МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики
Кафедра общетехнических и специальных дисциплин

С. П. НОВИКОВ, И. И. СОСНОВСКИЙ

# МАТЕМАТИКА

## ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области транспорта и транспортной деятельности
в качестве пособия для студентов специальности
6-05-0715-10 «Технологии транспортных процессов»
по учебной дисциплине «Математика»*

Гомель 2025

УДК 51(075.8)
ББК 22
Н73

Рецензенты: доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений канд. физ.-мат. наук, доцент *Г. Н. Казимиров* (ГГУ им. Ф. Скорины);
кафедра фундаментальной и прикладной математики (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*) (ГГУ им. Ф. Скорины)

**Новиков, С. П.**

Н73 Математика для студентов заочной формы получения образования : пособие / С. П. Новиков, И. И. Сосновский ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 129 с.
ISBN 978-985-891-201-7

Состоит из кратких теоретических сведений по основным разделам курса высшей математики, подкрепленных подробно разобранными примерами типовых задач. Содержит тематические тесты по каждой главе и примеры контрольных работ.

Предназначено для студентов заочного факультета специальности «Технологии транспортных процессов».

**УДК 51(075.8)**
**ББК 22**

**ISBN 978-985-891-201-7**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная форма обучения студента заочного факультета – самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. Цель пособия – помочь студентам самостоятельно овладеть основными понятиями и методами курса высшей математики, научиться решать типовые задачи, подготовиться к написанию контрольных работ и сдаче экзамена.

Каждый раздел начинается с определений основных понятий. Краткие теоретические сведения иллюстрируются подробным решением примеров. В конце раздела приведен тест для самоконтроля изученной темы.

Пособие содержит решенные примеры контрольных работ. Приведены краткие сведения по элементарной математике.

# 1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

*Комплексным числом* $z$ называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где $x$ и $y$ – действительные числа, а $i$ – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $C$.

Число $x$ называется *действительной частью* комплексного числа $z$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а $y$ – *мнимой частью* $z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

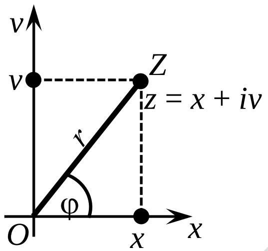


Рисунок 1.1

Всякому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $Z(x; y)$ координатной плоскости $Oxy$ (или вектор $\overrightarrow{OZ}$) и, наоборот, всякой точке $Z(x; y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$ (рисунок 1.1). То есть между множествами комплексных чисел и точек плоскости $Oxy$ установлено взаимно-однозначное соответствие.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной* осью, ось ординат – *мнимой* осью.

Длина вектора, изображающего комплексное число $z$, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z| = |\overrightarrow{OZ}|$ или $r$. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или $\varphi$.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k \in Z)$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$ (или $[0; 2\pi)$).

Запись числа $z$ в виде $z = x + iy$ называют алгебраической формой комплексного числа.

Модуль $r$ и аргумент $\varphi$ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi$ или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.2}$$

Такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой*. Запись

$$z = re^{i\varphi} \tag{1.3}$$

называют *показательной формой* комплексного числа, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Для перехода от алгебраической к тригонометрической или показательной формам надо определить модуль и аргумент: модуль находится по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \tag{1.4}$$

а аргумент – по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), \text{ для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, \text{ для внутренних точек II четверти,} \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, \text{ для внутренних точек III четверти.} \end{cases} \tag{1.5}$$

**Арифметические операции над комплексными числами.**

Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);\ \ z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\ .$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю (избавляются от мнимости в знаменателе).

*Пример 1.1.* Выполнить действия $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

$$\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i\ .$$

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

То есть *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, а при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. Если $n$ натуральное число, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.6)$$

Эта формула называется *формулой Муавра*.

*Пример 1.2*. Найти $(1 + \sqrt{3}\,i)^9$.

Запишем сначала число $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2,\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},\ \text{т. е. }\ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

По формуле Муавра имеем

$$z^9 = (1 + \sqrt{3}i)^9 = 2^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(9\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512.$$

**Извлечение корня *n*-й степени.**

*Корнем* $n$*-й степени из комплексного числа* $z$ называется комплексное число $\omega$, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$, т. е. $\sqrt[n]{z} = \omega$, если $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем $n$ различных значений корня:

$$\omega_n = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1.7)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

*Пример 1.3*. Найти значения $\sqrt[3]{i}$.

Запишем подкоренное выражение в тригонометрической форме: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

При $k = 0$ имеем $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ ; при $k = 1$ имеем

$\omega_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ ; при $k = 2$ имеем

$\omega_2 = \cos\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{9\pi}{2}}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$ .

**Тест 1**

| | |
|---|---|
| **А1.** Дано комплексное число $z = -3 + 4i$ . Найти Re $z$ и Im $z$. | 1) Re $z$ =3, Im $z$ = 4;<br>2) Re z = –4, Im $z$ = –3;<br>3) Re $z$ = –3, Im $z$ = –4;<br>4) Re $z$ = –4, Im $z$ = 3;<br>5) Re $z$ = –3, Im $z$ = 4. |
| **А2**. Найти $z_1 + z_2$, если $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 4 + 2i$. | 1) $1 - 5i$; 2) $6 - 20i$;<br>3) $20 - 6i$; 4) $9 - i$; 5) $9 + i$. |
| **А3.** Найти $z_1z_2$, если $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 4 + i$. | 1) $6 - 10i$; 2) $6 + 10i$;<br>3) $10 - 6i$; 4) $10 + 6i$;<br>5) $12 + 6i$. |
| **А4.** Найти $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 4i$. | 1) $0{,}24 - 0{,}68i$; 2) $-0{,}24 - 0{,}68i$;<br>3) $0{,}24 + 0{,}68i$; 4) $-0{,}24 + 0{,}68i$;<br>5) $-0{,}22 - 0{,}68i$. |
| **А5.** Найти $\|z\|$ и arg $z$ комплексного числа $z = -2 + 2i$. | 1) $\|z\| = 2\sqrt{2}$, arg $z$ = 135°;<br>2) $\|z\| = 2\sqrt{2}$, arg $z$ = 45°;<br>3) $\|z\| = \sqrt{2}$, arg $z$ = 135°;<br>4) $\|z\| = 2\sqrt{2}$, arg $z$ = –45°;<br>5) $\|z\| = 2\sqrt{2}$, arg $z$ = –135°. |

| |
|---|
| **В1.** Вычислить $\dfrac{(z_1+z_2)\cdot z_3}{z_1}$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 1 + 5i$. В ответе указать сумму действительной и мнимой частей. |
| **В2.** Найти $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^{12}$. |
| **В3.** Найти произведение корней уравнения $z^3 + 1 = 0$. |
| **В4.** Найти значение функции $f(z) = \lvert z \rvert \cdot \bar{z} - 20i$ в точке $z_0 = 3 - 4i$. |
| **В5.** Изобразить на комплексной плоскости область, удовлетворяющую условиям $2 \le \lvert z + 1 \rvert \le 3$. Найти ее площадь $S$. В ответе указать $\dfrac{S}{\pi}$. |

## 2 МАТРИЦЫ

Прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов $a_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый $i$ указывает номер строки, второй $j$ – номер столбца на пересечении которых находится элемент матрицы $a_{ij}$.

Употребляются и сокращенные записи матриц $\lVert a_{ij} \rVert$, $(a_{ij})$, $[a_{ij}]$ или $\lVert a_{ij} \rVert_{mn}$, $(a_{ij})_{mn}$, $[a_{ij}]_{mn}$.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, т. е. $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется ее *порядком*.

Элементы $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{nn}$ квадратной матрицы образуют так называемую *главную диагональ матрицы* $A$, их называют *диагональными*. Элементы квадратной матрицы, расположенные на отрезке, соединяющем левый нижний угол с правым верхним углом матрицы образуют *побочную диагональ* матрицы.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*. Если все диагональные элементы диагональной матрицы равны друг другу, то матрица называется *скалярной*. Скалярная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается единичная матрица буквой $E$.

Две матрицы $A$ и $B$ называются *равными* и пишут $A = B$ тогда и только тогда, когда: 1) $A$ и $B$ – матрицы одинаковых размеров; 2) равны их соответствующие элементы, т. е. равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрицу размеров $1{\times}n$, т. е. матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

называют строкой длины $n$ или просто строкой. Матрицу размеров $m{\times}1$, т. е. матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

называют столбцом высоты $m$ или просто столбцом.

В дальнейшем будем считать, что элементами матрицы являются действительные числа.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается через 0 или через $0_{mn}$, если матрица имеет размеры $m{\times}n$.

## Операции над матрицами

Пусть даны $m \times n$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Суммой* матриц $A$ и $B$ называется $m \times n$-матрица $A + B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $A$ и $B$, т. е.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

*Произведением* $m \times n$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

на число $\alpha$ называется $m \times n$-матрица $\alpha A$, каждый элемент которой равен произведению числа $\alpha$ на соответствующий элемент матрицы $A$, т. е.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

*Пример 2.1*. Найти $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем произведение первой матрицы на 2 по формуле (2.2), а затем сложим две матрицы по формуле (2.1). Получим

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 14 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 16 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пусть даны $m \times n$-матрица $A$ и $n \times r$-матрица

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

т. е. $A$ и $B$ – такие матрицы, что число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$. Тогда произведением матрицы $A$ на матрицу $B$ называется $m{\times}r$-матрица

$$C=AB=\left(c_{ik}\right)_{mr}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk} \;(i=1, 2, ..., m;\ k=1, 2, ..., r), \qquad (2.3)$$

т. е. элемент $c_{ik}$ равен сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $k$-го столбца $B$.

*Пример 2.2*. Найти произведение $AB$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению (2.3), имеем

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot4 \\ 3\cdot2+4\cdot0 & 3\cdot3+4\cdot1 & 3\cdot1+4\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 6 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

**Тест 2**

| | |
|---|---|
| **А1.** Дана матрица $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Найти $2A$. | 1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. |
| **А2.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Найти $A + B$. | 1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. |

| | |
|---|---|
| **А3.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\7&4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. Найти $A-2B$. | 1) $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$; 4) действия произвести невозможно. |
| **А4.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$. Найти $AB$. | 1) (19  20); 2) (19  –20); 3) $\begin{pmatrix}19\\20\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}-19\\20\end{pmatrix}$. |
| **А5.** При умножении матрицы размера 3×2 на матрицу размера 2×5 получится матрица размера: | 1) 2×2; 2) 3×3; 3) 4×3; 4) 3×5; 5) 5×2. |
| **В1.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}9&6&3\\9&5&2\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=2B-A$. В ответе указать элемент $c_{22}$. | |
| **В2.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}5&7\\-2&6\\5&2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3&10\\2&4\\7&-6\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=3A+2B$. В ответе указать элемент $c_{31}$. | |
| **В3.** Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3&10\\2&4\\7&-6\end{pmatrix}$. Найти $AB$. В ответе указать элемент $c_{22}$. | |
| **В4.** Решить систему матричных уравнений $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{cases}$ В ответе записать $x_{11}x_{22}-y_{11}y_{22}$. | |

**В5.** Найти произведение элементов главной диагонали матрицы

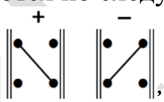
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}^2 .$$

## 3 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

*Определителем* или *детерминантом* квадратной матрицы $A=\left(a_{11}\right)$ первого порядка называется число, определяемое так: $|A| = a_{11}$.

*Определителем* или *детерминантом* квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка называется число, определяемое так: $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Произведения, входящие в равенство, и знаки, с которыми берутся эти произведения, определяются по следующему правилу:



,

где точки означают элементы матрицы $A$.

Определитель матрицы $A$ обозначают и так $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \qquad (3.1)$$

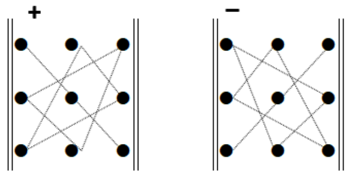
*Определителем* или *детерминантом* квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка называется число, определяемое так:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} . \qquad (3.2)$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически записывается так:



*Пример 3.1.* Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 2 + 2\cdot 5\cdot 4 + 3\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 4 - 1\cdot 5\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 2 = -5\ .$$

Пусть $n$ – натуральное число, и $n > 1$, и пусть определители квадратных матриц порядков 1, 2, …, $n-1$ уже введены. *Определителем*, или *детерминантом*, квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

порядка $n$ называется число, обозначаемое символом $|A|$ и определяемое так:

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \quad (3.3)$$

где $M_{1j}$ ($j$ = 1, 2, …, $n$) – определитель квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(j-1)} & a_{2(j+1)} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

($n$ – 1)-го порядка, полученной из матрицы $A$ путем вычеркивания 1-й строки и $j$-го столбца.

*Минором* элемента $a_{ij}$ матрицы $A$ называется определитель матрицы ($n$ – 1)-го порядка, полученной из матрицы $A$ путем вычеркивания $i$-й строки и $j$-го столбца; минор элемента $a_{ij}$ обозначается через $M_{ij}$.

*Алгебраическим дополнением* элемента $a_{ij}$ в матрице $A$ (в определителе $|A|$) называется минор $M_{ij}$, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$; алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ обозначается через $A_{ij}$.

*Пример 3.2*. Вычислить определитель 4-го порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(10 + 0 + 8 - 10 - 0 - 16) - 2(0 + 6 + 0 - 5 - 0 - 12) + 3(0 + 6 + 0 - 4 - 0 - 6) -$$
$$- 4(0 + 12 + 5 - 8 - 0 - 6) = -8 + 22 - 12 - 12 = -10.$$

Квадратная матрица $A$ $n$-го порядка называется *невырожденной*, если определитель $|A| \neq 0$. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

*Присоединенной или союзной к матрице А*, называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

где $A_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ данной матрицы (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

**Свойства определителей**

1. Определитель не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.

2. При перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет лишь знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Множитель, общий для элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

5. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

7. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

**Обратная матрица**

Матрица $A^{-1}$ называется *обратной* матрице $A$, если выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где $E$ – единичная матрица того же порядка, что и матрица $A$. Матрица $A^{-1}$ имеет те же размеры, что и матрица $A$.

Если квадратная матрица $A$ имеет обратную матрицу, то $A$ – невырожденная матрица. Если $A$ – невырожденная матрица, то $A$ обладает обратной матрицей, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{*}. \qquad (3.5)$$

*Пример 3.3.* Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем вначале $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то матрица $A$ имеет обратную матрицу.

Найдем теперь алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = 1;\ A_{21} = -3;\ A_{12} = 1;\ A_{22} = 2.$$

Тогда по формуле (3.5) имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,6 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

**Ранг матрицы**

Выделим в матрице $A_{m\times n}$ $k$ строк и $k$ столбцов, где $k \le \min(m, n)$, $m$ – количества строк, $n$ – количество столбцов матрицы $A$. Определитель порядка $k$, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных $k$ строк и $k$ столбцов, называется *минором*, или определителем $k$-го порядка, порожденным матрицей $A$.

*Рангом матрицы A* называется наибольший порядок минора, отличный от нуля. Обозначается rang($A$).

Ранг матрицы не изменится, если: 1) поменять местами любые два параллельных ряда; 2) умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель отличный от нуля; 3) прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого другого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования 1–3 называются *элементарными*. Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Обозначается $A \sim B$. *Базисным* минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Для того чтобы найти ранг матрицы, ее приводят к ступенчатому виду, в котором под крайними элементами строки и левее них стоят нули. Крайними называют самые левые ненулевые элементы строк. Тогда ранг матрицы будет равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы, а минор, составленный из столбцов с крайними элементами строк, будет базисным.

*Пример 3.4*. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поменяем первую и вторую строки местами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{l}\text{умножим все элементы} \\ \text{первой строки на } (-2) \text{ и} \\ \text{сложим с элементами} \\ \text{второй строки;}\end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l}\text{сложим вторую} \\ \text{и третью строки}\end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу с тремя ненулевыми строками. Следовательно, $\operatorname{rang}(A) = 3$ и минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ будет базисным.

**Тест 3**

| | |
|---|---|
| **А1.** Найти $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. | 1) –12; 2) –11;<br>3) 18; 4) 45; 5) 12. |
| **А2.** Найти $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$. | 1) –1; 2) $\cos 2x$; 3) 1;<br>4) $-\cos 2x$; 5) 2. |
| **А3.** Даны матрицы<br>$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.<br>Найти элемент произведения $AB$, стоящий во второй строке и первом столбце. | 1) –1; 2) 5; 3) 11; 4) 8; 5) 9. |
| **А4.** Найти алгебраическое дополнение $A_{22}$ матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. | 1) –2; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) 5. |
| **А5.** Найти $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. | 1) 24; 2) –24;<br>3) $\begin{pmatrix} -8 & -16 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$. |
| **В1.** Найти $\begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$. | |
| **В2.** Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$. | |
| **В3.** Найти произведение сорока шести на сумму элементов главной диагонали матрицы $A^{-1}$, если $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$. | |

| |
|---|
| **B4.** Найти $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. |
| **B5.** Решить неравенство $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$. В ответе указать наименьшее целое решение. |

## 4 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Системой* $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными (переменными) $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

где $a_{ij}$ ($I$ = 1, 2, …, $m$; $j$ = 1, 2, …, $n$) и $b_i$ ($i$ = 1, 2, …, $m$) числа, называемые соответственно *коэффициентами и свободными членами этой системы*.

Коэффициенты обозначаются одной буквой с двумя индексами внизу, причем первый индекс указывает номер уравнения, в котором содержится данный коэффициент, а второй – номер соответствующей неизвестной.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов системы (4.1), называется *матрицей системы*.

Свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и неизвестные этой системы образуют столбцы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *столбцом свободных членов* и *столбцом неизвестных*.

Исходя из определения произведения матриц

$$AX = B. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) называется *матричной записью* системы линейных уравнений.

Матрица $A$ системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*. Эту матрицу обозначают через $\overline{A}$. Итак,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Последовательность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *решением системы*, если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство при замене неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Если система линейных уравнений имеет по меньшей мере одно решение, то она называется *совместной*. В противном случае – *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот, или если обе они несовместны.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы (они идентичны элементарным преобразованиям матрицы) при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

**Теорема Кронекера – Капелли**

Система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы ($\operatorname{rang} A$) равен рангу расширенной матрицы ($\operatorname{rang} \bar{A}$). Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = n$, то система имеет единственное решение. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} < n$, то система имеет бесконечное множество различных решений.

**Решение невырожденных систем линейных уравнений**

2. *Матричный способ***.** Пусть дана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{nn}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (4.3) в матричной форме запишется так:

$$AX = B. \tag{4.4}$$

Если $|A| \neq 0$ систему называют *невырожденной*.

В случае, когда $|A| \neq 0$ и, следовательно, существует $A^{-1}$,

$$X = A^{-1}B, \tag{4.5}$$

т. е. для того, чтобы решить систему, необходимо найти обратную матрицу матрицы системы. На этом основан так называемый *матричный способ решения* систем линейных уравнений.

*Пример 4.1*. Решить матричным способом систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 3. \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0.$$

Система невырожденная. Матрица системы имеет обратную. Найдем ее. Используя формулу (3.5), имеем

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (4.5) получим

$$X = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

2. *По формулам Крамера*. Если для системы (4.3) $|A| \neq 0$, то верны формулы Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (4.6)$$

где $\Delta = |A|$, $\Delta_i$ – определитель $n$-го порядка, полученный заменой в определителе $|A|$ $i$-го столбца столбцом свободных членов.

*Пример 4.2*. Решить систему уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Вначале составим матрицу $A$ и найдем $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 5 + 3 + 3 = -17 .$$

Так как $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Составим определители $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ и найдем их:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -34 ,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 ,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -17.$$

На основании формул (4.6) имеем $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

**Метод последовательных исключений Жордана – Гаусса.**

Если основная матрица $A$ системы (4.1) имеет ранг $r = \mathrm{rang}(A) \le n$, то расширенная матрица $\overline{A}$ этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{a}_{12} & \ldots & \bar{a}_{1r} & \bar{a}_{1(r+1)} & \ldots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \bar{a}_{2r} & \bar{a}_{2(r+1)} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \bar{a}_{r(r+1)} & \ldots & \bar{a}_{rn} & \bar{b}_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{b}_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{b}_m \end{pmatrix}. \qquad (4.7)$$

Матрица (4.7) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1r}x_r + \bar{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad x_2 + \ldots + \bar{a}_{2r}x_r + \bar{a}_{2(r+1)}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_r + \bar{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m, \end{cases} \qquad (4.8)$$

которая эквивалентна системе (4.1). Если хотя бы одно из чисел $\bar{b}_{r+1}, \ldots, \bar{b}_m$ отлично от нуля, то система (4.8) и, следовательно, исходная система (4.1) несовместны. Если же $\bar{b}_{r+1} = \ldots = \bar{b}_m = 0$, то система (4.1) совместна, а из системы (4.8) можно последовательно выразить в явном виде неизвестные $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ через неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. решить систему (4.1).

*Пример 4.3*. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Над расширенной матрицей системы произведем элементарные преобразования над строками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Видно, что rang $(A)$ = rang $\left(\bar{A}\right)$ = 2. По теореме Кронекера – Капелли система совместна и имеет множество решений. Запишем эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad -2x_4 = -2. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_4 = 1$. Из первого уравнения $x_3 = -\ x_1 + 2x_2$. Тогда при $C_1, C_2 \in R$ получим общее решение $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = -\ C_1 + 2C_2$, $x_4 = 1$.

Положив, например, $x_1 = x_2 = 0$, получаем одно из частных решений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

## Тест 4

| | |
|---|---|
| **А1.** Указать системы линейных уравнений с двумя неизвестными.<br>$a)\begin{cases} 2x+3y^2=6, \\ 3x-4y=0. \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ 3x_2-5x_3=4. \end{cases}$<br>$c)\begin{cases} x-3y=-5, \\ 2x+8y=1, \\ 3x-8y=2. \end{cases}$ $d)\begin{cases} 2x_1-7x_2=7, \\ 3x_1-4x_2+3x_3^2=0. \end{cases}$ | 1) $b$;<br>2) $a$ и $d$;<br>3) $a$ и $c$;<br>4) $b$ и $d$;<br>5) $c$. |
| **А2.** Матрица системы линейных уравнений<br>$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 3x_1-4x_2=2 \end{cases}$<br>имеет вид: | 1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;<br>2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;<br>3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$;<br>4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. |

<table>
<tr>
<td>А3. Найти решение системы уравнений<br>$\begin{cases} 2x-5y=-1, \\ 5x+2y=12. \end{cases}$</td>
<td>1) (–2; 1); 2) (–1; 2);<br>3) (1; 2); 4) (2; 1);<br>5) (1; 1).</td>
</tr>
<tr>
<td>А4. Исследовать систему<br>$\begin{cases} x_1-3x_2=4, \\ 4x_1-12x_2=16. \end{cases}$</td>
<td>1) не совместна; 2) совместна и имеет единственное решение; 3) совместна и имеет бесконечно много решений.</td>
</tr>
<tr>
<td>А5. Исследовать систему<br>$\begin{cases} 2x_1+6x_2=8, \\ x_1+3x_2=4, \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$</td>
<td>1) не совместна; 2) совместна и имеет единственное решение; 3) совместна и имеет бесконечно много решений.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">В1. Решить систему. В ответе указать сумму $x_1 + x_2 + x_3$.<br>$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=7, \\ 3x_1+3x_2-2x_3=-5, \\ 2x_1-9x_2+5x_3=12. \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">В2. Решить систему. В ответе указать сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.<br>$\begin{cases} 2x_1-2x_2+4x_3-x_4=-9, \\ x_2+7x_3-2x_4=-7, \\ 3x_1-x_3+2x_4=13, \\ x_1+x_2-8x_3=4. \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">В3. Найти ранг матрицы системы:<br>$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-5x_4=3, \\ 2x_2-5x_3-2x_4=0, \\ x_1+5x_3+2x_4=16. \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

**B4.** Решить систему матричным методом. В ответе указать сумму элементов главной диагонали матрицы $|A|\cdot A^{-1}$ ($|A|$ – определитель матрицы системы, $A^{-1}$ – обратная матрица матрицы системы), умноженную на $x_1 + x_2 + x_3$.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - 9x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$$

**B5.** Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 9x_2 - 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = -1. \end{cases}$$

В ответе указать $x_1\cdot\Delta_1 + x_2\cdot\Delta_2 + x_3\cdot\Delta_3$, где $(x_1, x_2, x_3)$ – решение системы, а $\Delta_i$ – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой $i$-го столбца столбцом свободных членов.

## 5 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

*Вектором* называется направленный отрезок прямой. Направленный отрезок, начало которого совпадает с концом, называется *нулевым* вектором. Вектор, началом которого является точка $A$, а концом точка $B$, обозначают: $\overrightarrow{AB}$. На рисунке 5.1 вектор изображается стрелкой, идущей от начала к концу.

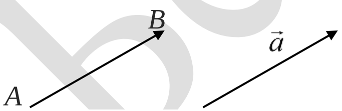



Рисунок 5.1

Вектор обозначается и одной буквой со стрелкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Нулевой вектор обозначают $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$.

*Длиной*, или *модулем*, ненулевого вектора называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$, а вектора $\vec{a}$ – через $|\vec{a}|$.

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если существует такая прямая, которой они параллельны.

Векторы называются *компланарными*, если существует такая плоскость, которой они параллельны.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* $\vec{a} = \vec{b}$, если их длины равны, они коллинеарны и одинаково направлены. Из любой точки можно провести вектор (притом единственный), равный данному вектору.

**Линейные операции над векторами**

Если даны два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $A$ – произвольная, но фиксированная точка, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, то вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overrightarrow{AB}$, а конец – с концом вектора $\overrightarrow{BC}$ называют *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначают $\vec{a} + \vec{b}$ т. е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Указанный способ построения вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ называется *правилом замыкающего вектора* (рисунок 5.2). Наряду с этим правилом существует и другое, называемое *правилом параллелограмма*: фиксируя точку *O*, строят такие векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$. Тогда *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет вектор $\overrightarrow{OC}$, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рисунок 5.3).

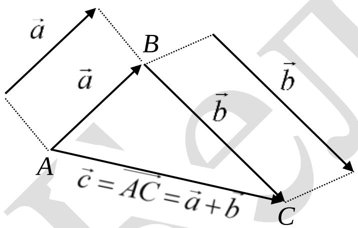



Рисунок 5.2

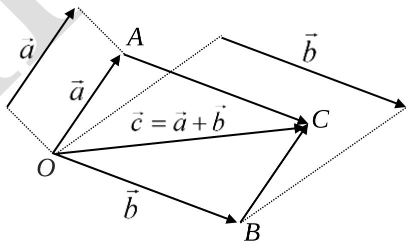



Рисунок 5.3

*Произведением* вектора $\vec{a} \neq 0$ на действительное число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$; 2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$; 3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

**Проекция вектора на ось**

Прямую, на которой указано направление, называют *осью*.

Возьмем ось $Ox$ и вектор $\overrightarrow{AB}$. Опустим из точек $A$ и $B$ перпендикуляры на $Ox$ и обозначим их $C$ и $D$.

*Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на ось $Ox$ называется длина отрезка $CD$ этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, проведенных из начальной и конечной точек вектора $\overrightarrow{AB}$, взятая со знаком плюс, если направление отрезка $CD$ совпадает с направлением оси проекции, и со знаком минус, если эти направления противоположны.

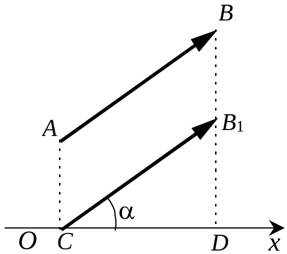



Рисунок 5.4

Обозначают $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB}$ (рисунок 5.4). Углом между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью $Ox$ называется угол $\alpha$ $(0 \le \alpha \le \pi)$, на который нужно повернуть кратчайшим образом ось $Ox$ около точки $C$ до совмещения ее с вектором $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AB}$. Следовательно, $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\alpha$.

**Координаты вектора. Базис**

Координатами вектора $\vec{a}$ называют его проекции на оси декартовых координат $Ox$, $Oy$, $Oz$. Их обозначают буквами $x$, $y$, $z$. Запись $\vec{a} = (x; y; z)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x$, $y$, $z$. Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Модуль вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ равен

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (5.1)$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями координат соответственно равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Тогда

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (5.2)$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют *направляющими косинусами вектора*.

Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (5.3)$$

*Пример 5.1.* Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3; 4; 5)$, $B(2; –2; 1)$.

По формуле (5.3) найдем координаты $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2–3; –2–4; 1–5),\ \overrightarrow{AB} = (–1; –6; –4).$$

Используя (5.1), имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{53}.$$

Тогда по (5.2)

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{53}};\quad \cos\beta = -\frac{6}{\sqrt{53}};\quad \cos\gamma = -\frac{4}{\sqrt{53}}.$$

Если два вектора заданы своими координатами $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, то линейные операции над ними сводятся к соответствующим линейным операциям над их координатами, т. е.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b),$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_a; \lambda y_a; \lambda z_a),\quad \lambda \in R.$$

*Условие коллинеарности векторов.* Два ненулевых вектора $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x_a}{x_b} = \lambda,\ \frac{y_a}{y_b} = \lambda,\ \frac{z_a}{z_b} = \lambda \text{ или } \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}. \qquad (5.4)$$

*Линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ называется вектор $\vec{a}$, такой, что $\vec{a} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ где $\lambda_i$ – некоторые числа.

Если для системы векторов $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \vec{0}$ верно только в случае, когда все $\lambda_i = 0$, то ее называют *линейно независимой*. Если хотя бы одно из $\lambda_i$ отлично от нуля, то система векторов называется *линейно зависимой.* Любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в пространстве называются *базисом*. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор $\vec{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т. е. представить в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, где $x, y, z$ являются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

**Деление отрезка в данном отношении**

Координаты точки $M(x; y; z)$, которая делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda > 0$ (т. е. $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$), где $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (5.5)$$

Их называют *формулами деления отрезка в данном отношении*. Если $\lambda = 1$, т. е. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, то они примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В этом случае точка $M(x; y)$ является серединой отрезка $AB$. Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки $A$ и $M$ совпадают, если $\lambda < 0$, то точка $M$ лежит вне отрезка $AB$ – говорят, что точка $M$ делит отрезок $AB$ внешним образом. Заметим, $\lambda \neq -1$, т. к. в противном случае $\frac{AM}{MB} = -1$, (т. е. $AM + MB = 0$, и $AB = 0$).

**Скалярное произведение векторов**

*Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению модулей векторов-сомножителей на косинус угла между ними. Если один из векторов нулевой, то считают скалярное произведение равным нулю. Обозначают

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha. \qquad (5.6)$$

*Свойства скалярного произведения.*

1. Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию второго вектора на первый: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left(|\vec{b}|\cos\alpha\right)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ .

2. Скалярное произведение *коммутативно*, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

3. Для любого вектора $\vec{a}$ скалярный квадрат равен квадрату модуля $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ .

4. Скалярное умножение *ассоциативно* относительно скалярного множителя $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ .

5. Скалярное умножение *дистрибутивно* относительно сложения, т. е. для любых векторов $a$ , $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место равенство

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\ .$$

6. Если ненулевые векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$ .

Пусть $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_1;y_2;z_2)$ , тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\ . \qquad (5.7)$$

*Пример 5.2*. Найти и косинус угла между векторами $\vec{a}=(2;3;5)$ и $\vec{b}=(-2;1;4)$ .

Используя равенство (5.7), имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+3\cdot 1+5\cdot 4=-4+3+20=19.$$

Из (5.1) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38}$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$.

Тогда, применяя (5.5),

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{19}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{21}}=\frac{19}{\sqrt{798}}\approx 0{,}67.$$

**Векторное произведение векторов**

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ с общим началом $O$ называется *правоориентированной* или просто *правой*, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левоориентированной* или просто *левой*. Аналогично вводятся правая и левая системы координат.

*Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) имеет модуль, равный

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \tag{5.8}$$

где $\varphi$ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{c}$ направлен так, чтобы тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ была правой. Обозначают $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ или $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{c}$.

*Свойства векторного произведения*

1. Векторное умножение *антикоммутативно*, т. е. всегда

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

2. Векторное умножение *ассоциативно* относительно скалярного множителя, т. е. для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа $\lambda$ выполнены равенства

$$[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}];\quad [\vec{a},\lambda\vec{b}]=[\lambda\vec{a},\vec{b}].$$

3. Векторное умножение *дистрибутивно* относительно сложения, т. е. для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$.

4. Если $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

*Пример 5.3.* Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=(2;4;1)$ и $\vec{b}=(2;5;0)$.

Из равенства (5.8) следует

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}=-5i+2j+2k.$$

То есть $[\vec{a},\vec{b}]=(-5;2;2)$.

5. Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$S=\sqrt{\left(y_1z_2-z_1y_2\right)^2+\left(x_1z_2-z_1x_2\right)^2+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)^2}\,. \qquad (5.10)$$

6. Необходимым и достаточным условием коллинеарности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их векторного произведения.

7. Пусть некоторое твердое тело неподвижно закреплено в точке $A$, а в точке $B$ этого тела приложена сила $\vec{F}$ (рисунок 5.5). В таком случае возникает вращающий момент, численно равный $|\overrightarrow{AB}||\vec{F}|\sin\varphi$ – площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{F}$. В механике его принято называть *моментом силы* и обозначать вектором $\vec{M}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{F}\right]$.

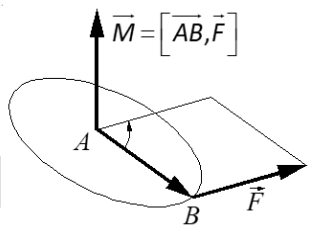


Рисунок 5.5

**Смешанное произведение векторов**

*Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое получается от умножения векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ скалярно на вектор $\vec{c}$. Обозначается $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$, или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

*Свойства смешанного произведения.*

1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

2. Смешанное произведение некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на сомножителях. Оно положительно, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ правая, и отрицательно, если тройка векторов левая.

3. Если в прямоугольной системе координат векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (5.11)$$

*Пример 5.4*. Определить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}=(7;6;1)$, $\vec{b}=(4;0;3)$, $\vec{c}=(3;6;4)$.

Объем треугольной призмы равен одной второй объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Учитывая свойства 2, 3 и формулу (5.11), имеем

$$V=\frac{1}{2}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}7 & 6 & 1\\ 4 & 0 & 3\\ 3 & 6 & 4\end{vmatrix}=72 \text{ (куб. ед.)}$$

4. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из координат этих векторов.

5. Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно менять местами, т. е. $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$.

6. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его величины. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, т. е. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

**Тест 5**

| | |
|---|---|
| **А1.** Найти длину вектора $\vec{a}=(-2;3;1)$. | 1) $\sqrt{14}$; 2) 6; 3) 2;<br>4) $2\sqrt{3}$; 5) 1. |
| **А2.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(1;3;4)$ и $\vec{b}=(0;3;-4)$. | 1) 10; 2) –7; 3) 7;<br>4) 14; 5) 0. |
| **А3.** Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;3;2)$, $\vec{b}=(0;2;1)$. | 1) (–1; –1; 2);<br>2) (1; 1; –2);<br>3) (–1; 0; 2);<br>4) (1; –1; 2);<br>5) (–1; –1; –2). |
| **А4.** Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{a}=(1;3;3)$, $\vec{b}=(0;-2;1)$, $\vec{c}=(5;2;1)$. | 1) 3; 2) 2; 3) 41;<br>4) –41; 5) 42. |

| | |
|---|---|
| **А5.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(0;-1;1)$ и $\vec{b}=(1;1;1)$. | 1) –2; 2) 2; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{5}$; 5) 5. |
| **В1.** Даны векторы $\vec{a}=-5\vec{m}-6\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+7\vec{n}$, где $\|\vec{m}\|=2$, $\|\vec{n}\|=7$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 180°. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$. | |
| **В2.** Найти скалярное произведение $(3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$, если $A(1;\,2;\,3)$, $B(-2;\,3;\,1)$, $C(5;\,-2;\,6)$. | |
| **В3.** Векторы $\vec{a}=(9;5;3)$, $\vec{b}=(-3;2;1)$, $\vec{c}=(4;-7;4)$ образуют базис. Найти сумму координат вектора $\vec{d}=(-10;-13;8)$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. | |
| **В4.** Найти координаты точки *M*, делящей отрезок *AB* в отношении 2:3, если $A(1;\,2;\,3)$, $B(-2;\,3;\,1)$. В ответе указать сумму координат точки *M*, умноженную на 10. | |
| **В5.** Найти сумму координат векторного произведения $2\vec{a}\times(-3\vec{b})$, если $\vec{a}=(5;0;-4)$, $\vec{b}=(4;4;9)$. | |

## 6 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Аналитическая геометрия* – раздел математики, в котором геометрические фигуры изучаются алгебраическими методами. Используя метод координат, геометрическим фигурам, некоторым образом сопоставляют алгебраические уравнения. Аналитическая геометрия решает две *основные задачи*: 1) получить уравнение (или систему уравнений) данной геометрической фигуры и с его помощью исследовать ее свойства; 2) данному уравнению сопоставить геометрическую фигуру и с его помощью изучить ее свойства.

Уравнение $F(x;\,y)=0$ с двумя переменными $x$ и $y$ называется *уравнением плоской линии G*, если ему удовлетворяют координаты $x$, $y$ любой точки $G$ и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих $G$. В аналитической геометрии функция $F(x;\,y)$ представляет собой многочлен.

*Пример 6.1*. Принадлежат ли точки $A(2; 2)$ и $B(\sqrt{2};\sqrt{2})$ линии $x^2 + y^2 = 4$?

Подставим координаты точки $A$ в уравнение линии, получим $2^2 + 2^2 \neq 4$. Следовательно, эта точка не лежит на линии. Координаты точки $B$ удовлетворяют уравнению линии: $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$, т. е. эта точка принадлежит линии.

Система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

называется *параметрическими уравнениями линии* $G$, если для любой ее точки $M_0\,(x_0; y_0)$ найдется такое значение $t_0$, что ее координаты определятся из этой системы $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, а для точек, не принадлежащих ей, такого значения $t$ не существует. Число $t$ называют параметром.

Линию на плоскости можно задать векторным уравнением $r = r\,(t)$, где $t$ – скалярный переменный параметр. Каждому значению $t_0$ соответствует определенный вектор $r_0 = r\,(t_0)$ плоскости. При изменении параметра $t$ конец вектора опишет некоторую линию.

Векторное уравнение и параметрические уравнения линии имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются *уравнениями движения*, а линия – *траекторией точки*, параметр $t$ при этом есть время.

**Прямая на плоскости**

Рассмотрим в прямоугольной системе координат уравнение

$$Ax + By + C = 0, \; (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{6.2}$$

Любая прямая на плоскости может быть задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением вида (6.2). Любое уравнение вида (6.2) определяет на плоскости прямую.

Уравнение (6.2) называется *общим уравнением прямой на плоскости*. Его коэффициенты $A$ и $B$ имеют определенный геометрический смысл, а именно они являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного прямой, которая определяется этим уравнением. Этот вектор называется *вектором нормали*, или *нормальным вектором*, к данной прямой (рисунок 6.1). Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ при различных значениях коэффициентов $A$ и $B$ задает все прямые, проходящие через точку $M_0(x_0; y_0)$. Его называют *уравнением пучка прямых* с центром в точке $M_0$.

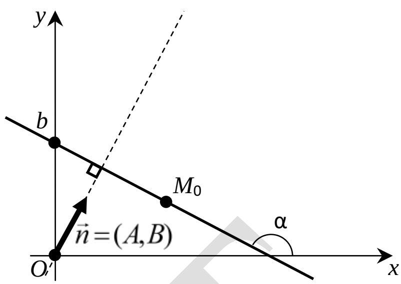


Рисунок 6.1

При $B \neq 0$ из уравнения (6.2) получим $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. Обозначим $k=-\dfrac{A}{B}, b=-\dfrac{C}{B}$. Тогда уравнение (6.2) примет вид

$$y = kx + b. \qquad (6.3)$$

Коэффициент $k$ в уравнении (6.3) равен тангенсу угла наклона прямой к оси $Ox$: $k=\operatorname{tg}\alpha$. Он называется *угловым коэффициентом прямой*. Коэффициент $b$ называется *начальной ординатой прямой*. Уравнение (6.3) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m} \qquad (6.4)$$

называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*. Оно определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}=(n; m)$, который называется *направляющим вектором прямой*.

Если заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, принадлежащие прямой, то ее уравнение может быть записано в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (6.5)$$

За направляющий вектор здесь можно принять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$. Уравнение (6.5) называется *уравнением прямой по двум заданным точкам*.

Приравняем каждое из отношений (6.4) к параметру $t$: $\dfrac{x-x_0}{n}=t,\ \dfrac{y-y_0}{m}=t$. Выразим $x$ и $y$:

$$\begin{cases} x = nt + x_0, \\ y = mt + y_0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Уравнения системы (6.6) называются *параметрическим уравнениями прямой на плоскости*.

*Пример 6.2*. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(6;1)$ и $M_2(3;5)$.

Используя уравнение (6.5), имеем

$$\frac{x-6}{3-6} = \frac{y-1}{5-1},\ \frac{x-6}{-3} = \frac{y-1}{4},\ 4x-24=-3y+3,\ 4x+3y-27=0.$$

**Взаимное расположение прямых на плоскости**

Пусть две прямые $L_1$ и $L_2$ заданы уравнениями с угловым коэффициентом: $L_1$: $y = k_1 x + b_1$; $L_2$: $y = k_2 x + b_2$.

*Условие параллельности*:

$$L_1 \parallel L_1 \Leftrightarrow k_1 = k_2. \qquad (6.7)$$

Угол между прямыми – это угол φ поворота прямой $L_1$ против часовой стрелки до совмещения с прямой $L_2$, находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (6.8)$$

*Пример 6.3*. Найти угол между прямыми $y = 2x + 5$ и $y = -4x - 2$.

Угловые коэффициенты прямых: $k_1 = 2$, $k_2 = -4$. Используя формулу (6.8), имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4-2}{1+2\cdot(-4)} = \frac{6}{7},\ \Rightarrow\ \varphi \approx 40{,}6^\circ.$$

*Условие перпендикулярности*:

$$L_1 \perp L_1 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1. \qquad (6.9)$$

*Расстояние d от точки* $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $L$: $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (6.10)$$

*Пример 6.4*. Найти расстояние от точки $M_0(2; -5)$ до прямой $y = 3x - 4$.

Приведем уравнение $y = 3x - 4$ к общему виду, получим $3x - y - 4 = 0$, т. е. $A = 3$, $B = -1$, $C = -4$. По формуле (6.10)

$$d=\frac{|3\cdot 2-1\cdot(-5)-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{10}}\approx 2,2.$$

**Плоскость**

Рассмотрим в декартовой прямоугольный системе координат $Oxyz$ общее уравнение первой степени с тремя переменными $x$, $y$ и $z$:

$$Ax+By+Cz+D=0,\ (A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad (6.11)$$

Любое уравнение вида (6.11) задает в пространстве плоскость. Любая плоскость в прямоугольной декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (6.11).

Уравнение (6.11) называется *общим уравнением плоскости*. Его коэффициенты $A$, $B$, $C$ трактуются геометрически как координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости. Этот вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ называется *вектором нормали*, или *нормальным вектором к данной плоскости* (рисунок 6.2).

Уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+B(y-y_0)\ =0$ при различных значениях коэффициентов $A$, $B$ и $C$ задает все прямые, проходящие через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$. Его называют *уравнением связки плоскостей с* центром в точке $M_0$.

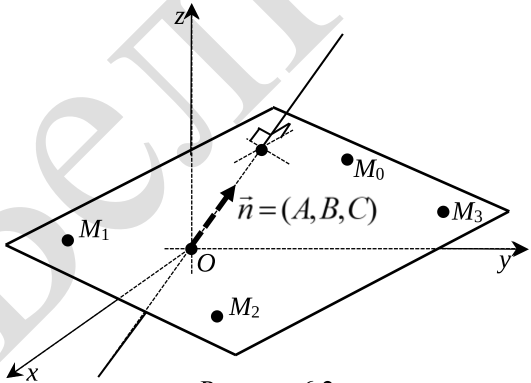



Рисунок 6.2

Три точки пространства, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $M_3(x_3;\,y_3;\,z_3)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.12)$$

**Основные задачи с плоскостью**

Пусть заданы две плоскости $P_1$ и $P_2$:

$$P_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

*Угол* φ *между этими плоскостями* находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6.13)$$

*Условие перпендикулярности двух плоскостей* –

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (6.14)$$

*Условие параллельности двух плоскостей* –

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.15)$$

*Расстояние* $d$ *от точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до плоскости* $Q$: $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6.16)$$

**Прямая в пространстве**

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой и вектор $\vec{s} = (m; n; p)$, параллельный этой прямой. Вектор $\vec{s}$ называется *направляющим вектором прямой*. Если $M(x; y; z)$ произвольная точка прямой и $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ – радиус-векторы точек $M_0$ и $M$ соответственно, то $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{s}$, поэтому $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, где $t$ – скалярный множитель, называемый *параметром* (рисунок 6.3). Следовательно,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \qquad (6.17)$$

Полученное уравнение называется *векторным уравнением прямой*.

Так как $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\vec{s} = (tm; tn; tp)$, то уравнение (6.17) можно записать в виде

$$xi + yj + zk = (x_0 + tm)i + (y_0 + tn)j + (z_0 + tp)k.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{6.18}$$

Они называются *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве.

Из уравнений (6.18), выражая параметр $t$, получим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{6.19}$$

Уравнения (6.19) называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, в качестве направляющего вектора $\vec{s}$ можно взять вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тогда из (6.19), поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, получим

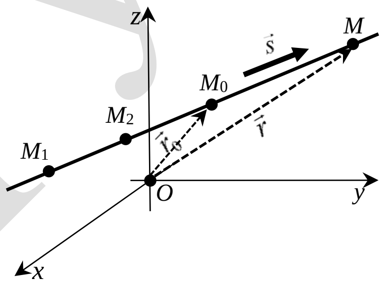



Рисунок 6.3

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6.20}$$

Уравнения (6.20) называются *уравнениями прямой, проходящей через две данные точки*.

### Основные задачи, связанные с прямой и плоскостью

Пусть прямые заданы уравнениями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Под углом между этими прямыми понимают угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Поэтому из определения скалярного произведения (5.6) получаем $\cos\varphi = \dfrac{s_1 \cdot \vec{s}_2}{|\,\vec{s}_1\,| \cdot |\,\vec{s}_2\,|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}\,. \qquad (6.21)$$

*Условие перпендикулярности двух прямых –*

$$L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0\,. \qquad (6.22)$$

*Условие параллельности двух прямых –*

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (6.23)$$

*Пример 6.5*. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+7}{-2}\,.$$

Направляющие векторы прямых: $\vec{s}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{s}_2 = (1; -4; -2)$.

Так как $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot (-2) = 0$, то φ = 90°.

Пусть плоскость и прямая заданы соответственно уравнениями

$$P\colon\; Ax + By + Cz + D = 0, \;\; L\colon\; \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\,.$$

*Угол* φ *между прямой и плоскостью* находится по формуле

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\,. \qquad (6.24)$$

*Условие перпендикулярности прямой и плоскости –*

$$L \perp P \;\Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}\,. \qquad (6.25)$$

*Условие параллельности прямой и плоскости –*

$$L \parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0. \qquad (6.26)$$

**Эллипс**

*Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, бóльшая, чем расстояние между фокусами.

В декартовой прямоугольной системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6.27}$$

где фокусы расположены на оси абсцисс симметрично началу координат, расстояние между фокусами равно $2c$, сумма расстояний от фокусов до произвольной точки эллипса равно $2a$ и $b^2 = a^2 - c^2$ (рисунок 6.4).

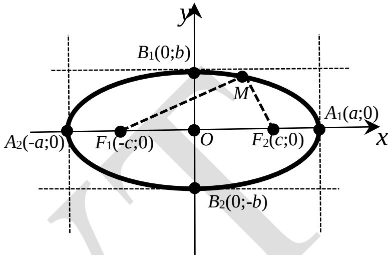


Рисунок 6.4

Уравнение (6.27) называется *каноническим уравнением эллипса*.

**Гипербола**

*Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть фокусы через $F_1$ и $F_2$ расположены на оси $Ox$ симметрично началу координат. Обозначим расстояние между ними через $2c$. Модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов обозначим через $2a$ (рисунок 6.5). Тогда координаты любой точки эллипса $M\,(x;\,y)$ удовлетворяют уравнению

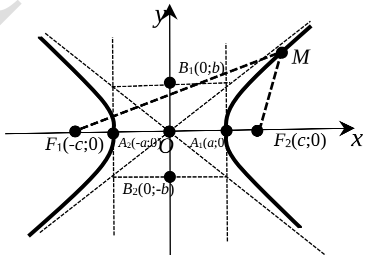


Рисунок 6.5

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6.28}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Уравнение (6.28) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

**Парабола**

*Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой* (рисунок 6.6). Расстояние от фокуса $F$ до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через $p$ ($p > 0$).

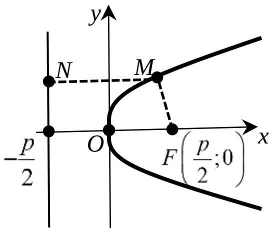


Рисунок 6.6

*Каноническим уравнением параболы* называется уравнение вида

$$y^2 = 2px. \tag{6.29}$$

**Цилиндрические поверхности**

Поверхность, образованная движением прямой $L$, которая перемещается в пространстве, сохраняя постоянное направление и пересекая каждый раз некоторую кривую $K$, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*. При этом кривая $K$ называется *направляющей цилиндра*, а прямая $L$ – его *образующей* (рисунок 6.7).

Пусть в плоскости $Oxy$ лежит некоторая линия $K$, уравнение которой

$$F(x; y) = 0. \tag{6.30}$$

Уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси $Oz$, имеет вид (6.30), т. е. не содержит координаты $z$. $F(x; z) = 0$ есть уравнение цилиндра с образующими, параллельными оси $Oy$, а $F(y; z) = 0$ – с образующими, параллельными оси $Ox$. Название цилиндра определяется названием направляющей. Если направляющей служит эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в плоскости $Oxy$, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *эллиптическим цилиндром*.

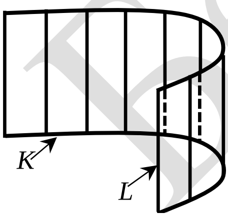


Рисунок 6.7

**Поверхности вращения**

Поверхность, которая образована вращением некоторой плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, называется *поверхностью вращения*.

Если некоторая кривая

$$L:\ \begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0, \end{cases} \tag{6.31}$$

лежит в плоскости $Oyz$, то уравнение

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0\,. \tag{6.32}$$

есть *уравнение поверхности вращения*.

Уравнение (6.32) получается из (6.31) заменой $y$ на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, координата $z$ сохраняется (рисунок 6.8).

Если кривая (6.31) вращается вокруг оси $Oy$, то уравнение поверхности вращения имеет вид $F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$;

если кривая лежит в плоскости $Oxy$ ($z = 0$) и ее уравнение $F(x;\,y) = 0$, то уравнение поверхности вращения, образованной вращением кривой вокруг оси $Ox$, есть $F(x;\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

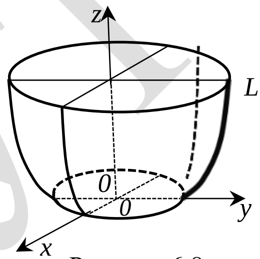


Рисунок 6.8

Например, вращая прямую $y = z$ вокруг оси $Oz$, получим поверхность вращения (ее уравнение $\pm\sqrt{x^2+y^2}=z$ или $x^2 + y^2 = z^2$). Она называется конусом второго порядка.

**Эллипсоид**

Поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называется *эллипсоидом*. Это замкнутая овальная поверхность (рисунок 6.9).

**Однополосный гиперболоид**

Поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называется *однополостным гиперболоидом*. Имеет форму бесконечной расширяющейся трубки (рисунок 6.10).

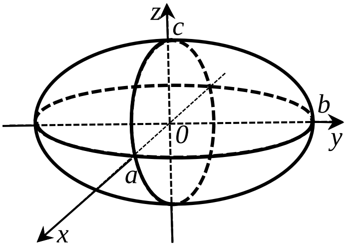



Рисунок 6.9

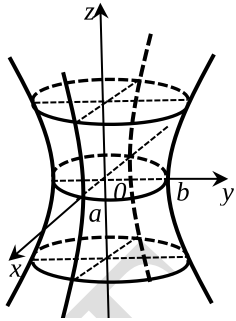



Рисунок 6.10

**Двуполостный гиперболоид**

Поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

называется *двуполостным гиперболоидом*. Эта поверхность, состоит из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш (рисунок 6.11).

**Эллиптический параболоид**

Поверхность, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ \text{где } p>0,\ q>0,$$

называется *эллиптическим параболоидом*. Эта поверхность имеет вид выпуклой, бесконечно расширяющейся чаши (рисунок 6.12).

**Гиперболический параболоид**

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,$$

называется *гиперболическим параболоидом*. Она имеет вид седла (рисунок 6.13).

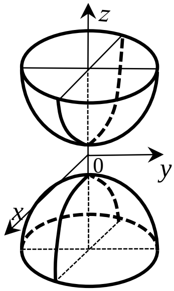



Рисунок 6.11

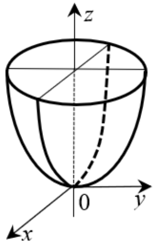



Рисунок 6.12

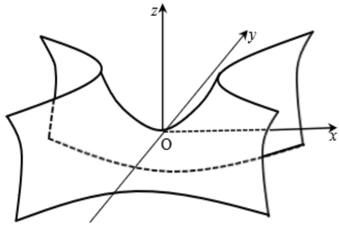



Рисунок 6.13

**Тест 6.1**

| | |
|---|---|
| **А1**. Найти прямую, перпендикулярную прямой $5x-7y+8=0$. | 1) $5x+4y+5=0$;<br>2) $3x+5y-7=0$;<br>3) $7x+5y-5=0$;<br>4) $8x-5y+2=0$. |
| **А2**. В полярной системе координат уравнение $\rho=5$ задает: | 1) прямую; 2) окружность; 3) эллипс;<br>4) точку; 5) параболу. |
| **А3**. Уравнение $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ на плоскости задает: | 1) параболу; 2) гиперболу; 3) эллипс; 4) прямую; 5) пустое множество точек. |
| **А4**. Найти параметр параболы $(y-2)^2=12(x+3)$. | 1) 6; 2) –2;<br>3) 3; 4) 2; 5) –6. |
| **А5**. Найти координаты правого фокуса эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. | 1) (4; 0); 2) (16; 0);<br>3) (5; 0); 4) (3; 0);<br>5) (25; 0). |
| **В1**. Найти сумму длин отрезков, отсекаемых прямой $2x-5y+10=0$ на осях координат. | |
| **В2**. Найти расстояние от точки $M$ (2; 3) до прямой $3x-4y+1=0$. | |
| **В3**. Найти острый угол (в градусах) между прямыми $2x-y-5=0$ и $x-y+3=0$. Ответ округлить до целого. | |

| |
|---|
| **B4**. Найти площадь треугольника, ограниченного прямыми $y = 4$, $y = 2x - 4$, $y = -x + 5$. |
| **B5**. Показать, что уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет эллипс. В ответе указать модуль разности квадратов полуосей. |

**Тест 6.2**

| | |
|---|---|
| **A1**. Найти расстояние между двумя точками $A(2;\ 3;\ 1)$ и $B(-1;\ 5;\ -2)$. | 1) $\sqrt{14}$; 2) $\sqrt{22}$;<br>3) 2; 4) $\sqrt{8}$. |
| **A2**. Даны точки $A(2;\ 4;\ -2)$ и $B(-2;\ 4;\ 2)$. На прямой $AB$ найти точку $C$, делящую отрезок $AB$ в отношении $\lambda = 3$. | 1) $(-1;\ 4;\ 1)$; 2) $(-2;\ 8;\ 2)$;<br>3) $\left(0;\ \frac{8}{3};\ 0\right)$; 4) $(1;\ 4;\ -1)$. |
| **A3**. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. | 1) $2x + 3y + 5z - 9 = 0$;<br>2) $2x + 3y + 5z - 27 = 0$;<br>3) $4x + 3y + 2z - 27 = 0$;<br>4) $4x + 3y + 2z - 9 = 0$. |
| **A4**. Какой отрезок на оси $Ox$ отсекает плоскость $2x + 3y - 5z + 30 = 0$? | 1) 15; 2) –15;<br>3) 2; 4) –2. |
| **A5**. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$, $M_2(-1;\ 0;\ 4)$, $M_3(-2;\ -1;\ 1)$. | 1) $x - y + z - 2 = 0$;<br>2) $x + y + z - 2 = 0$;<br>3) $x + y - 3 = 0$;<br>4) $x - y + 1 = 0$. |
| **B1**. Дан тетраэдр с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;-3;5)$, $C(6;2;5)$, $D(3;-2;-5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины $D$ на грань $ABC$. | |
| **B2**. Найти острый угол (в градусах) между двумя прямыми $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-1}$ и $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z}{1}$. | |
| **B3**. Найти острый угол (в градусах) между прямой $x = 5 + t$, $y = -3 + t$, $z = 4 - 2t$ и плоскостью $4x - 2y - 2z + 7 = 0$. | |

| |
|---|
| **B4**. Найти величину острого угла (в градусах) между плоскостями $5x+4y-2z-3=0$ и $20x+16y-8z+5=0$. |
| **B5**. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;5)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{2}$, $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+7}{-2}$. В ответе записать сумму координат точки пересечения найденной прямой с плоскостью $x+y+z-4=0$. |

## 7 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Если каждому числу $x$ из множества $X$ поставлено в соответствие согласно некоторому правилу $f$ единственное число $y = f(x)$ из множества $Y$, то говорят, что на множестве $X$ задана *функция* со значениями из множества $Y$. При этом переменную $y$ называют *зависимой переменной*, а $x$ – *независимой*. Множество – $X$ называют *областью определения функции*, обозначают $D(f)$, а множество чисел $y = f(x)$ *называют множеством значений* функции и обозначают $E(f)$.

Функция называется *четной*, если: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля (т. е. для любого $x \in D(f)$следует, что $-x \in D(f)$); 2) для любого $x \in D(f)$справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Функция называется *нечетной,* если: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля; 2) для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси $Oy$, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется *периодической,* если существует такое число $T \neq 0$, что для любого $x \in D(f)$ справедливо $x - T \in D(f)$, $x + T \in D(f)$ и $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$. Число $T$ называют *периодом* функции $f(x)$.

Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда функция $z = g(f(x))$, $x \in D(f)$ называется *сложной.*

**Последовательность и ее предел**

*Числовой последовательностью* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, \ldots$ называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве $N$ натуральных чисел. Обозначается $\{x_n\}$. Число $x_1$ называется первым членом (элементом) последовательности, $x_2$ – вторым, ..., $x_n$ – *общим*, или *n-м, членом последовательности.*

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$. В противном случае последовательность называется неограниченной.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого $n$ выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \ge a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность. Все эти последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Число $a$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое натуральное число $N$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная $x_n$, пробегающая последовательность $x_1$, $x_2$, $x_3$, …) имеет предел, равный числу $a$ (или $x_n$ стремится к $a$). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к a.* Определение предела можно записать так:

$$(\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N : \forall\ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число $a$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой $\varepsilon$-окрестности точки $a$ найдется натуральное число $N$, что все значения $x_n$, для которых $n > N$, попадут в $\varepsilon$-окрестность точки $a$. Чем меньше $\varepsilon$, тем больше число $N$, но в любом случае внутри $\varepsilon$-окрестности точки $a$ находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число (рисунок 7.1).

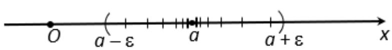


Рисунок 7.1

*Сходящаяся последовательность имеет только один предел.* Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся.* Признак существования предела последовательности (теорема

Вейерштрасса): всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

**Предел функции**

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, кроме, быть может, самой точки $x_0$. Следующие два определения эквивалентны.

*Определение* на «языке последовательностей», или *по Гейне*. Число $A$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n$, $n \in N$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к $x_0$ (т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$, сходится числу $A$ (т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

*Определение* на «языке ε-δ», или *по Коши*. Число $A$ называется *пределом функции в точке* $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0\ \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta\ (x \neq x_0)}_{\text{или } 0<|x-x_0|<\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции: для всех точек $x$, достаточно близких к точке $x_0$, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа $A$.

Число $A_1$ называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* в точке $x_0$, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется *предел функции справа*. Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются *односторонними* пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела и они равны, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ не существует.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(-\infty; \infty)$. Число $A$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Коротко это определение можно записать так:

$$(\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0 \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Если $x \to +\infty$, то пишут $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, если $x \to -\infty$, то $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Геометрический смысл этого определения таков: для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$, что при $x \in (-\infty; -M)$ или $x \in (M; +\infty)$ соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в $\varepsilon$-окрестность точки $A$, т. е. точки графика лежат в полосе шириной $2\varepsilon$, ограниченной прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{2 - x}$ есть бесконечно большая функция при $x \to 2$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; если лишь отрицательные значения, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $y = f(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется *бесконечно большой при* $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $N = N(M) > 0$, что при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, $y = 2^x$ есть бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $f(x) \to 0$. Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами, или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами $\alpha$, $\beta$ и т. д.

Примерами бесконечно малых функций служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, где $k \in Z$.

Если функция $f(x)$ имеем предел, равный $A$, то ее можно представить как сумму числа $A$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т. е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа $A$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, то число $A$ является пределом функции $f(x)$, т. е. если $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Пусть пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ существуют, тогда:

1) предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов: $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$. Это утверждение справедливо для алгебраической суммы любого конечного числа функций;

2) предел произведения двух функций равен произведению их пределов: $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

3) постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

4) предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$, в частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in N$;

5) предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} \quad (\lim_{x\to x_0}\varphi(x) \neq 0).$$

*Пример 7.1*. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Применить утверждение 5 о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя при $x \to 2$ равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* 0/0. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x - 2 \neq 0$ ($x \to 2$, но $x \neq 2$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

*Пример 7.2*. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Имеем неопределенность вида ∞/∞. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

**Замечательные пределы**

Предел вида

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

называется *первым замечательным пределом*. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

*Пример 7.3*. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$ .

Имеем неопределенность вида 0/0. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

Пределы вида

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ и } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

называются *вторым замечательным пределом*.

*Пример 7.4*. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$ .

Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\cdot e=e^{2}.$$

**Непрерывность функций**

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x_0$ и в некоторой окрестности этой точки.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0$, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции.*

Точка разрыва $x_0$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$ . При этом: если $A_1 = A_2$, то точка $x_0$ называется *точкой устранимого разрыва*; если $A_1 \ne A_2$, то точка $x_0$ называется *точкой конечного разрыва*. Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва $x_0$ называется *точкой разрыва второго рода* функции, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

*Пример 7.5*. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$, выяснить их тип. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 3$.

$$f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}=\begin{cases}1, x>3,\\ -1, x<3.\end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=-1$. Поэтому в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода. Скачок функции в этой точке равен 1 – (–1) = 2.

**Тест 7**

| | |
|---|---|
| **А1**. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3}{x^2+3x+4}$. | 1) 2; 2) 3; 3) 0; 4) 4; 5) ∞. |
| **А2.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{3x+4}$. | 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) 4; 5) ∞. |
| **А3.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-3)}{x-4x^2}$. | 1) 3; 2) –3; 3) 0; 4) 4; 5) ∞. |
| **А4.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$. | 1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3; 5) 4. |
| **А5.** Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$. | 1) 1; 2) 2; 3) –1/3; 4) –3; 5) ∞. |
| **В1.** Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9(x^3-8)}{x^2+5x-14}$. | |
| **В2**. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{12(\sqrt{x+8}-3)}{x-1}$. | |
| **В3.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13}{e^2}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$. | |

| |
|---|
| **B4.** Исследовать функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1\end{cases}$ на непрерывность. В ответе указать скачок функции в точке разрыва первого рода. |
| **B5.** Исследовать функцию $$y=2^{\frac{2}{(x-3)(x+2)}}$$ на непрерывность. В ответе указать $nx_0$, где $n$ – количество точек разрыва второго рода, $x_0$ – наибольшая из точек разрыва второго рода. |

## 8 ПРОИЗВОДНАЯ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$. Проделаем следующие операции: аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение $\Delta x$: $x + \Delta x \in (a; b)$; найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют *производной функции* $f(x)$ и обозначают одним из символов: $f'_x$; $f'(x)$; $y'$; $\dfrac{dy}{dx}$; $y'_x$. То есть по определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$ или $y'(x_0)$.

Если $S = S(t)$ задает закон движения точки, то $S_t'$ выражает скорость движения данной точки в момент времени $t$. В этом заключается *механический смысл производной*. Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная $y'$ есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной*.

Производная $f'(x)$ в точке $x$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке, абсцисса которой равна $x$. В этом заключается *геометрический смысл производной*.

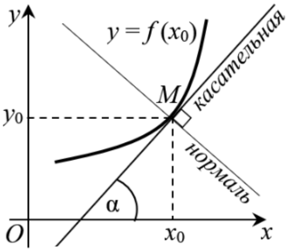



Рисунок 8.1

Если точка касания $M$ имеет координаты $(x_0; y_0)$, то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$. *Уравнение касательной*: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой* (рисунок 8.1). Ее уравнение имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$).

**Основные правила и формулы дифференцирования**

Пусть $C$ – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(cu)' = c(u)'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$; 7) если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

В дальнейшем считаем, что $u = u(x)$. Тогда

8) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$; 9) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

10) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$; 11) $(e^u)' = e^u u'$;

12) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; 13) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

14) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$; 15) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

16) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;  17) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ ;

18) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ ;  19) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;

20) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ;  21) $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ ;

22) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ .

**Дифференцирование неявных функций**

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно $y$, то функция *задана в явном виде* (явная функция). Под *неявным заданием* функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешенного относительно $y$.

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от $y$ по $x$ нет необходимости разрешать уравнение относительно $y$: *достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x,* и полученное затем уравнение разрешить относительно $y'$.

Производная неявной функции выражается через аргумент $x$ и функцию $y$.

*Пример 8.1.* Найти производную функции $y$, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Функция $y$ задана неявно. Дифференцируем по $x$ равенство, получим соотношение

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0,$$

откуда следует, что $y^2y' - xy' = y - x^2$, т. е. $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$ .

**Дифференцирование параметрически заданных функций**

Пусть зависимость между аргументом $x$ и функцией $y$ задана *параметрически* в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t$ – вспомогательная переменная, называемая параметром.

Производная $y'_x$ находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

*Пример 8.2*. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$ Найти $y'_x$.

Имеем $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{2t}{3t^2}, \text{ т. е. } y'_x = \frac{2}{3t}.$$

### Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от $x$ и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается $y''$ (или $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается $y'''$ (или $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$). Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной $n$-го порядка (или $n$-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках ($y^{\mathrm{V}}$ или $y^{(5)}$ – производная пятого порядка).

### Дифференциал функции

*Дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке $x$ называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается $dy$ (или $df(x)$): $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал $dy$ называют также *дифференциалом первого порядка*. Так как дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке $x$ равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда $x$ получит приращение $\Delta x$. В этом и состоит *геометрический смысл* дифференциала (рисунок 8.2).

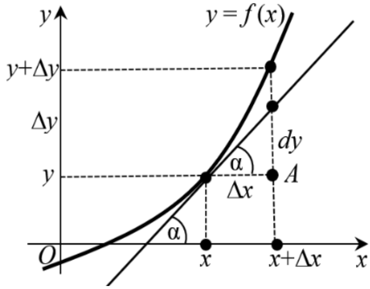


Рисунок 8.2

### Теоремы о дифференцируемых функциях

*Теорема Ролля*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

*Теорема Коши*. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

*Теорема Лагранжа*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a; b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

### Правило Лопиталя

*Раскрытие неопределенностей вида* 0/0. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$ и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки $x_0$.

**Если** существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$.

*Пример 8.3*. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1.$$

*Раскрытие неопределенностей вида* ∞/∞. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x_0$ (кроме, может быть, точки $x_0$), в этой окрестности: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$.

**Если** существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, **то** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

*Пример 8.4*. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{пл}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{пл}}{=}$$
$$\overset{\text{пл}}{=}\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{10\cos 10x}{6\cos 6x}=\frac{5}{3}.$$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида 0/0 и ∞/∞, которые называют *основными.* Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $\infty^{0}$, $0^{0}$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

1. Пусть $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\varphi(x))=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

2. Пусть $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))=(\infty-\infty)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{f(x)}}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

3. Пусть $f(x)\to 1$, $\varphi(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to 0$ или $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Тогда для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение $A=f(x)^{\varphi(x)}$.

*Пример 8.5.* Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Имеем неопределенность вида $1^\infty$. Логарифмируем выражение $A=\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln\left(\cos 2x\right)$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}=-2,$$

т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}A=-2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

## Условия монотонности функции

*Необходимые условия возрастания и убывания*. Если дифференцируемая на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает, то $f'(x)\ge 0$ для $\forall x\in(a; b)$ и убывает, если $f'(x)\le 0$.

*Достаточные условия возрастания и убывания.* Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x)>0$ для $\forall x\in(a; b)$, то эта функция возрастает на интервале $(a; b)$; если $f'(x)<0$ для $\forall x\in(a; b)$, то функция убывает на интервале $(a; b)$.

Если $\forall\, x\in(a; b)$: $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$), то функция $f(x)$ не убывает (соответственно, не возрастает) на интервале $(a; b)$.

Точка $x_0$ называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что $f(x)\le f(x_0)$ ($f(x)\ge f(x_0)$) для любой точки $x\ne x_0$ из данной окрестности.

Значение функции в точке максимума называется *максимумом* функции, а в точке минимума – *минимумом* функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

*Необходимое условие экстремума*. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими*.

*Первое достаточное условие экстремума*. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta$-окрестности критической точки $x_0$ и при переходе через нее (слева направо) *производная* $f'(x)$ *меняет знак* с плюса на минус, то $x_0$ есть точка максимума; если же с минуса на плюс, то $x_0$ – точка минимума.

*Второе достаточное условие экстремума*. Если в точке $x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке $x_0$ существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то при $f''(x_0) < 0$ в точке $x$ функция имеет максимум и минимум – при $f''(x_0) > 0$.

**Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке**

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке $x_0$ отрезка $[a; b]$, либо на границе отрезка, т. е. при $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если $x_0 \in (a; b)$, то точку $x_0$ следует искать среди критических точек данной функции.

*Пример 8.6*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

Находим критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x_1 = 0 \in [-2; 1] \text{ и при } x_2 = -1 \in [-2; 1].$$

Находим $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = 17$, $f(1) = 8$.

Итак, $f_{нб} = 17$ в точке $x = -2$, $f_{нм} = 0$ в точке $x = -1$.

### Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a;\, b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a;\, b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

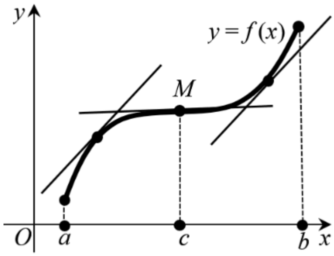


Рисунок 8.3

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба.*

На рисунке 8.3 кривая $y = f(x)$ выпукла на интервале $(a;\, c)$ и вогнута на интервале $(c;\, b)$, точка $M(c;\ f(c))$ – точка перегиба.

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;\, b)$ имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпукл. Если же $f''(x) > 0\ \forall x \in (a;\, b)$ – график вогнут.

*Достаточное условие существования точек перегиба*. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку $x_0$, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой $x_0$ есть точка перегиба.

*Пример 8.7*. Найти точки перегиба кривой $f(x) = e^{-x^2}$.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},\quad f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Первая и вторая производные существуют при любых $x \in R$.

Вторая производная равна нулю при $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Найдем знаки второй производной, нанесем их на числовую прямую (рисунок 8.4). На интервалах $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ вторая производная положительна, а на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ отрицательна. Следовательно, точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. являются точками перегиба.

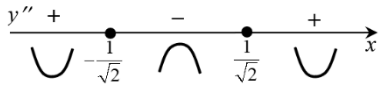


Рисунок 8.4

## Асимптоты графика функции

*Асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.

**Если** существуют пределы

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} \text{ и } b_1=\lim_{x\to+\infty}(y-k_1x) \quad \left(k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} \text{ и } b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-k_2x)\right)$$

**то** прямые $y = k_1x + b_1$ ($y = k_2x + b_2$) – *наклонные асимптоты* графика функции $y = f(x)$.

*Пример 8.8.* Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, то график функции при $x\to+\infty$ наклонной асимптоты не имеет. При $x\to-\infty$ справедливы соотношения

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(xe^x-0x)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{пл}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

Следовательно, при $x\to-\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

## Тест 8

| | |
|---|---|
| **А1.** Найти производную функции $y=\frac{1}{5}x^5+4\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{2x^2}$. | 1) $y'=x^4+3x^{-\frac{1}{4}}-x^{-3}$;<br>2) $y'=\frac{1}{5}x^4+4x^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}x^{-3}$;<br>3) $y'=x^4+3x^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2x}$;<br>4) $y'=x^4+3x^{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}x$. |

| | |
|---|---|
| **A2.** Найти производную функции $y=\sqrt{x^2-3x-7}.$ | 1) $y'=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-7}}$; <br> 2) $y'=\left(x^2-3x-7\right)^{\frac{1}{2}}(2x-3)$; <br> 3) $y'=\dfrac{1}{2}(x^2-3x-7)^{-\frac{1}{2}}$; <br> 4) $y'=2(x^2-3x-7)^{-\frac{1}{2}}$. |
| **A3.** Найти производную функции $y=\arcsin x\cdot\ln x.$ | 1) $y'=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}$; <br> 2) $y'=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}$; <br> 3) $y'=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{\ln x}$; <br> 4) $y'=\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. |
| **A4.** Найти производную функции $y=\dfrac{2x}{e^{3x}}.$ | 1) $y'=\dfrac{2-6x}{e^{4x}}$; 2) $y'=\dfrac{2-6x}{e^{6x}}$; <br> 3) $y'=\dfrac{2-6x}{e^{3x}}$; 4) $y'=\dfrac{2+6x}{e^{3x}}$. |
| **A5.** Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$ . | 1) –1; 2) 2; 3) 1; 4) 3. |
| **B1.** Найти наклонную асимптоту кривой $y=\dfrac{4+2x-x^2}{x}$. В ответе указать ординату точки пересечения асимптоты с осью $Oy$. | |
| **B2.** Найти экстремумы функции $y=x^3-3x+5$. В ответе записать их сумму. | |
| **B3.** Найти точку перегиба функции $y=x^3-6x+7$. В ответе записать сумму координат этой точки. | |

| |
|---|
| **В4.** Найти значение производной функции $y=\dfrac{\sqrt{x+7}\,(x-3)^4}{(x-1)^5}$ в точке $x=2$. В ответе записать $6y'(2)$. |
| **В5.** Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом 3. |

## 9 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;\, b)$, если для любого $x \in (a;\, b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)dx).$$

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;\, b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где $C$ – постоянное число.

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx.$ Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,.$$

Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $x$ – *переменной интегрирования*, $\int$ – *знаком неопределенного интеграла*.

Из определения следует

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \int\left(dF(x)\right) = F(x) + C\,.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

### Свойства неопределенного интеграла

**1**. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx\,,\ a \neq 0 \text{ – постоянная.}$$

**2**. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx .$$

**3**. Инвариантность формулы интегрирования. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, то и } \int f(u)du = F(u) + C ,$$

где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную. Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены $x$ на $u$ ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности, $\int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$,

$$\int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C, \quad \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C .$$

*Пример 9.1*. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)dx$ .

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)dx = 2\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int x dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

### Таблица основных неопределенных интегралов

Пользуясь тем, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить следующий список интегралов, который называют таблицей основных интегралов.

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right)$;
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ ;
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ;
4. $\int e^u du = e^u + C$;
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$ ;

6. $\int \cos u du = \sin u + C$;

7. $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C$;

8. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$;

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$;

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$;

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| + C$;

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$;

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$;

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$;

**Основные методы интегрирования**

*1. Непосредственное интегрирование*. Это метод, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция «подведения под знак дифференциала»):

$$du = d(u + a),\ a \in R;\quad du = \frac{1}{a}d(au),\ a \in R,\ a \neq 0;\ udu = \frac{1}{2}d(u^2);$$

$$\cos u\, du = d(\sin u);\ \sin u\, du = -d(\cos u);\ \frac{1}{u}du = d(\ln u).$$

*Пример 9.2.* $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ .

*Пример 9.3.* $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx =$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\mathrm{ctg}\, x - x + C.$$

*Пример 9.4.* $\int \mathrm{tg}\, u du = \int \frac{\sin u}{\cos u} du = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ .

*2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).* Заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

В интеграле $\int f(x)dx$ сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и получаем формулу *интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt .$$

Эта формула также называется *формулой замены переменных в неопределенном интеграле*. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования $t$ назад к переменной $x$.

Иногда следует подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int f(x)dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Другими словами, формулу можно применять справа налево.

*Пример 9.5.* $\int x\sqrt{x-3}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x-3} = t \\ x = t^2+3, dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int (t^2+3)t \cdot 2tdt =$

$$= 2\int (t^4 + 3t^2)dt = 2\int t^4 dt + 6\int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 2t^3 + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C .$$

*3. Метод интегрирования по частям.* Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Интегрируя это равенство, получим $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$ или

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (9.1)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, где $P(x)$ – многочлен; $k$ – число. Удобно положить $u = P(x)$, а за $dv$ обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида

$$\int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,\ \int P(x)\operatorname{arctg} xdx,$$

$$\int P(x)\operatorname{arcctg} xdx,\ \int P(x)\ln xdx.$$

Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за $u$ обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, где $a$ и $b$ – числа. За $u$ можно принять функцию $u = e^{ax}$. Формулу следует применить дважды. Затем из полученного равенства можно выразить искомый интеграл.

*Пример 9.6.* $\int (2x+1)e^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x+1, du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx, v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} =$

$$= (2x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

**Тест 9**

| | |
|---|---|
| **А1.** Найти интеграл $\int\sqrt{x}dx$. | 1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{3}{2}x\sqrt{x}+C$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$; 4) $\frac{2}{3}x\sqrt{x^3}+C$; 5) $x^3\sqrt{x}+C$. |

| | |
|---|---|
| **A2.** Найти интеграл $\int \sin 2x dx$. | 1) $2\cos 2x + C$; 2) $\frac{\sin 2x}{2} + C$; 3) $\frac{\cos 2x}{3} + C$; 4) $-\frac{\cos 2x}{2} + C$; 5) $\frac{\cos 2x}{2} + C$. |
| **A3.** Найти интеграл $\int 3^{5x} dx$. | 1) $\frac{3^{5x}}{5\ln 5} + C$; 2) $\frac{3^{5x}}{3\ln 5} + C$; 3) $-\frac{3^{5x}}{5\ln 3} + C$; 4) $\frac{5^{3x}}{5\ln 3} + C$; 5) $\frac{3^{5x}}{5\ln 3} + C$. |
| **A4.** Найти интеграл $\int e^{5-2x} dx$. | 1) $\frac{1}{2}e^{5-2x} + C$; 2) $-\frac{1}{2}e^{5-2x} + C$; 3) $\frac{1}{5}e^{5-2x} + C$; 4) $-\frac{1}{5}e^{5-2x} + C$; 5) $\frac{1}{5}e^{5-5x} + C$. |
| **A5.** Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$. | 1) $\frac{1}{9}\operatorname{arctg} x + C$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$; 4) $\operatorname{arcctg}\frac{x}{3} + C$; 5) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$. |
| **B1.** $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = F(x) + C$. Найти $F(x_0) + C$, если $x_0 = -1$, $C = 0$. | |
| **B2.** $\int \frac{(7x-2)dx}{x^2 + 6x + 5} = F(x) + C$. Найти $F(x_0) + C$, если $x_0 = 1$, $C = -\frac{37}{4} \cdot \ln 6 + \frac{9}{4} \cdot \ln 2 - 10$. | |
| **B3.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x}} = F(x) + C$. Найти $F(x_0) + C$, если $x_0 = 6$, $C = 7 - \ln 3$. | |
| **B4.** $\int x \cdot \sin 3x dx = F(x) + C$. Найти $F(x_0) + C$, если $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{17}{9}$. | |
| **B5.** $\int (2x+3) \cdot e^{5x} dx = F(x) + C$. Найти $100\,F(x_0) + C$, если $x_0 = 0$, $C = 0$. | |

## 10 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$.

Выполним следующие действия.

1. С помощью точек $x_0 = a$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ разобьем отрезок $[a; b]$ на $n$ частичных отрезков (рисунок 10.1) $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$

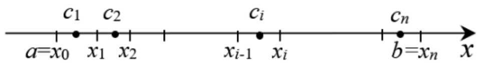



Рисунок 10.1

2. В каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней, т. е. величину $f(c_i)$.

3. Умножим найденное значение функции на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\,\Delta x_i$ .

4. Составим сумму $S_n$ всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + .... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

Сумма такого вида называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего частичного отрезка: $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

5. Найдем предел интегральной суммы, когда $n\to\infty$ так, что $\lambda\to 0$.

Если при этом интегральная сумма $S_n$ имеет предел $I$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число $I$ называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

Числа $a$ и $b$ называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, $x$ – *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ – *областью* (*отрезком*) *интегрирования*.

Функция $y = f(x)$, для которой на отрезке $[a; b]$ существует определенный интеграл, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

**Простейшие свойства определенного интеграла**

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной

интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \,.$$

Это следует из того, что интегральная сумма, а следовательно, и ее предел не зависят от того, какой буквой обозначается аргумент данной функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

3. Для любого действительного числа $c$

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)\,.$$

**Геометрический смысл определенного интеграла**

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \ge 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью $Ox$, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*. Найдем площадь этой трапеции. Для этого отрезок $[a; b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ разобьем на $n$ частичных отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$.

В каждом частичном отрезке возьмем произвольную точку $c_i$ и вычислим значение функции в ней, т. е. $f(c_i)$ (рисунок 10.2).

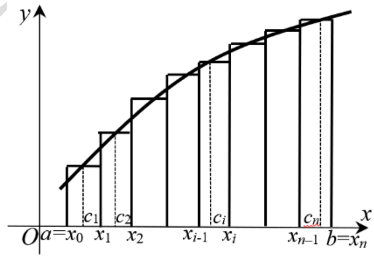


Рисунок 10.2

Умножим значением функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка. Произведение $f(c_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i$ и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + .... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади $S$ криволинейной трапеции:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,.$$

С уменьшением всех величин $\Delta x_i$ точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади $S$ криволинейной трапеции принимается предел $S$, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры $S_n$, когда $n$ неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \text{, т. е. } S = \int_a^b f(x)dx .$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции*.

В этом состоит *геометрический смысл* определенного интеграла.

**Формула Ньютона – Лейбница**

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{10.1}$$

которая называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

*Пример 10.1*. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| \Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ .

**Основные свойства определенного интеграла**

1. Если $c$ – постоянное число и функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ .

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, тогда интегрируема на $[a; b]$ их сумма и

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

Свойство 2 распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

т. е. интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка.

5. «Теорема о среднем». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением*, функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

6. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет тот же знак, что и функция. Так, если $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

7. Неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$ можно интегрировать. Так, если $f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)dx$

8. Если $m$ и $M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $(a < b)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

9. Модуль определенного интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной функции:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx;\ a < b.$$

10. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т. е.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$$

Это означает, что *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть одна из первообразных подынтегральной функции*.

**Методы вычисления определенных интегралов**

*Интегрирование подстановкой.* В определенном интеграле $\int_a^b f(x)dx$ сделаем подстановку $x = \varphi(t)$.

Если: 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок $[a; b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (10.2)$$

Эта формула *называется формулой замены переменной в определенном интеграле*.

*Пример 10.2*. Вычислить $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Положим $x = 2\sin t$, тогда $dx = 2\cos t\, dt$.

Если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = 2$, то $t = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t dt =$$

$$= 16\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2 2t dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1-\cos 4t\right)dt = 2\left(t\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4t\,\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi\,.$$

*Интегрирование по частям*. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (10.3)$$

Формула (10.3) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

*Пример 10.3*. Вычислить $\int_1^e x\ln x dx$.

Положим

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \dfrac{1}{x}dx, \\ dv = xdx,\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right]$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\,\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\,\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)\,.$$

*Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$, симметричном относительно точки $x = 0$. Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ четная функция,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная функция.} \end{cases}$$

Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx = 0$ , т. к. функция $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$ нечетная.

**Некоторые приложения определенного интеграла**

*Вычисление площадей плоских фигур.* Если фигура ограничена прямыми $x = a$, $y = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \ge f_2(x)$ (рисунок 10.3), то ее площадь $S$ можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b \left( f_1(x) - f_2(x) \right) dx . \qquad (10.4)$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$; прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью $Ox$, то ее площадь находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \qquad (10.5)$$

($\alpha$ и $\beta$ определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$).

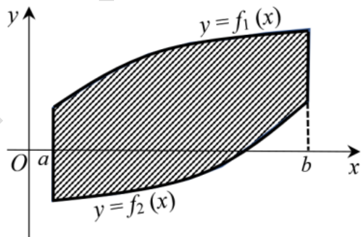


Рисунок 10.3

*Пример 10.4*. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Найдем сначала 1/4 площади $S$ (рисунок 10.4). Здесь $x$ изменяется от 0 до $a$, следовательно, $t$ изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Находим

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\left( t\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\sin 2t\,\Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

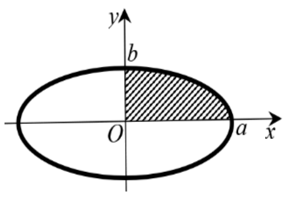


Рисунок 10.4

Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$ . Значит, $S = \pi ab$.

Площадь $S$ криволинейного сектора в полярной системе координат, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi\,. \qquad (10.6)$$

*Пример 10.5.* Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$.

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы» (рисунок 10.5), т. е. 6-я часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(a\cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1}{2}(1+\cos 6\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\pi/6}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6}+0\right) = \frac{\pi a^2}{24}\,.$$

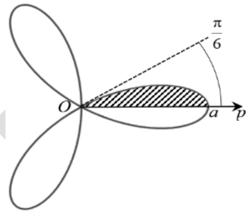



Рисунок 10.5

Следовательно, $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

*Вычисление длины дуги кривой*. Если функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную, то длина дуги графика этой функции, заключенной между точками $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,. \qquad (10.7)$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $x(t)$ и $y(t)$ – функции с непрерывными производными и $x'(t) \ne 0$ для любого $t \in [\alpha; \beta]$, длина дуги такой кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dx\,. \qquad (10.8)$$

Если же кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ и $r'(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, то длина дуги этой кривой может быть вычислена по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\,. \qquad (10.9)$$

*Пример 10.6.* Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, где $0 \le t \le \pi$.

По формуле 10.8 имеем

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left((2t-2\sin t)'\right)^2+\left((2-2\cos t)'\right)^2}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(2-2\cos t\right)^2+\left(2\sin t\right)^2}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4-8\cos t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\cos t}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{8(1-\cos t)}dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}dx=4\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dx=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=-8\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=8.$$

*Работа переменной силы.* Пусть материальная точка $M$ перемещается вдоль оси $Ox$ под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки $M$ из положения $x = a$ в положение $x = b$ ($a < b$), находится по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx\,. \tag{10.10}$$

*Пример 10.7.* Найти работу, которую необходимо затратить для запуска ракеты массой $m$ с поверхности Земли на высоту $h$.

По закону всемирного тяготения, сила притяжения $F$ находится по формуле $F=k\cdot\dfrac{mM}{x^2}$, где $M$ – масса земли; $x$ – расстояние ракеты от центра земли; $k$ – гравитационная постоянная. На поверхности земли при $x = R$ сила равна $F = mg$, где $g$ – ускорение свободного падения. Тогда $mg=k\cdot\dfrac{mM}{R^2}$. Следовательно, $kM=gR^2$ и $F=mg\cdot\dfrac{R^2}{x^2}$. Используя формулу (10.10), находим работу

$$A=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{x^2}dx=-mg\frac{R^2}{x}\Big|_R^{R+h}=-mgR^2\left(\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R}\right)=mgR\frac{h}{R+h}.$$

*Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской фигуры.* Если фигура ограничена прямыми $x = a$, $y = b$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$, поверхностная плотность фигуры $\gamma = \gamma(x)$, то статические моменты фигуры $M_x$ и $M_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ находятся по формулам

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\gamma(x)\left(f_1^2(x)-f_2^2(x)\right)dx;$$

$$M_y=\int_a^b\gamma(x)\cdot x\cdot\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx. \tag{10.11}$$

Моменты инерции $I_x$, $I_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$:

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left( f_1^3(x) - f_2^3(x)\right)dx;$$
$$I_y = \int_a^b \gamma(x)\cdot x^2 \cdot \left( f_1(x) - f_2(x)\right)dx. \qquad (10.12)$$

Координаты центра масс фигуры вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m};\ y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (10.13)$$

где $m$ – масса фигуры, которая вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \gamma(x)\left( f_1(x) - f_2(x)\right)dx. \qquad (10.14)$$

*Пример 10.8.* Найти координаты центра масс плоской однородной фигуры, ограниченной кривой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$ и осями координат.

Из уравнения кривой имеем $y = \left(\sqrt{5} - \sqrt{x}\right)^2$. По формуле (10.14) найдем массу пластины, считая $\gamma(x) = 1$ (рисунок 10.6).

$$m = \int_0^5 \left(\sqrt{5} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^5 \left(5 + x - 2\sqrt{5x}\right)dx =$$
$$= \left(5x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}}{3}\right)\Big|_0^5 =$$
$$= 25 + \frac{25}{2} - \frac{100}{3} = \frac{150 + 75 - 200}{6} = \frac{25}{6}.$$

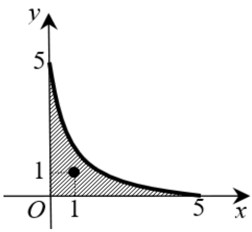


Рисунок 10.6

Ввиду симметрии пластины относительно биссектрисы первого координатного угла и ее однородности статические моменты будут равны $M_x = M_y$. Используя (10.11), получим

$$M_y = \int_a^b x\cdot\left(\sqrt{5} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int_a^b \left(5x + x^2 - 2x\sqrt{5x}\right)dx =$$
$$= \left(\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{5x}\right)\Big|_0^5 = \frac{125}{2} + \frac{125}{3} - 100 = \frac{375 + 250 - 600}{6} = \frac{25}{6}.$$

Тогда по формулам (10.13) имеем

$$x_c = y_c = \frac{25}{6} : \frac{25}{6} = 1.$$

## Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ , где промежуток интегрирования $[a; b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, называют еще *собственным интегралом*.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$. Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где $c$ – произвольное число. В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

*Пример 10.9.* Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1.$$

Интеграл сходится.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, по определению, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл *сходится*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл *расходится*.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке с отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

*Пример 10.10*. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty .$$

Интеграл расходится.

**Тест 10**

| | |
|---|---|
| **А1.** Найти $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. | 1) $4+2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $4-2\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $6-2\sqrt{3}$. |
| **А2.** Найти $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. | 1) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; 2) $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{3}$; 3) $\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; 4) $\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$; 5) $\ln\frac{3}{2}$. |
| **А3.** Найти $\int_1^2 (x+1)\ln x dx$. | 1) ln 16; 2) 7/4; 3) ln 8 – 7/4; 4) ln 16 – 7/4; 5) 1. |
| **А4.** Найти или доказать расходимость $\int_2^3 \frac{dx}{x-2}$. | 1) $\ln(3)$; 2) $\ln(2)$; 3) 0; 4) 1; 5) расходится. |
| **А5.** Найти или доказать расходимость $\int_1^\infty \frac{16xdx}{16x^4-1}$. | 1) ln(5/3); 2) $\ln(5)$; 3) $\ln 3$; 4) 1; 5) расходится. |

| |
|---|
| **В1**. Найти площадь, ограниченную прямыми $y = 2x + 3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. |
| **В2.** Найти площадь $S$, ограниченную кривыми $y=\sqrt{2x}$ и $y=\frac{1}{2}x^2$. В ответе укажите $3S$. |
| **В3.** Найти площадь $Q$, ограниченную одним лепестком четырехлепестковой розы $r = 2\cos 2\varphi$. В ответе укажите $4Q / \pi$. |
| **В4.** Найти площадь $S$ петли кривой $x = t^2 - 1$, $y = 4t - t^3$. В ответе укажите $15S$. |
| **В5.** Найти площадь, заключенную между параболой $$y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{11}{3},$$ касательной к ней в точке $M\left(-3;-\frac{8}{3}\right)$ и осью ординат. |

## 11 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если по некоторому закону каждой совокупности $n$ чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из некоторого множества $E$ ставится в соответствие определенное значение переменной $u$, то $u$ называется функцией от $n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, определенной на множестве $E$, и обозначается $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *аргументами функции*, множество $E$ – областью *определения функции*.

*Частным значением* функции называется значение функции в некоторой точке $M_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ и обозначается $f(M_0) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ в пространстве представляется некоторой поверхностью. То есть когда точка с координатами $(x; y)$ пробегает всю область определения функции, расположенную в плоскости $xOy$, соответствующая пространственная точка, вообще говоря, описывает поверхность.

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ рассматривают как функцию точки некоторого множества точек трехмерного пространства.

Аналогично, функцию $n$ переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ рассматривают как функцию точки некоторого $n$-мерного пространства.

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ имеет областью определения круг $x^2 + y^2 = 1$ и изображается верхней полусферой с центром в точке $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$.

**Предел функции**

Для функции двух (и большего числа) переменных вводится понятие предела функции и непрерывности, аналогично случаю функции одной переменной. Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, называется *δ-окрестностью точки* $M_0(x_0; y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки $M_0$ – это все внутренние точки круга с центром $M_0$ и радиусом δ (рисунок 11.1).

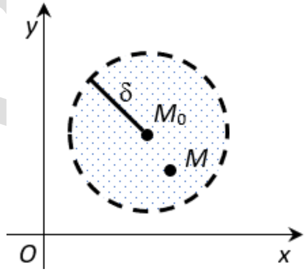


Рисунок 11.1

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число $A$ называется *пределом функции* $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) \quad \text{или} \quad A = \lim_{M \to M_0} f(M).$$

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому $M$ стремится к $M_0$.

Геометрический смысл предела функции двух переменных состоит в следующем. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что во всех ее точках $M(x; y)$, отличных от $M_0$, аппликаты соответствующих точек поверхности $z = f(x; y)$ отличаются от числа $A$ по модулю меньше, чем на ε.

*Пример 11.1.* Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Будем приближаться к $O(0;\,0)$ по прямой $y = kx$, где $k$ – некоторое число. Тогда

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Функция $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ в точке $O(0;\,0)$ предела не имеет, т. к. при разных значениях $k$ предел функции не одинаков (функция имеет различные предельные значения).

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Это означает, что справедливы утверждения: если функции $f(M)$ и $g(M)$ определены на множестве $D$ и имеют в точке $M_0$ этого множества пределы $A$ и $B$ соответственно, то и функции $f(M) \pm g(M)$, $f(M)g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ имеют в точке $M_0$ пределы, которые соответственно равны $A \pm B$, $AB$, $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

**Непрерывность функции двух переменных**

Функция $z = f(x;\,y)$ (или $f(M)$) называется *непрерывной в* точке $M_0(x_0;\,y_0)$, если она:

1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

2) имеет предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

3) этот предел равен значению функции $z$ в точке $M_0$, т. е.

$$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \text{ или } A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x;\,y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*. Так, функция $z=\dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z = f(x;\,y)$ в точке. Обозначим $\Delta x = x - x_0$,

$\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = f(x; y) - f(x_0; y_0)$.

Величины $\Delta x$ и $\Delta y$ называются *приращениями аргументов* $x$ и $y$, а $\Delta z$ – *полным приращением функции* $f(x; y)$ *в точке* $M_0(x_0; y_0)$.

Функция $z = f(x; y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0) \in D$ если выполняется равенство $A = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, т. е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов стремятся к нулю.

### Частные производные первого порядка функций многих переменных

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как $x$ и $y$ – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной $x$ приращение $\Delta x$, сохраняя значение $y$ неизменным. Тогда $z$ получит приращение, которое называется *частным приращением* $z$ по $x$ и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение $z$ по $y$:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение $\Delta z$ функции $z$ определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной $x$ и обозначается одним из символов: $z'_x$, $f'_x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Частные значения производных по $x$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f_x'(x_0; y_0)$, $f'_x|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной $y$:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно $x$ или $y$ считается постоянной величиной).

*Пример 11.2.* Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$.

$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$

$$= 0 + e^{x^2-y}(x^2-y)'_x + 0 = e^{x^2-y}(2x-0) = 2xe^{x^2-y};$$

$$z'_y = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_y = 2 + e^{x^2-y}(x^2-y)'_y = 2 - e^{x^2-y}.$$

### Частные производные высших порядков

Частные производные $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка.* Их можно рассматривать как функции от $(x; y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка.* Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и следующих порядков.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*. Таковыми являются, например, $z_{xy}''$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

*Пример 11.3.* Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Так как $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ и $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

*Теорема Шварца*. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x; y)$ имеем $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

### Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x; y)$, где $f(x; y)$ – дифференцируемая в точке $M_0(x_0; y_0)$ функция, то уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0). \qquad (11.1)$$

Прямая, проходящая через точку $M_0$ и перпендикулярная касательной плоскости, которая построена в этой точке поверхности, называется ее *нормалью*. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости (6.25), легко получить канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (11.2)$$

Если поверхность задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ примет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

а уравнение нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}. \qquad (11.3)$$

*Пример 11.4.* Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 - y^3$ в точке $M(1; -1; 2)$.

Здесь $z'_x = f'_x(x; y) = 3x^2$, $z'_y = f'_y(x; y) = -3y^2$, $f'_x(1; -1) = 3$, $f'_y(1; -1) = -3$. Пользуясь формулами (11.1) и (11.2), получаем уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = 3 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (y + 1),$$

$$3x - 3y - z - 4 = 0$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{-1}.$$

## Экстремум функции двух переменных

Точка $(x_0; y_0)$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $(x; y)$, отличной от $(x_0; y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ ($f(x; y) > f(x_0; y_0)$).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум и минимум функции называют ее *экстремумами.*

Точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют *локальный* (местный) характер: значение функции в точке $(x_0; y_0)$ сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к $(x_0; y_0)$. В области определения функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

## Необходимые и достаточные условия экстремума

*Необходимые условия экстремума*. Если в точке $(x_0; y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f_x'(x_0; y_0) = 0$, $f_y'(x_0; y_0) = 0$.

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, т. е. $f_x' = 0$, $f_y' = 0$, называется *стационарной точкой* функции $z$. Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются *критическими точками.*

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Для нахождения экстремумов функции необходимо каждую критическую точку функции подвергнуть дополнительному исследованию.

*Достаточное условие экстремума*. Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $f(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке $(x_0; y_0)$ значения $A = f_{xx}''(x_0; y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0; y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0; y_0)$. Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 .$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta < 0$, то функция $f(x; y)$ в точке $(x_0; y_0)$ экстремума не имеет.

В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке $(x_0; y_0)$ может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

*Пример 11.5.* Найти экстремум функции $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Здесь $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Точки, в которых частные производные не существуют, отсутствуют.

Найдем стационарные точки, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки $M_1(6; 3)$ и $M_2(0; 0)$.

Находим частные производные второго порядка данной функции:

$$z''_{xx} = 6y - 6x , \ z''_{xy} = 6x , \ z''_{yy} = -12y^2 .$$

В точке $M_1(6; 3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, отсюда

$$AC - B^2 = -18(-108) - 36^2 = 648,$$

т. е. $\Delta > 0$.

Так как $A < 0$, то в точке $M_1$ функция имеет локальный максимум: $z_{max} = z(6; 3) = 3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 324 - 216 - 81 = 27$.

В точке $M_2(0; 0)$: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, значит, $\Delta = 0$. Проведем дополнительное исследование. Значение функции $z$ в точке $M_2$ равно нулю: $z(0; 0) = 0$. Можно заметить, что

$$z = -y^4 < 0 \text{ при } x = 0, y \neq 0;$$
$$z = -x^3 > 0 \text{ при } x < 0, y = 0.$$

Значит, в окрестности точки $M_2(0; 0)$ функция $z$ принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, в точке $M_2$ функция экстремума не имеет.

### Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в области $D$. Тогда она достигает в некоторых точках $D$ своего наибольшего $M$ и наименьшего $m$ значений. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области, или в точках, лежащих на её границе.

*Правило нахождения* наибольшего и наименьшего значений в ограниченной области:

1) найти все критические точки функции, принадлежащие области, и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границах области;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее $M$ и наименьшее $m$.

*Пример 11.6.* Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

Заданная область представляет треугольник $MNE$ (рисунок 11.2). Найдем частные производные и стационарные точки: $z'_x = 2x + 1$, $z'_y = 6y - 1$.

$$\begin{cases} 2x+1=0, \\ 6y-1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/2, \\ y=1/6. \end{cases}$$

Полученная стационарная точка $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$ не принадлежит треугольнику $MNE$. Следовательно, функция может иметь наименьшее и наибольшее значения только на границе области. Исследуем функцию на границе.

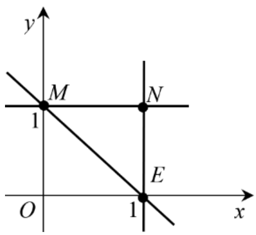


Рисунок 11.2

На стороне $NE$ $x = 1$, тогда $z = 3y^2 - y + 2$, $y \in [0; 1]$. $z'_y = 6y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/6$, $z''_{yy} = 6 > 0$, т. е. $y = 1/6$ точка минимума. $z_{\min}\left(1; \frac{1}{6}\right) = \frac{23}{12}$. На концах отрезка $y \in [0; 1]$ а в точках $E$ и $N$: $z_E(1; 0) = 2$, $z_N(1; 1) = 4$.

На стороне $MN$ $y = 1$: $z = x^2 + x + 2$, $x \in [0; 1]$. $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -1/2 \notin [0; 1]$. Вычисляем значения функции на границе отрезка $z_M(0; 1) = 2$.

На стороне $ME$: $y = 1 - x$, тогда

$$z = x^2 + 3(1 - x)^2 + x - (1 - x), \Rightarrow z = 4x^2 - 4x + 2, \ x \in [0; 1].$$

$$z'_x = 8x - 4 = 0, \Rightarrow x = 1/2 \in [0;1]. \ z''_{xx} = 8 > 0,$$

т. е. точка $x = 1/2$ – точка минимума. Значение функции в ней $z_{\min}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 1$. Сравнивая значения функции на границе заданной области, находим наименьшее значение $z_{\min}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = 1$ и наибольшее $z_{\max}(1; 1) = 4$.

## Тест 11

| | |
|---|---|
| **А1.** Какие из точек $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 1)$, $C(2;1)$, $D(2;\ -3)$, $E(0;\ -2)$ принадлежат области определения функции $$z=\sqrt{x^2-y^2}\ ?$$ | 1) $A$ и $B$; 2) $B$ и $C$; 3) $C$ и $D$; 4) $D$ и $E$; 5) $E$ и $A$. |
| **А2.** Найти частную производную $z'_x$, если $z=\dfrac{2\ln x}{\sqrt{y}}$. | 1) $z'_x=\dfrac{2}{\ln x\sqrt{y}}$; 2) $z'_x=\dfrac{1}{y\sqrt{x}}$; 3) $z'_x=\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$; 4) $z'_x=\dfrac{2}{x\sqrt{y}}$; 5) $z'_x=\dfrac{x}{y\sqrt{x}}$. |
| **А3.** Найти частную производную $z'_y$, если $z=2xy+\dfrac{1}{y}$. | 1) $z'_y=2x-\dfrac{1}{y^2}$; 2) $z'_y=-\dfrac{1}{y^2}$; 3) $z'_y=\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$; 4) $z'_y=2y-\dfrac{1}{y^2}$; 5) $z'_y=2x-1$. |
| **А4.** Найти частную производную второго порядка $z''_{xx}$, если $z=e^{xy}$. | 1) $z''_{xx}=e^{xy}\cdot y^2$; 2) $z''_{xx}=e^{xy}\cdot x^2$; 3) $z''_{xx}=e^{xy}\cdot(x+y)$; 4) $z''_{xx}=e^{xy}\cdot(x-y)$; 5) $z''_{xx}=ye^{xy}$. |

| | |
|---|---|
| **А5.** Найти частную производную второго порядка $z''_{xy}$, если $z=\operatorname{arctg}(x+y)$. | 1) $z''_{xy}=\dfrac{2y}{(x^2+2xy+y^2)^2}$;<br>2) $z''_{xy}=\dfrac{2x}{(x^2+2xy+y^2)^2}$;<br>3) $z''_{xy}=\dfrac{2(y+x)}{(x^2+2xy+y^2)^2}$;<br>4) $z''_{xy}=\dfrac{-2(y+x)}{(x^2+2xy+y^2+1)^2}$;<br>5) $z''_{xy}=\dfrac{2(y-x)}{(x^2+2xy+y^2+1)^2}$. |
| **В1.** Найти стационарные точки функции $z=x^3+y^3-3xy$. В ответе указать сумму их координат. | |
| **В2.** Найти сумму экстремумов (экстремум, если он один) функции $z=x^2-xy+y^2$. | |
| **В3.** Найти наибольшее значение функции $z=x^2+2xy-4x+8y$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$. | |
| **В4.** Найти уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2-z^2=-1$ в точке $M(2;\,2;\,3)$. В ответе укажите $6\cdot z_0$, где $z_0$ – аппликата точки пересечения касательной плоскости с осью $Oz$. | |
| **В5.** Найти количество точек с целыми координатами, принадлежащих обрасти определения функции $z=\sqrt{y(2-y)}+\ln(4-x^2)$. | |

## 12 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение называется *дифференциальным*, если в нем участвуют производные или дифференциалы искомой функции. *Порядком* уравнения называют порядок старшей производной или старшего дифференциала искомой функции. Дифференциальные уравнения, искомая функция которых зависит от одного аргумента, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x; y; y') = 0, \tag{12.1}$$

где $x$ – независимая переменная; $y$ – искомая функция от $x$; $y'$ – ее производная; $F$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Уравнение (12.1) может не содержать в явном виде $x$ и $y$, но обязательно содержит $y'$. Иногда уравнение (12.1) можно разрешить относительно $y'$:

$$y' = f(x; y). \tag{12.2}$$

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (12.2) можно записать в виде

$$f(x; y)dx - dy = 0.$$

В таком виде оно является частным случаем более общего уравнения

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0. \tag{12.3}$$

*Решением дифференциального уравнения* первого порядка называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Функция $y = \varphi(x; C)$, зависящая от аргумента $x$ и произвольной постоянной $C$, называется *общим решением уравнения* (12.2) в области $G$, если она удовлетворяет двум условиям:

1) при любых значениях произвольной постоянной $C$ функция $y = \varphi(x; C)$ является решением уравнения (12.2);

2) какова бы ни была точка $(x_0; y_0)$, лежащая внутри области $G$, существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что решение $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Значение $C = C_0$ можно найти из условия $y_0 = \varphi(x_0; C_0)$.

Всякое решение $y = \varphi(x; C_0)$ уравнения (12.2), получающееся из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется *частным решением*. Если общее решение дифференциального уравнения найдено в виде, не разрешенном относительно $y$, т. е. в виде $\omega(x; y; C) = 0$, то оно называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

### Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x)\, f_2(y). \tag{12.4}$$

Решим уравнение (12.4). Для этого перепишем его в виде $\frac{dx}{dy} = f_1(x)\, f_2(y)$. Тогда $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ $\left( f_2(y) \neq 0 \right)$, т. е. разделили переменные (левая часть уравнения $\frac{dy}{f_2(y)}$ зависит от $y$, а правая $f_1(x)dx$ – от $x$). Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x)dx + C_2$, или

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{12.5}$$

где $C = C_2 - C_1$ – произвольная постоянная.

Выражение (12.5) представляет собой общий интеграл уравнения (12.4).

При нахождении решения дифференциального уравнения пришлось выполнять операцию интегрирования. Поэтому процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Разделив обе части уравнения (12.4) на $f_2(y)$, можем потерять те решения, при которых $f_2(y) = 0$. Действительно, если $f_2(y) = 0$ при $y = y_0$, очевидно, является решением уравнения (12.4). Если оно не содержится в общем интеграле, то его называют особым решением дифференциального уравнения.

*Пример 12.1*. Решить уравнение $xy' + y = 0$.

Разрешая уравнение относительно $y'$, получим

$$y' = -\frac{y}{x}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Разделяя переменные, находим $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем $\ln|y| = -\ln|x| + C_1$, где $C_1$ – произвольная постоянная. Для упрощения полученного решения воспользуемся часто применяемым приемом. Положим $C_1 = \ln C_2$, где $C_2 > 0$ (заметим, что при изменении $C_2$ от 0 до $\infty$ величина

$\ln C_2$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_2$, откуда $|y|\cdot|x| = C_2$, и $xy = \pm C_2$. Полагая $\pm C_2 = C$, окончательно получим $xy = C$, где $C$ – произвольная постоянная. При делении на $x$ и $y$ мы могли потерять решения $x = 0$ и $y = 0$, но они содержаться в общем интеграле $xy = C$ при C = 0.

### Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{12.6}$$

где правая часть есть функция от отношения переменных $\frac{y}{x}$.

В однородном уравнении переменные, вообще говоря, не разделяются. Однако оно легко может быть преобразовано в уравнение с разделяющимися переменными. С этой целью вводят новую функцию $z$, полагая $\frac{y}{x} = z$, или

$$y = xz. \tag{12.7}$$

*Пример 12.2*. Решить уравнение $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + (y/x)^2}{2(y/x)}.$$

Произведя подстановку $y = xz$, получаем

$$\frac{dz}{dx}x + z = \frac{1 + z^2}{2z}, \text{ или } \frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z^2}{2z}.$$

В полученном уравнении переменные разделяются

$$\frac{2z dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем $\ln C_1 - \ln|1 - z^2| = \ln|x|$, откуда

$$C_1 = |x|\,|1 - z^2|, \text{ или } x(1 - z^2) = \pm C_1.$$

Положим $\pm C_1 = C$, тогда $x(1 - z^2) = C$. Возвращаясь к функции $y$, получим

$$C = x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right), \text{ или } x^2 - y^2 - Cx = 0.$$

## Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)\,, \tag{12.8}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные функции.

Один из способов решения таких уравнений называют *методом Бернули*. Этот метод основан на введении подстановки $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции, которые определяются в процессе решения уравнения.

*Пример 12.3*. Решить уравнение $y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение, получим

$$xu'v + xuv' - 2uv = 2x^4;\ xu'v + u\,(xv' - 2v) = 2x^4.$$

Поскольку одна из функций $u$ или $v$ может быть выбрана произвольно, подберем $v$ так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. Для этого достаточно найти частное решение уравнения $xv' - 2v = 0$.

Находим

$$x\frac{dv}{dx} = 2v\,,\ \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}\,,\ \ln|v| = 2\ln|x|.$$

Отсюда $v = x^2$ – частное решение. Подставляя найденное значение в уравнение, получим $xu'x^2 = 2x^4$, $u' = 2x$.

Находим общее решение этого уравнения

$$u = \int 2x\,dx = x^2 + C\,.$$

Теперь находим общее решение заданного уравнения

$$y = uv = (x^2 + C)\,x^2 = x^4 + Cx^2.$$

С помощью такой подстановки интегрируют и уравнения типа: $y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$.

Они называются *уравнениями Бернулли*.

## Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \tag{12.9}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x;y)$, т. е.

$$P(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Это уравнение первого порядка, так как из него следует, что $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Для того чтобы данное уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{12.10}$$

В этом случае $U(x;y)=C$ есть общий интеграл данного уравнения.

*Пример 12.4*. Решить уравнение $(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0$.

Здесь $P(x;y)=2xy-1$, $Q(x;y)=3y^2+x^2$.

Проверим выполнение условия (12.10):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x, \ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

Таким образом, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. существует такая функция $U(x;y)$, что

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Найдем эту функцию.

Так как $\frac{\partial U}{\partial x}=2xy-1$, то проинтегрируем это равенство по $x$, считая при этом $y$ постоянным.

$$U(x;y)=\int(2xy-1)dx=x^2y-x+C(y),$$

где $C(y)$ – пока неизвестная функция от $y$. Подставим найденную функцию в равенство $\frac{\partial U}{\partial y}=3y^2+x^2$, получим

$$x^2+C'(y)=3y^2+x^2,\ C'(y)=3y^2,\ C(y)=\int 3y^2dy=y^3+C.$$

Теперь можно записать общий интеграл $U(x;y)=C$: $x^2y-x+y^3=C$.

## Дифференциальные уравнения $n$-го порядка, которые допускают понижение порядка

Уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x). \tag{12.11}$$

решается путем $n$-кратного интегрирования.

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1;\ y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2 \text{ и т. д.}$$

*Пример 12.5*. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$; $y''(0) = -1$.

$$y''' = \frac{24}{(x+2)^5}; \quad y'' = 24\int \frac{dx}{(x+2)^5} + C_1, \quad y'' = -6(x+2)^{-4} + C_1;$$

$$y' = \int\left[-\frac{6}{(x+2)^4} + C_1\right]dx = \frac{2}{(x+2)^3} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left[\frac{2}{(x+2)^3} + C_1x + C_2\right]dx = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Подставим последовательно в полученные равенства начальные условия, определим $C_1$, $C_2$, $C_3$:

$$-1 = -\frac{6}{2^4} + C_1, \; C_1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}; \; 2 = \frac{2}{2^3} + C_2,$$

$$C_2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}; \; 1 = -\frac{1}{4} + C_3, \Rightarrow \; C_3 = \frac{5}{4}.$$

Частным решением данного уравнения будет

$$y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Уравнение вида

$$F(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}) = 0. \qquad (12.12)$$

не содержит неизвестной функции $y$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка. Для решения необходимо ввести новую функцию $z(x) = y^{(n-1)}$, $y^{(n)} = z'$. После этого уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка $F(x; z; z') = 0$, где неизвестной является функция $z(x)$.

*Пример 12.6*. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Положим $y' = z$, $y'' = z'$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $z(x)$: $z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Интегрируем его методом Бернулли. Полагая в уравнении

$z = uv$, $\quad z' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad u'v + u\left(\frac{dv}{dx} + v\cdot\operatorname{tg} x\right) = \sin 2x.$$

Определяем $v$, положив $\dfrac{dv}{dx} + v\cdot\operatorname{tg} x = 0$: $\displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$,

откуда выделим одно из частных решений $v = \cos x$.

Определим $u(x)$: $\dfrac{du}{dx}\cos x = 2\sin x\cos x$; $du = 2\sin x dx$, откуда

$$u(x) = -2\cos x + C_1,\ z = \cos x\,(-2\cos x + C_1).$$

Возвращаясь к старой переменной $y$, получим

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos^2 x + C_1 \cos x.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dy = -2\int \cos^2 x dx + C_1 \int \cos x dx + C_2,$$

$$y = -2\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx + C_1 \sin x + C_2,$$

$$y = -x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2.$$

Уравнение вида

$$F\,(y;\ y';\ y'') = 0. \tag{12.13}$$

не содержит в явном виде независимой переменной $x$. Для решения введем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = p \cdot \frac{dp}{dy}$,

получим уравнение первого порядка $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$, где неизвестной функцией является $p(y)$, а независимой переменой $y$.

*Пример 12.7*. Решить $2(y')^2 = (y-1)\,y''$.

Данное дифференциальное уравнение второго порядка не содержит в явном виде независимой переменной $x$, следовательно, его можно отнести к виду (12.13).

Применяя подстановку $y' = p(y)$, получим $2p^2 = (y-1)p\frac{dp}{dy}$.

$$p\left[2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right] = 0.$$

Последнее равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} p = 0, \\ 2p - (y-1)\frac{dp}{dy} = 0. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения следует $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = C$.

Общее решение данного дифференциального уравнения получим, проинтегрировав второе уравнение совокупности. Оно представляет собой дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Действительно,

$$\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y-1},\ \ \frac{1}{2}\ln|p| = \ln|y-1| + \ln C_1,\ (C_1 > 0).$$

После преобразований получим

$$\sqrt{p} = \pm C_1(y-1) \text{ или } p = C_1^2(y-1)^2.$$

Произведем обратную замену $p = \dfrac{dy}{dx}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка, где неизвестной функцией является $y(x)$: $\dfrac{dy}{dx} = C_1^2(y-1)^2$.

В этом уравнении легко разделяются переменные.

$$\int \frac{dy}{C_1^2(y-1)^2} = \int dx + C_2; \ -\frac{1}{C_1^2(y-1)} = x + C_2; \ -\frac{1}{C_1^2} = (x+C_2)(y-1).$$

Обозначая $C_3 = -\dfrac{1}{C_1^2}$, получим $C_3 = (x + C_2)(y - 1)$.

## Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{12.14}$$

в котором коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$ постоянны, причем $a_0 \neq 0$, называется *линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Общее решение уравнения (12.14) имеет вид $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$, где $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$ – частные решения уравнения (12.14), которые являются линейно независимыми, т. е. равенство $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ выполняется только при $C_1 = C_2 = 0$. Для нахождения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ составляют уравнение: в уравнении (12.14) $y''$ заменяют на $k^2$, $y'$ на $k$, $y$ на 1. В результате получается квадратное уравнение:

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0. \tag{12.15}$$

Алгебраическое уравнение (12.15) для определения коэффициента $k$ называется *характеристическим уравнением* данного дифференциального уравнения (12.14). Корни этого уравнения могут быть либо действительными различными, либо действительными и равными, либо комплексными сопряженными. В зависимости от этого общее решение уравнения (12.14) находится по таблице 12.1.

*Таблица 12.1*

| Корни характеристического уравнения | Вид общего решения |
|---|---|
| $D = a_1^2 - 4a_0a_2 > 0,$<br>$k_1$, $k_2$ – действительные и различные,<br>$k_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_0}$ | $\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ |
| $D = a_1^2 - 4a_0a_2 = 0,$<br>$k_1 = k_2$ – действительные и равные,<br>$k_{1,2} = -\dfrac{a_1}{2a_0}$ | $\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$ |
| $D = a_1^2 - 4a_0a_2 < 0,$<br>$k_1 = k_2$ – комплексные сопряженные,<br>$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$,<br>где $\alpha = -\dfrac{a_1}{2a_0}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{\lvert D \rvert}}{2a_0}$ | $\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ |

*Пример 12.8*. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 + 5k + 6 = 0$. Его корни $k_1 = -2$, $k_2 = -3$.

Общее решение уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

*Пример 12.9*. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = 1$. Общее решение уравнения $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$.

*Пример 12.10*. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$. Здесь $\alpha = -2$, $\beta = 3$.

Общее решение уравнения $\bar{y} = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

## Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x), \qquad (12.16)$$

в котором коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$ постоянны, причем $a_0 \neq 0$, а $f(x)$ – непрерывная функция, называется *линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.* Уравнения с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \qquad (12.17)$$

называется линейным однородным, соответствующим неоднородному уравнению (12.16).

Общее решение уравнения (12.16) имеет вид

$$y = \overline{y} + y^*, \qquad (12.18)$$

где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного (12.17), а $y^*$ – частное решение неоднородного уравнения (12.16).

Нахождение $\overline{y}$ было рассмотрено в разделе 11. Частное решение $y^*$ будем искать методом неопределенных коэффициентов. Этот способ применим, если правая часть $f(x)$ имеет вид, представленный в таблице 12.2.

*Таблица 12.2*

| Вид правой части $f(x)$ | Вид частного решения $y^*$ |
|---|---|
| $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ | $y^* = x^r R_n(x)e^{\alpha x}$ |
| $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$ | $y^* = x^r e^{\alpha x}\left(S_k(x)\cos\beta x + M_k(x)\sin\beta x\right)$ |
| $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени $n$ и $m$ соответственно с действительными известными коэффициентами; $R_n(x)$, $S_k(x)$, $M_k(x)$ – полные многочлены степени $n$ и $k$ ($k = \max\{n,m\}$) соответственно, но с неизвестными коэффициентами; $r$ – кратность, с которой число $\alpha$ или $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения (12.15) | |

*Пример 12.11*. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$.

Характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1e^{0\cdot x} + C_2e^{-x} = C_1 + C_2e^{-x}$.

Так как правая часть уравнения является многочленом первой степени и один из корений характеристического уравнения равен нулю ($r = 1$), то частное решение надо искать в виде

$$y^* = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Подберем коэффициенты таким образом, чтобы $y^*$ было решением данного уравнения. Для этого подставим выражения для $y^*$ в данное уравнение:

$$(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = 5x + 3,$$
$$2A + 2Ax + B = 5x + 3,$$
$$2Ax + (2A + B) = 5x + 3.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 5, \\ 2A + B = 3, \end{cases}$$

из которой находим $A = 5/2$, $B = -2$.

Частное решение данного уравнения имеет вид $y^* = \frac{5}{2}x^2 - 2x$, а общее решение –

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 2x .$$

*Пример 12.12*. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(x + 2).$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $k^2 - 2k - 3 = 0$; $k_1 = -1$, $k_2 = 3$.

Общее решение уравнения без правой части имеет вид $\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ .

Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один корень $k_2 = \alpha = 3$, то $r = 1$, и частное решение $y^*$ следует искать в виде $y^* = e^{3x}x(Ax + B) = e^{3x}(Ax^2 + Bx)$.

Находим $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$:

$$(y^*)' = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx) + e^{3x}(2Ax + B) = e^{3x}(3Ax^2 + (3B + 2A)x + B),$$
$$(y^*)'' = 3e^{3x}(3Ax^2 + (3B + 2A)x + B) + e^{3x}(6Ax + 3B + 2A) =$$
$$= e^{3x}(9Ax^2 + (9B + 12A)x + 6B + 2A).$$

Подставим в исходное уравнение и сократим на $e^{3x} \neq 0$, получим

$$9Ax^2 + (9B + 12A)x + 6B + 2A -$$
$$- 2(3Ax^2 + (3B + 2A)x + B) - 3(Ax^2 + Bx) = x + 2,$$
$$8Ax + 2A + 4B = x + 2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8A = 1, \\ 2A + 4B = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/8, \\ B = 7/16. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения $A$ и $B$ в выражение для $y^*$, найдем частное решение уравнения

$$y^* = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x} .$$

Общее решение уравнения находится как сумма общего решения $\bar{y}$ уравнения без правой части и частного решения $y^*$ уравнения, т. е.

$$y = \bar{y} + y^* = \frac{x}{8}\left(x + \frac{7}{2}\right)e^{3x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

## Тест 12

| | |
|---|---|
| **А1.** Функция $y = \sin x$, является решением дифференциального уравнения: | 1) $y' = 2\cos x$; 2) $y' = \mathrm{tg}\, x$;<br>3) $y' = \sin x$; 4) $y' = \cos x$;<br>5) $y' = \cos 2x$. |
| **А2.** Какой порядок имеет дифференциальное уравнение $y' + y'' + y''' = y$? | 1) 1; 2) 2;<br>3) 3; 4) 4; 5) 5. |
| **А3.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 3x^2$. | 1) $y = x + C$; 2) $y = x^3 + C$;<br>3) $y = 2x^3 + C$; 4) $y = x^2 + C$;<br>5) $y = 3x^2 + C$. |
| **А4.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 2^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{1}{\ln 2}$. | 1) $y = \frac{2^x}{\ln 2}$; 2) $y = \frac{2^x}{\ln x}$;<br>3) $y = 2x + \ln 2$;<br>4) $y = x^2 + \ln 2$;<br>5) $y = 2^{2x}$. |
| **А5.** Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (2x + 1)dx$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. | 1) $y = 2x^2 - 2$;<br>2) $y = x^2 + x$;<br>3) $y = x^2 + x + 2$;<br>4) $y = x^2 - x - 2$;<br>5) $y = x^2 + x - 2$. |
| **В1.** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. В ответе указать $y(\ln 2)$. | |
| **В2.** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $x(y' - y) = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$. В ответе записать $y(e)2e^{-e}$. | |
| **В3.** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' = \mathrm{tg}\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0{,}5$; $y'(0) = 0$ и вычислить $\frac{24}{8-\pi} \cdot y\left(\frac{\pi}{4}\right)$. | |

| |
|---|
| **B4.** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' - y' = 2 - 2x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$ и вычислить $\frac{5}{e+1} \cdot y(1)$. |
| **B5.** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y'' + 4y = \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$ и вычислить $3 \cdot y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. |

## 13 ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

### Контрольная работа 1

| | | |
|---|---|---|
| **A1** | Найти определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$. | 1) 27; 2) 54; 3) –54; 4) 123; 5) 15. |

*Решение.*
Используя формулу (3.2) вычисления определителя третьего порядка, имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-4) \cdot 3 -$$

$$-4 \cdot 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \cdot (-4) =$$

$$= 0 - 6 - 48 + 16 - 0 - 16 = -54.$$

*Ответ*: 3) –54.

| | | |
|---|---|---|
| **A2** | Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = (2; 3; 4)$, $\vec{b} = (2; -3; -1)$. | 1) 9; 2) –9; 3) 12; 4) 6; 5) –12. |

*Решение.*
Если векторы заданы своими координатами, то скалярное произведение находится по формуле (5.7):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

Для данных векторов $\vec{a} = (2;3;4)$ , $\vec{b} = (2;-3;-1)$ :

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2 + 3\cdot(-3) + 4\cdot(-1) = 4 - 9 - 4 = -9.$

*Ответ*: 2) –9.

| | | |
|---|---|---|
| **А3** | Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ , если $\vec{a} = (3;-2;4)$ и $\vec{b} = (3;-1;7)$ . | 1) (10; –9; 3);<br>2) (10; –9; –3);<br>3) (–10; 9; 3);<br>4) (–10; –9; 3);<br>5) (–10; –9; –3). |

*Решение*.

Для вычисления векторного произведения используем его четвертое свойство и формулу (5.9):

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-14+4) - \vec{j}(21-12) + \vec{k}(-3+6) = -10\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}.$$

То есть получен вектор $\vec{c} = (-10;-9;3)$ .

*Ответ*: 4) (–10; –9; 3).

| | | |
|---|---|---|
| **А4** | Найти $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{15}$ . | 1) –2; 2) 4;<br>3) 2; 4) 1;<br>5) –1. |

*Решение*.

Для вычисления $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{15}$ необходимо воспользоваться формулой Муавра (1.6). Предварительно найдем модуль и аргумент числа $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} .$$

$$z^{15}=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}=1^{15}\cdot\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{15\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\cos(5\pi)-i\sin(5\pi)=-1-i\cdot 0=-1.$$

*Ответ*: 5) –1.

| | | |
|---|---|---|
| **A5** | Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+2}{3x^2+1}$. | 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5. |

*Решение*.

Имеем неопределенность вида $\infty/\infty$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель на $x^2$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{3}=1.$$

*Ответ*: 1) 1.

**B1** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}2x_1+\ x_2+2x_3=6,\\ 2x_1-x_2+2x_3=2,\\ 4x_1+x_2+3x_3=8.\end{cases}$$

*Решение*.

Исключим из второго и третьего уравнений системы неизвестную $x_1$. Для этого первое уравнение умножим на (–1) и сложим со вторым, а потом первое уравнение умножим на (–2) и сложим с третьим

$$\begin{cases}2x_1+\ x_2+2x_3=6,\\ 2x_1-x_2+2x_3=2,\\ 4x_1+x_2+3x_3=8.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+\ x_2+2x_3=6,\\ 0\quad-2x_2+0\quad=-4,\\ 0\quad-x_2-\ x_3=-4.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_2 = 2$, из третьего $x_3 = 2$. Тогда из первого уравнения $x_1 = 0$.

*Ответ*: (0; 2; 2).

**B2** Найти $f'(1)$, если $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-1}$.

*Решение*.

Используем правила и формулы дифференцирования:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ (u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Найдем $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{2x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(2x^2-1) - 4x\cdot x^3}{(2x^2-1)^2} = \frac{2x^4-3x^2}{(2x^2-1)^2}.$$

Тогда $f'(1) = \dfrac{2\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2}{(2\cdot 1^2 - 1)^2} = -1.$

*Ответ*: –1.

| | |
|---|---|
| **В3** | Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(3;\ 1;\ 4)$, $A_2(2;\ 2;\ 3)$, $A_3(4;\ 7;\ 5)$. |

*Решение*.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $A_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, которые не лежат на одной прямой имеет вид (6.12):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Используя это равенство, имеем

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ 2-3 & 2-1 & 3-4 \\ 4-3 & 7-1 & 5-4 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$7\cdot(x-3) - 0\cdot(y-1) - 7\cdot(z-4) = 0,$$

$$7x - 7z + 7 = 0,$$

$$x - z + 1 = 0.$$

*Ответ*: $x - z + 1 = 0$.

| | |
|---|---|
| **В4** | Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-7}{4}$ и плоскости $x + 2y + 3z - 16 = 0$. |

*Решение*.

Пусть $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-7}{4} = t$. Выразим из этих равенств $x$, $y$ и $z$:

$$x = -2t + 1,\ y = 3t + 5,\ z = 4t + 7\ .$$

Подставим эти значения в уравнение плоскости $x + 2y + 3z - 16 = 0$.

$$-2t + 1 + 2(3t + 5) + 3(4t + 7) - 16 = 0,$$

$$16t = -16,\ \ t = -1.$$

Тогда $x = 3$, $y = 2$, $z = 3$.

*Ответ*: (3; 2; 3).

**B5** Привести уравнение кривой второго порядка $x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ к каноническому виду. Найти координаты вершин и фокусов.

*Решение*.

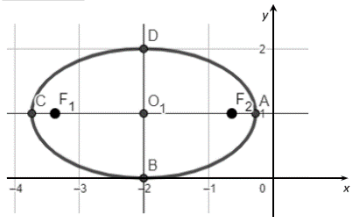
Выделим в данном уравнении полные квадраты неизвестных

$$x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 4 = 0\ ,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 3y^2 - 6y + 3 - 3 + 4 = 0,$$

$$(x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 = 3,$$

$$\frac{(x + 2)^2}{3} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1.$$




Это каноническое уравнение эллипса, центр которого находится в точке $O_1(–2;\ 1)$, большая полуось $a = \sqrt{3}$ , а малая – $b = 1$. Фокусы находятся на прямой $y = 1$ и симметричны относительно токи $O_1$. Если обозначить расстояние между фокусами $2c$, то, используя равенство $b^2 = a^2 - c^2$ , можно найти $c$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}.$$

Тогда координаты фокусов: $F_1(-2 - \sqrt{2}; 1),\ F_2(-2 + \sqrt{2}; 1)$ , а координаты вершин $A(-2 + \sqrt{3}; 1)$ , $B(-2; 0)$ , $C(-2 - \sqrt{3}; 1)$ , $D(-2; 2)$ .

*Ответ*: $F_1(-2 - \sqrt{2}; 1),\ F_2(-2 + \sqrt{2}; 1)$ , $A(-2 + \sqrt{3}; 1)$ , $B(-2; 0)$ , $C(-2 - \sqrt{3}; 1)$ , $D(-2; 2)$ .

**Контрольная работа 2**

<table>
<tr><td>А1</td><td>Найти неопределенный интеграл $\int (2x-3)dx$.</td><td>1) $2\sqrt{x}+\sqrt{3}x+C$;<br>2) $x^2-3x+C$; 3) $x^2+3x+C$;<br>4) $2x^3+3x+C$; 5) $x^3-3x+C$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение.<br>Используя свойства неопределенного интеграла и таблицу интегралов, имеем<br>$$\int (2x-3)dx = 2\int xdx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^2 - 3x + C.$$<br>Ответ: 2) $x^2-3x+C$.</td></tr>
<tr><td>А2</td><td>Найти неопределенный интеграл $\int 5^x\,dx$.</td><td>1) $-\frac{5^x}{\ln 5}+C$; 2) $\frac{3^x}{\log_3 x}+C$;<br>3) $\frac{5^x}{\ln 5}+C$; 4) $-\frac{5^x}{\log_5 x}+C$;<br>5) $\frac{x^5}{\log_5 x}+C$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение.<br>Воспользуемся табличным интегралом $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$, получим<br>$$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5}+C.$$<br>Ответ: 3) $\frac{5^x}{\ln 5}+C$.</td></tr>
<tr><td>А3</td><td>Найти неопределенный интеграл $\int \sin 6x dx$.</td><td>1) $\frac{1}{6}\cos 6x+C$; 2) $-\frac{1}{2}\sin 2x+C$;<br>3) $-\frac{1}{6}\operatorname{tg} 6x+C$; 4) $-\frac{1}{6}\cos 6x+C$;<br>5) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x+C$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Решение.<br>Используя преобразования дифференциала $dx = \frac{1}{6} d(6x)$ и табличный интеграл $\int \sin u du = -\cos u + C$, имеем<br>$$\int \sin 6x dx = \frac{1}{6} \int \sin 6x d(6x) = -\frac{1}{6} \cos 6x + C.$$<br>Ответ: 4) $-\frac{1}{6} \cos 6x + C$.</td></tr>
<tr><td>А4</td><td>Найти определенный интеграл $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx$.</td><td>1) 4; 2) 0; 3) 1;<br>4) 2; 5) 3.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение.<br>Найдем первообразную и применим формулу Ньютона – Лейбница:<br>$$\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx = \left( 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 =$$<br>$$= \left( x^3 + x^2 + x \right) \Big|_0^1 = 1^3 + 1^2 + 1 - 0 = 3.$$<br>Ответ: 5) 3.</td></tr>
<tr><td>А5</td><td>Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 5y' - 6y = 0$.</td><td>1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$;<br>2) $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$;<br>3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$;<br>4) $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x}$;<br>5) $y = C_1 + C_2 e^{-6x}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение.<br>Составим характеристическое уравнение $k^2 + 5k - 6 = 0$. Корнями этого уравнения являются $k_1 = 1, k_2 = -6$. Следовательно общее решение уравнения $y'' + 5y' - 6y = 0$ будет иметь вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$.<br>Ответ: 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$.</td></tr>
<tr><td>В1</td><td colspan="2">Найти неопределенный интеграл $\int (x+1) \cdot e^x dx$.</td></tr>
</table>

*Решение.*
Воспользуемся формулой интегрирования по частям (9.1)

$$\int (x+1)\cdot e^{x}dx = \left[\begin{matrix} u = x+1, & du = dx, \\ dv = e^{x}dx, & v = e^{x} \end{matrix}\right] = (x+1)\cdot e^{x} - \int e^{x}dx =$$

$$= (x+1)\cdot e^{x} - e^{x} + C = x\cdot e^{x} + e^{x} - e^{x} + C = x\cdot e^{x} + C.$$

*Ответ*: $x\cdot e^{x} + C$.

**В2** Найти определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$.

*Решение.*

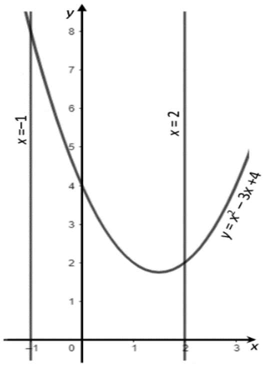
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\cdot \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) - \sin 0\right) = \frac{1}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

*Ответ*: $\frac{1}{3}$.

**В3** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 - 3x + 4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

*Решение.*
В системе координат изобразим указанные кривые. Для вычисления площади используем формулу (10.4).




$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 4 - 0)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{8}{3} - 6 + 8 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 = 10,5.$$

*Ответ*: 10,5.

**В4** Найти частное решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$ и вычислить $y(0,5)$.

*Решение.*
Данное дифференциальное уравнение относится к линейным первого порядка (12.8). Решим его, используя подстановку Бернулли.
Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{2}{x^2}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

Подберем $v$ так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль

$$v' - \frac{1}{x}v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \; v = x.$$

При таком значении $v$ уравнение примет вид

$$u'x = -\frac{2}{x^2}, \quad u' = -\frac{2}{x^3}, \quad u = -2\int\frac{dx}{x^3} = -2\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C = \frac{1}{x^2} + C.$$

Следовательно, $y = uv = \left(\frac{1}{x^2} + C\right)\cdot x = \frac{1}{x} + Cx$.

Используя условие $y(1) = 1$, найдем $C$: $C = 0$.

Тогда частное решение имеет вид $y(x) = \frac{1}{x}$.

Вычислим $y(0,5) = \frac{1}{0,5} = 2.$

*Ответ*: 2.

| | |
|---|---|
| **В5** | Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y = \sin 2x.$ |

*Решение.*
Дифференциальное уравнение относится к типу (12.16). Составим и решим характеристическое уравнение соответствующего однородного:

$$k^2 - 3 = 0, \; k = \pm\sqrt{3}, \; \bar{y} = C_1 e^{\sqrt{3}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{3}\cdot x}.$$

По левой части уравнения, используя таблицу 12.2, составим вид частного решения: $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$. Тогда

$$(y^*)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$(y^*)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Подставив в исходное уравнение вместо $y$ и $y''$ найденные $y^*$ и $(y^*)''$, найдем неопределенные коэффициенты $A$ и $B$:

$$y'' - 3y = \sin 2x,$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 3\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) = \sin 2x,$$

$$-7A\cos 2x - 7B\sin 2x = \sin 2x,$$

$$\begin{cases} -7A = 0, \\ -7B = 1, \end{cases} \begin{cases} A = 0, \\ B = -1/7. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{\sqrt{3}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{3}\cdot x} - \frac{1}{7}\sin 2x.$$

*Ответ*: $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{\sqrt{3}\cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{3}\cdot x} - \frac{1}{7}\sin 2x$.

## 14 КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

**Числовые множества:**

1) множество **натуральных** чисел $N$, состоит из чисел, которые применяют при счете, т. е. $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$;

2) множество **целых** чисел $Z$, состоит из натуральных чисел, противоположных им и числа ноль, т. е. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$;

3) множество **рациональных** чисел $Q$, состоит из чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$;

4) множество **иррациональных** чисел $I$, состоит из бесконечных непериодических десятичных дробей;

5) множество **действительных** чисел $R$, состоящее из рациональных и иррациональных чисел.

**Степени и корни**

Если $n \in N$ ($n > 1$), то **арифметическим корнем** $n$-й степени из числа $a \geq 0$ называется число $b \geq 0$ такое, что $b^n = a$, и обозначается $b = \sqrt[n]{a}$. Если $a > 0$ и $n \in N$, то по определению $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} = -a^{\frac{1}{2n+1}}$.

Определение арифметического корня вводится только для корней четной степени, а корни нечетной степени извлекаются из любых чисел, причем однозначно. При любом $x$ и любом натуральном $n$ справедливы равенства

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Если $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, то для любого $a > 0$ справедливо $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n > 1$, $m > 1$, $k > 1$ $n$, $m$, $k \in N$, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0)$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Если $a$ – положительное, $x$ – рациональное число, то под степенью $a^x$ понимают положительное число, определенное следующим образом:

если $x$ – натуральное, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}}$;

если $x$ – целое, то $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x \text{ сомножителей}}$ при $x \in N$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, где $x = -n$, $n \in N$; $a^0 = 1$, если $x \neq 0$, ($0^0$ не определено);

если $x$ – рациональное и $x = \dfrac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$, $q > 1$, то $a^x = a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

Для любых действительных $x$ и $y$ и любых $a > 0$, $b > 0$ справедливы равенства: $a^0 = 1$; $a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$; $(ab)^x = a^x b^x$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; $\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}$.

**Формулы сокращенного умножения:**

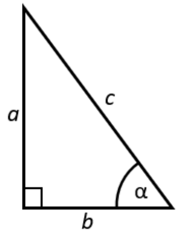
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2),$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

**Разложения квадратного трехчлена на линейные множители**

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \beta$, то имеет место тождество $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

## Тригонометрия




$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

| Функция | Угол $x$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° |
| | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 |
| $\operatorname{tg} x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ |

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

*Арксинусом* числа $a$ называется такой угол $\alpha$ из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$, т. е.

$$\alpha = \arcsin a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\arcsin a) = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

*Арккосинусом* числа $a$ называется такой угол α из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен $a$, т. е.

$$\alpha = \arccos a \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a, \\ 0 \le \alpha \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\arccos a) = a, \\ 0 \le \arcsin a \le \pi. \end{cases}$$

*Арктангенсом* числа $a$ называется такой угол α из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $a$, т. е.

$$\alpha = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

*Арккотангенсом* числа $a$ называется такой угол α из отрезка $[0;\pi]$, котангенс которого равен $a$, т. е.

$$\alpha = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha = a, \\ 0 < \alpha < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a, \\ 0 < \operatorname{arcctg} < \pi. \end{cases}$$

## Логарифмы

*Логарифмом* положительного числа $b$ по основанию $a$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание $a$, чтобы получить число $b$. Обозначают $\log_a b$. Справедливо равенство: $a^{\log_a b} = b$, которое называют *основным логарифмическим тождеством*. Логарифм по основанию 10 записывают lg $a$, т. е. $\lg a = \log_{10} a$. Логарифм по основанию $e \approx 2{,}71828$ называют натуральным и записывают $\ln a$, т. е. $\ln a = \log_e a$.

*Свойства логарифмов:*

для всех действительных $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ справедливы равенства

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x,$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad (b > 0, b \neq 1).$$

## Греческий алфавит

| Буква | Название | Буква | Название |
|---|---|---|---|
| Α α | *альфа* | Ν ν | *ни (ню)* |
| Β β | *вита (бета)* | Ξ ξ | *кси* |
| Γ γ | *гамма* | Ο ο | *омикрон* |
| Δ δ | *дельта* | Π π | *пи* |
| Ε ε | *эпсилон* | Ρ ρ | *ро* |
| Ζ ζ | *зита (дзета)* | Σ σ ς | *сигма* |
| Η η | *ита (эта)* | Τ τ | *таф (тау)* |
| Θ θ | *фита (тета)* | Υ υ | *ипсилон* |
| Ι ι | *йота* | Φ φ | *фи* |
| Κ κ | *каппа* | Χ χ | *хи* |
| Λ λ | *ламда (лямбда)* | Ψ ψ | *пси* |
| Μ μ | *ми (мю)* | Ω ω | *омега* |

## Основные математические и логические символы

| Символ | Название | Значение |
|---|---|---|
| $\Rightarrow$ | следование | $A \Rightarrow B$ означает, «если $A$ верно, то $B$ также верно». |
| $\Leftrightarrow$ | равносиль-ность | $A \Leftrightarrow B$ означает, «$A$ верно тогда и только тогда, когда $B$ верно». |
| $\wedge$ | и | $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда $A$ и $B$ истинны. |
| $\vee$ | или | $A \vee B$ истинно когда хотя бы одно из условий $A$ или $B$ истинно. |
| $\forall$ | для любых, для всех, для всякого | $\forall x$, $A(x)$ означает, что $A(x)$ верно для любого $x$. |
| $\exists$ | существует | $\exists x$, $A(x)$ означает, что существует хотя бы одно $x$ для которого $A(x)$ верно. |
| $\in$ | принадлежит | $x \in A$, означает, что элемент $x$ при-надлежит $A$. |
| $\notin$ | не принадле-жит | $x \notin A$, означает, что элемент $x$ не при-надлежит $A$. |
| $\cup$ | объединение | $A \cup B$, означает множество, содержа-щее все элементы из $A$ и $B$. |
| $\cap$ | пересечение | $A \cap B$, означает множество, содержа-щее множество одинаковых элемен-тов, принадлежащих $A$ и $B$. |
| $\sum$ | сумма | $\sum_{k=1}^{n} a_k$ , означает сумму $a_k$, где $k$ при-нимает значение от 1 до $k$. |

**Таблица производных**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $C' = 0$, $C$ – постоянная | **3** | $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2** | $x' = 0$ | **4** | $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| **5** | $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ | **12** | $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| **6** | $(a^x)' = a^x \ln a$ | **13** | $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| **7** | $(e^x)' = e^x$ | **14** | $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| **8** | $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ | **15** | $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| **9** | $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ | **16** | $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| **10** | $(\sin x)' = \cos x$ | **17** | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| **11** | $(\cos x)' = -\sin x$ | | |

## Таблица интегралов

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ | **9** | $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ |
| **2** | $\int \dfrac{du}{u} = \ln \lvert u \rvert + C$ | **10** | $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ |
| **3** | $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ | **11** | $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} \right\rvert + C$ |
| **4** | $\int e^u du = e^u + C$ | **12** | $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln \left\lvert \operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$ |
| **5** | $\int \sin u du = -\cos u + C$ | **13** | $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$ |
| **6** | $\int \cos u du = \sin u + C$ | **14** | $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \lvert u + \sqrt{u^2 + a^2} \rvert + C$ |
| **7** | $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \lvert \cos u \rvert + C$ | **15** | $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C$ |
| **8** | $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \lvert \sin u \rvert + C$ | **16** | $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{a+u}{a-u} \right\rvert + C$ |

## 15 ОТВЕТЫ

### Тест 1

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | –2 | –4096 | –1 | 15 | 5 |

### Тест 2

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 6 | 29 | 48 | 3 | 6959 |

### Тест 3

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | –296 | –2 | 1 | –380 | 4 |

### Тест 4

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 9 | 3 | 15 | –558 |

### Тест 5

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | –1440 | –423 | 4 | 44 | 150 |

### Тест 6.1

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 1 | 4 | 7 | 1 | 18 | 3 | 4 |

### Тест 6.2

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 90 | 30 | 0 | 4 |

### Тест 7

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 2 | 2 | 3 | 12 | 2 | 13 | 1 | 6 |

### Тест 8

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 10 | 7 | –161 | 4 |

**Тест 9**

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 2 | 2 | 0 | –10 | 7 | 2 | 52 |

**Тест 10**

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 5 | 1 | 6 | 4 | 2 | 256 | 3 |

**Тест 11**

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 | 1 | 4 | 2 | 0 | 17 | 2 | 12 |

**Тест 12**

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 | 5 | 2 | 2 | 3 | 5 | –2 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гусак, А. А.** Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак : ТетраСистемс, 2003. – Т. 2. – 448 с.

2 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

3 **Индивидуальные** задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 7-е изд. – Минск : Выш. шк., 2013. – 304 с.

4 **Индивидуальные** задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск : Выш. шк., 2014. – 396 с.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

*НОВИКОВ Сергей Петрович*
*СОСНОВСКИЙ Иван Иванович*

**Математика**
**для студентов заочной формы получения образования**

Пособие

Редактор А. А. Павлюченкова
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать 22.04.2025 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 4,58. Тираж 200 экз.
Зак № 793. Изд № 24.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 14.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель