одна из фундаментальных физико-математических наук; ее мировоззренческое значение и место среди других естественных и технических наук. Объективный характер законов механики. Значение теоретической механики как научной базы большинства областей современной техники. Связь механики с производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач. Значение механики для специалистов данного профиля. Основные исторические этапы развития механики.

2 Основные понятия механики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Механические связи и их реакции.

3 Предмет статики. Аксиомы статики. Следствия из них. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Проекция силы на ось и на плоскость.

4 Равнодействующая системы сходящихся сил. Геометрическое и аналитическое условия равновесия тела, находящегося под действием сходящихся сил.

5 Момент силы относительно центра. Свойства момента. Вектор момента силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр.

6 Понятие о паре сил. Момент пары сил. Момент пары сил как вектор. Теорема о сумме моментов сил пары относительно центра. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар сил, расположенных в плоскости и пространстве. Условия равновесия пар сил.

7 Приведение силы и системы сил к данному центру. Метод Пуансо и основная теорема статики. Главный вектор и главный момент системы сил. Частные случаи приведения системы сил. Условия равновесия тел, находящихся под действием различных систем сил.

8 Равновесие системы тел. Статически определимые и статически неопределимые системы.

9 Понятие о плоской ферме. Статически определимые и статически неопределимые фермы. Аналитические способы расчета ферм – способ вырезания узлов и способ сечений (способ Риттера). Графическое определение внутренних сил фермы с применением диаграммы Максвелла-Кремоны.

10 Трение скольжения при покое (сцепление) и движении. Законы трения скольжения. Реакция шероховатой поверхности. Угол и конус трения (сцепления). Область равновесия. Равновесие тел при наличии трения. Трение качения. Коэффициент трения качения. Момент трения качения. Понятие о трении верчения.

11 Приведение системы сил к простейшему виду. Зависимость между главными моментами системы сил относительно двух произвольно выбранных центров приведения. Инварианты системы сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

12 Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус – вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела; центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел.

13 Применение ЭВМ к решению задач статики твердых тел.