МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

З. Г. ЕФРЕМОВА, Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Раздел «Кинематика»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

Пособие для студентов технических специальностей вузов

Гомель 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

З. Г. ЕФРЕМОВА, Д. А. ЧЕРНОУС, О.С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «Кинематика»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

Пособие
для студентов технических специальностей вузов

Одобрено методической комиссией факультета безотрывного обучения

Гомель 2004

УДК 531.1 (075.8)
Ш61

Шимановский А. О., Кузёмкина Г. М.

Ш61 Теоретическая механика. Раздел «Кинематика» (Обзор материала и задания для контрольных работ): Пособие для студентов технических специальностей вузов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 51 с.

Изложены краткие сведения из раздела «Кинематика» курса теоретической механики в соответствии с программой технических вузов. Разобраны примеры решения задач по изучаемым темам. Приведены условия заданий контрольных работ по теоретической механике.

Предназначено для студентов факультета безотрывного обучения.

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры “Техническая физика и теоретическая механика” Белорусского государственного университета транспорта **А. В. Заворотный**.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие содержит краткий обзор материала раздела «Кинематика» курса теоретической механики. Здесь же приводятся примеры решения задач и задания для контрольных работ студентов заочной формы обучения. По указанию преподавателя объем контрольной работы может быть сокращен для студентов отдельных специальностей.

Каждое задание содержит 30 вариантов задач. **Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по двум последним цифрам учебного шифра** с использованием таблицы 1. Буква «К» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Кинематика».

Перед выполнением каждого задания контрольной работы студент должен ознакомиться с теорией, опираясь не только на материал, изложенный в пособии, но и на учебники [1–3]. Затем он должен разобрать приведенный пример решения задачи, а уже после этого приступать к индивидуальному заданию.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На обложке указываются: название кафедры, название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждой задачи обязательно следует начинать *с новой страницы*. Оформление задачи начинают с указания номера и варианта задачи, ее названия, далее делается чертеж и записывается, что дано и требуется определить (текст условия задачи полностью не переписывают). Чертеж должен быть выполнен в соответствии с требованиями инженерной графики с применением чертежных инструментов, а его размеры должны быть таковы, чтобы позволить ясно показать все векторы скоростей, ускорений и другие детали. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно *обязательно*. Все записи должны быть сделаны доступным для чтения шрифтом. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. д.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице *должны оставляться поля* для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переоформления. **К работе, предъявляемой к повторной проверке (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.**

Ко дню экзамена (зачета) работа должна быть защищена у проверяющего ее преподавателя. При этом все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие содержит краткий обзор материала раздела «Кинематика» курса теоретической механики. Здесь же приводятся примеры решения задач и задания для контрольных работ студентов заочной формы обучения. По указанию преподавателя объем контрольной работы может быть сокращен для студентов отдельных специальностей.

Каждое задание содержит 30 вариантов задач. **Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по двум последним цифрам учебного шифра** с использованием таблицы 1. Буква «К» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Кинематика».

Перед выполнением каждого задания контрольной работы студент должен ознакомиться с теорией, опираясь не только на материал, изложенный в пособии, но и на учебники [1–3]. Затем он должен разобрать приведенный пример решения задачи, а уже после этого приступать к индивидуальному заданию.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На обложке указываются: название кафедры, название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждой задачи обязательно следует начинать *с новой страницы*. Оформление задачи начинают с указания номера и варианта задачи, ее названия, далее делается чертеж и записывается, что дано и требуется определить (текст условия задачи полностью не переписывают). Чертеж должен быть выполнен в соответствии с требованиями инженерной графики с применением чертежных инструментов, а его размеры должны быть таковы, чтобы позволить ясно показать все векторы скоростей, ускорений и другие детали. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно *обязательно*. Все записи должны быть сделаны доступным для чтения шрифтом. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. д.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице *должны оставляться поля* для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переоформления. К работе, предъявляемой к повторной проверке (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

Ко дню экзамена (зачета) работа должна быть защищена у проверяющего ее преподавателя. При этом все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Таблица 1 – **Варианты заданий для выполнения контрольной работы**

Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий			
	К-1	К-2	К-3	К-4		К-1	К-2	К-3	К-4		К-1	К-2	К-3	К-4		К-1	К-2	К-3	К-4
01	7	3	16	23	26	24	4	22	28	51	1	7	19	6	76	11	5	19	25
02	26	14	8	18	27	30	22	11	5	52	9	15	26	1	77	24	19	9	17
03	11	27	29	3	28	22	17	3	14	53	4	25	28	27	78	22	29	11	1
04	18	2	17	29	29	8	8	20	24	54	16	2	13	28	79	2	8	15	20
05	22	25	1	10	30	5	19	26	10	55	11	28	30	2	80	15	18	29	10
06	4	16	20	1	31	14	20	13	2	56	6	30	17	24	81	21	26	17	3
07	1	6	14	27	32	9	9	24	16	57	17	26	4	12	82	18	3	12	22
08	14	28	2	8	33	20	23	7	13	58	30	11	22	29	83	26	27	9	12
09	21	11	8	14	34	12	5	16	18	59	14	29	8	4	84	9	25	30	6
10	8	9	15	19	35	7	28	25	30	60	26	17	11	21	85	4	10	13	21
11	16	22	10	2	36	15	14	9	15	61	27	13	5	16	86	16	23	28	5
12	25	12	23	5	37	25	30	4	8	62	30	28	1	7	87	13	1	23	30
13	29	24	7	11	38	2	10	18	22	63	13	24	9	18	88	23	16	6	19
14	15	4	19	22	39	23	24	1	9	64	24	6	30	9	89	6	7	20	16
15	23	20	4	15	40	10	12	14	6	65	7	22	14	25	90	29	13	2	24
16	12	13	24	4	41	17	29	7	19	66	28	26	3	15	91	3	26	21	29
17	19	30	3	23	42	19	16	23	4	67	15	9	12	26	92	17	21	10	25
18	10	7	18	27	43	29	1	19	13	68	12	20	25	3	93	28	22	5	12
19	3	27	12	7	44	6	21	12	11	69	19	8	6	17	94	14	2	26	9
20	9	10	22	13	45	13	6	21	1	70	2	21	21	10	95	5	29	17	4
21	27	5	14	9	46	16	27	2	14	71	3	12	24	8	96	10	17	25	11
22	5	23	16	28	47	21	25	10	3	72	25	19	5	30	97	1	24	15	8
23	13	18	10	6	48	18	11	27	7	73	8	3	18	20	98	27	15	6	20
24	20	1	28	26	49	4	3	15	23	74	20	15	27	5	99	20	30	11	7
25	6	14	27	17	50	11	18	13	26	75	28	4	16	21	00	12	23	29	2

1 ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1 Некоторые положения теории

1.1.1 Основной закон динамики материальной точки

Динамические уравнения движения материальной точки устанавливают связь между координатами точки и действующими на нее силами. Эти уравнения являются следствием из основного закона динамики материальной точки: произведение массы материальной точки m на ее ускорение $\overline{a}$ равно геометрической сумме сил, действующих на точку.

$$m\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i. \qquad (1.1)$$

Здесь n — количество сил, действующих на точку; $\overline{F}_i$ — i-ая сила, действующая на точку. Проецируя векторное равенство на декартовы оси координат, получим динамические уравнения

$$ma_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}, \quad ma_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}, \quad ma_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} \qquad (1.2)$$

Здесь a_x, a_y, a_z — проекции ускорения материальной точки на декартовы оси. При естественном способе описания движения динамические уравнения движения материальной точки будут иметь вид

$$ma_\tau = \sum_{i=1}^{n} F_{\tau i}, \quad ma_n = \sum_{i=1}^{n} F_{ni}, \quad ma_b = \sum_{i=1}^{n} F_{bi} \qquad (1.3)$$

Здесь a_τ, a_n, a_b — касательная, нормальная и бинормальная составляющие ускорения точки соответственно ($a_b = 0$).

1.1.2 Основные задачи динамики материальной точки

Динамические уравнения движения позволяют решать две основные задачи динамики материальной точки.

- **Прямая задача** динамики материальной точки: зная массу материальной точки, действующие на нее силы и начальные условия (координату и скорость при $t = 0$), определить параметры ее движения

— скорость, ускорение, закон движения и траекторию. Эта задача решается следующим образом:

1 Известные силы проектируются на выбранные оси. Из уравнений (1.2) или (1.3) определяются компоненты ускорения точки.

2 Решаются дифференциальные уравнения (1.4) (при координатном способе описания движения) или (1.5) (при естественном) с учетом начальных условий

- **Обратная задача** динамики материальной точки: при заданной массе материальной точки и законе ее движения определить силы, действующие на точку. Данная задача решается следующим образом:

1 Зная закон движения материальной точки (зависимость координат от времени), определяют компоненты ускорения. При координатном способе описания движения

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.4}$$

При естественном способе описания

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{1.5}$$

Здесь $s(t)$ — дуговая координата точки.

2 Подставив полученные ускорения в выражения (1.2) (при координатном способе описания) или (1.3) (при естественном), определим проекции искомых сил.

3 Определим силы по их проекциям $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

1.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача 1

Тело массы m = 1 кг, принимаемое за материальную точку, получив в точке A начальную скорость v_A = 5 м/с, движется по траектории ABC (рисунок 1.1). На прямолинейном участке AB на нее действует сила $F = 3(t + t^2)$ Н. Время движения по участку AB t_1 = 3 с. Известно, что $\alpha = 60^0$; $\beta = 45^0$; $\gamma = 30^0$; r = 5,5 м, коэффициент трения скольжения f = 0,2.

Определить: скорости тела v_B, v_C в положениях B и C; путь S_1, пройденный телом между точками A и B; такую начальную скорость u_A, при которой за время t_1 точка пройдет путь $S_1' = 5$ м; время t_2 движения по участку *BC*; длину отрезка *d*; время полета t_O из положения *B* до положения *O*, модуль скорости материальной точки в котором равен v_O = 10 м/с. Сопротивлением воздуха на участке *BC* пренебречь.

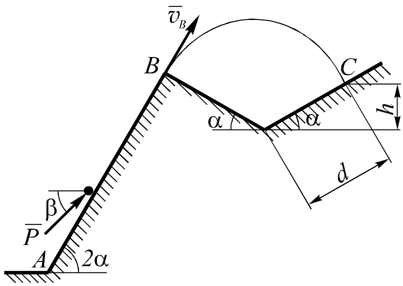


Рисунок 1.1

Решение:

1 *Рассмотрим движение тела на участке AB* (см. Рисунок 1.2).

1.1 Указываем векторы сил, действующих на тело. $\overline{G}$ — сила тяжести; $\overline{F}$ — активная сила; $\overline{N}$ — нормальная реакция; $\overline{F}_{тр}$ — сила трения скольжения.

1.2 Выбираем оси координат. На рассматриваемом участке движение точки прямолинейно, поэтому ось *x* направим в сторону движения точки.

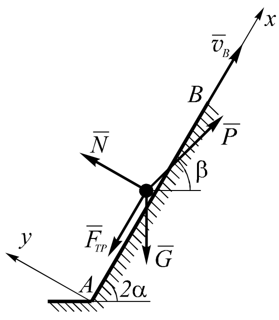


Рисунок 1.2

1.3 Запишем уравнение движения материальной точки в векторной форме

$$m\bar{a}=\sum_{i=1}^{n}\bar{F_i}=\bar{F}+\bar{F}_{\text{тр}}+\bar{G}+\bar{N}\ .$$

В проекциях на оси координат

$$ma_x=-F_{\text{тр}}-G\sin\alpha+F\cos(\alpha-\beta),$$
$$ma_y=N-G\cos\alpha-F\sin(\alpha-\beta).$$

Для силы трения скольжения воспользуемся законом Кулона $F_{\text{тр}}=fN$. В связи с тем, что материальная точка движется прямолинейно, проекция ускорения на ось y равна нулю $a_y=0$. Тогда динамические уравнения примут вид

$$\begin{cases} ma_x=-fN-mg\sin\alpha+F\cos(\alpha-\beta),\\ 0=N-mg\cos\alpha-F\sin(\alpha-\beta).\end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что

$$N=mg\cos\alpha+F\sin(\alpha-\beta).$$

Тогда из первого уравнения получим

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{F}{m}\left(\cos(\alpha-\beta)-f\sin(\alpha-\beta)\right)-g\left(\sin\alpha+f\cos\alpha\right) \qquad (1.6)$$

1.4 Решим полученное дифференциальное уравнение. Подставим известные численные значения входящих в выражение (1.6) величин:

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{(3t+3t^2)\text{кг}\cdot\text{м/с}^2}{1\text{кк}}(\cos15^0-0{,}2\sin15^0)-9{,}8\text{м/с}^2(\sin60^0+0{,}2\cos60^0)=$$
$$=\left(2{,}742t^2+2{,}742t-9{,}467\right)\text{м/с}^2\ .$$

Получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения перенесем dt в правую часть

$$dv_x=\left(2{,}742t^2+2{,}742t-9{,}467\right)dt.$$

Интегрируем от начала движения до произвольного момента t

$$\int_{v_{x0}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t \left(2{,}742t^2 + 2{,}742t - 9{,}467\right)dt.$$

Т. к. $v_y = 0$, то $v_{x0} = v_0 = v_A = 5$ м/с. После интегрирования получим

$$v_x(t) = 2{,}742\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right) - 9{,}467t + 5 = 0{,}914t^3 + 1{,}871t^2 - 9{,}467t + 5\,.$$

Для нахождения $x(t)$ решим дифференциальное уравнение

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0{,}914t^3 + 1{,}871t^2 - 9{,}467t + 5.$$

Разделяем переменные

$$dx = \left(0{,}914t^3 + 1{,}871t^2 - 9{,}467t + 5\right)dt.$$

Интегрируем это уравнение от начала движения до произвольного момента t

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t \left(0{,}914t^3 + 1{,}871t^2 - 9{,}467t + 5\right)dt.$$

Начало координат выбрано в точке A. Следовательно, начальная координата равна нулю $x_0 = 0$. После интегрирования получим

$$x(t) = 0{,}229t^4 + 0{,}624t^3 - 4{,}734t^2 + 5t.$$

1.5 Для определения пути, пройденного материальной точкой на участке AB, подставим в последнее выражение $t = t_1$.

$$S_1 = x(t_1) = 0{,}229t_1^{\,4} + 0{,}624t_1^{\,3} - 4{,}734t_1^{\,2} + 5t_1 = 3{,}242 \text{ м}.$$

Для определения скорости в точке B подставим в выражение для скорости материальной точки $t = t_1$.

$$v_B = v(t_1) = v_x(t_1) = 0{,}914t_1^3 + 1{,}871t_1^2 - 9{,}467t_1 + 5 = 13{,}616 \text{ м/с}.$$

Если требуется определить такую начальную скорость u_A, при которой $x(t_1) = S_1'$, то

$$S_1' = x(t_1) = 0{,}229t_1^4 + 0{,}624t_1^3 - 4{,}734t_1^2 + u_A t_1 .$$

Выразим из последнего равенства u_A

$$u_A = \frac{1}{t_1}\left(S_1' - 0{,}229t_1^4 - 0{,}624t_1^3 + 4{,}734t_1^2\right).$$

Подставим известные численные значения

$$u_A = \frac{1}{3\text{с}}(5 + 7{,}209)\text{м} = 4{,}07 \text{ м/с} .$$

2 *Рассмотрим движение тела на участке BC* (см. рисунок 1.3).

2.1 Тело движется только под действием силы тяжести $\overline{G}$.

2.2 Выбираем оси координат. В связи с тем, что траектория движения материальной точки заранее не известна, выберем декартовы оси координат. Ось y направим вертикально вниз (параллельно линии действия силы G).

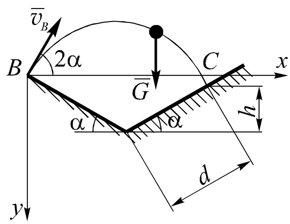


Рисунок 1.3

2.3 Проекции ускорения точки на оси координат не известны. Запишем динамические уравнения движения

$$\begin{cases} ma_x = 0, \\ ma_y = mg. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений. Из первого уравнения системы следует, что $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0.$ Из второго $a_y = \frac{dv_y}{dt} = g.$

2.4 Для определения $x(t)$ найдем зависимость от времени проекции скорости точки на ось x. Для этого решим дифференциальное уравнение $\frac{dv_x}{dt} = 0.$ Проекция скорости на ось x не зависит от времени. Следовательно, для v_x можно записать: $v_x(t) = v_{x0}.$ Здесь v_{x0} — проекция начальной скорости на ось x. Для участка BC начальной является точка B. Следовательно

$$v_{x0} = v_{xB} = v_B \cos\alpha, \quad v_x(t) = v_B \cos\alpha..$$

Для нахождения $x(t)$ решим дифференциальное уравнение

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_B \cos\alpha.$$

Перенесем dt в правую часть $dx = v_B \cos\alpha dt.$

Интегрируем от начала движения до произвольного момента t

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_B \cos\alpha dt.$$

Начало координат выбрано в точке B. Следовательно, начальная координата равна нулю $x_0 = 0$. После интегрирования получим

$$x(t) = v_B \cos\alpha \cdot t.$$

Для определения $y(t)$ найдем зависимость от времени проекции скорости точки на ось y. Для этого решим дифференциальное уравнение

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = g.$$

Разделяем переменные: $dv_y = gdt.$ Интегрируем от начала движения до произвольного момента t

$$\int_{v_{y0}}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t g dt.$$

Здесь v_{y0} — проекция начальной скорости на ось *y*. Для участка *BC* начальной является точка *B*. Следовательно

$$v_{y0} = v_{yB} = -v_B \sin\alpha, \; v_y(t) = gt - v_B \sin\alpha.$$

Для нахождения *y*(*t*) решим дифференциальное уравнение

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt - v_B \sin\alpha.$$

Разделяем переменные

$$dy = (gt - v_B \sin\alpha)dt.$$

Интегрируем от начала движения до произвольного момента *t*

$$\int_0^{y(t)} dy = \int_0^t (gt - v_B \sin\alpha)dt.$$

Так как начало координат выбрано в точке В, то $y_0 = 0$. После интегрирования получим

$$y(t) = \frac{g}{2}t^2 - v_B \sin\alpha \cdot t.$$

2.5 Определив закон движения, можно найти t_2 и *d*. Для этого найдем координаты точки в положении *C*.

$$x_C = h\operatorname{ctg}\gamma + d\cos\gamma = x(t_2) = v_B \cos\alpha \cdot t_2,$$

$$y_C = h - d\sin\gamma = y(t_2) = \frac{g}{2}t_2{}^2 - v_B \sin\alpha \cdot t_2.$$

Подставив известные численные значения, получим

$$\begin{cases} 9{,}526 + 0{,}866d = 6{,}808t_2, \\ 5{,}5 - 0{,}5d = 4{,}9t_2^{\,2} - 11{,}792t_2. \end{cases}$$

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными: t_2 и d. Выразим из первого уравнения системы d

$$d = \frac{6{,}808}{0{,}866}t_2 - \frac{9{,}526}{0{,}866} = 7{,}861t_2 - 11.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы

$$5{,}5 - 3{,}931t_2 + 5{,}5 = 4{,}9t_2^{\,2} - 11{,}792t_2.$$

После приведения подобных слагаемых получим уравнение для t_2

$$4{,}9t_2^{\,2} - 7{,}861t_2 - 11 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, получим

$$t_2 = \frac{1}{9{,}8}(7{,}861 \pm 16{,}655), \quad t_2^- = -0{,}9; \quad t_2^+ = 2{,}5.$$

Так как время не может принимать отрицательных значений, то оставим только положительный корень данного уравнения t_2 = 2,5 с. (Если оба корня окажутся положительными, то следует оставлять наименьший). Тогда

$$d = \frac{1}{0{,}866}\left(6{,}808t_2 - 9{,}526\right) = 8{,}667 \text{ м}.$$

Для определения скорости v_C определим ее проекции на оси координат. Для этого подставим в выражения для проекций скорости найденное значение t_2.

$$v_{xC} = v_x(t_2) = 6{,}808 \text{ м/с},$$
$$v_{yC} = v_y(t_2) = 9{,}8t_2 - 11{,}792 = 12{,}708 \text{ м/с}.$$

Тогда модуль скорости точки v_C определяется следующим образом

$$v_C = \sqrt{v_{xC}^2 + v_{yC}^2} = 14{,}417 \text{ м/с}.$$

Определим время полета материальной точки до положения O, в котором модуль скорости точки равен v_O. Запишем выражение для модуля скорости точки через время t_O

$$v(t_O) = \sqrt{v_x(t_O)^2 + v_y(t_O)^2} = \sqrt{v_B^2 \cos\alpha^2 + (gt_O - v_B \sin\alpha)^2}\ .$$

Раскроем скобки в подкоренном выражении и произведем математические преобразования

$$v(t_O) = \sqrt{g^2 t_O^2 - 2v_B \sin\alpha \cdot gt_O + v_B^2}\ .$$

Модуль скорости точки через время t_O известен и равен v_O

$$v_O = \sqrt{g^2 t_O^2 - 2v_B \sin\alpha \cdot gt_O + v_B^2}\ .$$

Для того, чтобы определить t_O, возведем обе части равенства в квадрат и перенесем все слагаемые в одну часть полученного уравнения

$$g^2 t_O^2 - 2v_B \sin\alpha \cdot gt_O + v_B^2 - v_O^2 = 0\ .$$

Подставим известные численные значения

$$96{,}04 t_O^2 - 231{,}119 t_O + 85{,}395 = 0\ .$$

Получили квадратное уравнение для t_O. Решая данное уравнение, находим

$$t_O = \frac{1}{2 \cdot 96{,}04}\left(231{,}119 \pm \sqrt{231{,}119^2 - 4 \cdot 96{,}04 \cdot 85{,}395}\right) = \frac{1}{192{,}08}\left(231{,}119 \pm 143{,}564\right),$$

$$t_O^- = 0{,}456\text{с}, \quad t_O^+ = 1{,}951\text{с}\ .$$

Наличие двух положительных корней свидетельствует о том, что материальная точка в процессе полета дважды приобретает скорость, равную по модулю v_O.

Ответ:

Закон движения материальной точки на участке *AB*

$$x(t) = 0{,}229t^4 + 0{,}624t^3 - 4{,}734t^2 + 5t,$$
$$y(t) = 0.$$

Закон движения материальной точки на участке *BC*

$$x(t) = 6{,}808t,$$
$$y(t) = 4{,}9t^2 - 11{,}792t.$$

v_B = 13,616 м/с; v_C = 14,417 м/с; S_1 = 3,242 м; u_A = 14,417 м/с

d = 8,667 м; t_2 = 2,5 с; $t_O^- = 0{,}456$с, $t_O^+ = 1{,}951$с .

1.3 Условие задания Д-1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Материальная точка массы *m*, приобретя в точке *A* скорость v_A, движется по траектории *ABC*. По прямолинейному участку *AB* точка движется под действием активной силы *P*(*t*) в течение времени t_1 и проходит путь S_1. По участку *BC* точка движется в течение времени t_2 и проходит путь S_2.

На основании исходных данных, приведенных в таблице 1, для участков *AB* и *BC* выполнить следующие действия:

1) Сделать рисунок, изображая рассматриваемое тело в произвольном положении. Указать векторы сил, действующих на тело. Начала векторов сил размещают в центре тяжести тела, принимаемого за материальную точку.

2) Выбрать оси координат. При этом:

- Если точка движется прямолинейно, то одну из осей декартовой системы координат удобнее направить вдоль линии движения точки.
- Если точка движется по известной криволинейной траектории, то удобнее выбрать естественные оси. Ось касательную направляют вдоль скорости точки в положении, отмеченном на рисунке. Ось нормаль направляют к центру кривизны траектории. Ось бинормаль — перпендикулярно плоскости траектории.

- Если траектория движения неизвестна, то выбирают декартовы оси так, чтобы они составляли известные или легко определяемые углы с векторами сил, действующих на точку. Начало отсчета помещают в начальное положение точки.

3) Составить динамические уравнения движения, используя зависимости (1.2) или (1.3).

4) Решить полученное дифференциальное уравнение и определить закон движения материальной точки.

5) Используя известный закон движения точки и зависимость от времени проекций скорости точки, дополнительно определить:

- для нечетных вариантов — путь S_1 при известной начальной скорости v_A; скорости материальной точки в положениях *B*, *C*; время t_2 движения по участку *BC*; длину *d*.
- для четных вариантов — скорость v_A при известном пути S_1; длину *d*; время полета t_O из положения *B* до положения *O*, модуль скорости материальной точки в котором равен v_O.

Таблица 1.1 – Исходные данные к заданию Д-1

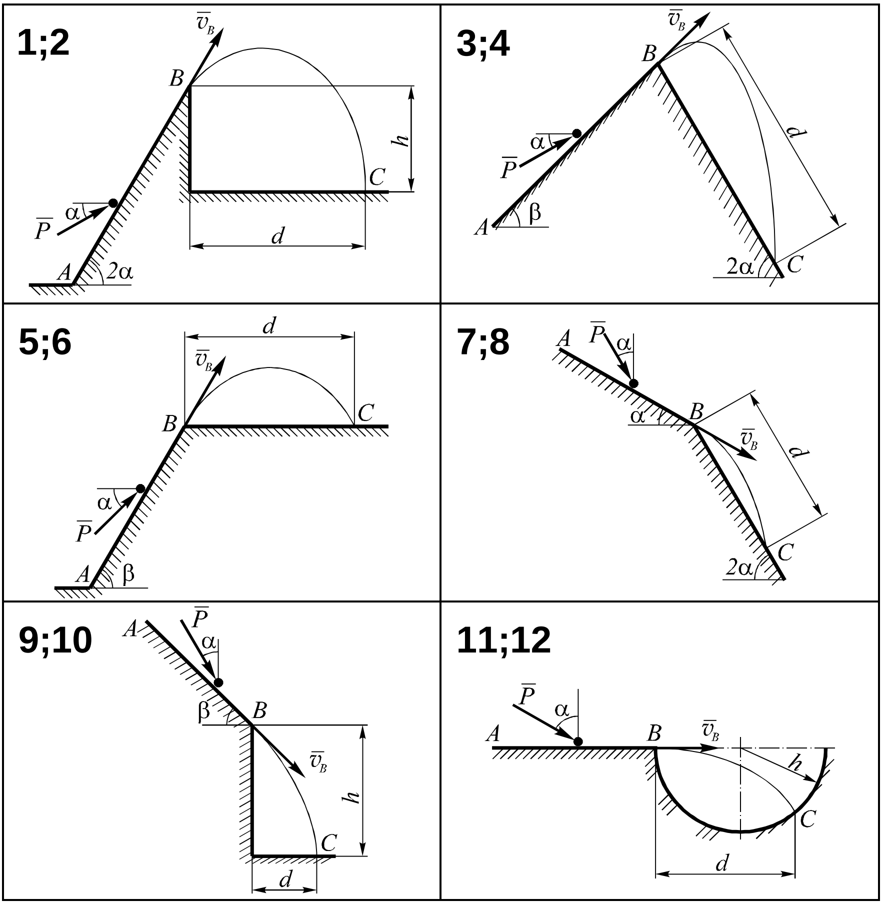
№	*m*, кг	*f*	t_1, с	v_O, м/с	v_O, м/с	*h*, м	S_1, м	*P*(*t*), Н	Углы, град.	
									α	β
1	2	0,2	2	4	—	6	—	$20e^{0,1t}$	30	—
2	0,5	0,1	1	—	4	6	4	$10t-t^2$	30	—
3	3	0,1	4	6	—	—	—	$35\sin\frac{\pi}{8}t$	30	45
4	1	0,06	2	—	3,9	—	7	$15e^{-0,5t}$	30	45
5	3,5	0,4	2,5	7	—	—	—	$8(t^2+t^3)$	45	60
6	0,8	0,1	3	—	0,6	—	4,2	$15\sin\frac{\pi}{3}t$	45	60
7	2	0,15	0,5	0	—	—	—	$\frac{10}{(t+1)^2}$	30	—
8	4	0,6	2	—	4	—	5	$20\cos\frac{\pi}{4}t$	30	—
9	1,5	0,4	1	0	—	3	—	$5e^{-t}$	30	45
10	3	0,55	0,8	—	5	5	2	$8\sin\frac{\pi}{1,6}t$	30	45

11	2,5	0,2	1,5	2	—	1	—	$8\cos\frac{\pi}{3}t$	60	—
12	2	0,1	3	—	1	2	5,6	$\frac{20}{(t+3)^2}$	60	—
13	1	0,25	2	1,2	—	1,5	—	$5(5t-t^3)$	30	—
14	0,4	0,15	1	—	10	0,5	2,5	$2e^{0,2t}$	30	—
15	1,5	0,1	3	1	—	—	—	$1{,}5(t+2)^2$	30	45
16	1	0,2	4	—	6	—	10	$10e^{0,1t}$	30	45
17	1,2	0,3	1	2	—	3	—	$3\sin\frac{\pi}{2}t$	15	45
18	3,5	0,4	0,6	—	4	4	1	$7e^{-0,2t}$	15	45
19	0,6	0,25	2,5	1,5	—	20	—	$1-1{,}5t^2$	30	45
20	2	0,2	3	—	11	10	23	$10\cos\frac{\pi}{3}t$	30	45
21	3	0,5	2	5	—	1	—	$30e^{0,5t}$	30	45
22	0,6	0,05	2	—	5	2	1,2	$3t^2+t^4$	30	45
23	1	0,1	0,8	1	—	—	—	$\frac{20}{(t+1)^3}$	30	—
24	1,5	0,1	2	—	2	—	2	$3\cos\frac{\pi}{8}t$	30	—
25	2	0,25	0,5	2	—	0,5	—	$10e^{-0,5t}$	60	—
26	5	0,3	1,5	—	2,5	1	7	$25t+30t^4$	60	—
27	0,8	0,3	13	1	—	2,5	—	$3\sqrt{t}$	30	45
28	1	0,2	1	—	1,5	2	0,5	$8\sin\frac{\pi}{6}t$	30	45
29	3	0,15	2,5	10	—	—	—	$3t+4t^2$	30	45
30	0,5	0,1	2	—	5	1	1,5	$2e^t$	60	—

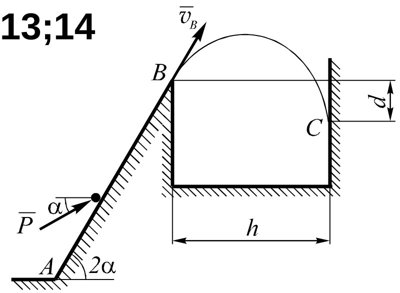
ЗАДАЧА 1

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

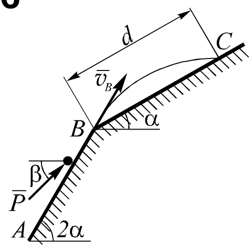
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны *m*. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_{с}$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен *f*, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*. В начальный момент система находилась в покое.



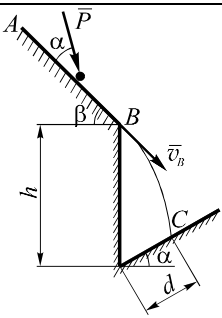
13;14



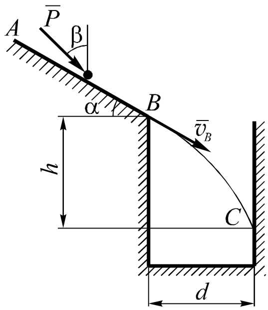
15;16



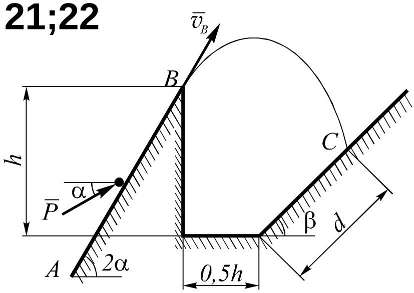
17;18



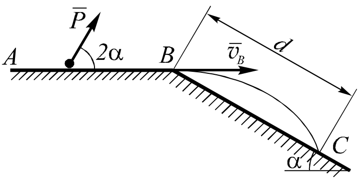
19;20



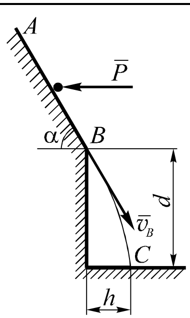
21;22



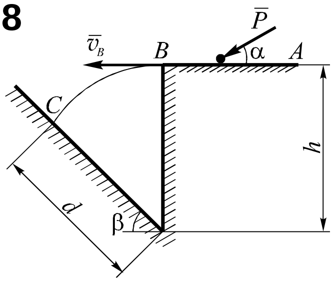
23;24



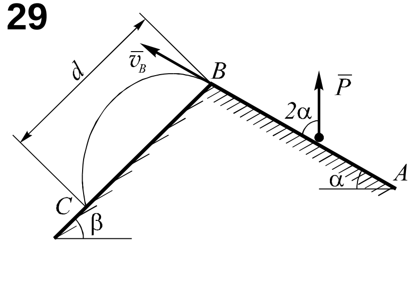
25;26



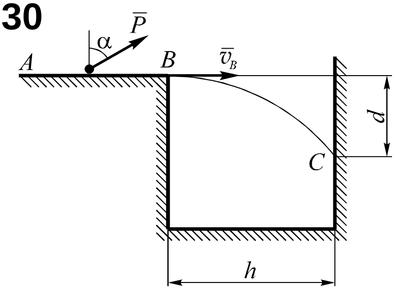
27;28



29



30



2 КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1 Некоторые положения теории

2.1.1 Основные понятия теории механических колебаний

Колебанием называют движение, при котором материальная точка через некоторые промежутки времени возвращается в одно и тоже положение. Если значения кинематических характеристик движения точки (координата, скорость, ускорение) повторяются через равные промежутки времени, то такое колебание называется периодическим. Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*. Величина ν, обратная периоду и определяющая число колебаний за 1 с, называется *циклической частотой колебаний*. Периодические колебания, при которых кинематические характеристики движения изменяются по закону синуса или косинуса, называют гармоническими.

Колебания, происходящие вследствие однократного вывода точки из положения устойчивого равновесия, называются свободными. Колебания, происходящие неограниченно долго под действием периодической активной силы, называются вынужденными. Силы, действующие на колеблющуюся материальную точку, можно подразделить на три класса:

1 Упругая восстанавливающая сила $\overline{F}_{\text{упр}}$. Сила $\overline{F}_{\text{упр}}$ стремится вернуть точку в положение устойчивого равновесия. Модуль этой силы при малых отклонениях x от положения равновесия пропорционален величине x

$$F_{\text{упр}} = cx .$$

Здесь c — коэффициент пропорциональности. Если на точку действует пружина, то c — жесткость пружины.

2 Сила вязкого сопротивления $\overline{F}_c$. В качестве этой силы в большинстве случаев выступает сила сопротивления среды. Вектор $\overline{F}_c$ направлен противоположно вектору скорости движения точки.

$$F_c = \alpha v = \alpha \dot{x} .$$

Здесь α — коэффициент вязкого сопротивления. Точкой над координатой обозначена первая производная по времени.

3 Вынуждающая сила $\overline{F}$. В качестве $\overline{F}$ в большинстве случаев выступает активная гармонически изменяющаяся сила

$$F = F_0 \sin \omega t .$$

Здесь F_0, ω — амплитуда и частота вынуждающей силы соответственно.

2.1.2 Свободные колебания материальной точки

Динамическое уравнение свободных колебаний материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0 .$$

В канонической форме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 . \qquad (2.1)$$

Здесь

$$n = \frac{\alpha}{2m}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} .$$

Решение динамического уравнения свободных колебаний зависит от соотношения величин n и k.

1) Отсутствие вязкого сопротивления ($n = 0$). В этом случае решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x = A\sin(kt + \varphi_0) . \qquad (2.2)$$

То есть в данном случае точка совершает гармонические колебания. Величина A, равная наибольшему отклонению точки от положения равновесия, называется *амплитудой колебаний*. Величина $\varphi = kt + \varphi_0$, являющаяся аргументом функции синус (или косинус), называется фазой колебаний. Величина φ_0, равная значению фазы колебаний при $t = 0$, называется *начальной фазой*. Значения величин A и φ_0 определяются из начальных условий. В качестве начальных условий выступают координата x_0 и скорость v_0 ($\dot{x}_0$) материальной точки в начальный момент времени ($t = 0$). Величина k называется *круговой частотой колебаний*. По истечении промежутка времени, равного периоду колебаний T, фаза φ изменяется на

2π. Следовательно, период колебаний связан с круговой частотой $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

Циклическая частото связана с круговой следующим образом: $\nu = \dfrac{k}{2\pi}$.

2) Случай малых сопротивлений ($n < k$). При этом

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \varphi_0)\,. \qquad (2.3)$$

В данном случае точка совершает затухающие колебания. Период затухающих колебаний

$$T_з = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

больше периода колебаний, происходящих при отсутствии вязкого сопротивления. Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем $A_з = Ae^{-nt}$. Отношение двух соседних максимумов (или минимумов) затухающих колебаний называется *декрементом затухания*, и определяется следующим образом

$$\gamma = \frac{A_з(t + T_з)}{A_з(t)} = e^{-nT_з}\,.$$

Модуль логарифма декремента затухания θ называется *логарифмическим декрементом затухания*

$$\theta = |\ln\gamma| = nT_з = \frac{2\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}\,.$$

3) Случай «равных» сопротивлений ($n = k$). При этом

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)\,. \qquad (2.4)$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные, определяемые из начальных условий.

4) Случай больших сопротивлений ($n > k$). При этом

$$x = C_1 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{n^2 - k^2}\,t}\,. \qquad (2.5)$$

В этом случае колебания отсутствует, и точка возвращается в положение равновесия.

2.1.3 Вынужденные колебания материальной точки

Если материальная точка совершает колебания под действием гармонической силы $F = F_0 \sin \omega t$, то динамическое уравнение движения такой точки в канонической форме имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = f_0 \sin \omega t \ . \qquad (2.6)$$

Здесь $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$. Решение приведенного уравнения представляет собой сумму $x = x_0 + x_1$. Здесь x_0 — общее решение однородного уравнения (2.1), имеющее вид (2.2)-(2.5); x_1 — частное решение неоднородного уравнения (2.6). Решение x_1 определяется следующим образом

$$x_1 = B \sin(\omega t - \varepsilon) \ ,$$

где $B = \dfrac{f_0}{\sqrt{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2k^2}}$, $\varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}\right)$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2.6) в случае малых сопротивлений ($n < k$) можно записать в виде

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \varphi_0) + B\sin\left(\omega t - \varepsilon\right). \qquad (2.7)$$

Величину B называют амплитудой вынужденных колебаний.

Резонансом называют явление резкого увеличения амплитуда вынужденных колебаний при совпадении частоты вынуждающей силы ω с частотой собственных колебаний k. Частоту вынуждающей силы, соответствующую резонансу, называю резонансной частотой $\omega_р$.

2.1.4 Порядок решения задач о вынужденных колебаниях материальной точки.

Решение задачи Д-2 рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1) Делают рисунок к задаче. Систему пружин, действующих на колеблющееся тело, заменяют эффективной пружиной.

2) Изображают исследуемую систему в положении равновесия. Тело, движение которого требуется описать, принимают за материальную точку. Указывают все силы, действующие на эту точку. Выбирают оси координат.

3) Записывают условия равновесия и определяют деформацию пружины в статическом равновесии $f_{ст}$.

4) Изображают систему в произвольном положении (при смещении рассматриваемой материальной точки на x от положения равновесия). При этом смещение следует указывать в положительном направлении оси x. Указывают силы, действующие на материальную точку, и выбирают оси координат.

5) Записывают динамические уравнения движения в проекциях на оси. Подставляют полученное ранее выражение для $f_{ст}$. Приводят уравнение в проекциях на ось x к каноническому виду (2.6).

6) Определяют значения f_0, k, n из (2.6). Записывают общее решение неоднородного уравнения (2.7) (если условие малых сопротивлений не выполняется, то используют соотношения (2.4) или (2.5)).

7) Используя начальные условия, определяют постоянные A, φ_0. Записывают закон движения исследуемой материальной точки.

8) Определяют частоту $\omega_р$, соответствующую резонансу и значение амплитуды вынужденных колебаний при $\omega_р$. Определяют искомое удлинение пружины. Для этого используют условия параллельного (равенство удлинения) и последовательного (равенство сил упругости) соединения пружин. Также следует использовать определенный ранее закон движения материальной точки, позволяющий найти суммарное удлинение пружин, находящихся между точкой A и исследуемой материальной точкой.

2.2. Пример выполнения задания контрольной работы.

Материальная точка массой m = 1 кг находится под действием пружин жесткостью c_1 = 3,5 Н/см; c_2 = 3,5 Н/см; c_3 = 5 Н/см; c_4 = 3 Н/см. На точку действует сила вязкого сопротивления $F_с = \alpha \dot{x}$ при этом α = 18 Н·с/м. Начиная с момента времени t = 0 на точку также действует активная сила $F = F_0 \sin \omega t$ при этом F_0 = 10 Н, ω = 15 с$^{-1}$. Точка A крепления пружин движется по закону $s = s_0 \sin \omega t$ при этом s_0 = 1,5 см. Определить закон движения материальной точки при следующих начальных условиях: x_0 = -0,5 см, v_0 = 20 см/с. Определить также резонансную частоту, амплитуду вынужденных колебаний при резонансе и зависимость от времени удлинения пружины 1 (Δl_1). Угол наклона плоскости $\beta = 60°$.

Решение.

1) *Делаем рисунок к задаче* (рисунок 2.1).

Рисунок 2.1

Заменим систему четырех пружин эквивалентной пружиной той же жесткости. Пружины 1 и 2 установлены параллельно. Параллельно соединенные пружины, если их деформации одинаковы, можно заменить одной пружиной, коэффициент жесткости которой равен сумме коэффициентов жесткости соединенных пружин. Так как тело, принимаемое за материальную точку, движется поступательно, то деформации пружин 1 и 2 одинаковы. Следовательно, систему пружин 1 и 2 можно заменить пружиной 5 (рисунок 2.2), коэффициент жесткости которой определяется следующим образом: $c_5 = c_1 + c_2 = 3{,}5 + 3{,}5 = 7\text{Н/см}$.

Рисунок 2.2

Пружину 3 и 5 соединены последовательно. При последовательном соединении нескольких пружин они могут быть заменены эквивалентной пружиной, податливость которой равна сумме податливостей соединенных пружин (податливостью пружины называют величину, обратную коэффициенту жесткости). Следовательно, систему пружин 3 и 5 можно заменит эквивалентной пружиной 6, коэффициент жесткости которой определяется из соотношения

$$\frac{1}{c_6} = \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_5} \quad \Rightarrow \quad c_6 = \frac{c_3 c_5}{c_3 + c_5} = \frac{5 \cdot 7}{5 + 7} = 2{,}92\text{Н/см} = 292\text{Н/м} .$$

Таким образом, систему пружин 1, 2, 3, 4 можно заменить системой, состоящей из двух пружин (рисунок 2.3).

Рисунок 2.3

При движении исследуемой материальной точки деформации пружин 4 и 6 будут одинаковы. Результирующая сила, действующая со стороны этих пружин на точку, будет равна сумме сил упругости в пружинах 4 и 6. Следовательно, систему пружин 4 и 6 можно заменить эквивалентной пружиной, коэффициент жесткости которой $c_{экв}$ равен сумме коэффициентов жесткости c_4 и c_6

$$c_{экв} = c_4 + c_6 = 3 + 2{,}92 = 5{,}92 \text{Н/см} = 592 \text{Н/м} .$$

2) *Изобразим материальную точку в положении статического равновесия* (рисунок 2.4). При этом систему пружин, действующих на точку, заменим одной эквивалентной пружиной.

Рисунок 2.4

Укажем силы, действующие на материальную точку в этом положении: силу тяжести $\overline{G}$; нормальную реакцию $\overline{N}$; силу упругости эквивалентной пружины $\overline{F}_{упр}$. Так как в положении статического равновесия скорость точки равна нулю, то сила вязкого сопротивления отсутствует. В этом положении также отсутствует активная сила $\overline{F}$ и смещение точки A. Выберем оси координат. Ось x направим вдоль наклонной плоскости.

3) *Запишем условие равновесия материальной точки в проекциях на ось x*

$$F_{упр} - G \sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{упр} = mg \sin\beta .$$

Сжатие эквивалентной пружины в положении статического равновесия (статическую деформацию пружины) обозначим $f_{ст}$. Тогда модуль силы упругости в этом положении можно определить следующим образом: $F_{упр} = c_{экв} f_{ст}$. Подставив данное выражение в формулировку условия равновесия, найдем статическую деформацию эквивалентной пружины

$$f_{ст} = \frac{mg}{c_{экв}} \sin\beta .$$

4) Изобразим систему в промежуточном положении. Смещение x исследуемой материальной точки от положения статического равновесия укажем в положительном направлении оси (рисунок 2.5).

Рисунок 2.5.

Укажем силы, действующие на материальную точку. В данном положении кроме сил $\overline{G}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{\text{упр}}$ на точку будут действовать: сила вязкого сопротивления $\overline{F}_{\text{с}}$ и активная сила $\overline{F}$.

5) *Динамические уравнения движения точки в проекциях на ось x имеют следующий вид*

$$ma = m\ddot{x} = F + F_{\text{упр}} + F_{\text{с}x} - G\sin\beta\ .$$

Здесь $F_{\text{с}x}$ – проекция силы вязкого сопротивления на ось x. Так как вектор силы $\overline{F}_{\text{с}}$ направлен противоположно вектору скорости точки $\dot{\overline{x}}$, то $F_{\text{с}x} = -\alpha\dot{x}$. Так как смещение $f_{\text{ст}}$ приводит к сжатию пружины, а смещение x – к растяжению, то для силы упругости в указанном положении (рисунок 2.5.) можно записать

$$F_{\text{упр}} = c_{\text{экв}}(f_{\text{ст}} - x) + F_{\text{упр}}^{s}\ .$$

Здесь $F_{\text{упр}}^{s}$ – действующая на материальную точку сила упругости, связанная со смещением точки закрепления пружин s. Для определения $F_{\text{упр}}^{s}$ мысленно закрепим исследуемую материальную точку. Тогда сила $F_{\text{упр}}^{s}$ будет определяться деформацией пружин, находящихся между точкой A и исследуемой материальной точкой. В соответствии с рисунком 2.3 $F_{\text{упр}}^{s} = c_6 s$.

Подставим известные выражения для активной силы, смещения s и статической деформации. Тогда динамические уравнения движения точки примут вид

$$m\ddot{x} = F_0\sin\omega t + c_{\text{экв}}\left(\frac{mg}{c_{\text{экв}}}\sin\beta - x\right) + c_6 s_0\sin\omega t - \alpha\dot{x} - mg\sin\beta\ .$$

Раскроем скобки и перенесем слагаемые, содержащие x и $\dot{x}$ в левую часть уравнения

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + c_{\text{экв}}x = (F_0 + c_6 s_0)\sin\omega t\ .$$

Разделим последнее равенство на m

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c_{\text{экв}}}{m}x = \frac{F_0 + c_6 s_0}{m}\sin\omega t\ .$$

6) *В канонической форме уравнения вынужденных колебаний имеют вид*

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = f_0 \sin\omega t\ .$$

Сравнивая данное равенство с ранее выведенным уравнением, можно определить величины k, n, f_0

$$2n = \frac{\alpha}{m} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{18}{2} = 9\text{с}^{-1},$$

$$k^2 = \frac{c_{\text{экв}}}{m} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{c_{\text{экв}}}{m}} = \sqrt{\frac{592}{1}} = 24{,}33\text{с}^{-1},$$

$$f_0 = \frac{F_0 + c_6 s_0}{m} = 1\cdot\left(10 + 292\cdot 0{,}015\right) = 14{,}38\,\frac{\text{Н}}{\text{кг}}.$$

В данном случае выполняется условие малых сопротивлений ($n < k$). Следовательно, общее решение уравнения вынужденных колебаний можно записать в виде

$$x(t) = Ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \varphi_0\right) + B\sin(\omega t - \varepsilon)\ .$$

Здесь

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + 4n^2k^2}}\,, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}\right).$$

Подставим численные значения

$$B = \frac{14{,}38}{\sqrt{(592 - 225)^2 + 4\cdot 81\cdot 592}} = \frac{18{,}88}{\sqrt{134689 + 191808}} = 0{,}025\text{м},$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot 15\cdot 9}{(592 - 225)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{270}{367}\right) = \operatorname{arctg}\left(0{,}736\right) = 0{,}634\text{рад}.$$

7) *Определим величины A и φ_0 в общем решении уравнения вынужденных колебаний*. Для этого получим выражение скорости материальной точки

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -Ane^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \varphi_0\right) +$$
$$+ A\sqrt{k^2 - n^2}e^{-nt}\cos\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \varphi_0\right) + B\omega\cos(\omega t - \varepsilon).$$

Определим координату и скорость материальной точки в начальный момент времени ($t = 0$)

$$x(0) = A\sin\varphi_0 - B\sin\varepsilon, \quad \dot{x}(0) = -An\sin\varphi_0 + A\sqrt{k^2 - n^2}\cos\varphi_0 + B\omega\cos\varepsilon\ .$$

Используя начальные условия, получим систему двух уравнений для определения A и φ_0

$$\begin{cases} A\sin\varphi_0 = x_0 + B\sin\varepsilon, \\ A\left(\sqrt{k^2 - n^2}\cos\varphi_0 - n\sin\varphi_0\right) = v_0 - B\omega\cos\varepsilon. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое

$$\sqrt{k^2 - n^2}\,\mathrm{ctg}\varphi_0 - n = \frac{v_0 - B\omega\cos\varepsilon}{x_0 + B\sin\varepsilon}\ .$$

Тогда

$$\mathrm{ctg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}}\left(\frac{v_0 - B\omega\cos\varepsilon}{x_0 + B\sin\varepsilon} + n\right).$$

Подставим найденные значения величин k, n, B, ε и известные значения v_0, x_0, ω

$$\mathrm{ctg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{592 - 81}}\left(\frac{20 - 2{,}5\cdot 15\cos 0{,}634}{-0{,}5 + 2{,}5\sin 0{,}634} + 9\right) =$$
$$= \frac{1}{22{,}605}\left(-\frac{10{,}212}{0{,}981} + 9\right) = -0{,}062.$$

Следовательно

$$\varphi_0 = \mathrm{arcctg}(-0{,}062) = -1{,}509\text{рад} .$$

Зная φ_0, определим A из первого уравнения системы $A = \dfrac{x_0 + B\sin\varepsilon}{\sin\varphi_0}$. Подставим известные численные значения

$$A = \frac{0{,}981}{\sin(-1{,}509)} = -0{,}983\text{см} .$$

Подставив найденные значения в общее решение уравнения вынужденных колебаний, запишем закон движения исследуемой материальной точки

$$x(t) = -0{,}983e^{-9t}\sin(22{,}605t - 1{,}509) + 2{,}5\sin(15t - 0{,}634)\,(\text{см}) .$$

8) Определим резонансную частоту

$$\omega_\text{р} = k = 24{,}33\text{с}^{-1} .$$

Определим амплитуду вынужденных колебаний при $\omega = \omega_\text{р}$

$$B_\text{р} = \frac{f_0}{\sqrt{(k^2 - \omega_\text{р})^2 + 4n^2k^2}} = \frac{f_0}{2nk} .$$

Подставим найденные ранее численные значения

$$B_\text{р} = \frac{14{,}38}{2 \cdot 9 \cdot 24{,}33} = 0{,}033 = 0{,}033\text{м} = 3{,}3\text{см} .$$

Определим зависимость от времени удлинения пружины 1 $\Delta l_1(t)$. Пружина 1 и 2 соединены параллельно. По условию задачи удлинения этих пружин равны $\Delta l_1(t) = \Delta l_2(t)$. Пара пружин 1 и 2 соединена последовательно с пружиной 3. Следовательно, сила упругости в пружине 3 равна сумме сил упругости в пружинах 1 и 2

$$c_3\Delta l_3 = c_1\Delta l_1 + c_2\Delta l_2 = \Delta l_1(c_1 + c_2) \quad \Rightarrow \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 \frac{c_1 + c_2}{c_3}.$$

Суммарное удлинение пружин, установленных между точкой A и исследуемой материальной точкой, связано со смещением $x(t)$ следующим образом

$$\Delta l = x - s - f_{\text{ст}}.$$

С другой стороны, суммарное удлинение является суммой удлинений пружин 1 и 3

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_3 = \Delta l_1 \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_3}.$$

Следовательно

$$x(t) - s(t) - f_{\text{ст}} = \Delta l_1 \frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_3}.$$

Выразим из последнего равенства удлинение Δl_1 и подставим выражения для $x(t)$, $s(t)$, $f_{\text{ст}}$

$$\Delta l_1(t) = \frac{c_3}{c_1 + c_2 + c_3}\left[A\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \varphi_0\right) + B\sin(\omega t - \varepsilon) - \right] -$$
$$- \frac{c_3}{c_1 + c_2 + c_3}\left[s_0 \sin\omega t + \frac{mg}{c_{\text{экв}}}\sin\beta\right].$$

Подставим численные значения

$$\Delta l_1(t) = \frac{5}{7+5}\left[-0{,}983e^{-9t}\sin(22{,}605t - 1{,}509) + 2{,}5\sin(15t - 0{,}634)\right] -$$
$$- \frac{5}{7+5}\left[1{,}5\sin 15t + \frac{1\cdot 9{,}8}{5{,}92}\sin 60^\circ\right].$$

Произведя вычисления, получим

$$\Delta l_1(t) = -0{,}41e^{-9t}\sin(22{,}605t - 1{,}509) +$$
$$+1{,}042\sin(15t - 0{,}634) - 0{,}646\sin 15t - 0{,}558(\text{см})$$

Ответ: закон движения материальной точки:

$$x(t) = -0{,}983e^{-9t}\sin(22{,}605t - 1{,}509) + 2{,}5\sin(15t - 0{,}634)\,(\text{см})\,,$$

резонансная частота: $\omega_\text{р} = 24{,}33\text{с}^{-1}$, резонансная амплитуда вынужденных колебаний: $B_\text{р} = 3{,}3\text{см}$, зависимость от времени удлинения пружины 1

$$\Delta l_1(t) = -0{,}41e^{-9t}\sin(22{,}605t - 1{,}509) + 1{,}042\sin(15t - 0{,}634) - 0{,}646\sin 15t - 0{,}558(\text{см})\,.$$

2.3. Условие задания Д-2.

Материальная точка массой m находится под действием пружин жесткостью c_1, c_2, c_3. На точку действует сила вязкого сопротивления $F_\text{с} = \alpha\dot{x}$. Начиная с момента времени t = 0 на точку также действует активная сила $F = F_0\sin\omega t$. Точка A крепления пружин движется по закону $s = s_0\sin\omega t$. Определить закон движения материальной точки при следующих начальных условиях: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Определить также резонансную частоту, амплитуду вынужденных колебаний при резонансе и зависимость от времени удлинения пружины 1 (Δl_1).

Замечание: параллельно соединенные пружины установлены таким образом, чтобы обеспечить их одинаковое деформирование и поступательное движение тела, принимаемого за материальную точку.

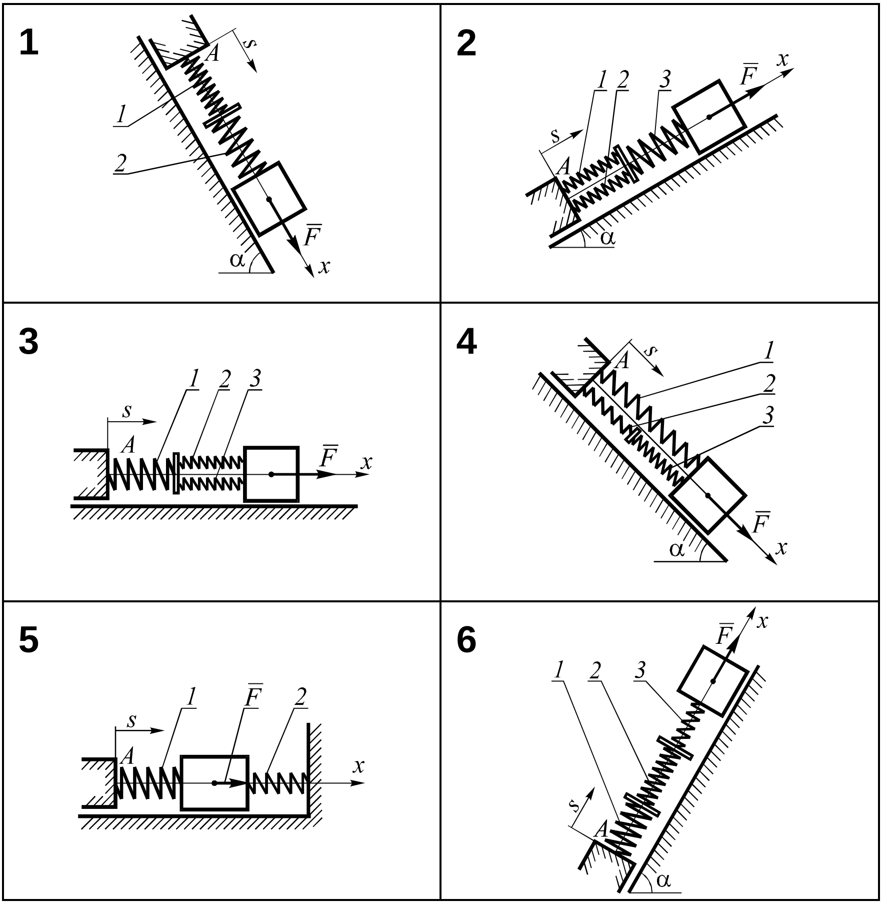
Таблица 2.1 – Исходные данные к заданию Д-2

№	m, кг	α, Н·с/м	β, град	Жесткости, Н/см			s_0, см	F_0, Н	ω, $с^{-1}$	x_0, см	v_0, см/с
				c_1	c_2	c_3					
1	2	9	60	5	2	—	1.1	9	22	-1	18
2	1	15	30	3	3	5	0.5	16	11	-0.5	7
3	1	3	—	4	2	2	2.5	10	23	-0.4	11
4	3	8	45	2	3	6	1	17	12	0.9	-1
5	2	13	—	5	8	—	1.9	17	15	0.1	7
6	1,5	17	60	2	4	6	0.8	15	28	0.9	3
7	1	11	45	8	8	3	2.4	20	23	-1.1	8
8	2	16	—	4	1	—	1.9	17	20	-0.3	11
9	3	11	30	6	5	8	1.6	21	20	-1.1	4
10	1	16	60	4	2	2	2.2	17	20	-1.3	-8
11	2,5	13	45	8	8	5	1.6	23	24	0.2	9
12	1,5	15	—	3	7	9	1.9	20	22	0.1	8
13	3	13	60	5	4	—	2.1	18	10	-0.6	-2
14	1	6	—	2	2	1	1.8	11	12	0.9	-8
15	2	10	45	4	8	8	2.2	11	27	-0.6	-6
16	1	12	—	7	3	2	1	7	25	1.2	16
17	1	16	30	6	3	2	0.9	22	18	0.7	15
18	1,5	6	45	8	9	5	1.6	8	21	-0.4	11
19	2	11	60	6	4	—	0.7	7	29	-0.8	7
20	2,5	15	45	4	4	7	0.7	18	14	-0.8	-4
21	3	6	30	9	5	5	2.8	16	13	0.1	12
22	1	5	—	4	4	3	2.7	13	29	-1.3	-7
23	2	15	60	7	4	—	1.1	14	11	0.1	10
24	4	10	—	8	8	8	1.5	8	11	-1.2	-6
25	1	19	30	6	9	—	2.1	20	13	1.2	19
26	2,5	6	—	5	5	3	1.6	22	27	-1.1	0
27	3,5	17	60	2	6	4	2	22	24	1.3	19
28	2	6	—	8	5	—	2.6	11	10	-1.4	0
29	1	17	45	3	3	7	2.1	8	24	-0.5	2
30	1	6	30	5	7	—	1.9	21	14	-0.3	-2

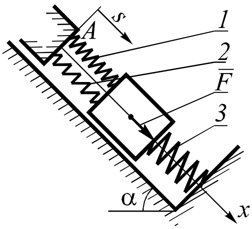
ЗАДАЧА 2

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

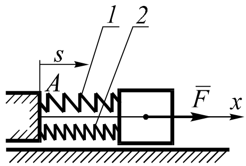
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны *m*. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_с$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен *f*, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*. В начальный момент система находилась в покое.



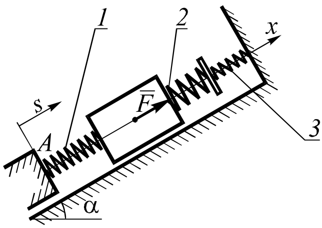
7



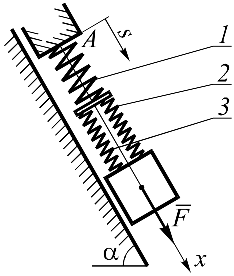
8



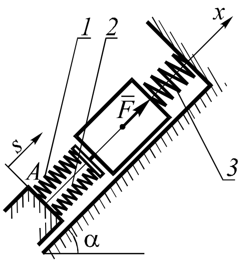
9



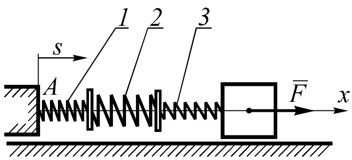
10



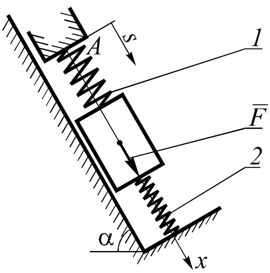
11



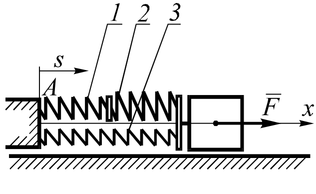
12



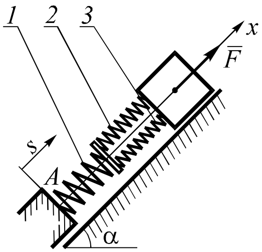
13



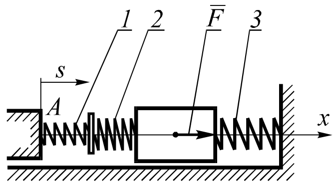
14



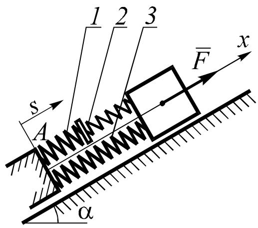
15



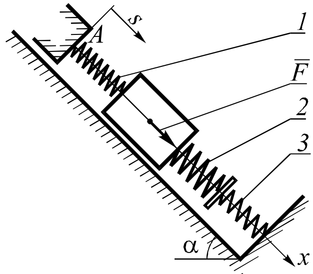
16



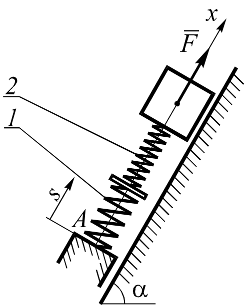
17



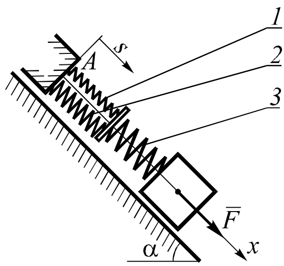
18



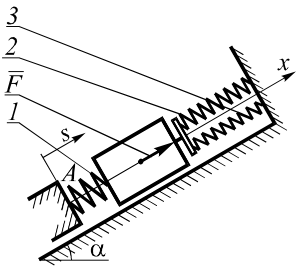
19



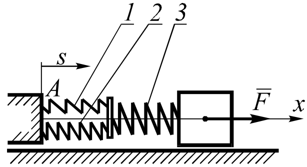
20



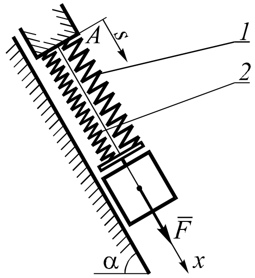
21



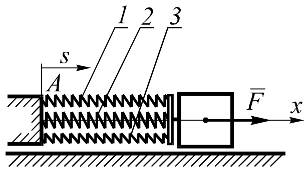
22



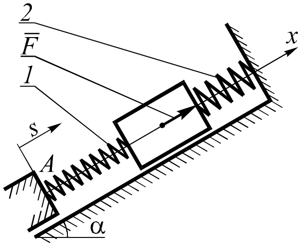
23



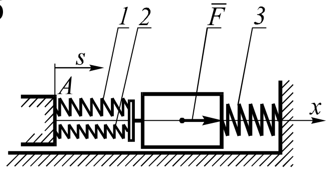
24



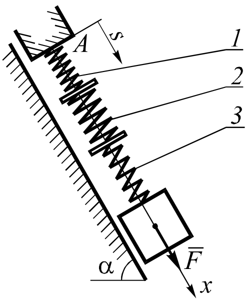
25



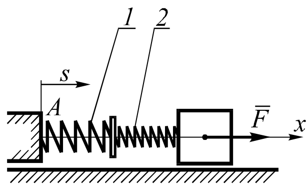
26



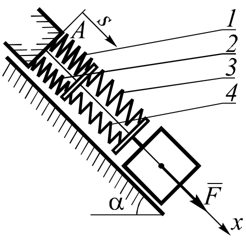
27



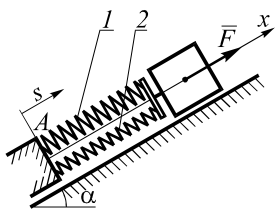
28



29



30



3 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1 Некоторые положения теории.

3.1.1 Теоремы динамики материальной точки.

К общим теоремам динамики материальной точки относятся: теорема об изменении количества движения материальной токи, терема об изменении момента количества движения материальной точки, теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. Они представляют собой преобразованные выражения основного закона динамики.

3.1.1.1 Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Количество движения материальной точки — векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость. Для характеристики действия, оказываемого силой на материальную точку за некоторый промежуток времени, вводят величину *импульс силы*. Импульс силы за некоторый промежуток времени τ равен интегралу от силы по времени от нуля до τ, то есть

$$\overline{S}(\overline{F}) = \int_0^{\tau} \overline{F} dt.$$

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на точку сил за тот же промежуток времени:

$$m\overline{v}_1 - m\overline{v}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\tau} \overline{F}_i dt. \qquad (3.1)$$

Здесь $\overline{v}_0, \overline{v}_1$ — скорость точки в начальном и конечном положениях соответственно.

Равенство (3.1) выражает теорему об изменении количества движения материальной точки. Здесь n — количество сил, действующих на точку. В проекциях на декартовы оси координат выражение (3.1) запишется следующим образом:

$$
\begin{gathered}
m\mathrm{v}_{1x} - m\mathrm{v}_{0x} = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt, \quad m\mathrm{v}_{1y} - m\mathrm{v}_{0y} = \\
= \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{iy}dt, \quad m\mathrm{v}_{1z} - m\mathrm{v}_{0z} = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{iz}dt.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

3.1.1.2 Теорема об изменении момента количества движения точки.

Моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\overline{L}_O$, определяемая равенством

$$\overline{L}_O = \overline{r} \times m\overline{v} .$$

Здесь $\overline{r}$ — радиус-вектор материальной точки.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно центра O равна геометрической сумме мементов сил, действующих на точку относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\overline{M}_O(\overline{F}_i) . \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки.

3.1.1.3 Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Кинетическая энергия материальной точки — скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, то есть

$$T = \frac{mv^2}{2} .$$

Изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно сумме работ действующих на нее сил $A(\overline{F})$ на том же перемещении:

$$\frac{mv_1^{\,2}}{2} - \frac{mv_0^{\,2}}{2} = \sum_{i=1}^{n} A(\overline{F}_i). \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) выражает теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки.

3.1.2 Работа силы.

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором перемещении точки приложения силы, вводят величину *работа силы*. Различают элементарную работу силы $dA(\overline{F})$ и работу силы на конечном перемещении $A(\overline{F})$. *Элементарной работой силы* $\vec{F}$ называют скалярное произведение вида

$$dA(\overline{F}) = \overline{F} \cdot d\overline{s} \,.$$

Здесь $d\overline{s}$ — вектор элементарного перемещения точки приложения силы $\overline{F}$, направленный по касательной к траектории точки. В соответствии с определением скалярного произведения, для элементарной работы силы можно записать следующее выражение

$$dA(\overline{F}) = F_\tau ds \,. \tag{3.5}$$

Здесь F_τ — проекция силы $\vec{F}$ на ось касательную к траектории точки ее приложения. *Работа силы на конечном перемещении* равна интегрально сумме элементарных работ сила на этом перемещении

$$A(\vec{F}) = \int_{s_0}^{s_1} dA = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds \,. \tag{3.6}$$

Здесь s_0, s_1 — дуговая координата начального и конечного положений точки соответственно. Если на материальную точку действует постоянная по модулю и направлению сила, то работа такой силы на конечном перемещении определятся следующим образом

$$A(\overline{F}) = Fs\cos\alpha \,. \tag{3.7}$$

Здесь s — модуль вектора полного перемещения $\bar{s}$, соединяющего начальное и конечное положения точки; α — угол между вектором сила и вектором $\bar{s}$.

Рассмотрим примеры определения работы сил.

а) работа силы тяжести

При перемещении материальной точки из положения $M^{(0)}$ в положение $M^{(1)}$ работа силы тяжести $\bar{G}$ определяется как

$$A(\bar{G}) = mg(h_0 - h_1). \tag{3.8}$$

Здесь h_0, h_1 — высота начального $M^{(0)}$ и конечного $M^{(1)}$ положений точки соответственно.

б) работа силы упругости

Если при движении точки из положения $M^{(0)}$ в положение $M^{(1)}$ на нее действует сила упругости пружины с жесткостью c, то работа этой силы определяется следующим образом

$$A(F) = \frac{c}{2}\left[\Delta l_0{}^2 - \Delta l_1{}^2\right]. \tag{3.9}$$

Здесь Δl_0, Δl_1 — удлинение пружины в начальном и конечном положениях материальной точки соответственно.

3.1.3 Порядок решения задач с использованием теорем динамики материальной точки.

Решение задач с использованием теорем динамики материальной точки рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Делают рисунок, изображая рассматриваемое тело в произвольном положении.

2 Указывают вектора сил, действующих на тело. Начала векторов сил размещают в центре тела, принимаемого за материальную точку.

3 Выбирают оси координат. Подробнее см. задачу Д-1.

4 Записывают теорему динамики материальной точки. Если в задаче известен промежуток времени между начальным и конечным положениями точки или его надо найти, то рекомендуется использовать теорему об изменении количества движения. При этом формулировку теоремы записывают в проекциях на выбранные оси координат (уравнения (3.2)).

5 Расписывают сумму в правой части уравнений (3.2) или (3.4) (при использовании теоремы об изменении кинетической энергии). Определяют

импульс (или работу) каждой силы, действующей на материальную точку. Подставляют полученные выражения в уравнения (3.2) или (3.4).

6 Решают полученное уравнение (или систему уравнений).

3.2. Пример выполнения задания Д-3.

Шарик массой m = 1 кг, приобретя в начальном положении скорость v_A = 4 м/с, движется по изогнутой трубке *ABCD* (рисунок 3.1). На прямолинейном участке *AB* длиной L = 0,5 м на точку действует пружина жесткостью c = 0,2 Н/см. В начальном положении пружина сжата на Δl_A = 5 см. На криволинейном участке *BC* на точку действует сила сопротивления $P = 2\sqrt{s}$ Н, зависящая от пути s, пройденного точкой от положения *B*. На прямолинейном участке *CD* на точку действует сила $F = 3e^{-0,1t}$ Н. Время движения по участку *CD* составляет t_0 = 2 с. Радиус R = 0,3 м. Коэффициент трения скольжения для участков *AB* и *CD* равен f = 0,2. Определить скорости шарика в положениях *B*, *C* и *D*.

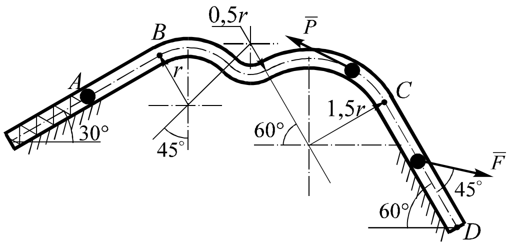


Рисунок 3.1

Решение

1 *Рассмотрим движение шарика на участке AB.*

1.1 Делаем рисунок и изображаем материальную точку в произвольном положении между *A* и *B* (рисунок 3.2).

Рисунок 3.2.

1.2 Указываем вектора сил, действующих на точку. На участке *AB* на материальную точку действуют: сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция $\overline{N}$ со стороны стенок трубки, сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$, сила упругости $\overline{F}_{упр}$.

1.3 Выбираем оси координат. На данном участке траектория точки прямолинейна, поэтому ось x направляем в сторону движения (рисунок 3.2).

1.4 Записываем теорему динамики материальной точки. Так как известно расстояние между начальным и конечным положениями точки, то следует использовать теорему об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} A(\overline{F}_i) .$$

В данном случае $v_0 = v_A, \quad v_1 = v_B$.

1.5 Расписав сумму в правой части последнего равенства, получим

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A(\overline{G}) + A(\overline{N}) + A(\overline{F}_{\text{тр}}) + A(\overline{F}_{\text{упр}}) . \qquad (3.10)$$

Определим работу каждой силы.

a) Так как начальное положение точки находится "ниже" конечного, то работа силы тяжести отрицательна

$$A(\overline{G}) = -G\Delta h = -mgL\sin\alpha .$$

b) работу силы упругости определим по формуле (3.9).

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2}\left[\Delta l_B^2 - \Delta l_A^2\right].$$

Начальное и конечное удлинения пружины связаны между собой $\Delta l_B = L - \Delta l_A$. Тогда

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{c}{2}\left[\Delta l_A^2 - 2\Delta l_A L + L^2 - \Delta l_A^2\right] = -\frac{c}{2}L\left[L - 2\Delta l_A\right].$$

c) Так как сила $\overline{N}$ направлена перпендикулярно смещению точки своего приложения, то элементарная работа этой силы равна нулю

$$dA(\overline{N}) = N_\tau ds = Nds\cos 90° = 0 .$$

Следовательно, работа силы $\overline{N}$ на перемещении *AB* равна нулю.

d) Определим работу силы трения. В соответствии с законом Кулона для силы трения $F_{\text{тр}} = fN$. Следовательно, для определения силы трения необходимо найти нормальную реакцию *N*. С этой целью запишем уравнение движения материальной точки в проекциях на ось *y* (рисунок 3.2).

$$ma_y = N - G\cos\alpha .$$

Так как точка движется вдоль оси *x*, то проекция ускорения на ось *y* равна нулю.

$$N = mg\cos\alpha .$$

Так как сила трения не изменяет своего направления и модуля, то для определения ее работы можно использовать формулу (3.7). При этом модуль полного перемещения *s* равен длине *L*, а угол между вектором силы $\bar{F}_{\text{тр}}$ и вектором перемещения составляет 180^0. Следовательно

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}L = -fmg\cos\alpha \cdot L .$$

Подставим полученные выражения для работ сил в выражение (3.10).

$$\frac{mv_B{}^2}{2} - \frac{mv_A{}^2}{2} = -mgL\sin\alpha - fmgL\cos\alpha - \frac{c}{2}L\left[2\Delta l_A - L\right].$$

1.6 Решаем полученное уравнение относительно скорости v_B.

$$v_B = \sqrt{v_A{}^2 - 2gL(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{c}{m}L(L - 2\Delta l_A)} .$$

Подставим известные численные значения входящих в данное выражение величин

$$v_B = \sqrt{16\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} - 20\frac{\text{м}}{\text{с}^2}0{,}5\text{м}(\sin 30° + 0{,}2\cdot\cos 30°) - 20\frac{\text{Н}}{\text{кг}\cdot\text{м}}0{,}5\text{м}(0{,}5 - 0{,}1)\text{м}} = 2{,}323\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

.

2 *Рассмотрим движение материальной точки на участке BC.*

2.1. Делаем рисунок и изображаем материальную точку в произвольном положении между *B* и *C* (рисунок 3.3).

Рисунок 3.3

2.2 Указываем вектора сил, действующих на точку. На участке *BC* на точку действуют: сила тяжести $\overline{G}$; нормальная реакция $\overline{N}$, направленная к центру кривизны траектории; сила сопротивления $\overline{P}$.

2.3 Выбираем оси координат. На участке *BC* точка движется по известной криволинейной траектории, поэтому выберем естественные оси: касательную ($\overline{\tau}$) и нормаль ($\overline{n}$) (см. рисунок 3.3).

2.4 Записываем теорему динамики материальной точки. Так как на данном участке можно найти пройденный точкой путь, то следует использовать теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{m\mathrm{v}_1^{\,2}}{2} - \frac{m\mathrm{v}_0^{\,2}}{2} = \sum_{i=1}^{n} A(\overline{F}_i)\,.$$

В данном случае $v_0 = v_B, \quad v_1 = v_C$.

2.5 Расписав сумму в правой части последнего равенства, получим

$$\frac{m\mathrm{v}_C^{\,2}}{2} - \frac{m\mathrm{v}_B^{\,2}}{2} = A(\overline{G}) + A(\overline{N}) + A(\overline{P})\,. \qquad (3.11)$$

Определим работу каждой силы при перемещении точки из положения *B* в положение *C*.

а) В соответствии с известным соотношением (3.8) для работы силы тяжести запишем $A(\overline{G}) = G\Delta h$. Здесь Δh — разница высот между начальным и конечным положениями точки (см. рисунок 3.3). Определим разницу высот для участков BB_1, B_1B_2, B_2C.

$$\Delta h_{BB_1} = R\cos\alpha - R\cos\beta,$$

$$\Delta h_{B_1B_2} = 2R\sin\gamma - 2R\cos\beta,$$

$$\Delta h_{B_2C} = R\sin\gamma - R\cos\gamma.$$

Тогда

$$\Delta h = \Delta h_{BB_1} + \Delta h_{B_1B_{21}} + \Delta h_{B_2C} = R(\cos\alpha - 3\cos\beta + 3\sin\gamma - \cos\gamma).$$

Работа силы тяжести будет определяться следующим образом

$$A(\vec{G}) = mgR(\cos\alpha - 3\cos\beta + 3\sin\gamma - \cos\gamma).$$

б) Так как сила нормального давления $\overline{N}$ направлена перпендикулярно смещению материальной точки, то работа этой силы равна нулю $A(\overline{N}) = 0$.

в) Работу силы сопротивления определим по общей формуле (3.6) для работы переменной силы

$$A(\overline{P}) = \int_{s_0}^{s_1} P_\tau ds .$$

Здесь P_τ — проекция силы сопротивления на касательную к траектории движения точки. Так как сила $\vec{P}$ направлена противоположно скорости движения, то $P_\tau = -P = -2\sqrt{s}$. Следовательно

$$A(\overline{P}) = -\int_0^{s_{BC}} 2\sqrt{s} ds = -2\frac{2}{3} s_{BC}^{3/2} .$$

Здесь s_{BC} — путь, пройденный материальной точкой на участке BC.

$$s_{BC} = s_{BB_1} + sB_1B_2 + s_{B_2C} = (\alpha + \beta)R + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \beta\right)2R + \frac{\pi}{2} R .$$

Известно, что $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ Следовательно

$$s_{BC} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)R + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)2R + \frac{\pi}{2} R = 1{,}75\pi R .$$

Тогда работа силы сопротивления

$$A(\overline{P}) = -\frac{4}{3}(1{,}75\pi R)^{3/2} .$$

Подставим полученные выражения для работ сил в формулу (3.11)

$$\frac{mv_C{}^2}{2}-\frac{mv_B{}^2}{2}=(\cos\alpha-3\cos\beta+3\sin\gamma-\cos\gamma)mgR-\frac{4}{3}(1{,}75\pi R)^{3/2}.$$

2.6 Решаем полученное уравнение относительно скорости v_C

$$v_C=\sqrt{v_B{}^2+2(\cos\alpha-3\cos\beta+3\sin\gamma-\cos\gamma)gR-\frac{8}{3m}(1{,}75\pi R)^{3/2}}\;.$$

Подставим известные численные значения

$$v_C=\sqrt{2{,}323^2\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}+0{,}843\cdot 20\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 0{,}3\text{м}-5{,}648\frac{\text{Нм}}{\text{кг}}}=$$

$$=\sqrt{5{,}395\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}+5{,}058\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}-5{,}648\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}=2{,}192\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3 Рассмотрим движение материальной точки на участке CD.

3.1 Делаем рисунок (рисунок 3.4)

Рисунок 3.4

3.2 Указываем вектора сил. На участке *CD* на материальную точку действуют: активная сила $\overline{F}$; сила тяжести $\overline{G}$; нормальная реакция $\overline{N}$; сила трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$.

3.3 Выберем оси координат. На *CD* траектория точки прямолинейна, поэтому ось *x* направим в сторону движения, а ось *y* — перпендикулярно ей.

3.4 Записываем теорему динамики материальной точки. Так как известно время движения точки на участке *CD*, то следует использовать теорему об изменении количества движения материальной точки

$$m\overline{v}_D-m\overline{v}_C=\sum_{i=1}^{n}\overline{S}(\overline{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau}\overline{F}_i\,dt.$$

В проекциях на выбранные оси

$$mv_{Dx} - mv_{Cx} = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt, \quad mv_{Dy} - mv_{Cy} = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{iy}dt.$$

Так как ось x направлена вдоль движения точки, то $v_{Cy} = v_{Dy} = 0$, $v_{Cx} = v_C$, $v_{Dx} = v_D$. Тогда

$$mv_D - mv_C = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt, \quad 0 = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{iy}dt. \qquad (3.12)$$

3.5 Определяем сумму проекций моментов сил на ост x

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt = \int_{0}^{t_0} G\sin\gamma dt + \int_{0}^{t_0} Fdt - \int_{0}^{t_0} F_{\text{тр}}dt.$$

Воспользуемся законом Кулона для силы трения $F_{\text{тр}} = fN$ и подставим известную функцию $F(t)$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt = mg\sin\gamma\int_{0}^{t_0} dt + 3\int_{0}^{t_0} e^{0,1t}dt - f\int_{0}^{t_0} Ndt.$$

Произведем интегрирование

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\tau} F_{ix}dt = mg\sin\gamma \cdot t_0 + 30\left(e^{0,1t_0} - 1\right) - f\int_{0}^{t_0} Ndt.$$

Зависимость силы N от времени не известна. Определим сумму проекций импульсов сил на ось y

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_0} F_{iy}dt = \int_{0}^{t_0} Ndt - \int_{0}^{t_0} G\cos\gamma dt.$$

Произведем интегрирование

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_0} F_{iy}dt = \int_{0}^{t_0} Ndt - mg\cos\gamma \cdot t_0 .$$

Подставим полученные выражения в уравнения (3.12)

$$mv_D - mv_C = mgt_0 \sin\gamma + 30\left(e^{0,1t_0} - 1\right) - f\int_{0}^{t_0} Ndt,$$

$$0 = \int_{0}^{t_0} Ndt - mgt_0 \cos\gamma.$$

3.6 Решаем полученную систему уравнений. Из второго уравнения системы следует, что

$$\int_{0}^{t_0} Ndt = mgt_0 \cos\gamma .$$

Тогда из первого:

$$mv_D - mv_C = mgt_0\left(\sin\gamma - f\cos\gamma\right) + 30\left(e^{0,1t_0} - 1\right).$$

Для искомой скорости точки в положении *D* получим

$$v_D = v_C + gt_0\left(\sin\gamma - f\cos\gamma\right) + \frac{30}{m}\left(e^{0,1t_0} - 1\right).$$

Подставим известные численные значения входящих в последнее выражение величин

$$v_D = 2{,}192\,\frac{\text{м}}{\text{с}} + 20(\sin 60° - 0{,}2\cos 60°)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,\text{с} + 30(e^{0,2} - 1)\,\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{кг}} =$$

$$= 2{,}192\,\frac{\text{м}}{\text{с}} + 15{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}} + 6{,}642\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 24{,}234\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: v_B = 2,323 м/с; v_C = 2,192 м/с; v_D = 24,234 м/с.

3.3 Условие задания Д-3.

Использование теорем динамики материальной точки

Шарик массы *m*, принимаемый за материальную точку, приобретя в начальном положении скорость v_A, движется по изогнутой трубке *ABCD*, расположенной в вертикальной плоскости. На прямолинейном участке *AB* длины *L* на материальную точку действует пружина жесткостью *c*. Пружина в начальном положении сжата на Δl_A. На криволинейном участке *BC* на точку действует сила сопротивления *P*(*s*), зависящая от пути *s*, пройденного точкой от положения *B*. На прямолинейном участке *CD* на точку действует сила $\overline{F}(t)$, зависящая от времени. Время движения по участку *CD* равно t_0. Определить скорости шарика в положениях *B*, *C*, *D*. На прямолинейных участках коэффициент трения скольжения шарика по трубке *f*, на криволинейных участках трение отсутствует.

Таблица 3.1 – Исходные данные к заданию Д-3

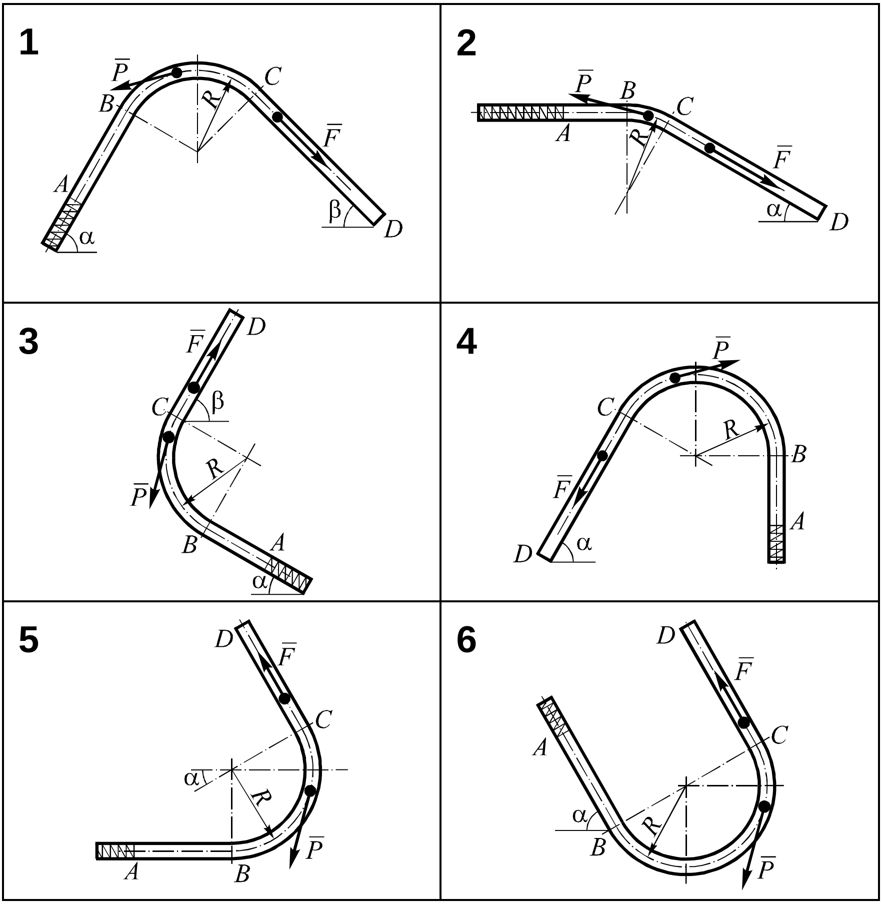
№	*m*, кг	Углы, град		*f*	*c*, Н/м	v_A, м/с	Δl_A, см	*L*, см	*r*, м	t_0, с	*P*(*s*), Н	*F*(*t*), Н
		α	β									
1	1	60	45	0,4	0,2	3	20	38	0,4	1,5	$2s$	$3\cos\frac{\pi}{3}t$
2	2	30	—	0,2	0,3	1	11	10	0,9	1	$9\sqrt{s}$	$5t+6t^3$
3	1,5	30	60	0,1	0,3	5	19	66	0,5	4	$0{,}2s^2$	$20e^{-0{,}2t}$
4	1	60	—	0,6	0,5	2	19	25	0,2	1	$10(s+s^2)$	e^{2t}
5	1	30	—	0,3	0,4	5	7	49	0,4	2	$1{,}2\sqrt{s}$	$15\sin\frac{\pi}{2}t$
6	2	60	—	0,1	0,5	7	22	18	0,8	5	$2s^3$	$\frac{80}{(t+2)}$
7	3	30	45	0,1	0,2	4	15	33	1,2	4	$1{,}5s$	$20\cos\frac{\pi}{16}t$
8	3	60	—	0,2	0,3	6	14	40	1	3	$2s+0{,}6s^2$	$8e^{08t}$
9	2	60	—	0,5	0,2	4	24	41	0,1	3	$5s+4s^3$	$40\sin\frac{\pi}{3}t$
10	1	60	—	0,1	0,1	6	16	59	0,9	3	$3\sqrt{s}+0{,}5s$	$11t-0{,}2t^5$
11	1	60	—	0,1	0,4	5	14	41	1,4	4	$0{,}8s\sqrt{s}$	$3e^{-0{,}25t}$

12	2,5	45	–	0,7	0,4	6	22	50	1,1	1	$0{,}5s^2$	$\frac{20}{(t+1)^2}$
13	2	60	45	0,4	0,3	5	14	64	1,1	2	$2\sqrt{s}$	$4\sin\frac{\pi}{2}t$
14	0,5	45	60	0,3	0,5	1	25	45	0,6	1	$0{,}5s(3+s)$	$2e^{2t}$
15	1	30	–	0,2	0,2	3	20	19	0,6	3	$0{,}8s\sqrt{s}$	$15\cos\frac{\pi}{6}t$
16	3	60	–	0,5	0,5	4	9	23	0,5	4	$6s^3$	$2e^{-0{,}5t}$
17	2,5	45	–	0,1	1,2	6	22	20	1,3	3	$2s\sqrt{s}$	$5\sqrt{t}+3t^2$
18	1,2	45	30	0,4	0,3	1	15	42	0,4	3	$0{,}6\sqrt{s}$	$5\cos\frac{\pi}{6}t$
19	1	60	–	0,6	0,2	4	6	17	0,3	5	$s^2\sqrt{s}$	$1{,}5t(1+0{,}2t)$
20	2	60	–	0,2	0,2	6	16	17	1	2	$1{,}2s^2$	$2\sin\frac{\pi}{2}t$
21	0,8	30	–	0,1	0,4	1	16	35	0,9	2	$1{,}6\sqrt{s}$	$t+0{,}4t^5$
22	1	–	–	0,3	0,1	1	22	10	0,7	5	$2{,}2s$	$\frac{2}{(t+5)}$
23	1	30	–	0,2	0,4	6	18	26	0,8	1	$10(s+5s^3)$	$3\sin\pi t$
24	3	30	–	0,5	0,1	3	22	39	0,4	1	$1{,}5s$	$3e^t$
25	2	60	–	0,1	0,5	8	7	24	1,2	2	$1{,}5\sqrt{s}+s$	$4\cos\frac{\pi}{8}t$
26	2,5	60	–	0,2	1,5	5	20	15	0,5	4	$10\sqrt{s}$	$5e^{0{,}5t}$
27	1	30	–	0,6	0,6	3	11	20	1,3	4	$1{,}3(\sqrt{s}+s)$	$10\sin\frac{\pi}{4}t$
28	0,5	30	–	0,4	0,1	2	8	10	0,1	1	$0{,}5s\sqrt{s}$	$4t(1+3t^2)$
29	1	60	–	0,1	0,3	7	22	54	0,4	4	$s+0{,}1s^3$	$2e^{-t}$
30	2	–	–	0,3	0,3	2	17	40	1,2	2	$0{,}4s$	$\frac{4}{(t+3)^2}$

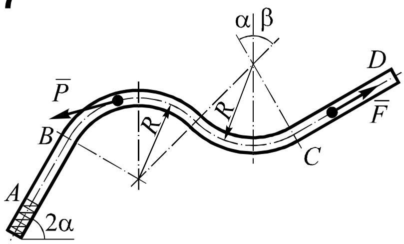
ЗАДАЧА 3

ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

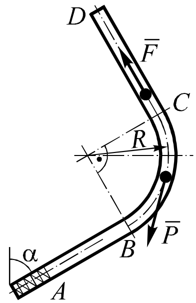
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны m. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_{с}$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен f, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути s. В начальный момент система находилась в покое.



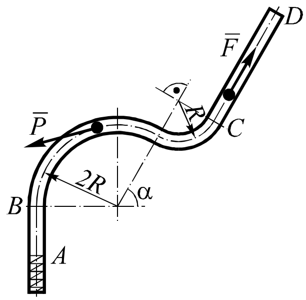
7



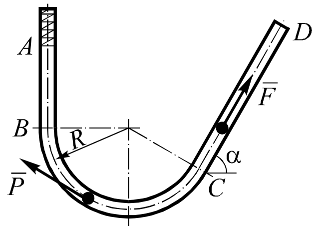
8



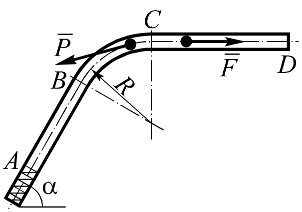
9



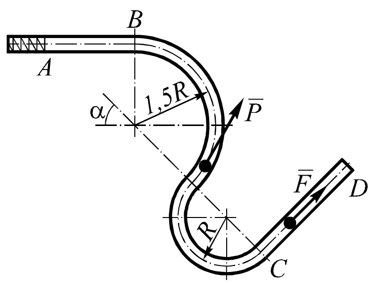
10



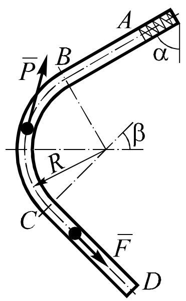
11



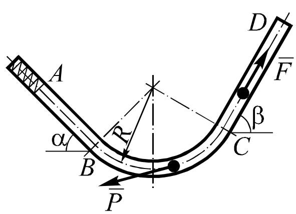
12



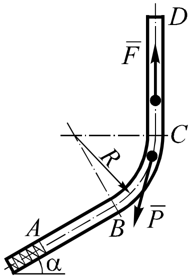
13



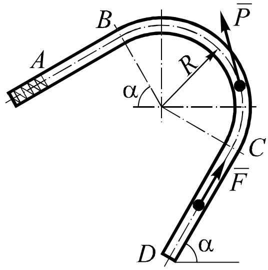
14



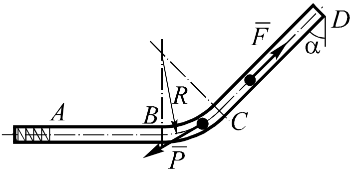
15



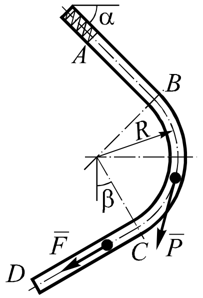
16



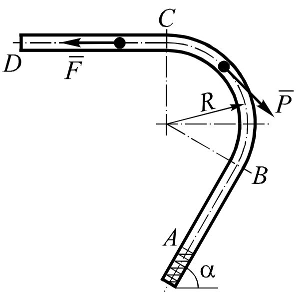
17



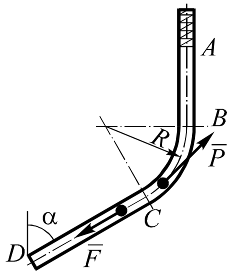
18



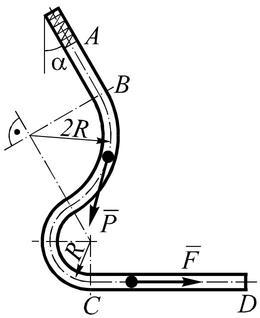
19



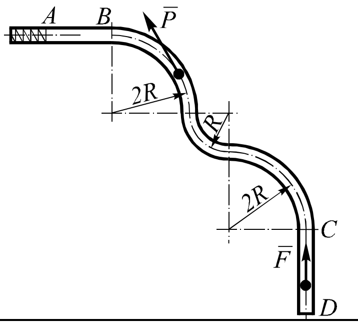
20



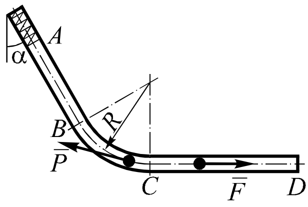
21



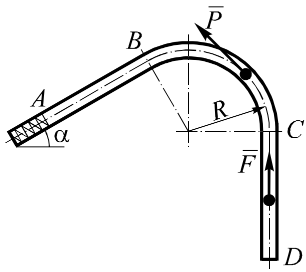
22



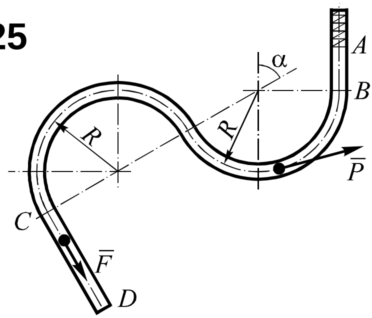
23



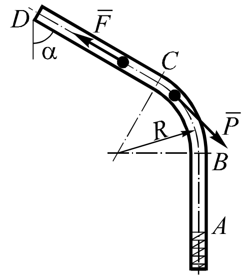
24



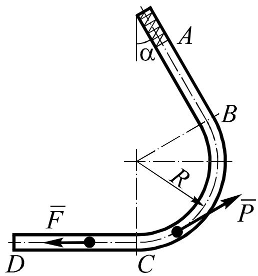
25



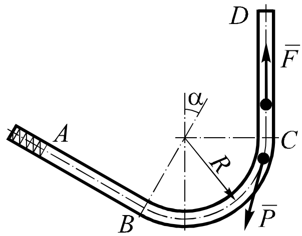
26



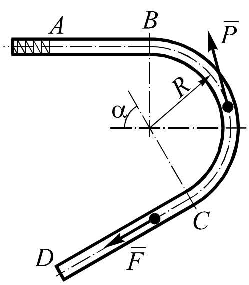
27



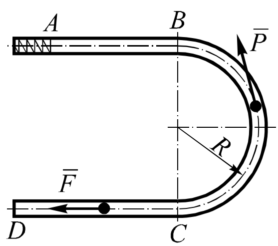
28



29



30



4 ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4.1 Некоторые положения теории

4.1.1 Теорема о движении центра масс механической системы

Центром масс механической системы называют точку, положение которой определяется радиус-вектором $\bar{r}_C$

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i$$

Здесь m_i, $\bar{r}_i$ — масса и радиус-вектор i-ой материальной точки системы; $m_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса механической системы. Координаты центра масс определяются следующим образом

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i .$$

Если система состоит из твердых тел, то x_i, y_i, z_i — координаты центров масс i – ого тела системы.

Теорема о движении центра масс: произведение массы механической системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме внешних сил, приложенных к системе.

$$m\bar{a}_C = \sum_{i=1}^{k} \bar{F}_i^{\text{внеш}} .$$

Здесь $\bar{a}_C$ — ускорение центра масс системы; $\bar{F}_i^{\text{внеш}}$ — i-ая внешняя сила. В проекциях на декартовы оси координат теорема о движении центра масс механической системы записывается следующим образом

$$ma_{Cx} = \sum_{i=1}^{k} F_{ix}, \quad ma_{Cy} = \sum_{i=1}^{k} F_{iy}, \quad ma_{Cz} = \sum_{i=1}^{k} F_{iz} .$$

4.1.2 Порядок решения задач с использованием теоремы о движении центра масс системы

Решение задач с использованием теоремы о движении центра масс механической системы рекомендуется осуществлять по следующей методике:

а) Изображают механическую систему и указывают все внешние силы, действующие на нее. Выбирают оси координат.

б) Записывают формулировку теоремы о движении центра масс системы в проекциях на выбранные оси.

в) Записывают формулы для координат центра масс системы и выражают их через координаты центра масс одного из тел системы.

г) Подставляют полученные выражения в формулировку теоремы о движении центра масс. Решают дифференциальное уравнение для искомой координаты с учетом начальных условий.

4.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача 1

Квадратная плита массой m_1 = 80 кг с длиной грани b = 3 м движется с начальной скоростью v_0 = 1 м/с по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ и коэффициентом трения скольжения f = 0,1. По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил движется шар массой m_2 = 20 кг по закону $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}t$ рад. Принимая тело 2 за материальную точку, определить закон движения центра масс плиты.

Решение.

1 *Изображаем систему двух тел и указываем действующие на нее внешние силы* (рисунок 4.1). На систему действуют: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2$; нормальная реакция $\overline{N}$; сила трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$. Выбираем оси координат. Ось x направим параллельно наклонной плоскости. Ось y — параллельно x. Начало отсчета поместим в начальном положении центра масс плиты.

Рисунок 4.1.

2 *Запишем формулировку теоремы о движении центра масс системы в проекциях на оси x и y*

$$x: \quad m_\Sigma a_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}{}^{\text{внеш}} = G_1 \sin\alpha + G_2 \sin\alpha - F_{\text{тр}},$$

$$y: \quad m_\Sigma a_{Cy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}{}^{\text{внеш}} = N - G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha.$$

Воспользуемся выражениями для сил тяжести ($G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g$), массы механической системы ($m_\Sigma = m_1 + m_2$) и силы трения скольжения ($F_{\text{тр}} = fN$). Тогда формулировка теоремы о движении центра масс примет вид

$$(m_1 + m_2) a_{Cx} = (m_1 + m_2) g \sin\alpha - fN,$$
$$(m_1 + m_2) a_{Cy} = N - (m_1 + m_2) g \cos\alpha.$$

3 *Запишем выражения для определения координат центра масс системы двух тел*

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Здесь x_1, y_1 — координаты центра масс плиты (точки O); x_2, y_2 — координаты тела 2, принятого за материальную точку. Та как ось x проходит через цент масс плиты, а плита в процессе движения системы скользит по наклонной плоскости, то $y_1(t) = 0$. Координаты x_2, y_2 можно выразить через x_1 следующим образом

$$x_2 = x_1 + \frac{b}{2} - b \sin\varphi, \quad y_2 = \frac{b}{2} - b \cos\varphi.$$

Подставим полученные выражения в формулы для координат центра масс системы

$$x_C = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 + m_2) x_1 + m_2 b \left(\frac{1}{2} - \sin\alpha \right) \right], \quad y_C = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b \left(\frac{1}{2} - \cos\alpha \right).$$

Определим проекции скорости центра масс системы на оси координат

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_C = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 b\dot{\varphi}\cos\varphi\right],$$

$$v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = \dot{y}_C = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Точкой над символом обозначена производная по времени от соответствующей величины. Определим проекции ускорения центра масс системы на оси координат

$$a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = \dot{v}_{Cx} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 b\ddot{\varphi}\cos\varphi + m_2 b\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right],$$

$$a_{Cy} = \frac{dv_{Cy}}{dt} = \dot{v}_{Cy} = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi).$$

4 Подставим полученные выражения для проекций ускорения в формулировку теоремы о движении центра масс системы

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = (m_1 + m_2)g\sin\alpha - fN,$$

$$m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = N - (m_1 + m_2)g\cos\alpha.$$

Из второго уравнения системы выразим нормальную реакцию N

$$N = m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + (m_1 + m_2)g\cos\alpha\ .$$

Подставим данное выражение в первое уравнение системы

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = (m_1 + m_2)g\sin\alpha -$$
$$- f m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - f(m_1 + m_2)g\cos\alpha.$$

Выразим вторую производную по времени от искомой координаты центра масс первого тела (плиты)

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi - f\ddot{\varphi}\sin\varphi - f\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).$$

Так как $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}t$, то $\dot{\varphi}(t) = \frac{\pi}{3}$, $\ddot{\varphi}(t) = 0$. Тогда

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) +$$
$$+\frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\left(0\cdot\cos\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t - 0\cdot f\sin\frac{\pi}{3}t - f\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{3}t\right).$$

Произведем математические преобразования

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\frac{\pi^2}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3}t + f\cos\frac{\pi}{3}t\right).$$

Определим скорость центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\frac{\pi^2}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3}t + f\cos\frac{\pi}{3}t\right).$$

Разделим переменные и проинтегрируем от начала движения (t = 0) до произвольного момента времени t

$$\int_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_1(t)} d\dot{x}_1 = \int_0^t \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\frac{\pi^2}{9}\left(\sin\frac{\pi}{3}t + f\cos\frac{\pi}{3}t\right)\right]dt.$$

Здесь $\dot{x}_1(0)$ — начальная скорость центра масс плиты $\dot{x}_1(0) = v_0$. После интегрирования получим

$$\dot{x}_1(t) = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b\pi^2}{9(m_1 + m_2)}\frac{3}{\pi}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right) + f\sin\frac{\pi}{3}t\right] + v_0.$$

Определим зависимость от времени координаты x_1 центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx_1}{dt} = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b\pi^2}{9(m_1 + m_2)}\frac{3}{\pi}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right) + f\sin\frac{\pi}{3}t\right] + v_0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем от момента начала движения до произвольного момента времени

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} dx_1 = \int_0^t \left[gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b\pi}{3(m_1+m_2)}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}t + f\sin\frac{\pi}{3}t\right) + v_0 \right] dt \ .$$

Так как начало системы отсчета совпадает с начальным положением центра масс плиты, то $x_1 = 0$. После интегрирования получим

$$x_1(t) = g\frac{t^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{m_2 b\pi}{3(m_1+m_2)}\left[t - \frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}t - f\frac{3}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0 t \ .$$

Произведем математические преобразования

$$x_1(t) = g\frac{t^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) + v_0 t - \frac{m_2 b}{(m_1+m_2)}\left[t\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}t - f\cos\frac{\pi}{3}t + f \right].$$

Подставим известные численные значения

$$x_1(t) = 2{,}026t^2 + t - 0{,}628t + 0{,}6\sin\frac{\pi}{3}t + 0{,}06\cos\frac{\pi}{3}t - 0{,}06 \text{ (м)} \ .$$

Ответ: $x_1(t) = 2{,}026t^2 + 0{,}372t + 0{,}6\sin\frac{\pi}{3}t + 0{,}06\cos\frac{\pi}{3}t - 0{,}06 \text{ (м)}$, $y_1(t) = 0$.

Задача 2

Квадратная плита массой m_1 = 50 кг с длиной грани b = 2 м движется с начальной скоростью v_0 = 0,8 м/с по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α = 60° и коэффициентом трения скольжения f = 0,2. По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил движется шар массой m_2 = 15 кг по закону $s(t) = t\sqrt{t} + \sin\frac{\pi}{3}t$ рад. Принимая тело 2 за материальную точку, определить закон движения центра масс плиты.

Решение.

1 *Изображаем систему двух тел и указываем действующие на нее внешние силы* (рисунок 4.2). На систему действуют: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2$; нормальная реакция $\overline{N}$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$. Выбираем оси координат. Ось x направим параллельно наклонной плоскости. Ось y — параллельно x. Начало отсчета поместим в начальном положении центра масс плиты.

Рисунок 4.2.

2 *Запишем формулировку теоремы о движении центра масс системы в проекциях на оси x и y*

$$x: \quad m_\Sigma a_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{\text{внеш}} = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha - F_{тр},$$

$$y: \quad m_\Sigma a_{Cy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{\text{внеш}} = N - G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha.$$

Воспользуемся выражениями для сил тяжести ($G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g$), массы механической системы ($m_\Sigma = m_1 + m_2$) и силы трения скольжения ($F_{тр} = fN$). Тогда формулировка теоремы о движении центра масс примет вид

$$(m_1 + m_2) a_{Cx} = -(m_1 + m_2) g \sin\alpha - fN,$$
$$(m_1 + m_2) a_{Cy} = N - (m_1 + m_2) g \cos\alpha.$$

3 *Запишем выражения для определения координат центра масс системы двух тел*

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Здесь x_1, y_1 – координаты центра масс плиты (точки O); x_2, y_2 – координаты тела 2, принятого за материальную точку. Та как ось x проходит через цент масс плиты, а плита в процессе движения системы скользит по наклонной плоскости, то $y_1(t) = 0$. Координаты x_2, y_2 можно выразить через x_1 следующим образом

$$x_2 = x_1 - \frac{b}{2} + s\cos\beta, \quad y_2 = -s\sin\beta .$$

Здесь введен угол β — между траекторией относительного движения тела 2 и осью *x*. Для угла β можно записать

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b/2}{b} = \frac{1}{2} .$$

Тогда для косинуса и синуса этого угла получим

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \sqrt{1-\cos\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Подставим полученные выражения в формулы для координат центра масс системы

$$x_C = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1+m_2)x_1 + m_2\left(s\cos\beta - \frac{b}{2}\right)\right], \quad y_C = \frac{-m_2}{m_1+m_2} s\sin\beta .$$

Определим проекции скорости центра масс системы на оси координат

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \dot{x}_C = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1+m_2)\dot{x}_1 + m_2\dot{s}\cos\beta\right]$$

$$v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = \dot{y}_C = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\dot{s}\sin\beta.$$

Точкой над символом обозначена производная по времени от соответствующей величины. Определим проекции ускорения центра масс системы на оси координат

$$a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = \dot{v}_{Cx} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s}\cos\beta\right]$$

$$a_{Cy} = \frac{dv_{Cy}}{dt} = \dot{v}_{Cy} = \frac{-m_2}{m_1+m_2}\ddot{s}\sin\beta.$$

4 *Подставим полученные выражения для проекций ускорения в формулировку теоремы о движении центра масс системы*

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{s}\cos\beta=-(m_1+m_2)g\sin\alpha-fN,$$
$$-m_2\ddot{s}\sin\beta=N-(m_1+m_2)g\cos\alpha.$$

Из второго уравнения системы выразим нормальную реакцию N

$$N=(m_1+m_2)g\cos\alpha-m_2\ddot{s}\sin\beta\,.$$

Подставим данное выражение в первое уравнение системы

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1+m_2\ddot{s}\cos\beta=-(m_1+m_2)g\sin\alpha-$$
$$-f(m_1+m_2)g\cos\alpha+fm_2\ddot{s}\sin\beta.$$

Выразим вторую производную по времени от искомой координаты центра масс первого тела (плиты)

$$\ddot{x}_1=-g(\sin\alpha+f\cos\alpha)-\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{s}(\cos\beta-f\sin\beta)\,.$$

Так как $s(t)=t\sqrt{t}+\sin\frac{\pi}{3}t$, то

$$\dot{s}(t)=\frac{3}{2}t^{1/2}+\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t,\quad \ddot{s}(t)=\frac{3}{4}t^{-1/2}-\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\,.$$

Тогда

$$\ddot{x}_1=-g(\sin\alpha+f\cos\alpha)-\frac{m_2}{m_1+m_2}(\cos\beta-f\sin\beta)\left(\frac{3}{4}t^{-1/2}-\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

Определим скорость центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\cos\beta - f\sin\beta)\left(\frac{3}{4}t^{-1/2} - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

Разделим переменные и проинтегрируем от начала движения (t = 0) до произвольного момента времени t

$$\int_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_1(t)} d\dot{x}_1 = \int_0^t -\left[g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\cos\beta - f\sin\beta)\left(\frac{3}{4}t^{-1/2} - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right)\right]dt.$$

Здесь $\dot{x}_1(0)$ — начальная скорость центра масс плиты $\dot{x}_1(0) = v_0$. После интегрирования получим

$$\dot{x}_1(t) = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(\cos\beta - f\sin\beta)\left[\frac{3}{2}t^{1/2} + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0.$$

Определим зависимость от времени координаты x_1 центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx_1}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(\cos\beta - f\sin\beta)\left[\frac{3}{2}t^{1/2} + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем от момента начала движения до произвольного момента времени

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} dx_1 = \int_0^t \left[-g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(\cos\beta - f\sin\beta)\left[\frac{3}{2}t^{1/2} + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0\right]dt.$$

Так как начало системы отсчета совпадает с начальным положением центра масс плиты, то x_1 = 0. После интегрирования получим

$$x_1(t) = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} -$$
$$-\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}(\cos\beta - f\sin\beta)\left[t^{3/2} + \sin\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}t\right] + v_0 t.$$

Подставим известные численные значения

$$x_1(t) = -9{,}8(\sin 60° + 0{,}2\cos 60°)0{,}5t^2 - \frac{15}{65}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 0{,}2\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(t\sqrt{t} + \sin\frac{\pi}{3}t - 1{,}05t\right) +$$

$$+0{,}8t = -4{,}73t^2 - 0{,}19t\sqrt{t} - 0{,}19\sin\frac{\pi}{3}t + t \text{ (м)}.$$

Ответ: $x_1(t) = -4{,}73t^2 - 0{,}19t\sqrt{t} - 0{,}19\sin\frac{\pi}{3}t + t$ (м), $y_1(t) = 0$.

4.3. Условие задания Д-4.

Квадратная плита массой m_1 с длиной грани b движется с начальной скоростью v_0 по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения скольжения f. По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил движется шар массой m_2 по закону $s(t)$ (или $\varphi(t)$). Принимая тело 2 за материальную точку, определить закон движения центра масс плиты.

Таблица 4.1 – Исходные данные к заданию Д-4

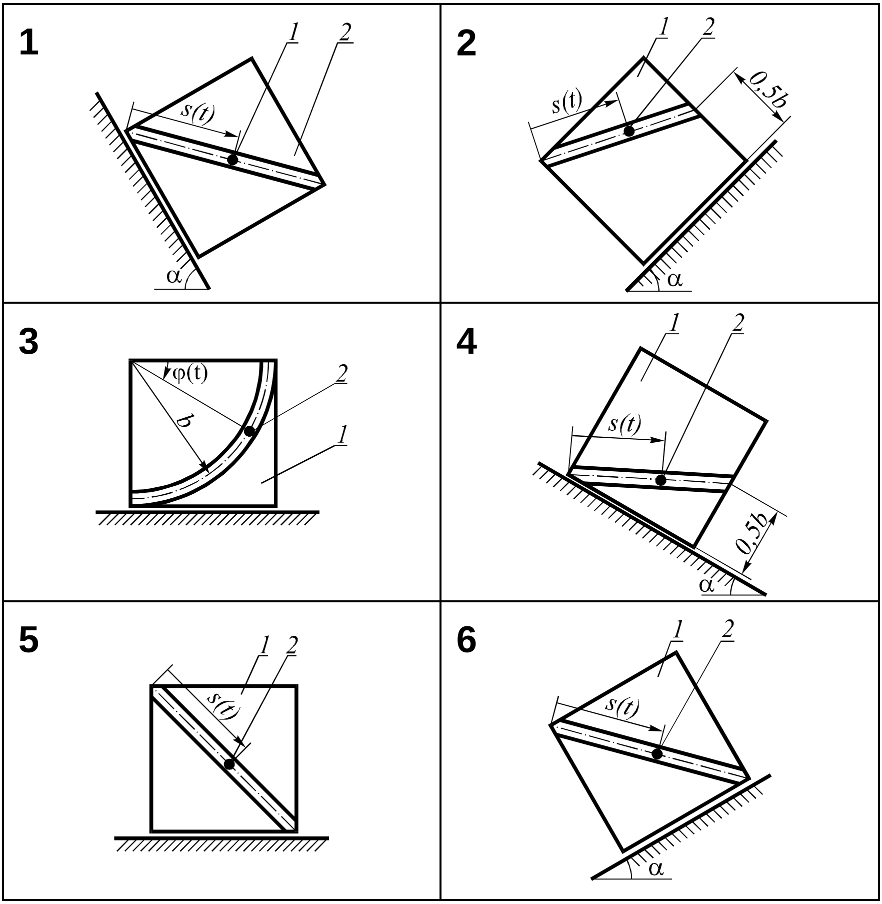
№	Массы тел, кг		b, м	α, град	f	v_0, м/с	s, м
	m_1	m_2					
1	40	15	1	60	0.3	2.5	$t+t^2+t^3$
2	75	25	2	45	0.6	2	$2\sin\frac{\pi}{8}t$
3	80	20	3	–	0.2	1.5	$2t$
4	35	10	1	30	0.2	2	$t+0{,}4t^2\sqrt{t}$
5	40	15	1	–	0.1	0.5	$1{,}5\sin t$
6	70	10	3	30	0.4	1.5	$t^2+0{,}9t^3$
7	40	9	2	30	0.5	2.5	$5\sqrt{t}-t$
8	30	20	1	60	0.6	3	$1{,}5t+t^3$
9	35	5	1	–	0.4	1	$1{,}5\left(1-\cos\frac{\pi}{2}t\right)$
10	45	12	2	45	0.1	2.5	$\sqrt{t}\,(t-0,t^2)$

11	30	7	1	–	0.2	2	$1{,}5\sin\frac{\pi}{3}t$
12	40	15	2	30	0.3	2.5	t
13	50	15	3	45	0.2	1	$t^2+0{,}2t^4$
14	75	30	3	60	0.4	2.5	$t\left(2\sqrt{t}+t\right)$
15	40	15	2	–	0.3	3	$1{,}5t$
16	60	10	3	60	0.5	2.5	$4\sqrt{t}+2t^3$
17	75	25	3	45	0.4	2	$0{,}5t$
18	80	20	2	45	0.1	1	$0{,}8\sin\frac{\pi}{6}t$
19	40	10	1	60	0.5	2.5	$t^2(0{,}5+0{,}2t)$
20	60	20	1	30	0.1	2	$t+0{,}1t^2$
21	80	15	3	–	0.5	1	$1-\cos\frac{\pi}{3}t$
22	60	10	2	60	0.3	2.5	$0{,}8t$
23	45	10	1	–	0.1	1.5	$2\sin\frac{\pi}{4}t$
24	50	20	2	45	0.4	1.5	$\sqrt{t}\left(3+0{,}1\sqrt{t}\right)$
25	70	20	2	30	0.1	1	$\frac{\pi}{3}t$
26	35	5	1	45	0.2	3	$t+0{,}5t^3$
27	60	10	3	–	0.4	2	$\sin\pi t$
28	40	15	2	30	0.5	1	$2\sqrt{t}+t^2$
29	65	10	3	–	0.3	1.5	$2t$
30	60	15	2	–	0.5	2.5	$\frac{\pi}{4}t$

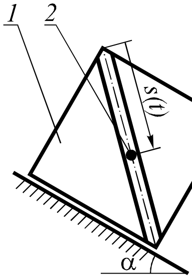
ЗАДАЧА 4

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

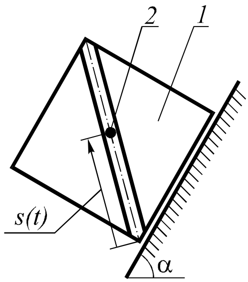
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны *m*. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_{с}$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен *f*, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*. В начальный момент система находилась в покое.



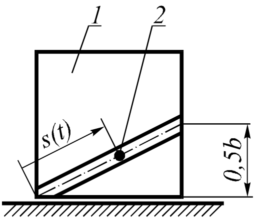
7



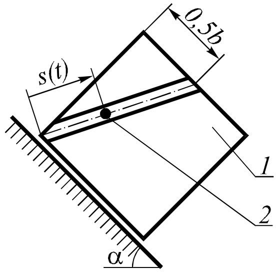
8



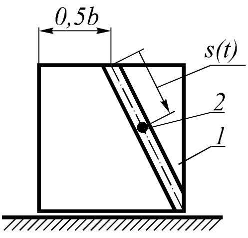
9



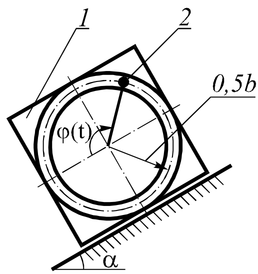
10



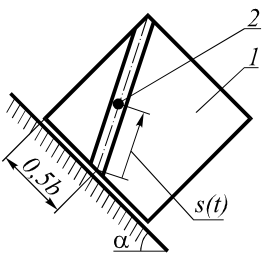
11



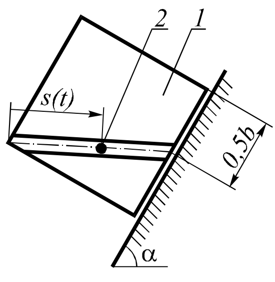
12



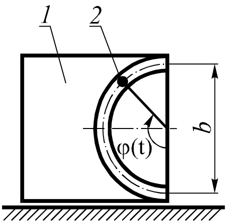
13



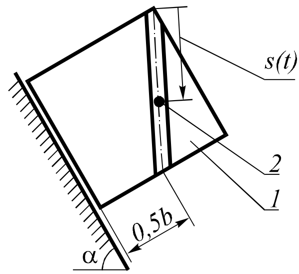
14



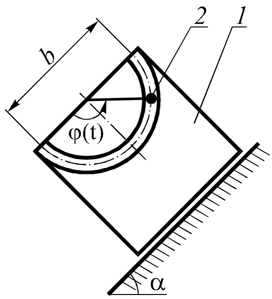
15



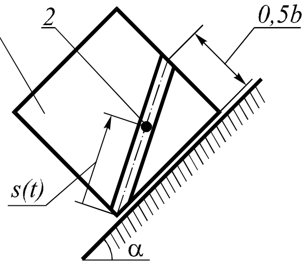
16



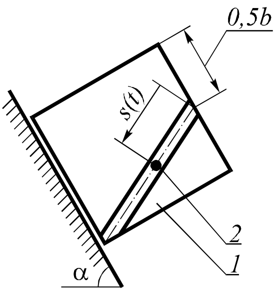
17



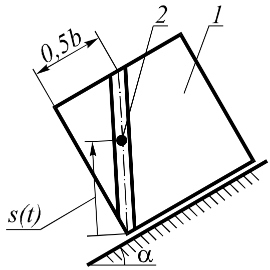
18



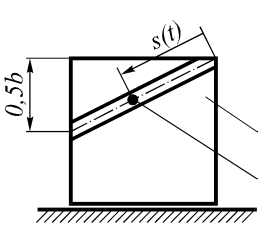
19



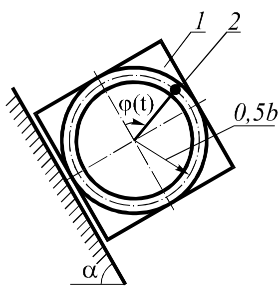
20



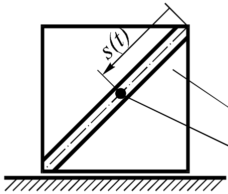
21



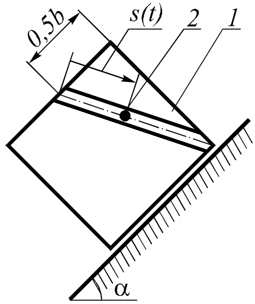
22



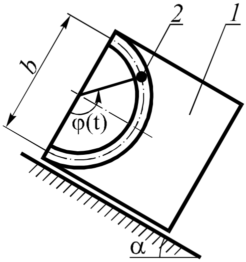
23



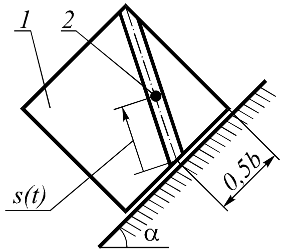
24



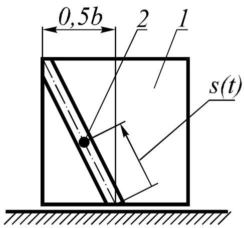
25



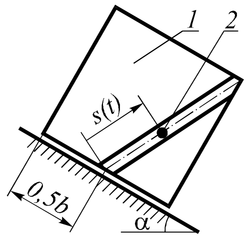
26



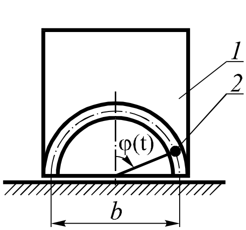
27



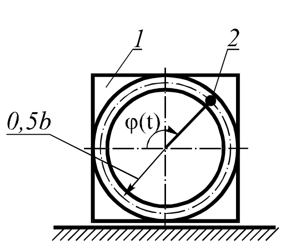
28



29



30



5 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

5.1 Некоторые положения теории

5.1.1 Динамические уравнения движения твердого тела

Динамические уравнения движения твердого тела устанавливают связь между параметрами движения точек тела и действующими на него силами. Форма этих уравнений различна для различных видов движения тела.

а) Для поступательно движущегося тела динамические уравнения имеют вид:

$$m\bar{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \ .$$

Здесь m – масса тела; $\bar{a}_C$ – ускорение центра масс тела; $\bar{F}_i$ – i-ая сила, действующая на тело. В проекциях на декартовы оси координат

$$ma_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad ma_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad ma_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \ . \qquad (5.1)$$

Здесь a_{Cx}, a_{Cy}, a_{Cz} – проекции ускорения на оси координат. При поступательном движении ускорения и скорости всех точек тела одинаковы.

б) Для вращательно движущегося тела

$$J_z \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} \ . \qquad (5.2)$$

Здесь J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z; ε – угловое ускорение тела; M_{iz} – момент i-ой силы относительно оси вращения. Момент инерции однородного диска радиуса R относительно оси, проходящей через центр масс (центральной оси С), определяется следующим образом

$$J_C = \frac{1}{2} mR^2 \ .$$

Если известен радиус инерции тела i_C, то момент инерции относительно центральной оси

$$J_C = m i_C^2$$

При вращательном движении модуль скорости i-ой точки тела определяется как

$$v_i = \omega h_i$$

Здесь h_i – расстояние от i-ой точки до оси вращения; ω – угловая скорость тела. При составлении динамического уравнения вращательного движения тела выбирается направление вращения. Моменты сил, вращающих тело против выбранного направления принимаются отрицательными.

с) Для плоскопараллельного движения:

$$m a_{Cx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad m a_{Cy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad J_C \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} M_{iC} . \tag{5.3}$$

Здесь J_C – момент инерции тела относительно центральной оси; M_{iC} – момент i-ой силы относительно центральной оси. При плоскопараллельном движении модуль скорости i-ой точки тела определяется следующим образом

$$v_i = \omega h_{Pi}$$

Здесь h_{Pi} – расстояние от i-ой точки до мгновенного центра скоростей тела.

5.1.2 Силы, действующие на тело при качении

При качении одного тела по поверхности другого возникает пара сил, препятствующая качению. Момент этой пары M_c, называемый моментом сопротивления качению, определяется следующим образом

$$M_c = \delta N .$$

Здесь N – сила нормального давления, действующая со стороны поверхности на катящееся тело; δ – коэффициент сопротивления качению.

На катящееся тело в точке контакта с поверхностью также действует сила сцепления $\overline{F}_{сц}$. Вектор $\overline{F}_{сц}$ перпендикулярен вектору силы $\overline{N}$ и противоположен направлению, в котором стремятся сдвинуть тело приложенные к нему активные силы.

Если тело находится в равновесии или катится без проскальзывания, то сила $F_{сц}$ определяется приложенными к телу активными силами. При отсутствии проскальзывания точка контакта катящегося тела с неподвижной поверхностью является мгновенным центром скоростей этого тела.

Условие, при выполнении которого качение будет происходить без проскальзывания, записывается в виде

$$F_{сц} \le F_{сц}^{max} = f_{сц} N .$$

Здесь $f_{сц}$ – коэффициент трения покоя (сцепления).

5.1.3 Порядок решения задач с использованием динамических уравнений движения твердого тела.

Решение задач с использованием динамических уравнений движения твердого тела рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображают рассматриваемую систему тел.

2 Для каждого тела системы выполняют следующие операции:

а) делают рисунок тела и указывают все силы, действующие на него.

б) выбирают оси координат. Для тел, движущихся вращательно или плоскопараллельно, выбирают также направление вращения.

с) записывают динамические уравнения движения.

д) подставляют известные выражения для входящих в динамические уравнения величин (сил тяжести, сил трения скольжения, момента сопротивления качению и др.). Для плоскопараллельно движущегося тела устанавливают связь между ускорением центра масс и угловым ускорением.

3 Используя метод общей точки, устанавливают связь между ускорениями звеньев. Все ускорения, входящие в динамические уравнения, могут быть выражены через искомое.

4 Решают систему уравнений, составленную из динамических уравнений движения тел системы.

5.2 Пример выполнения задания контрольной работы.

Задача 1

Система двух тел (рисунок 5.1) движется под действием силы F = 1 кН, приложенной к телу 1, силы F_2 = 0,8 кН и пары сил с моментом M = 0,4 кН·м, приложенных к телу 2. Массы тел: m_1 = 100 кг, m_2 = 100 кг. Радиусы: R_1 = 60 см, R_2 = 60 см, r_1 = 30 см, r_2 = 40 см. Радиусы инерции тел: i_1 = 40 см, i_2 = 50 см. Коэффициент сопротивления качению для первого тела δ = 1 см.

Углы $\alpha = 45°, \beta = 30°$. Определить ускорение центра масс тела 1, катящегося без проскальзывания.

Рисунок 5.1.

Решение

1 *Делаем рисунок к задаче* (рисунок 5.1).

2 *Рассмотрим каждое тело системы.*

2.1 Рассмотрим тело 1

а) Делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело 1 (рисунок 5.2). На тело 1 действуют: активная сила $\overline{F}$; сила тяжести $\overline{G}_1$, приложенная к центру масс тела; нормальная реакция $\overline{N}_1$; сила натяжения нити $\overline{T}$; сила сцепления с поверхностью $\overline{F}_{сц}$; момент сопротивления качению M_c.

Рисунок 5.2.

б) Выберем оси координат. Ось x направим вдоль наклонной плоскости. Ось y — перпендикулярно ей. Укажем также направление вращения тела. Так как тело 1 катится вниз по наклонной плоскости, то вращение происходит против хода часовой стрелки.

с) Запишем динамические уравнения движения тела. Так как тело 1 движется плоскопараллельно, то следует записать уравнения вида (5.3)

$$\begin{aligned} m_1 a_{Cx} &= F\cos\beta - T + G_1 \sin\alpha - F_{сц}, \\ m_1 a_{Cy} &= N_1 - G_1\cos\alpha - F\sin\beta, \\ J_C \varepsilon_1 &= FR_1 - Tr_1 + F_{сц} R_1 - M_c. \end{aligned} \qquad (5.4)$$

д) Так как точка C движется параллельно оси x, то $a_{Cy} = 0$. Следовательно $a_C = a_{Cx}$. Для силы тяжести можно записать известное соотношение $G_1 = m_1 g$. Момент сопротивления качению связан с нормальной реакцией $M_c = \delta N_1$. Так как известен радиус инерции тела 1, то для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать: $J_C = m_1 i_1^2$.

Так как тело 1 движется без проскальзывания, то точка касания с неподвижной поверхностью (точка P) является мгновенным центром скоростей тела 1. Следовательно, для скорости точки C можно записать известное соотношение $v_C = \omega_1 CP$. Здесь ω_1 — угловая скорость тела 1; CP

– расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей тела $CP = R_1$. Следовательно: $\omega_1 = v_C / R_1$. Продифференцировав последнее равенство по времени, установим связь между угловым ускорением тела 1 и ускорением его центра масс

$$\varepsilon_1 = \frac{a_C}{R_1}. \tag{5.5}$$

Подставим полученные соотношения в систему (5.4).

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F\cos\beta - T + m_1 g\sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &0 = N_1 - m_1 g\cos\alpha - F\sin\beta, \\ &m_1 a_C \frac{i_1^2}{R_1} = FR_1 - Tr_1 - F_{\text{сц}} R_1 - \delta N_1. \end{aligned}$$

Из второго уравнения последней системы можно выразить нормальную реакцию N_1

$$N_1 = m_1 g\cos\alpha + F\sin\beta. \tag{5.6}$$

Тогда первое и третье уравнение примут вид

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F\cos\beta - T + m_1 g\sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &m_1 a_C \frac{i_1^2}{R_1} = F(R_1 - \delta\sin\beta) - Tr_1 - F_{\text{сц}} R_1 - \delta m_1 g\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Получили систему двух уравнений с тремя неизвестными: a_C, T, $F_{\text{сц}}$.

2.2 Рассмотрим тело 2

а) Делаем рисунок и указывает силы, действующие на тело (рисунок 5.3). На тело 2 действуют: сила тяжести $\overline{G}_2$; реакция цилиндрического шарнира в точке O, раскладываемая на две составляющие $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$; сила натяжения нити $\overline{T}_1$; активная сила $\overline{F}_2$ и пара сил с моментом M.

Рисунок 5.3

б) Выбираем оси координат (рисунок 5.3). Направление вращения — против хода часовой стрелки.

с) Записываем динамическое уравнение движения. Тело 2 движется вращательно вокруг оси, проходящей через точку *O*. Следовательно, динамическое уравнение будет иметь вид

$$J_O \varepsilon_2 = T_2 R_2 - F_2 r_2 - M \ .$$

Здесь J_O – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через точку *O*; ε_2 – угловое ускорение тела 2. Сила тяжести и компоненты реакции цилиндрического шарнира не имеют момента относительно оси вращения.

д) Так как точка *O* является центром масс тела 2, то $J_O = m_2 i_2{}^2$. Силы $\overline{T}$ и $\overline{T}_1$ – силы взаимодействия между телами 1 и 2. Следовательно $\overline{T}_1 = -\overline{T}$, а модули этих сил равны. Динамическое уравнение движения тела 2 можно переписать в виде

$$m_2 i_2{}^2 \varepsilon_2 = T R_2 - F_2 r_2 - M \ . \qquad (5.8)$$

3 Запишем полученные динамические уравнения для двух тел

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F\cos\beta - T + m_1 g\sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &m_1 a_C \frac{i_1{}^2}{R_1} = F(R_1 - \delta\sin\beta) - T r_1 + F_{\text{сц}} R_1 - \delta m_1 g\cos\alpha, \\ &m_2 \varepsilon_2 i_2{}^2 = T R_2 - F_2 r_2 - M. \end{aligned} \qquad (5.9)$$

В полученной системе 3-ех уравнений 4 неизвестных: ускорения a_C, ε_2; сила сцепления $F_{\text{сц}}$; силы натяжения *T*.

Ускорения звеньев механизма a_C, ε_2 связаны между собой. Для того, чтобы установить эту связь, воспользуемся методом общей точки. В следствии нерастяжимости нитей скорости точек *A* и *B* (рисунок 5.1) равны между собой $v_A = v_B$. Точка *A* принадлежит плоско движущемуся телу 1. Следовательно,

$$v_A = \omega_1 AP = \omega_1 (R_1 + r_1) \ .$$

Здесь ω_1 – угловая скорость тела 1; точка *P* – мгновенный центр скоростей (МЦС) тела 1. Так как тело 1 катится без проскальзывания, то МЦС находится в точке касания с неподвижной поверхностью (рисунок 5.1).

Точка *B* принадлежит вращательно движущемуся телу 2 $v_B = \omega_2 BO = \omega_2 R_2$. Следовательно

$$\omega_1 (R_1 + r_1) = \omega_2 R_2 .$$

Продифференцируем последнее равенство по времени $\varepsilon_1 (R_1 + r_1) = \varepsilon_2 R_2$. Выразим угловое ускорение второго тела

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{R_1 + r_1}{R_2} .$$

С учетом равенства (5.5) можно определить связ углового ускорения тела 2 с ускорением точки *C*

$$\varepsilon_2 = a_C \frac{R_1 + r_1}{R_1 R_2} . \qquad (5.10)$$

Подставим выражение (5.10) в систему (5.9)

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F\cos\beta - T + m_1 g \sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &m_1 a_C \frac{i_1^{\,2}}{R_1} = F(R_1 - \delta \sin\beta) - T r_1 + F_{\text{сц}} R_1 - \delta m_1 g \cos\alpha, \\ &m_2 a_C \frac{R_1 + r_1}{R_1 R_2} i_2^{\,2} = T R_2 - F_2 r_2 - M. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

В полученной системе 3 неизвестных: ускорение a_C; сила сцепления $F_{\text{сц}}$; силы натяжения *T*.

4 Решаем систему (5.11). Из третьего уравнения системы выразим *T*

$$T_1 = m_2 a_C \frac{R_1 + r_1}{R_1 R_2^{\,2}} i_2^{\,2} + F_2 \frac{r_2}{R_2} + M \frac{1}{R_2} .$$

Из первого уравнения системы выразим силу сцепления $F_{\text{сц}}$

$$F_{\text{сц}} = F\cos\beta - T + m_1 g \sin\alpha - m_1 a_C .$$

Подставим ранее выведенное выражение для силы натяжения *T*

$$F_{сц} = F\cos\beta - a_C \frac{R_1 + r_1}{R_1 R_2{}^2}\left(m_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + r_1} + m_2 i_2{}^2 \right) + \\ + m_1 g \sin\alpha - F_2 \frac{r_2}{R_2} - M \frac{1}{R_2}. \qquad (5.12)$$

Подставим выражения для силы сцепления и силы T во второе уравнение системы

$$m_1 a_C \frac{i_1{}^2}{R_1} = F(R_1 - \delta\sin\beta) - a_C \frac{R_1 + r_1}{R_1 R_2{}^2} r_1 m_2 i_2{}^2 - F_2 \frac{r_1 r_2}{R_2} - M \frac{r_1}{R_2} + \\ + FR_1\cos\beta + m_1 g R_1 \sin\alpha - a_C \frac{R_1 + r_1}{R_2{}^2}\left(m_1 \frac{R_1 R_2{}^2}{R_1 + r_1} + m_2 i_2{}^2 \right) - \\ - F_2 \frac{R_1 r_2}{R_2} - M \frac{R_1}{R_2} - \delta m_1 g \cos\alpha.$$

Из последнего уравнения можно выразить ускорение центра масс первого тела a_C. После математических преобразований получим

$$a_C = \frac{F(R_1 + R_1\cos\beta - \delta\sin\beta) + m_1 g(R_1\sin\alpha - \delta\cos\alpha) - \dfrac{R_1 + r_1}{R_2}(F_2 r_2 + M)}{m_1\left(\dfrac{i_1{}^2}{R_1} + R_1\right) + \dfrac{(R_1 + r_1)^2}{R_1 R_2{}^2} m_2 i_2{}^2}$$

Подставим известные численные значения величин, входящих в полученное выражение

$$a_C = \frac{1000\cdot 1{,}11 + 980\cdot 0{,}42 - 1{,}5(800\cdot 0{,}4 + 400)}{100(0{,}27 + 0{,}6) + \dfrac{0{,}81}{0{,}216}25} = \\ = \frac{(1110 + 411{,}60 - 1080)}{(87 + 93{,}75)} = 2{,}44\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: ускорение центра масс тела 1 $a_C = 2{,}44\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 2

Система двух тел (рисунок 5.4) движется под действием силы F = 2,6 кН и пары сил с моментом M = 0,5 кН·м. Массы тел: m_1 = 200 кг, m_2 = 100 кг. Радиусы наибольшей и наименьшей поверхностей блока 1 равны соответственно R_1 = 60 см, r_1 = 40 см. Радиус инерции i_1 = 50 см. Коэффициент сопротивления качению для первого тела δ = 3 см, коэффициент трения скольжения f = 0,1. Определить ускорение центра масс тела 1, катящегося без проскальзывания.

Рисунок 5.4.

Решение

1 *Делаем рисунок к задаче* (рисунок 5.4).

2 *Рассмотрим каждое тело системы.*

2.1 Рассмотрим тело 1.

а) Делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело 1 (рисунок 5.5). На тело 1 действуют: активная сила $\overline{F}$; сила тяжести $\overline{G_1}$, приложенная к центру масс тела; нормальная реакция $\overline{N_1}$; сила натяжения нити $\overline{T}$; сила сцепления с поверхностью $\overline{F}_{\text{сц}}$; пара сил с моментом M и момент сопротивления качению M_c.

Рисунок 5.5.

б) Выберем оси координат. Ось x направим вдоль наклонной плоскости. Ось y – перпендикулярно ей. Укажем также направление вращения тела. Так как тело 1 катится вниз по наклонной плоскости, то вращение происходит против хода часовой стрелки.

с) Запишем динамические уравнения движения тела. Так как тело 1 движется плоскопараллельно, то следует записать уравнения вида (5.3)

$$\begin{aligned} m_1 a_{Cx} &= F\sin\beta - T - G_1\sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ m_1 a_{Cy} &= N_1 - G_1\cos\alpha + F\cos\beta, \\ J_C\varepsilon_1 &= FR_1 - T_1 r_1 + F_{\text{сц}} r_1 - M - M_c. \end{aligned} \qquad (5.13)$$

д) Так как точка C движется параллельно оси x, то $a_{Cy} = 0$. Следовательно $a_C = a_{Cx}$. Для силы тяжести можно записать известное соотношение $G_1 = m_1 g$. Момент сопротивления качению связан с нормальной реакцией $M_c = \delta N_1$. Так как известен радиус инерции тела 1, то для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать: $J_C = m_1 i_1^2$.

Так как тело 1 движется без проскальзывания, то точка касания с неподвижной поверхностью (точка P) является мгновенным центром скоростей тела 1. Следовательно, для скорости точки C можно записать известное соотношение $v_C = \omega_1 CP$. Здесь ω_1 – угловая скорость тела 1; CP – расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей тела $CP = r_1$. Следовательно: $\omega_1 = v_C / r_1$. Продифференцировав последнее равенство по времени, установим связь между угловым ускорением тела 1 и ускорением его центра масс

$$\varepsilon_1 = \frac{a_C}{r_1} . \tag{5.14}$$

Подставим полученные соотношения в систему (5.13).

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F \sin\beta - T - m_1 g \sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &0 = N_1 - m_1 g \cos 45^\circ + F \cos\beta, \\ &m_1 a_C \frac{i_1^2}{r_1} = FR_1 - T_1 r_1 - F_{\text{сц}} r_1 - M - \delta N_1. \end{aligned}$$

Из второго уравнения последней системы можно выразить нормальную реакцию N_1

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha - F \cos\beta \tag{5.15}$$

Тогда первое и третье уравнение примут вид

$$\begin{aligned} &m_1 a_C = F \sin\beta - T - m_1 g \sin\alpha - F_{\text{сц}}, \\ &m_1 a_C \frac{i_1^2}{r_1} = F(R_1 + \delta \cos\beta) - T r_1 - F_{\text{сц}} r_1 - \delta m_1 g \cos\alpha. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Получили систему двух уравнений с тремя неизвестными: a_C, T, $F_{\text{сц}}$.

2.2 Рассмотрим тело 2.

а) Делает рисунок и указываем силы, действующие на тело (рисунок 5.6). На тело 2 действуют: сила тяжести $\overline{G}_2$; нормальная реакция $\overline{N}_2$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$; сила натяжения нити $\overline{T}_1$.

Рисунок 5.6.

б) Выбираем оси координат. Ось x направим вдоль движения. Ось y – перпендикулярно x.

с) Тело 2 движется поступательно. Динамические уравнения поступательного движения в проекциях на выбранные оси будут иметь вид

$$m_2 a_{2x} = T_1 - F_{тр} - G_2 \sin\gamma,$$
$$m_2 a_{2y} = N_2 - G_2 \cos\gamma.$$

Здесь a_{2x}, a_{2y} — проекции ускорения центра масс тела 2 на оси x, y. При поступательном движении ускорения всех точек тела одинаковы.

д) Так как все точки тела 2 движутся параллельно оси x, то $a_{2y} = 0$. Следовательно, проекция a_{2x} совпадает с полным ускорением a_2. В соответствии с законом Кулона для силы трения скольжения можно записать: $F_{тр} = fN_2$. Для силы тяжести – $G_2 = m_2 g$. Силы $\overline{T}$ и $\overline{T}_1$ – силы взаимодействия тел 1 и 2. Следовательно, $\overline{T}_1 = -\overline{T}$, а модули этих сил равны $T_1 = T$. Подставим полученные выражения в динамические уравнения поступательного движения

$$m_2 a_2 = T - fN_2 - m_2 g \sin\gamma,$$
$$0 = N_2 - m_2 g \cos\gamma.$$

Выразим из второго уравнения модуль нормальной реакции N_2 и подставим во второе

$$m_2 a_2 = T - m_2 g(\sin\gamma + f\cos\gamma).$$

3 Запишем полученные динамические уравнения для двух тел

$$m_1 a_C = F\sin\beta - T - m_1 g\sin\alpha - F_{сц},$$
$$m_1 a_C \frac{i_1^{\,2}}{r_1} = F(R_1 + \delta\cos\beta) - Tr_1 + F_{сц} r_1 - M - \delta m_1 g\cos\alpha, \quad (5.17)$$
$$m_2 a_2 = T - m_2 g(\sin\gamma + f\cos\gamma).$$

В полученной системе 3-ех уравнений 4 неизвестных: ускорения a_C, a_2; сила сцепления $F_{сц}$; сила натяжения T.

Ускорения звеньев механизма a_C, a_2 связаны между собой. Для того, чтобы установить эту связь, воспользуемся методом общей точки. В силу нерастяжимости нитей скорость точки A совпадает со скоростью точек второго тела $v_A = v_2$. Точка A принадлежит плоско движущемуся телу 1. Следовательно,

$$v_A = \omega_1 AP = \omega_1 2r_1 .$$

Здесь ω_1 — угловая скорость тела 1; точка P — мгновенный центр скоростей (МЦС) тела 1. Тогда: $v_2 = 2\omega_1 r_1$.

Продифференцируем последнее равенство по времени $a_2 = 2\varepsilon_1 r_1$. Воспользовавшись ранее выведенным выражением (5.14) для углового ускорения ε_1, получим

$$a_2 = 2\frac{a_C}{r_1} r_1 = 2a_C .$$

Подставим последнее выражение в систему (5.17)

$$m_1 a_C = F\sin\beta - T - m_1 g\sin\alpha - F_{сц},$$
$$m_1 a_C \frac{i_1^{\,2}}{r_1} = F(R_1 + \delta\cos\beta) - Tr_1 + F_{сц} r_1 - M - \delta m_1 g\cos\alpha, \quad (5.18)$$
$$m_2 2a_C = T - m_2 g(\sin\gamma + f\cos\gamma).$$

В полученной системе 3 неизвестных: ускорение a_C; сила сцепления $F_{сц}$; сила натяжения T.

4 Решаем систему (5.18). Из третьего уравнения выразим силу T

$$T = 2m_2 a_C + m_2 g(\sin\gamma + f\cos\gamma) .$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение системы и выразим силу сцепления

$$F_{\text{сц}} = F\sin\beta - a_C(m_1 + 2m_2) - m_2 g(\sin\gamma + f\cos\gamma) - m_1 g\sin\alpha\ .$$

Подставим выражения для силы сцепления и силы T во второе уравнение системы

$$m_1 a_C \frac{i_1^2}{r_1} = F(R_1 + \delta\cos\beta) - 2m_2 a_C r_1 - m_2 g r_1(\sin\gamma + f\cos\gamma) + F r_1\sin\beta -$$
$$-(m_1 + 2m_2)a_C - m_2 g r_1(\sin\gamma + f\cos\gamma) - m_1 g r_1\sin\alpha - M - \delta m_1 g\cos\alpha.$$

Из последнего уравнения можно выразить ускорение центра масс первого тела a_C. После математических преобразований получим

$$a_C = \frac{F(R_1 + \delta\cos\beta + r_1\sin\beta) - m_1 g(r_1\sin\alpha + \delta\cos\alpha) - 2m_2 g r_1(\sin\gamma + f\cos\gamma) - M}{m_1\left(\frac{i_1^2}{r_1} + r_1\right) + 4m_2 r_1}$$

Подставим известные численные значения величин, входящих в полученное выражение

$$a_C = \frac{2600\cdot 0{,}826 - 1960\cdot 0{,}361 - 784\cdot 0{,}778 - 500}{200\cdot(0{,}06 + 0{,}4) + 4\cdot 100\cdot 4} =$$
$$= \frac{(2147{,}6 - 707{,}6 - 609{,}95 - 500)}{(92 + 160)} = 1{,}31\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: ускорение центра масс тела 1 $a_C = 1{,}31\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

5.3 Условие задачи Д-5.

Использование динамических уравнений движения твердого тела для анализа механической системы

Система двух тел массами m_1 и m_2 соответственно движется под действием активной силы $\overline{F}$ и пары сил с моментом M. Определить ускорение центра масс тела 1. Тела, для которых не указаны радиусы инерции, считать однородными дисками. Необходимые данные приведены в таблице. Здесь δ – коэффициент сопротивления качению; *f* – коэффициент трения скольжения. Массами не пронумерованных тел пренебречь. Для вариантов, в которых тело 2 движется вращательно, известно, что $R_2 = R_1, \quad r_2 = \frac{1}{2} R_2, \quad i_2 = \frac{2}{3} R_2$.

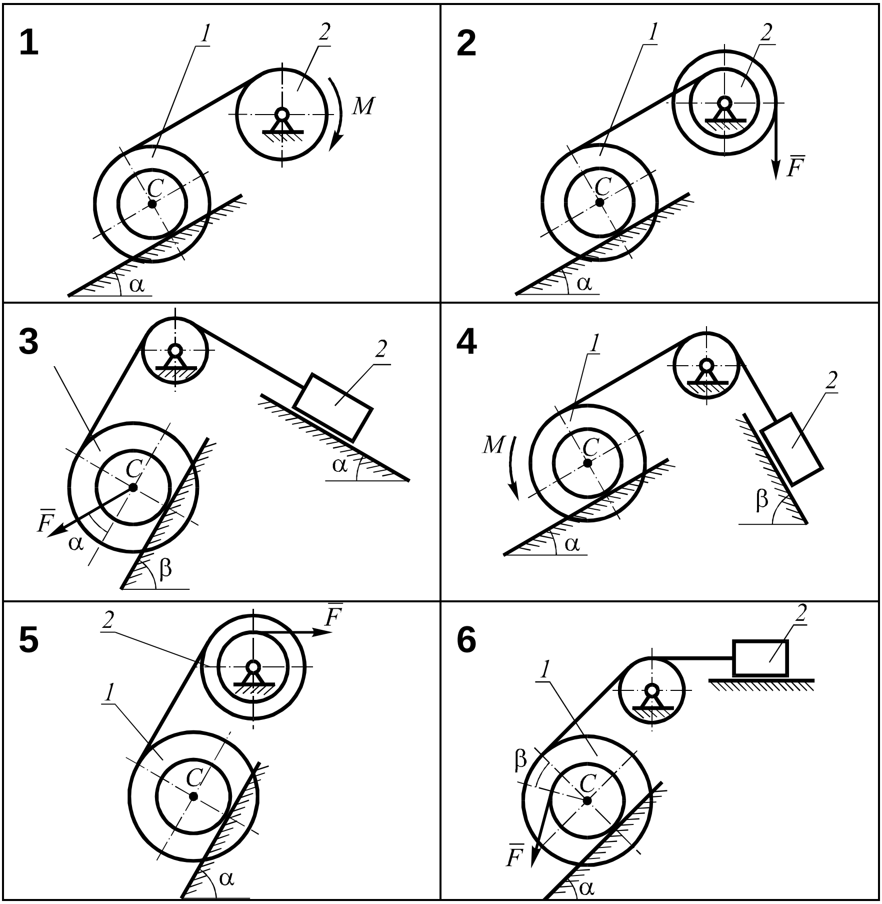
Таблица 5.1 – Исходные данные к заданию Д-5

№	Массы тел, кг		Радиусы, см			Углы, град		*f*	δ, см	*F*, кН	*M*, кН·м
	m_1	m_2	R_1	r_1	I_1	α	β				
1	120	100	50	30	40	30	—	—	1	—	0,2
2	200	160	70	30	45	30	—	—	2	3	—
3	300	80	70	40	50	30	60	0,1	2	2,5	—
4	240	120	65	50	55	30	60	0,2	1,5	—	1
5	260	200	60	30	45	60	—	—	3,5	4	—
6	180	90	50	35	40	45	30	0,4	1	2	—
7	150	100	60	40	55	30	60	—	22	3	1,5
8	300	200	50	20	40	30	45	0,1	3	2	—
9	300	90	60	30	40	30	45	0,3	1	5	—
10	300	150	70	30	50	45	60	0,1	5	4	—
11	280	75	50	35	45	60	30	0,2	7	—	2
12	200	250	60	25	35	30	—	—	3	8	—
13	190	70	80	30	50	30	60	0,4	1	2	—
14	200	60	55	30	40	30	60	0,2	4	—	0,8
15	180	180	80	50	60	30	—	—	8	1,6	—
16	150	100	60	45	50	30	45	0,6	3	3	—
17	200	120	50	—	—	60	45	0,1	2	4,5	0,9
18	250	180	60	30	40	30	—	—	6	—	0,5
19	320	100	80	40	50	60	30	0,1	5	2	—
20	200	200	60	40	55	30	—	—	2	3,2	—
21	250	180	70	30	45	30	45	0,3	1	1	—
22	250	80	60	45	55	30	60	0,2	4	4	0,8
23	200	100	50	20	40	30	—	—	3	2	0,2
24	180	100	65	30	50	60	30	0,5	1	3,5	—
25	200	60	75	50	60	30	45	0,1	5	1,8	—
26	150	100	70	—	—	60	—	—	8	3	0,5
27	220	120	60	25	40	30	—	—	1	2,2	1
28	300	160	70	30	45	60	45	—	6,5	1	0,6
29	200	250	60	40	55	30	60	0,4	1	—	1,2
30	150	100	80	30	60	60	—	—	2,5	0,8	2

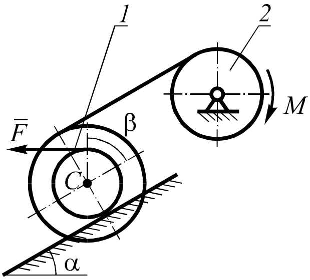
ЗАДАЧА 5

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

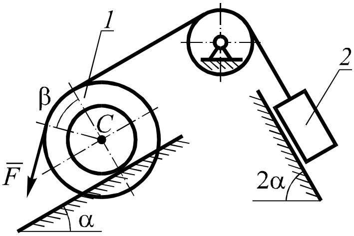
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны *m*. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_с$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен *f*, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*. В начальный момент система находилась в покое.



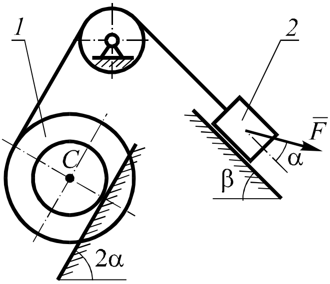
7



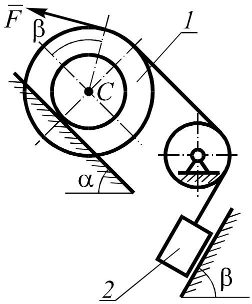
8



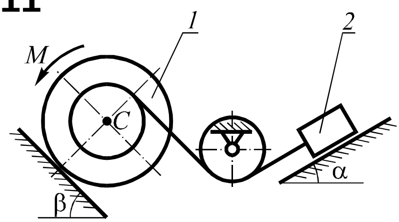
9



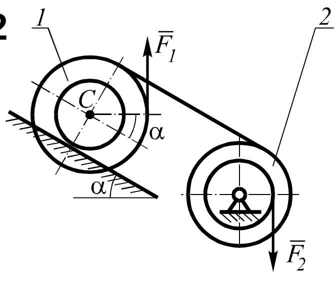
10



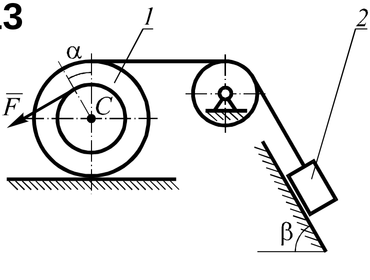
11



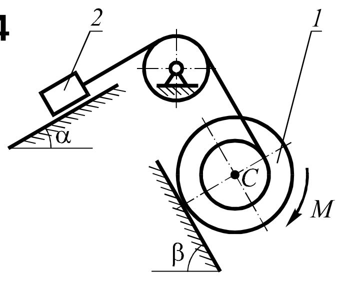
12



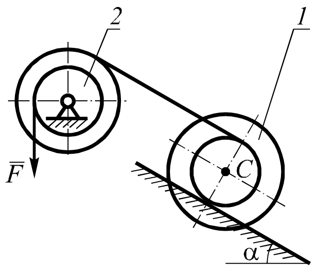
13



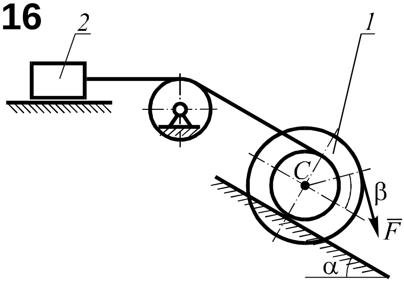
14



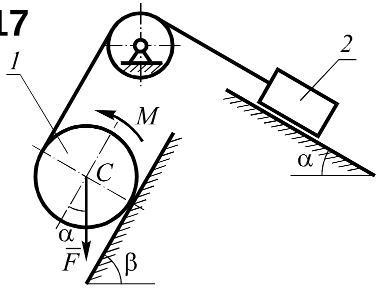
15



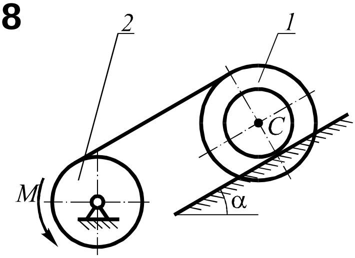
16



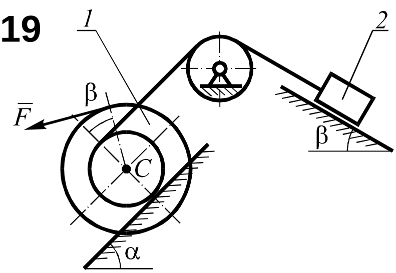
17



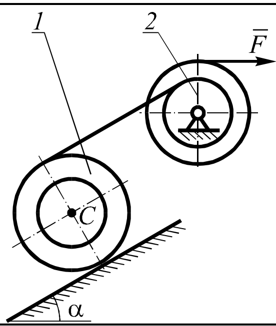
18



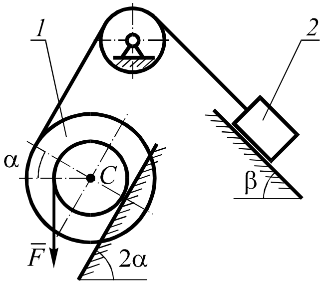
19



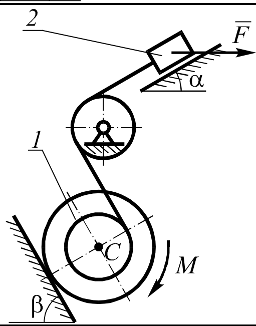
20



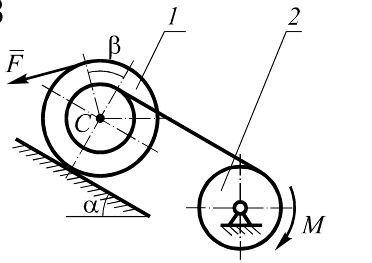
21



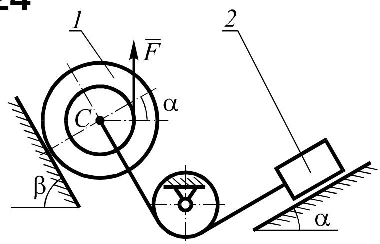
22



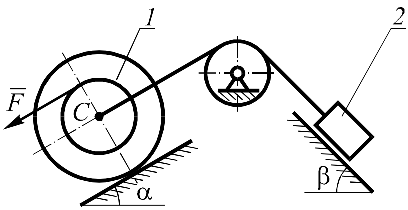
23



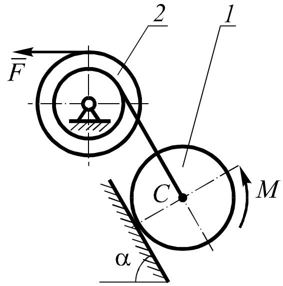
24



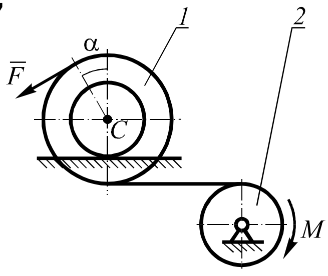
25



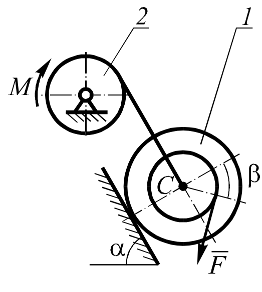
26



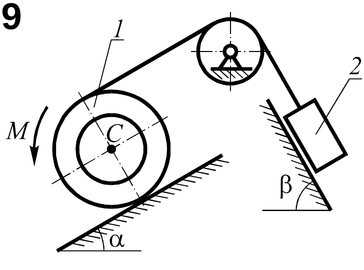
27



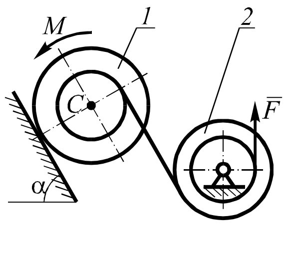
28



29



30



6. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

6.1 Некоторые положения теории

6.1.1 Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения механической системы

Количеством движения механической системы $\overline{K}$ называют векторную величину, равную геометрической сумме количеств движения всех точек системы

$$\overline{K} = \sum_i m_i \overline{v}_i \ .$$

Здесь m_i, v_i — масса и скорость i – ой точки соответственно. Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс

$$\overline{K} = m_\Sigma \overline{v}_C \ .$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме формулируется следующим образом: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени t_1 равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum_j \overline{S}_j^E \ .$$

Здесь $\overline{S}_j^E$ – импульс внешней силы $\overline{F}_j^E$ за промежуток времени t_1

$$\overline{S}_j^E = \int_0^{t_1} \overline{F}_j^E dt \ .$$

Главным моментом количества движения (или кинетическим моментом) механической системы относительно данного центра называют векторную величину, равную геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\overline{L}_O = \sum_i \overline{L}_{iO} = \sum_i \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i \ .$$

Здесь $\overline{r}_i$ – радиус-вектор i-ой точки.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы формулируется следующим образом: производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого цента равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительго этого центра

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum_j \overline{M}_{jO}^E .$$

Здесь $\overline{M}_{jO}^E$ – вектор момента внешней силы $\overline{F}_j^E$ относительно центра O

$$\overline{M}_{jO}^E = \bar{r}_j \times \overline{F}_j^E ,$$

где $\bar{r}_j$ – радиус-вектор точки приложения внешней силы $\overline{F}_j^E$.

6.1.2 Кинетическая энергия механической системы и твердого тела

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из n материальных точек, определяется следующим образом

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i {v_i}^2}{2} .$$

Кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела выражается следующим соотношением:

$$T = \frac{mv^2}{2} .$$

Здесь m – масса тела; v – скорость любой точки тела. При поступательном движении скорости всех точек одинаковы.

Кинетическая энергия вращательно движущегося тела:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} .$$

Здесь J_z – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость.

Для кинетической энергии плоскопараллельно движущегося тела можно записать следующее

$$T = \frac{m v_C{}^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}.$$

Здесь v_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

6.1.3 Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы.

$$T'' - T' = \sum_j A_j{}^E + \sum_j A_j{}^J$$

Здесь T'', T' – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно; $\sum_j A_j{}^E, \sum_j A_j{}^J$ – суммы работ внешних и внутренних сил соответственно.

Если система состоит из *n* твердых тел, то кинетическая энергия такой системы определяется следующим образом

$$T'' = \sum_{i=1}^{n} T_i{}'', \quad T' = \sum_{i=1}^{n} T_i{}'.$$

Здесь $T_i{}'', T_i{}'$ – кинетическая энергия *i*-ого тела в начальном и конечном положениях соответственно. Сумма работ внутренних сил, действующих в твердом теле равна нулю. Если внутренние силы взаимодействия между твердыми телами системы приложены к точкам, смещения которых одинаковы, то сумма работ этих сил также равна нулю.

6.1.4 Порядок решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии механической системы

Решение задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии механической системы рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображают изучаемую механическую систему. Указывают внешние силы, действующие на систему.

2 Записывают формулировку теорему об изменении кинетической энергии механической системы. При этом за начальное положение принимают положение покоя, а за конечное — состояние при котором тело 1 прошло расстояние S и приобрело скорость v_1.

3 Определяют кинетическую энергию каждого тела в конечном положении системы. При этом энергию каждого тела следует выразить через скорость v_1.

4 Определяют работы всех сил, действующих в системе. При этом работа силы определяется по перемещению точки ее приложения. Работа пара сил с постоянным моментом M, действующей на твердое тело, при повороте тела на угол φ определяется следующим образом

$$A(M) = M\varphi .$$

В задачах Д-5 работа внутренних сил равна нулю.

5 Подставляют полученные выражения в формулировку теорему об изменении кинетической энергии механической системы и определяют скорость v_1 при заданном смещении S.

6.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути S если массы тел равны $m_1 = 4m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = 2m$, $m_5 = m$, а радиусы — $r_2 = 0{,}5$ м; $r_3 = 0{,}4$ м; $r_4 = 0{,}4$ м; $r_5 = 0{,}2$ м. Коэффициент трения скольжения тел по наклонной плоскости $f = 0{,}2$. К телу 2 приложен вращающий момент $M_{вр} = mgr_2$, к телу 4 приложен момент сопротивления $M_с = 2mgr_5$. В начальный момент система находилась в покое.

Рисунок 6.1.

Решение.

1 *Изображаем исследуемую систему и указываем действующие на нее внешние силы* (рисунок 6.1). На систему действуют: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$; нормальные реакции

$\overline{N}_1$, $\overline{N}_5$; компоненты реакции цилиндрического шарнира $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$; пары сил с моментами $M_{вр}$ и $M_с$.

2 *Записываем формулировку теоремы об изменении кинетической энергии системы*

$$T'' - T' = \sum_{i=1}^{n} A_i^E + \sum_{i=1}^{n} A_i^J .$$

Здесь T'' – кинетическая энергия системы в конечном положении; T' – кинетическая энергия системы в начальном положении; $\sum_{i=1}^{n} A_i^J$ – сумма работ внутренних сил; $\sum_{i=1}^{n} A_i^E$ – сумма работ внешних сил. По условию задачи в начальном положении система находилась в покое. Следовательно $T' = 0$. Так как система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, то сумма работ внутренних сил равна нулю $\sum_{i=1}^{n} A_i^J = 0$. Тогда формулировка теоремы об изменении кинетической энергии системы примет вид

$$T'' = \sum_{i=1}^{n} A_i^E . \qquad (6.1)$$

3 *Определим кинетическую энергию системы в конечном положении* T''. Так как система состоит из пяти тел, то

$$T'' = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 .$$

Здесь T_i – кинетическая энергия i - ого тела (i = 1..5). Определим кинетические энергии каждого тела системы в конечном положении. То есть в тот момент, когда тело 1 примет скорость v_1.

Тело 1 движется поступательно. Следовательно

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Тело 2 движется вращательно

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^{\,2}}{2}.$$

Здесь J_2 – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс (точку O); ω_2 – угловая скорость тела 2. Тело 2 является однородным диском массой m_2 и радиусом r_2. Следовательно $J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^{\,2}$. Угловая скорость ω_2 связана со скоростью первого тела. Для определения этой связи воспользуемся методом общей точки. Для тел 1 и 2 общей является точка A (рисунок 6.1). В силу нерастяжимости нитей скорость точки A совпадает со скоростями всех точек поступательно движущегося тела 1 $v_A = v_1$. Так как точка A принадлежит вращательно движущемуся телу 2, то $v_A = \omega_2 AO = \omega_2 r_2$. Следовательно

$$v_1 = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v_1}{r_2}. \qquad (6.2)$$

Подставим полученные выражения в формулу для кинетической энергии второго тела

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 r_2^{\,2} \frac{v_1^{\,2}}{r_2^{\,2}} = \frac{1}{4} m_2 v_1^{\,2}.$$

Тело 3 движется вращательно

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^{\,2}}{2}.$$

Так как тело 3 – однородный диск массой m_3 и радиусом r_3, то $J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^{\,2}$. Тела 2 и 3 жестко посажены на общую ось. Следовательно, их угловые скорости будут равны $\omega_3 = \omega_2 = \frac{v_1}{r_2}$. Тогда для кинетической энергии тела 3 можно записать

$$T_3 = \frac{1}{4} m_3 r_3{}^2 \frac{v_1{}^2}{r_2{}^2} = \frac{1}{4} m_3 v_1{}^2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 .$$

Тело 4 движется плоскопараллельно. Кинетическая энергия тела 4 определяется следующим образом

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_C{}^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4{}^2 .$$

Здесь v_C – скорость центра масс тела 4 (рисунок 6.1); J_4 – момент инерции тела 4 относительно оси, проходящей через центр масс. Так как тело 4 – однородный диск массой m_4 и радиусом r_4, то $J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4{}^2$. Так как тело 4 движется плоскопараллельно, то скорость центра масс v_C связана с угловой скоростью ω_4 следующим образом: $v_C = \omega_4 CP$. Точкой P обозначен мгновенный центр скоростей тела 4; CP – длина отрезка, соединяющего точку C с мгновенным центром скоростей. Плоскопараллельно движущиеся тела 4 и 5 жестко связаны. Следовательно, их мгновенные центры скоростей (МЦС) будут совпадать. МЦС тела 5, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, находится в точке касания с поверхностью (рисунок 6.1). Тогда $CP = r_5$, и

$$v_C = \omega_4 r_5 . \qquad (6.3)$$

Для кинетической энергии тела 4 запишем

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \omega_4{}^2 r_5{}^2 + \frac{1}{4} m_4 r_4{}^2 \omega_4{}^2 = \frac{1}{2} m_4 \omega_4{}^2 \left(r_5{}^2 + \frac{1}{2} r_4{}^2 \right) = \frac{1}{4} m_4 \omega_4{}^2 \left(r_4{}^2 + 2 r_5{}^5 \right).$$

Угловую скорость ω_4 можно выразить через угловую скорость тела 3. Для этого рассмотрим точки B_3 и B_4 (рисунок 6.1). В силу нерастяжимости нитей скорости этих точек равны $v_{B_3} = v_{B_4}$. Точка B_3 принадлежит вращательно движущемуся телу 3. Следовательно $v_{B_3} = \omega_3 B_3 O = \omega_3 r_3$. Точка B_4 принадлежит телу 4, движущемуся плоскопараллельно $v_{B_4} = \omega_4 B_4 P = \omega_4 (r_4 + r_5)$. Следовательно

$$\omega_3 r_3 = \omega_4 (r_4 + r_5) \quad \Rightarrow \quad \omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{r_4 + r_5}.$$

Используем ранее установленную связь угловой скорости ω_3 со скоростью первого тела. Тогда

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_2} \frac{r_3}{(r_4 + r_5)}. \qquad (6.4)$$

Подставим данное выражение в формулу для кинетической энергии 4-ого тела

$$T_4 = \frac{1}{4} m_4 v_1^2 \frac{r_3^2 (r_4^2 + 2r_5^2)}{r_2^2 (r_4 + r_5)^2}.$$

Тело 5 движется плоскопараллельно

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_C^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2.$$

Здесь v_C – скорость центра масс тела 5; J_5 – момент инерции тела 5 относительно оси, проходящей через центр масс $J_5 = \frac{1}{2} m_5 r_5^2$. Мгновенный центр скоростей тела 5 расположен в точке P. Следовательно $v_C = \omega_5 CP = \omega_5 r_5$. Тогда

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \omega_5^2 r_5^2 + \frac{1}{4} m_5 r_5^2 \omega_5^2 = \frac{3}{4} m_5 \omega_5^2 r_5^2.$$

Так как тела 4 и 5 жестко соединены, то их угловые скорости будут равны

$$\omega_5 = \omega_4 = v_1 \frac{r_3}{r_2 (r_4 + r_5)}.$$

Тогда

$$T_5 = \frac{3}{4} m_5 v_1^2 \left(\frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} \right)^2.$$

Определив кинетические энергии каждого тела системы, можно определить энергию всей системы в конечном положении

$$T'' = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{4}m_2v_1^2 + \frac{1}{4}m_3v_1^2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{4}m_4v_1^2\,\frac{r_3^2\left(r_4^2 + 2r_5^2\right)}{r_2^2\left(r_4 + r_5\right)^2} +$$

$$+\frac{3}{4}m_5v_1^2\left(\frac{r_3r_5}{r_2\left(r_4 + r_5\right)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv_1^2\left[4 + \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2}2\frac{r_3^2\left(r_4^2 + 2r_5^2\right)}{r_2^2\left(r_4 + r_5\right)^2} + \frac{3}{2}1\left(\frac{r_3r_5}{r_2\left(r_4 + r_5\right)}\right)^2\right].$$

Подставим известные численные значения радиусов

$$T'' = 0{,}5mv_1^2\left[4 + 1{,}5 + \left(\frac{0{,}4}{0{,}5}\right)^2 + \frac{0{,}16(0{,}16 + 0{,}08)}{0{,}25\cdot 0{,}6^2} + 1{,}5\left(\frac{0{,}4\cdot 0{,}2}{0{,}5\cdot 0{,}6}\right)^2\right] =$$

$$= 0{,}5mv_1^2\left[5{,}5 + 0{,}64 + 0{,}43 + 0{,}11\right] = 3{,}34mv_1^2.$$

4 Определим работу внешних сил $\sum_{i=1}^{n} A_i^E$. На систему действуют: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$; нормальные реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_5$; компоненты реакции цилиндрического шарнира $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$; пары сил с моментами $M_{вр}$ и $M_с$. Следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = A(\overline{G}_1) + A(\overline{F}_{тр}) + A(\overline{N}_1) + A(\overline{R}_x) + A(\overline{R}_y) + A(\overline{G}_2) + A(\overline{G}_3) +$$

$$A(M_{вр}) + A(\overline{G}_4) + A(\overline{G}_5) + A(\overline{N}_5) + A(M_с).$$

Так как силы нормальной реакции направлены перпендикулярно смещению точек своего приложения, то работа этих сил равна нулю $A(\overline{N}_1) = A(\overline{N}_5) = 0$. Силы $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{G}_2, \overline{G}_3$ приложены к неподвижной точке *O*. Следовательно, эти силы не совершают работы при движении системы

$A(\overline{R}_x) = A(\overline{R}_y) = A(\overline{G}_2) = A(\overline{G}_3) = 0$. Таким образом, для суммы работ внешних сил можно записать

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = A(\overline{G}_1) + A(\overline{F}_{\text{тр}}) + A(M_{\text{вр}}) + A(\overline{G}_4) + A(\overline{G}_5) + A(M_{\text{с}}) .$$

Определим каждое слагаемое, входящее в последнее равенство.

Работа силы тяжести $\overline{G}_1$ определяется следующим образом

$$A(\overline{G}_1) = G_1 h_1 .$$

Здесь h_1 – изменение высоты центра масс первого тела. Если тело 1 прошло по наклонной плоскости путь S, то $h_1 = S \sin\alpha$. Следовательно

$$A(\overline{G}_1) = m_1 g S \sin\alpha .$$

Сила трения скольжения $\overline{F}_{\text{тр}}$ направлена противоположно вектору смещения точки своего приложения. Следовательно

$$A(\overline{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} S .$$

В соответствии с законом Кулона для силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = f N_1$. Для определения нормальной реакции N_1 спроецируем все силы, действующие на тело 1, на ось $\overline{n}$ (рисунок 6.2).

Рисунок 6.2.

$$\sum_i F_{in} = N_1 - G_1 \cos\alpha .$$

Так как тело 1 движется вдоль наклонной плоскости, то проекция ускорений точек тела 1 на ось $\overline{n}$ равна нулю. Следовательно $\sum_i F_{in} = 0$. Таким образом $N_1 - G_1 \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = m_1 g \cos\alpha$. Следовательно

$$A(\overline{F}_{\text{тр}}) = -fN_1S = -fm_1g\cos\alpha S\,.$$

Работа пары сил с моментом $M_{\text{вр}}$, действующей на вращательно движущееся тело 2, определяется следующим образом

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}}\varphi_2\,.$$

Здесь φ_2 — угол, на который повернется тело 2 если тело 1 пройдет путь S. Смещения звеньев механизма связаны между собой так же, как и соответствующие им скорости. Следовательно, воспользовавшись соотношением (6.2), можно определить связь между величинами φ_2 и S: $\varphi_2 = \dfrac{S}{r_2}$. Следовательно

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}}\frac{S}{r_2}\,.$$

Сила тяжести $\overline{G}_4$ приложена к центру масс тела 4 – точке C. Следовательно

$$A(\overline{G}_4) = -G_4h_C\,,$$

где h_C — изменение высоты точки C при движении системы. В последнем равенстве учтено, что точка C при движении системы поднимается. Если центр масс тела 4 прошел по наклонной плоскости путь S_C, то $h_C = S_C\sin\beta$. Величина S_C связана с перемещением S. Для установления этой зависимости определим связь между скоростями v_C и v_1. Воспользовавшись соотношениями (6.3) и (6.4), можно записать $v_C = v_1\dfrac{r_3r_5}{r_2(r_4+r_5)}$.

Следовательно $S_C = S\dfrac{r_3r_5}{r_2(r_4+r_5)}$. Тогда для работы силы тяжести $\overline{G}_4$ запишем

$$A(\overline{G}_4) = -G_4h_C = -m_4gS_C\sin\beta = -m_4gS\sin\beta\frac{r_3r_5}{r_2(r_4+r_5)}\,.$$

Так как сила тяжести $\overline{G}_5$ также приложена к точке C, то

$$A(\overline{G}_5) = -m_5 gS \sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)} .$$

Работу пары сил с моментом $M_{\text{с}}$ определим по углу поворота тела 4 — φ_4

$$A(M_{\text{с}}) = -M_{\text{с}}\varphi_4 .$$

Здесь учтено, что $M_{\text{с}}$ — момент сопротивления и направлен противоположно направлению вращения тела 4. Следовательно, работа момента будет отрицательной. Связь угла поворота φ_4 со смещением S можно определить, воспользовавшись соотношением (6.4), $\varphi_4 = S\frac{r_3}{r_2(r_4 + r_5)}$. Тогда

$$A(M_{\text{с}}) = -M_{\text{с}} S \frac{r_3}{r_2(r_4 + r_5)} .$$

Просуммируем работы внешних сил

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = m_1 gS \sin\alpha - fm_1 gS \cos\alpha + M_{\text{вр}} S \frac{1}{r_2} - (m_4 + m_5) gS \sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)} -$$

$$- M_{\text{с}} S \frac{r_3}{r_2(r_4 + r_5)} .$$

Подставим выражения для моментов пар сил и масс тел

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = mgS\left[4\sin\alpha - 4f\cos\alpha + 1 - 3\sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)} - 2\frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)}\right].$$

Подставим известные численные значения радиусов и углов

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^E = m9{,}8S\left[2 - 0{,}69 + 1 - 0{,}69 - 0{,}53\right] = 10{,}68mS .$$

5) Подставим выведенные выражения для кинетической энергии системы в конечном положении и суммы работ внешних сил в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии (6.1)

$$T'' = \sum_{i=1}^{n} A_i^E \quad \Rightarrow \quad 3{,}34 m v_1^2 = 10{,}68 mS .$$

Из последнего равенства выразим искомую скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{10{,}68}{3{,}34} S} = 1{,}79\sqrt{S} .$$

Ответ: $v_1 = 1{,}79\sqrt{S}$.

6.3 Условие задания Д-6

Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути S, если массы тел 1, 2, 3, 4 равны соответственно m_1, m_2, m_3, m_4, а радиусы – r_1, r_2, r_3, r_4. Массы непронумерованных тел не учитывать. Коэффициент трения скольжения тел по наклонной плоскости равен f. К вращающимся телам приложены либо вращающие моменты $M_{вр}$, либо моменты сопротивления $M_с$. Шкивы и катки считать сплошными однородными цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое.

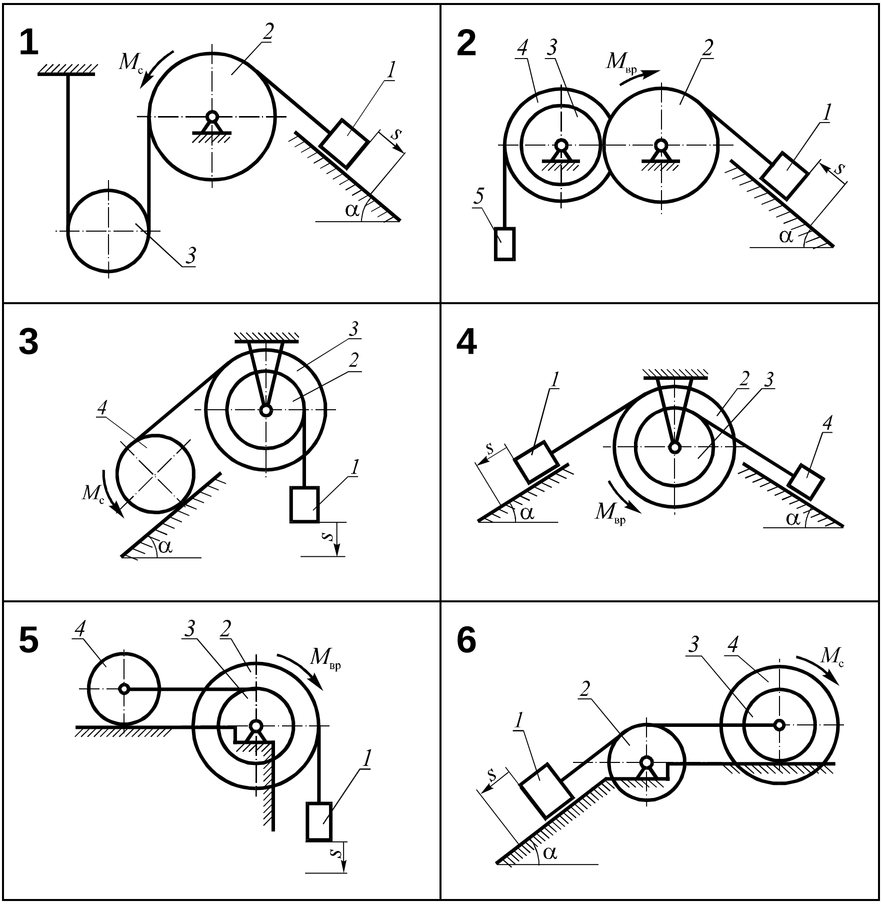
Таблица 6.1 – Исходные данные к заданию Д-6

№	Массы тел				Радиусы валов, см			Моменты, Н·м		f	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	r_4	$M_{вр}$	$M_с$		
1	$3m$	$3m$	m	—	30	15	—	—	mgr_2	0,1	60
2	$2m$	$2m$	m	$2m$	40	10	30	mgr_2	—	0,3	60
3	$5m$	m	$2m$	m	10	20	15	—	mgr_4	—	45
4	$4m$	m	$3m$	m	20	15	—	mgr_3	—	0,1	30
5	$3m$	$2m$	m	$2m$	40	20	20	$2mgr_2$	—	—	—
6	$5m$	m	m	$2m$	15	20	30	—	mgr_4	0,2	45
7	$5m$	m	$2m$	m	20	40	10	—	$2mgr_4$	0,1	60
8	$2m$	$3m$	m	m	15	30	10	—	$3mgr_4$	—	—
9	$3m$	m	$2m$	$2m$	10	20	10	mgr_3	mgr_4	—	45
10	$6m$	m	$2m$	$3m$	15	20	20	—	mgr_4	0,3	60
11	$2m$	$3m$	$2m$	m	40	30	10	—	mgr_4	0,1	60
12	$3m$	m	m	$2m$	20	20	30	—	mgr_3	—	—
13	$4m$	$2m$	$3m$	$2m$	30	40	25	—	$2mgr_4$	0,2	30
14	$5m$	m	$2m$	$2m$	25	30	30	$2mgr_3$	mgr_4	—	—
15	$6m$	m	$3m$	$2m$	20	40	20	—	$2mgr_2$	0,1	30
16	$2m$	$4m$	$2m$	m	40	15	65	—	$2mgr_4$	—	—
17	$3m$	$2m$	$3m$	m	30	40	25	—	mgr_4	0,3	45
18	$4m$	m	$3m$	$2m$	20	40	30	mgr_3	—	0,2	60
19	$2m$	$2m$	$2m$	$3m$	20	30	40	$3mgr_2$	—	—	—
20	$4m$	$2m$	$3m$	$2m$	35	50	20	—	mgr_4	—	—
21	$6m$	$2m$	$2m$	m	60	40	30	—	mgr_3	—	60
22	m	$3m$	$2m$	$2m$	40	50	20	—	$2mgr_4$	—	—
23	$3m$	$3m$	$4m$	$2m$	30	40	30	—	mgr_4	—	—
24	$4m$	m	$2m$	$3m$	10	20	30	—	mgr_4	0,2	45
25	$2m$	$3m$	$4m$	$2m$	25	30	20	—	$3mgr_4$	—	—
26	$3m$	m	$2m$	$5m$	30	50	20	mgr_3	—	—	60
27	$6m$	$2m$	m	$3m$	40	15	30	—	$2mgr_3$	0,1	30
28	$5m$	m	$2m$	m	30	40	—	mgr_2	—	0,2	60
29	$7m$	$3m$	$2m$	$3m$	50	30	—	—	mgr_2	0,3	60
30	$6m$	m	$2m$	$2m$	20	40	15	—	mgr_4	—	45

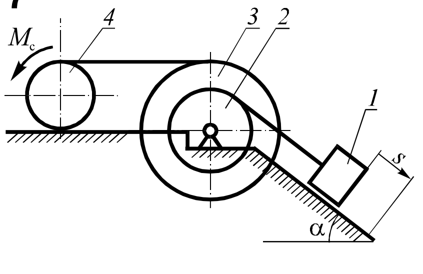
ЗАДАЧА 6

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

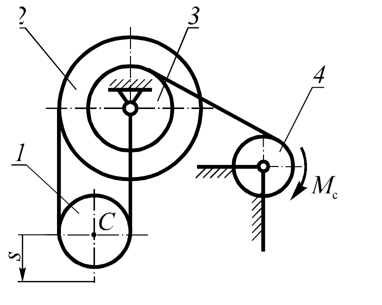
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны m. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_с$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен f, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути s. В начальный момент система находилась в покое.



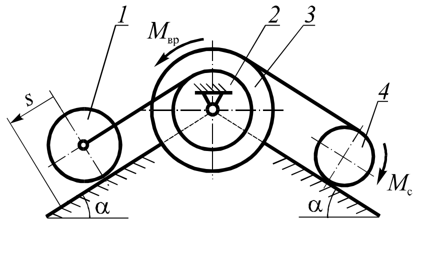
7



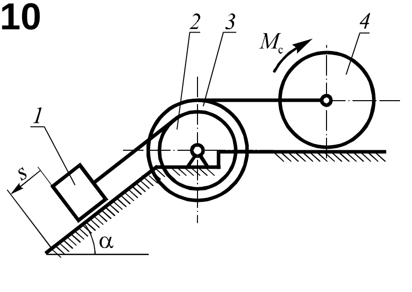
8



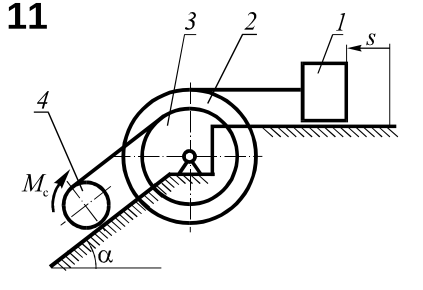
9



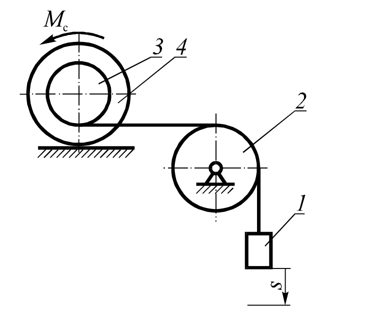
10



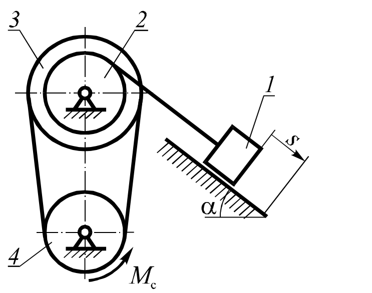
11



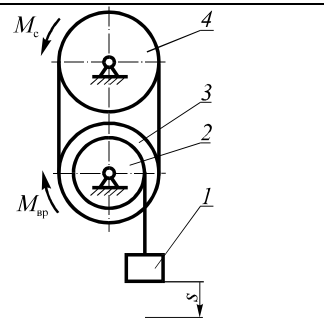
12



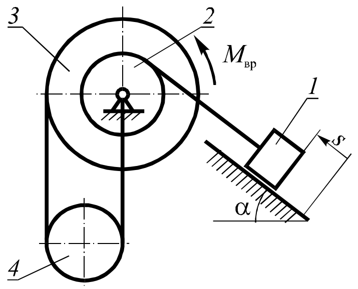
13



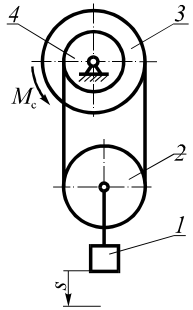
14



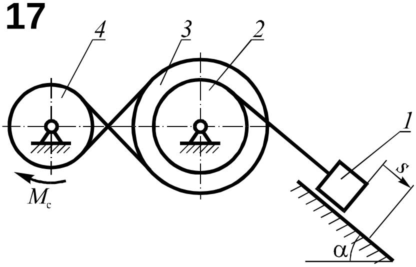
15



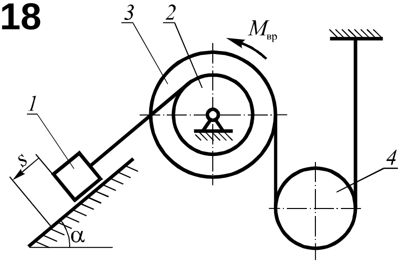
16



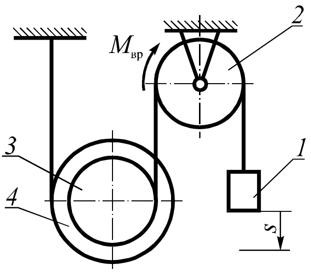
17



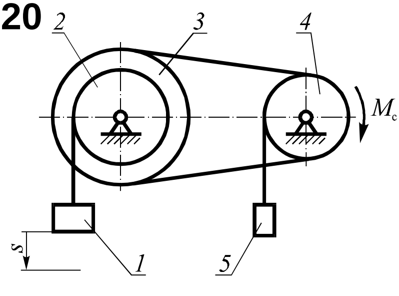
18



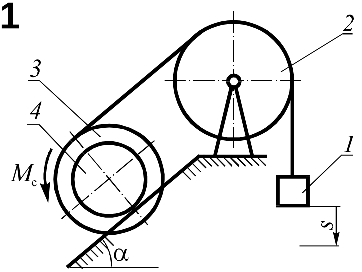
19



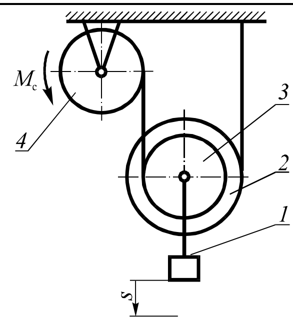
20



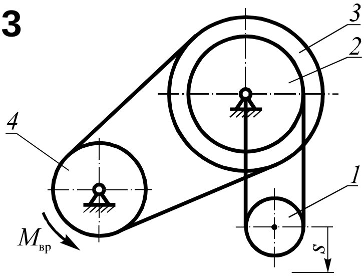
21



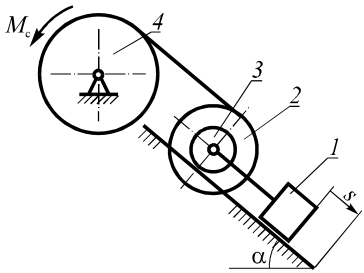
22



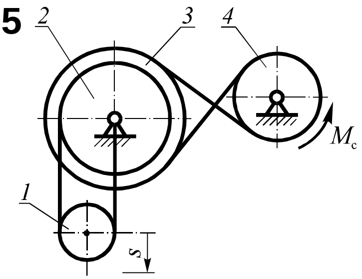
23



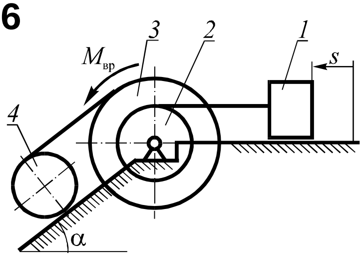
24



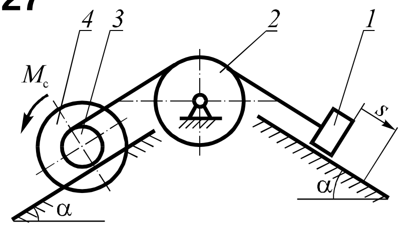
25



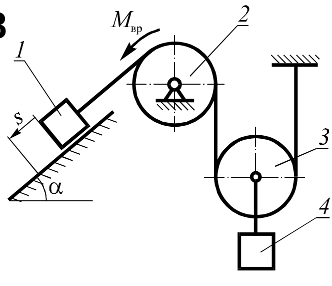
26



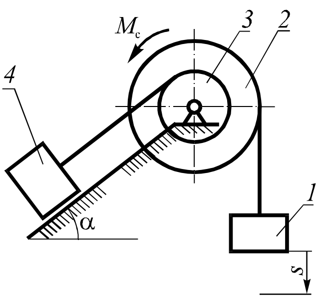
27



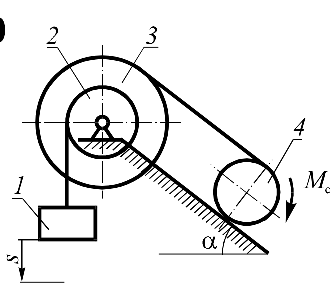
28



29



30



7 ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

7.1 Некоторые положения теории

7.1.1 Классификация связей

Связью называют тело, ограничивающее свободу движения рассматриваемой системы. Силы, с которыми связи действуют на точки рассматриваемой механической системы, называют реакциями связей. Активными называют силы, вызывающие или стремящееся вызвать движение точек системы. Связь, не изменяющаяся со временем, называется стационарной, а изменяющаяся – нестационарной. Связи, налагающие ограничения на координаты точек системы, называют геометрическими, а налагающие ограничения еще и на скорости – дифференциальными. Если дифференциальную связь можно представить как геометрическую, то есть свести связь между скоростями к связи между координатами, то такая связь называется интегрируемой. Геометрические и интегрируемые связи называют голономными. Связь называют удерживающей если она сохраняется при любом движении системы. В противном случае она называется неудерживающей.

7.1.2 Принцип возможных перемещений

Возможными, или виртуальными, называют воображаемые бесконечно малые перемещения системы, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями и не изменяющие действие связей. Число независимых возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют идеальными.

Принцип возможных перемещений формулируется следующим образом: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = 0 .$$

Здесь δA_i – элементарная работа *i*-ой активной силы. Элементарная работа силы $\overline{F}_i$ на возможном перемещении $\delta \overline{s}_i$ точки ее приложения определяется следующим образом

$$\delta A_i = F_i \delta s_i \cos \alpha_i .$$

Здесь α_i — угол между векторами $\overline{F}_i$ и $\delta\overline{s}_i$.

7.1.3 Порядок решения задач с использованием принципа возможных перемещений

Решение задач с использованием принципа возможных перемещений рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображают рассматриваемую систему и указывают все действующие на нее силы (как активные, так и реакции связей).

2. Для каждой искомой реакции выполняют следующие действия:

1) Отбрасывают ту связь, реакции которой требуется определить. Действие связи заменяют ее реакцией, которая переходит в число активных сил. Если связь имеет несколько составляющих реакции, то каждую составляющую определяют отдельно. При этом данную связь заменяют другой, допускающей движение в направлении действия определяемой составляющей. Если требуется определить момент заделки, то допускают поворот тела, к которому приложена связь. Изображают систему без отброшенной связи и указывают все активные силы.

2) Системе сообщают возможное перемещение. Указывают возможные перемещения точек приложения активных сил и возможные углы поворота тел системы.

3) Определяют элементарные работы всех активных сил на возможных перемещениях. Если сила $\overline{F}_i$ приложена к телу, совершающему возможный поворот $\delta\varphi$ вокруг точки *O*, то работу такой силы можно определить по формуле:

$$\delta A_i = M_O(\overline{F}_i)\delta\varphi$$

Здесь $M_O(\overline{F}_i)$ – момент силы $\overline{F}_i$ относительно точки *O*. Если момент $M_O(\overline{F}_i)$ противоположен направлению возможного вращения то работа силы $\overline{F}_i$ отрицательна.

4) Устанавливают зависимость между возможными перемещениями и выражают их через возможное перемещение одной точки или один возможный угол поворота. Это возможно, т.к. одна отброшенная связь приводит к возникновению одной степени свободы. При определении зависимости между возможными перемещениями точек следует первоначально установить зависимость между их возможными скоростями. Связь между возможными перемещениями такая же, как и между соответствующими скоростями.

5) В соответствии с принципом возможных перемещений, приравнивают сумму активных сил на возможных перемещениях нулю. Сокращают возможное перемещение, через которое выражены перемещения всех точек, и определяют искомую реакцию.

3 Проверяют правильность решения задачи. Для этого составляют уравнения равновесия исследуемой системы и подставляют в них найденные значения реакций связей. Если найденные значения удовлетворяют условиям равновесия, то задача решена верно.

Искомые реакции округляют до сотых долей кН (для сил) или кН·м (для моментов). Уравнения равновесия считаются удовлетворенными, если их правые части обращаются в 0 при округлении до десятых долей кН (или кН·м).

7.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача 1

Определить реакции опор составной конструкции, изображенной на рисунке 7.1. Дано: $l = 1$ м; $\alpha = 60°$; $F = 6$ кН; $M = 11$ кН·м; $q = 2$ кН/м.

Рисунок 7.1.

Решение

1 *Изображаем исследуемую систему и указываем действующие на нее силы* (рисунок 7.2). Равномерно распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой $\overline{Q}$, приложенной в центре отрезка *CE*. Следовательно $CH = \frac{1}{2}CE = \frac{3}{2}l$. Модуль силы $\overline{Q}$ определяется следующим образом $Q = qCE = q3l$, $Q = 2\frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 3\text{м} = 6\text{Н}$. В точке *A* действует реакция опоры $\overline{R}_A$, направленная перпендикулярно опорной поверхности. В точке *B* на тело действует связь типа жесткая заделка. Реакция данной связи состоит из силы $\overline{R}_B$ и момента заделки M_B. Силу $\overline{R}_B$ разложим на две составляющие $\overline{R}_{Bx}, \overline{R}_{By}$. Таким образом, необходимо определить 4 величины: R_A, R_{Bx}, R_{By}, M_B.

Рисунок 7.2.

2 *Приступаем к определению искомых реакций.*

Определим реакцию опоры R_A.

1) Отбросим связь, соответствующую силе R_A. Тогда сила R_A перейдет в разряд активных, а точка A станет свободной. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.3).

Рисунок 7.3.

2) Сообщаем системе возможные перемещения. Так как в точке B действует жесткая заделка, то тело BC останется неподвижным. Следовательно, возможным перемещением тела AC может быть только поворот вокруг точки C на возможный угол $\delta\varphi$. Укажем возможные перемещения точек приложения сил (точек A и D). Так как точка C — центр вращения тела AC, то вектор $\delta\bar{s}_A$ направлен перпендикулярно отрезку AC, а вектор возможного перемещения $\delta\bar{s}_D$ направлен перпендикулярно отрезку DC.

3) Определим элементарные работы сил на указанных перемещениях

$$\delta A(\overline{F}) = \overline{F} \cdot \delta\bar{s}_D = F\delta s_D \sin\alpha,$$
$$\delta A(\overline{R}_A) = \overline{R}_A \cdot \delta\bar{s}_A = -R_A\delta s_A \cos\alpha.$$

4) Установим связь между возможными перемещениями δs_A и δs_D. Перемещение δs_A связано с углом поворота тела AC следующим образом $\delta s_A = AC\delta\varphi = 6l\delta\varphi$. Следовательно, $\delta\varphi = \dfrac{\delta s_A}{6l}$. Для перемещения δs_D можно записать: $\delta s_D = DC\delta\varphi = 3l\delta\varphi$. Подставим ранее полученное выражение для угла $\delta\varphi$

$$\delta s_D = \frac{3l}{6l}\delta s_A = \frac{1}{2}\delta s_A.$$

5) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{F}_i)=0 \quad\Rightarrow\quad \delta A(\overline{F})+\delta A(\overline{R}_A)=0\,.$$

Подставим выражение для элементарных работ

$$F\delta s_D\sin\alpha-R_A\delta s_A\cos\alpha=0\,.$$

Воспользуется выведенной формулой для перемещения δs_D

$$F\frac{1}{2}\delta s_A\sin\alpha-R_A\delta s_A\cos\alpha=0\,.$$

Разделим полученное равенство на δs_A и выразим искомую силу R_A

$$R_A=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha F\,.$$

Подставим известные численные значения

$$R_A=\frac{1}{2}\mathrm{tg}60°\cdot 6=5{,}2\text{кН}\,.$$

Определим горизонтальную составляющую реакции жесткой заделки R_{Bx}.

6) Отбросим связь, препятствующую горизонтальному смещению точки B, заменив жесткую заделку скользящей (горизонтальными направляющими). Тогда сила R_{Bx} перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.4).

Рисунок 7.4.

7) Сообщаем системе возможные перемещения. Точка B может перемещаться только горизонтально $\delta\overline{s}_B$. Так как реакция в точке B запрещает поворот, то тело BC будет двигаться поступательно. Тогда $\delta\overline{s}_F \parallel \delta\overline{s}_B$ и $\delta s_F=\delta s_B$. Кроме того, $\delta\overline{s}_C \parallel \delta\overline{s}_B$ и $\delta s_C=\delta s_B$. Таким образом — тело BC смещается на $\delta\overline{s}_B$. Перемещение точки A $\delta\overline{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (рисунок 7.4). Для того, чтобы указать возможное перемещение тела AC найдем его мгновенный центр скоростей

(МЦС). Вектора возможных скоростей точек совпадают по направлению с векторами возможных перемещений. Следовательно, мгновенный центр скоростей будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам их возможных перемещений (точка P). МЦС тела является также мгновенным центром вращения. Следовательно, возможное перемещение тела AC представляет собой поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi$. Смещение точки приложения силы $\overline{F}$ направлено перпендикулярно отрезку DP (рисунок 7.4).

8) Определим элементарные работы сил на указанных возможных перемещениях.

$$\delta A(\overline{R}_{Bx}) = -R_{Bx}\delta s_B,$$
$$\delta A(\overline{Q}) = Q\delta s_C = q3l\delta s_B.$$

Так как тело BC движется поступательно, то момент M работы не совершает. Сила $\overline{F}$ приложена к вращающемуся телу AC. Следовательно, работу этой силы на возможном угле поворота можно определить по работе момента

$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F})\delta\varphi.$$

Здесь $M_P(\overline{F})$ – момент силы $\overline{F}$ относительно точки P, вокруг которой происходит возможное вращение тела AC. Для определения этого момента силу $\overline{F}$ удобно разложить на горизонтальную $\overline{F}'$ и вертикальную $\overline{F}''$ составляющие (рисунок 7.4). В соответствии с правилом определения проекции силы на ось, модули этих составляющих будут иметь следующие значения

$$F' = F\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F' = 6\text{кН}\cos 60^\circ = 3\text{кН},$$
$$F'' = F\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F'' = 6\text{кН}\sin 60^\circ = 5{,}2\text{кН}.$$

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки P равен сумме моментов сил $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$. Тогда

$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F}')\delta\varphi + M_P(\overline{F}'')\delta\varphi.$$

Момент силы $\overline{F}'$ относительно точки P совпадает по направлению с углом поворота $\delta\varphi$, а момент силы $\overline{F}''$ – противоположен повороту.

Следовательно, первое слагаемое в правой части последнего равенства будет положительным, а второе — отрицательным.

$$\delta A(\overline{F}) = F' PC\delta\varphi - F'' CD\delta\varphi .$$

Определим длину отрезка PC. В прямоугольном треугольнике ACP угол C равен $90°$, а угол $\angle PAC = 90° - \alpha$. Следовательно

$$PC = AC\mathrm{tg}(90° - \alpha) = 6l\mathrm{ctg}\alpha .$$

Подставим выражения для модулей составляющих $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$ в формулу для работы силы $\overline{F}$

$$\delta A(\overline{F}) = F\cos\alpha 6l\mathrm{ctg}\alpha\delta\varphi - F\sin\alpha 3l\delta\varphi = 3Fl\delta\varphi(2\cos\alpha\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha) .$$

9) Установим связь между возможным перемещением δs_B и углом $\delta\varphi$. Для определения этой связи используем метод общей точки. Общей для звеньев AC и BC является точка C. Так как тело BC движется поступательно, то $\delta s_C = \delta s_B$. С другой стороны, точка C принадлежит телу AC для которого точка P является мгновенным центром скоростей. Следовательно, $\delta s_C = \delta\varphi CP = \delta\varphi 6l\mathrm{ctg}\alpha$. Тогда

$$\delta s_B = \delta\varphi 6l\mathrm{ctg}\alpha .$$

10) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad\Rightarrow\quad \delta A(\overline{R}_{Bx}) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{F}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$-R_{Bx}\delta s_B + q3l\delta s_B + 3Fl\delta\varphi(32\cos\alpha\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для δs_B

$$-R_{Bx}6l\mathrm{ctg}\alpha\delta\varphi + q3l6l\mathrm{ctg}\alpha\delta\varphi + 3Fl\delta\varphi(2\cos\alpha\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Разделим полученное равенство на $3l\mathrm{ctg}\alpha\delta\varphi$

$$-2R_{Bx}+q6l+F\left(2\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)=0.$$

Выразим искомую силу R_{Bx}

$$R_{Bx}=q3l+F\left(\cos\alpha-\frac{\sin\alpha^{2}}{2\cos\alpha}\right).$$

Подставим известные численные значения

$$R_{Bx}=2\cdot3\cdot1+6\cdot\left(0{,}5-\frac{0{,}75}{2\cdot0{,}5}\right)=6-1{,}5=4{,}5\text{кН}.$$

Определим вертикальную составляющую реакции жесткой заделки R_{By}.

11) Отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению точки *B*, заменив жесткую заделку скользящей. Тогда сила $\bar{R}_{By}$ перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.5).

Рисунок 7.5.

12) Сообщаем системе возможные перемещения. Точка *B* может двигаться только вертикально $\delta\bar{s}_B$. Так как реакция в точке *B* препятствует повороту тела *BC*, то *BC* движется поступательно. Тогда $\delta\bar{s}_F \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_F=\delta s_B$. Кроме того, $\delta\bar{s}_C \parallel \delta\bar{s}_B$ и $\delta s_C=\delta s_B$. Таким образом — тело *BC* смещается на $\delta\bar{s}_B$. Перемещение точки *A* $\delta\bar{s}_A$ направлено параллельно опорной поверхности (рисунок 7.4). Для того чтобы указать возможное перемещение тела *AC* найдем его мгновенный центр скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей будет лежать на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *C* к векторам их возможных перемещений. Видим, что МЦС тела *AC* совпадает с точкой *A*. Следовательно, возможное перемещение тела *AC* представляет собой поворот вокруг точки *A* на угол $\delta\varphi$. Возможное перемещение точки *D* $\delta\bar{s}_D$ направлено перпендикулярно отрезку *AD*.

13) Определим элементарные работы сил на указанных перемещениях

$$\delta A(\overline{R}_{By}) = -R_{By}\delta s_B, \quad \delta A(\overline{Q}) = Q\delta s_F \cos 90° = 0,$$
$$\delta A(\overline{F}) = F\delta s_D \sin\alpha.$$

Та как тело *BC* движется поступательно, то момент *M* работы не совершает.

14) Установим связь между возможными перемещениями δs_D и δs_B. Точка *C* – общая для тел *AC* и *BC*. Так как тело *BC* движется поступательно, то $\delta s_C = \delta s_B$. Тело *AC* вращается вокруг точки *A*. Следовательно

$$\delta s_C = \delta\varphi\, AC \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi = \frac{\delta s_B}{AC}.$$

Для перемещения точки *D* можно записать: $\delta s_D = \delta\varphi\, AD$. Подставим выражение для угла поворота

$$\delta s_D = \frac{AD}{AC}\delta s_B = \frac{3l}{6l}\delta s_B = \frac{1}{2}\delta s_B.$$

Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_{By}) + \delta A(\overline{F}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ сил

$$-R_{By}\delta s_B + F\delta s_D \sin\alpha = 0.$$

Воспользуемся выражением для δs_D

$$-R_{By}\delta s_B + F\frac{1}{2}\delta s_B \sin\alpha = 0.$$

Разделим последнее равенство на δs_B и выразим искомую силу R_{By}

$$R_{By} = \frac{1}{2}F\sin\alpha.$$

Подставим известные численные значения

$$R_{By} = \frac{1}{2} 6 \cdot \sin 60° = 2{,}6 \text{кН} .$$

Определим момент заделки M_B.

15) Отбросим связь, препятствующую вращению тела *BC* вокруг точки *B*, заменив жесткую заделку цилиндрическим шарниром. При этом момент M_B перейдет в разряд активных силовых факторов. Делаем рисунок (рисунок 7.6), указываем активные силы и пары сил.

Рисунок 7.6.

16) Сообщаем системе возможные перемещения. Тело *BC* поворачивается вокруг точки *B* на возможный угол $\delta\varphi_1$. Для определения положения МЦС тела *AC* укажем возможные перемещения точек *A* и *C*. Перемещение точки *A* направлена параллельно опорной поверхности. Так как тело *BC* вращается вокруг точки *B*, то вектор возможного перемещения точки *C* направлен перпендикулярно отрезку *BC*. МЦС тела *AC* лежит на пересечение перпендикуляров, проведенных к векторам возможных перемещений точек *A* и *C* (рисунок 7.6). Таким образом, возможное перемещение тела *AC* — поворот вокруг точки *P* на угол $\delta\varphi_2$. Возможное перемещение точки приложения силы $\overline{F}$ ($\delta\overline{s}_D$) направлено перпендикулярно отрезку *DP*. Возможное перемещение точки приложения силы $\overline{Q}$ ($\delta\overline{s}_F$) направлено перпендикулярно отрезку *BF*.

17) Определим элементарные работы сил на указанных перемещениях. Пары сил с моментами *M* и M_B приложены к телу *BC*, которое поворачивается на угол $\delta\varphi_1$. Работа этих пар определяется следующим образом

$$\delta A(M) = -M\delta\varphi_1, \quad \delta A(M_B) = -M_B\delta\varphi_1 .$$

Здесь учтено, что моменты *M* и M_B направлены противоположно повороту $\delta\varphi_1$. Работу силы $\overline{Q}$ определим как работу момента этой силы относительно точки *B*

$$\delta A(\overline{Q}) = M_B(\overline{Q})\delta\varphi_1 = QFB\delta\varphi_1 .$$

Известно, что $Q = 3lq, \quad FB = \frac{7}{2}l$. Следовательно

$$\delta A(\overline{Q}) = \frac{21}{2}l^2 q\delta\varphi_1 = 10{,}5l^2 q\delta\varphi_1 .$$

Положение мгновенного центра скоростей тела *AC* на рисунке 7.6 совпадает с положением МЦС, определенным при нахождении реакции R_{Bx} (рисунок 7.4). Следовательно, для определения работы силы $\overline{F}$ можно воспользоваться формулой, выведенной при нахождении R_{Bx}

$$\delta A(\overline{F}) = 3Fl\delta\varphi_2 (2\cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha) .$$

18) Установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Воспользуемся методом общей точки. Общей для тел *AC* и *BC* является точка *C*. Тело *BC* вращается вокруг точки *B*. Следовательно, $\delta s_C = \delta\varphi_1 BC = \delta\varphi_1 5l$. С другой стороны, для скорости точки *C* можно записать: $\delta s_C = \delta\varphi_2 6l\operatorname{ctg}\alpha$. Приравняем правые части выражений для скорости v_C

$$\delta\varphi_1 5l = \delta\varphi_2 6l\operatorname{ctg}\alpha \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \frac{6}{5}\delta\varphi_2 \operatorname{ctg}\alpha .$$

19) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(M) + \delta A(M_B) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{F}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$-M\delta\varphi_1 - M_B\delta\varphi_1 + 10{,}5l^2 q\delta\varphi_1 + 3lF\delta\varphi_2 (2\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Воспользуемся выведенной формулой для угла $\delta\varphi_1$

$$(-M - M_B + 10{,}5l^2 q)\frac{6}{5}\delta\varphi_2 \operatorname{ctg}\alpha + 3lF\delta\varphi_2 (2\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) = 0 .$$

Разделим последнее равенство на $\delta\varphi_2$ и выразим момент M_B

$$M_B = -M + 10{,}5l^2 q + \frac{5}{2} lF\left(2\cos\alpha - \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha}\right).$$

Подставим известные численные значения

$$M_B = -11 + 10{,}5 \cdot 2 + 10 \cdot \left(2 \cdot 0{,}5 - \frac{0{,}75}{0.5}\right) = \text{-}11 + 21 \text{-} 7{,}5 = 2{,}5\text{кН} \cdot \text{м}.$$

3 *Проверим правильность решения задачи.* Изобразим исследуемую систему и укажем все действующие на нее силы (рисунок 7.7). На систему тел действует произвольная плоская система сил. Следовательно, необходимо составить три уравнения равновесия.

1) Сумма проекций сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A \sin\alpha - F' - Q + R_{Bx} = 0. \qquad (*)$$

2) Сумма проекций сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A \cos\alpha - F'' + R_{By} = 0. \qquad (**)$$

Здесь F', F'' – модули горизонтальной и вертикальной компонент силы $\overline{F}$ соответственно.

3) Сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Уравнение моментов будем составлять относительно точки A

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -F''3l - Q\frac{3}{2}l + R_{By}6l + R_{Bx}5l - M - M_B = 0. \qquad (***)$$

Подставим в уравнения равновесия известные численные значения и найденные ранее величины реакций связей

$$5{,}2\sin 60° - 6\cos 60° \text{-} 2 \cdot 3 + 4{,}5 = 4{,}4 - 3 - 6 + 4{,}5 = 0,. \qquad (*)$$

$$5{,}2\cos 60^\circ - 6\sin 60^\circ + 2{,}6 = 2{,}6 - 5{,}2 + 2{,}6 = 0\ , \qquad (**)$$

$$-6\sin 60^\circ \cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 1{,}5 + 2{,}6\cdot 6 + 4{,}5\cdot 5 - 11 - 2{,}5 = -15{,}59 - 9 + \\ +15{,}6 + 22{,}5 - 11 - 2{,}5 = 0{,}01 кН\cdot м. \qquad (***)$$

Так как при округлении до десятых долей правые части равенств обращаются в 0, то найденные значения реакций связей удовлетворяют условиям равновесия системы тел.

Ответ: R_A = 5,2 кН; R_{Bx} = 4,5 кН; R_{By} = 2,6 кН; M_B = 2,5 кН·м.

Задача 2

Решить предыдущую задачу при способе закрепления конструкции, представленном на рисунке 7.8.

Рисунок 7.8.

1 *Изобразим конструкцию и укажем действующие на нее силы* (рисунок 7.9). В точке *A* действует реакция невесомого стержня $\overline{R}_A$, направленная перпендикулярно наклонной опорной поверхности. В точке *K* действует реакция невесомого стержня $\overline{R}_K$, направленная вертикально. Реакцию шарнира в точке *B* $\overline{R}_B$ разложим на горизонтальную $\overline{R}_{Bx}$ и вертикальную $\overline{R}_{By}$ составляющие. Таким образом, необходимо определить 4 величины: R_A, R_K, R_{Bx}, R_{By}.

Рисунок 7.9.

2 *Определим реакцию невесомого стержня* $\overline{R}_A$.

1) Отбросим связь, соответствующую силе $\overline{R}_A$. Тогда сила $\overline{R}_A$ перейдет в разряд активных, а точка *A* станет свободной. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.10).

Рисунок 7.10.

2) Сообщаем системе возможные перемещения. Так как точка B шарнирно закреплена, то возможное перемещение звена BC – поворот вокруг точки B на угол $\delta\varphi$. Тогда перемещение точки приложения силы $\overline{Q}$ ($\delta\overline{s}_H$) направлено перпендикулярно отрезку BH, а перемещение точки C ($\delta\overline{s}_C$) – перпендикулярно BC. Возможное перемещение точки K ($\delta\overline{s}_K$) направлено горизонтально. То есть $\delta\overline{s}_K \parallel \delta\overline{s}_C$. Перпендикуляры, проведенные из точек K и C к векторам их возможных перемещений, не пересекаются. Следовательно, звено AC движется поступательно, и $\delta\overline{s}_A = \delta\overline{s}_K = \delta\overline{s}_D = \delta\overline{s}_C$.

3) Определим элементарные работы сил на указанных возможных перемещениях

$$\delta A(\overline{R}_A) = \overline{R}_A \cdot \delta\overline{s}_A = -R_A \delta s_A \cos(90^\circ - \alpha) = -R_A \delta s_C \sin\alpha,$$
$$\delta A(\overline{F}) = \overline{F} \cdot \delta\overline{s}_D = F\delta s_D \cos\alpha = F\delta s_C \cos\alpha,$$
$$\delta A(M) = -M\delta\varphi.$$

В последнем равенстве учтено, что момент M направлен противоположно возможному повороту звена BC. Работу силы $\overline{Q}$ определим как работу момента этой силы относительно точки B

$$\delta A(\overline{Q}) = M_B(\overline{Q})\delta\varphi = QBH\delta\varphi = Q\frac{7}{2}l\delta\varphi .$$

4) Установим связь между возможным перемещением δs_C и возможным углом поворота $\delta\varphi$. Так как точка C принадлежит звену BC, которое поворачивается вокруг точки B на угол $\delta\varphi$, то $\delta s_C = \delta\varphi BC = 5l\delta\varphi$.

5) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_A) + \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$-R_A\delta s_C\sin\alpha+F\delta s_C\cos\alpha-M\delta\varphi+Q\frac{7}{2}l\delta\varphi=0\,.$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для δs_C

$$-R_A 5l\delta\varphi\sin\alpha+F5l\delta\varphi\cos\alpha-M\delta\varphi+Q\frac{7}{2}l\delta\varphi=0\,.$$

Разделим последнее равенство на $5l\delta\varphi$ и выразим искомую силу R_A

$$R_A=F\mathrm{ctg}\alpha-\frac{M}{5l\sin\alpha}+\frac{7}{10\sin\alpha}Q\,.$$

Подставим известные численные значения

$$R_A=6\cdot\mathrm{ctg}60^\circ-\frac{11}{5\cdot\mathrm{ctg}60^\circ}+\frac{7}{10\sin60^\circ}3\cdot2=(3{,}46-2{,}54+4{,}86)=5{,}77\text{кН}.$$

Определим реакцию невесомого стержня R_K.

6) Отбросим связь, соответствующую силе $\overline{R}_K$. Тогда сила $\overline{R}_K$ перейдет в разряд активных, а точка K станет свободной. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.11).

Рисунок 7.11.

7) Сообщаем системе возможные перемещения. Так как точка B шарнирно закреплена, то возможное перемещение звена BC – поворот вокруг точки B на угол $\delta\varphi_2$. Тогда $\delta\overline{s}_H\perp BH$, а $\delta\overline{s}_C\perp BC$. Возможное перемещение точки A ($\delta\overline{s}_A$) направлено перпендикулярно невесомому стержню (параллельно наклонной опорной поверхности). Для того, чтобы указать возможное перемещение звена AC найдем его мгновенный центр скоростей. Мгновенный центр скоростей звена AC лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных из точек A и C к векторам возможных перемещений этих точек. МЦС звена AC – точка P (рисунок 7.11). Следовательно, возможное перемещение звена AC – поворот вокруг точки P на угол $\delta\varphi_1$. Тогда $\delta\overline{s}_D\perp DP$, $\delta\overline{s}_K\perp KP$.

8) Определим элементарные работы сил на возможных перемещениях. Работы сил $\overline{R}_K, \overline{F}$ определим как работы моментов этих сил относительно центра вращения звена *AC* (точки *P*), поворачивающегося на угол $\delta\varphi_1$

$$\delta A(\overline{R}_K) = M_P(\overline{R}_K)\delta\varphi_1 = R_K KC\delta\varphi_1 = R_K 4l\delta\varphi_1,$$
$$\delta A(\overline{F}) = M_P(\overline{F})\delta\varphi_1 = M_P(\overline{F}')\delta\varphi_1 - M_P(\overline{F}'')\delta\varphi_1.$$

В последнем равенстве учтено, что момент вертикальной составляющей $\overline{F}''$ силы $\overline{F}$ относительно точки *P* противоположен направлению поворота.

$$\delta A(\overline{F}) = F'PC\delta\varphi_1 - F''CD\delta\varphi_1 .$$

Модули составляющих силы $\overline{F}$ определяются следующим образом

$$F' = F\cos\alpha, \quad F'' = F\sin\alpha .$$

Длину отрезка *PC* определим из прямоугольного треугольника *APC*

$$PC = AC\mathrm{tg}(90° - \alpha) = 6l\mathrm{ctg}\alpha .$$

Подставим полученные выражения в формулу для элементарной работы силы $\overline{F}$

$$\delta A(\overline{F}) = F3l\delta\varphi_1(2\cos\alpha\mathrm{ctg}\alpha - \sin\alpha) .$$

Работы поры сил с моментом *M* и силы $\overline{Q}$ определим с использованием тех же соотношений, что и при нахождении силы $\overline{R}_A$.

$$\delta A(M) = -M\delta\varphi_1, \quad \delta A(\overline{Q}) = Q\frac{7}{2}l\delta\varphi_2 .$$

9) Установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Точка *C* — общая для звеньев *AC* и *BC*. Так как точка *C* принадлежит звену *AC*, которое поворачивается вокруг *P* на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 PC = 6l\mathrm{ctg}\alpha\delta\varphi_1$. Так как точка *C* принадлежит звену *BC*, которое поворачивается вокруг *B* на угол $\delta\varphi_2$, то $\delta s_C = \delta\varphi_2 BC = 5l\delta\varphi_2$. Следовательно,

$$6l\,\text{ctg}\alpha\delta\varphi_1 = 5l\delta\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_2 = \frac{6}{5}\text{ctg}\alpha\delta\varphi_1 .$$

10) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{R}_K) + \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) = 0 .$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$R_K\, 4l\delta\varphi_1 + F\,3l\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\text{ctg}\alpha - \sin\alpha) - M\delta\varphi_2 + Q\frac{7}{2}l\delta\varphi_2 = 0 .$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для угла $\delta\varphi_2$

$$R_K\, 4l\delta\varphi_1 + F\,3l\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\text{ctg}\alpha - \sin\alpha) - M\,\frac{6}{5}\text{ctg}\alpha\delta\varphi_1 + Q\frac{7}{2}l\,\frac{6}{5}\text{ctg}\alpha\delta\varphi_1 = 0 .$$

Разделим последнее равенство на $l\delta\varphi_1$ и выразим силу R_K

$$R_K = -\frac{3}{4}F(2\cos\alpha\,\text{ctg}\alpha - \sin\alpha) + \frac{3}{10l}M\text{ctg}\alpha - \frac{21}{20}Q\text{ctg}\alpha .$$

Подставим известные численные значения

$$R_K = -\frac{3}{4}6(2\cos 60^\circ\text{ctg}60^\circ - \sin 60^\circ) + \frac{3}{10}11\cdot\text{ctg}60^\circ - \frac{21}{20}3\cdot 2\cdot\text{ctg}60^\circ =$$
$$= 3\cdot 0{,}289 + 1{,}91 - 3{,}64 = -0{,}43\,\text{кН}.$$

Определим горизонтальную составляющую реакции цилиндрического шарнира в точке B $\overline{R}_{Bx}$.

11) Отбросим связь, препятствующую горизонтальному смещению точки B. Для этого цилиндрический шарнир заменим опорой на горизонтальную поверхность. Сила $\overline{R}_{Bx}$ при этом перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.12).

Рисунок 7.12.

12) Сообщаем системе возможные перемещения. Возможное перемещение точки *A* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *A*, (параллельно наклонной опорной поверхности). Возможное перемещение точки *K* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *K* (горизонтально). Мгновенный центр скоростей звена *AC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *K* к векторам их возможных перемещений. Следовательно, возможное перемещение звена *AC* — поворот вокруг точки *P* на угол $\delta\varphi_1$. При этом $\delta\bar{s}_D \perp DP, \delta\bar{s}_C \perp CP$. Возможное перемещение точки *B* направлено горизонтально. Перпендикуляры, проведенные из *B* и *C* к векторам возможных перемещений этих точек, пересекаются в точке *C*. Следовательно, точка *C* является мгновенным центром звена *BC*, а возможное перемещение этого звена — поворот вокруг *C* на угол $\delta\varphi_2$. При этом $\delta\bar{s}_H \perp CH$.

13) Определим элементарные работы сил на возможных перемещениях

$$\delta A(\bar{F}) = M_P(\bar{F})\delta\varphi_1 = M_P(\bar{F}')\delta\varphi_1 + M_P(\bar{F}'')\delta\varphi_1 = F'PK\delta\varphi_1 + F''DK\delta\varphi_1.$$

Длину отрезка *PK* найдем, рассмотрев прямоугольный треугольник *APK*

$$PK = AK\text{tg}(90° - \alpha) = 2l\text{ctg}\alpha.$$

Тогда работу силы $\bar{F}$ определим следующим образом

$$\delta A(F) = Fl\delta\varphi_1(2\cos\alpha\text{ctg}\alpha + \sin\alpha).$$

Так направление действия момента пары сил *M* совпадает с направлением поворота звена *BC*, то для работы этой пары можно записать: $\delta A(M) = M\delta\varphi_2$. Работы сил $\bar{Q}, \bar{R}_{Bx}$ определим как работы моментов этих сил относительно точки *C*

$$\delta A(\bar{Q}) = M_C(\bar{Q})\delta\varphi_2 = QCH\delta\varphi_2 = Q\frac{3}{2}l\delta\varphi_2,$$
$$\delta A(\bar{R}_{Bx}) = -M(\bar{R}_{Bx})\delta\varphi_2 = -R_{Bx}BC\delta\varphi_2 = -R_{Bx}5l\delta\varphi_2.$$

14) Установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Точка *C* – общая для звеньев *AC* и *BC*. Так как точка *C* принадлежит звену

AC, которое поворачивается вокруг *P* на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 PC$. Из прямоугольного треугольника *PKC*

$$PC = \sqrt{CK^2 + PK^2} = \sqrt{16l^2 + 4l^2 \text{ctg}\alpha^2} = 2l\sqrt{4 + \text{ctg}\alpha^2}.$$

Следовательно, $\delta s_C = 2l\delta\varphi_1\sqrt{4 + \text{ctg}\alpha^2}$. Но точка *C* является мгновенным центром скоростей звена *BC*. Следовательно, возможная скорость и возможное перемещение этой точки равны нулю. Значит $\delta s_C = 0$ и $\delta\varphi_1 = 0$.

15) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{F}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{R}_{Bx}) = 0.$$

Так как $\delta\varphi_1 = 0$, то $\delta A(\overline{F}) = 0$. Следовательно,

$$\delta A(M) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(\overline{R}_{Bx}) = 0.$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$M\delta\varphi_2 + Q\frac{3}{2}l\delta\varphi_2 - R_{Bx}5l\delta\varphi_2 = 0.$$

Разделим последнее равенство на $5l\delta\varphi_2$ и выразим силу R_{Bx}

$$R_{Bx} = \frac{M}{5l} + \frac{3}{10}Q.$$

Подставим известные численные значения

$$R_{Bx} = \frac{11}{5} + \frac{3}{10}3 \cdot 2 = 2{,}2 + 1{,}8 = 4\text{кН}.$$

Определим вертикальную составляющую реакции цилиндрического шарнира в точке *B* $\overline{R}_{By}$.

16) Отбросим связь, препятствующую вертикальному смещению точки *B*. Для этого заменим цилиндрический шарнир опорой на вертикальную

поверхность. Тогда сила $\overline{R}_{By}$ перейдет в разряд активных. Делаем рисунок и указываем активные силы (рисунок 7.13).

Рисунок 7.13.

17) Сообщаем системе возможные перемещения. Возможное перемещение точки *A* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *A*, (параллельно наклонной опорной поверхности). Возможное перемещение точки *K* направлено перпендикулярно невесомому стержню, действующему на конструкцию в точке *K* (горизонтально). Мгновенный центр скоростей звена *AC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек *A* и *K* к векторам их возможных перемещений. Следовательно, возможное перемещение звена *AC* — поворот вокруг точки P_1 на угол $\delta\varphi_1$. При этом $\delta\bar{s}_D \perp DP$, $\delta\bar{s}_C \perp CP$. Возможное перемещение точки *B* направлено вертикально. Мгновенный центр скоростей звена *BC* находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из *B* и *C* к векторам возможных перемещений этих точек (точка P_2 на рисунке 7.13). Следовательно, возможное перемещение звена *BC* — поворот вокруг точки P_2 на угол $\delta\varphi_2$. При этом $\delta\bar{s}_H \perp HP_2$.

18) Определи элементарные работы сил на возможных перемещениях. Так как положение мгновенного центра скоростей звена *AC* на рисунке 7.13 (точки P_1) совпадает с положением МЦС этого звена на рисунке 7.12 (точкой *P*), то для определения работы $\delta A(\overline{F})$ можно использовать ранее полученную формулу

$$\delta A(F) = Fl\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha + \sin\alpha).$$

Работы сил, действующих на звено *BC*, определим по работам моментов этих сил относительно мгновенного центра вращения (МЦС) этого звена – точки P_2

$$\delta A(\overline{Q}) = M_{P_2}(\overline{Q})\delta\varphi_2 = QBH\delta\varphi_2 = Q\frac{7}{2}l\delta\varphi_2,$$

$$\delta A(M) = -M\delta\varphi_2,$$

$$\delta A(\overline{R}_{By}) = -M_{P_2}(\overline{R}_{By})\delta\varphi_2 = -R_{By}BP_2\delta\varphi_2.$$

Определим длину отрезка BP_2. Для этого рассмотрим два прямоугольных треугольника: P_1KC и CBP. Эти треугольники подобны ($\angle KP_1C = \angle BCP_2$, $\angle P_1CK = \angle CP_2B$). Следовательно,

$$\frac{BP_2}{CK} = \frac{BC}{KP_1} \quad \Rightarrow \quad BP_2 = CK\,\frac{BC}{KP_1}\,.$$

Длины отрезков CK, BC, KP_1 известны

$$CK = 4l, \quad BC = 5l, \quad KP_1 = 2l\,\mathrm{ctg}\alpha\,.$$

Следовательно,

$$BP_2 = 4l\,\frac{5}{2\,\mathrm{ctg}\alpha} = 10l\,\mathrm{tg}\alpha\,.$$

Тогда для работы силы $\overline{R}_{By}$ получим

$$\delta A(\overline{R}_{By}) = -R_{By}10l\,\mathrm{tg}\alpha\,\delta\varphi_2\,.$$

19) Установим связь между возможными углами поворота $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Так как точка C принадлежит звену AC, которое поворачивается вокруг P_1 на угол $\delta\varphi_1$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 P_1C$. Так как точка C принадлежит звену BC, которое поворачивается вокруг P_2 на угол $\delta\varphi_2$, то $\delta s_C = \delta\varphi_1 P_2C$. Следовательно,

$$\delta\varphi_1 P_1C = \delta\varphi_2 P_2C \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2\,\frac{P_2C}{P_1C}\,.$$

Из условия подобия треугольников P_1KC и CBP следует, что

$$\frac{P_2C}{P_1C} = \frac{BC}{KP_1} = \frac{5l}{2l\,\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{5}{2}\,\mathrm{tg}\alpha\,.$$

Тогда $\delta\varphi_1 = \frac{5}{2}\,\mathrm{tg}\alpha\,\delta\varphi_2$.

20) Запишем формулировку принципа возможных перемещений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A(\overline{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta A(\overline{F}) + \delta A(\overline{Q}) + \delta A(M) + \delta A(\overline{R}_{By}) = 0 \ .$$

Подставим выражения для элементарных работ

$$Fl\delta\varphi_1(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha + \sin\alpha) + Q\frac{7}{2}l\delta\varphi_2 - M\delta\varphi_2 - R_{By}10l\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi_2 = 0 \ .$$

Воспользуемся ранее выведенной формулой для $\delta\varphi_1$

$$Fl\frac{5}{2}\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi_2(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha + \sin\alpha) + Q\frac{7}{2}l\delta\varphi_2 - M\delta\varphi_2 - R_{By}10l\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi_2 = 0 \ .$$

Разделим последнее равенство на $10l\,\mathrm{tg}\alpha\delta\varphi_2$ и выразим искомую силу R_{By}

$$R_{By} = \frac{1}{4}F(2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha + \sin\alpha) + \frac{7}{20}Q\,\mathrm{ctg}\alpha - \frac{M}{10l}\mathrm{ctg}\alpha \ .$$

Подставим известные численные значения

$$R_{By} = \frac{1}{2}6\cdot(2\cos 60°\mathrm{ctg}60° + \sin 60°) + \frac{7}{20}3\cdot 2\cdot \mathrm{ctg}60° - \frac{11}{10}\mathrm{ctg}60° =$$
$$= 2{,}16 + 1{,}21 - 0{,}63 = 2{,}74\text{кН}.$$

3 *Проверим правильность решения задачи*. Изобразим исследуемую систему и укажем все действующие на нее силы (рисунок 7.14). На систему тел действует произвольная плоская система сил. Следовательно, необходимо составить три уравнения равновесия.

Рисунок 7.14.

1) Сумма проекций сил на ось x должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A\sin\alpha - F' - Q + R_{Bx} = 0 \ . \qquad (*)$$

2) Сумма проекций сил на ось y должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A \cos\alpha + R_K - F'' + R_{By} = 0\,. \qquad (**)$$

Здесь F', F'' – модули горизонтальной и вертикальной компонент силы $\overline{F}$ соответственно.

3) Сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Уравнение моментов будем составлять относительно точки A

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F_i}) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_K\, 2l - F''3l - Q\frac{3}{2}l + R_{By}6l + R_{Bx}5l - M = 0\,. \qquad (***)$$

Подставим в уравнения равновесия известные численные значения и найденные ранее величины реакций связей

$$5{,}77 \cdot \sin 60° - 6\cos 60° - 2 \cdot 3 + 4 = (5 - 3 - 6 + 4) = 0\,, \qquad (*)$$

$$5{,}77 \cdot \cos 60° - 0{,}43 - 6\sin 60° + 2{,}74 = 2{,}89 - 0{,}43 - 5{,}20 + 2{,}74 = 0, \qquad (**)$$

$$\begin{aligned} &-0{,}43 \cdot 2 - 6\sin 60° \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 2{,}74 \cdot 6 + 4 \cdot 5 - 11 = \\ &= -0{,}86 - 15{,}59 - 9 + 16{,}44 + 20 - 11 = -0{,}01 \text{кН} \cdot \text{м}. \end{aligned} \qquad (***)$$

Так как при округлении до десятых долей правые части равенств обращаются в 0, то найденные значения реакций связей удовлетворяют условиям равновесия системы тел.

Ответ: R_A = 5,77 кН; R_K = -0,43 кН; R_{Bx} = 4кН; R_{By} = 2,74кН.

7.3 Условие задания Д-7

Таблица 7.1 – Исходные данные к заданию Д-7

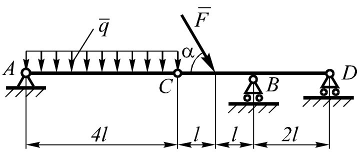
№	*l*, м	α, град	*F*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м
1	0,5	60	4	6	2
2	1	30	7	10	3
3	0,6	30	10	12	4
4	1	45	15	20	5
5	2	30	12	10	2
6	2	60	9	20	8
7	0,5	60	16	8	5
8	0,8	30	10	6	3
9	1	30	12	6	2
10	2	60	8	10	3
11	1	45	20	11	4
12	3	30	9	5	2
13	1	45	12	9	5
14	1	—	7	11	3
15	0,5	30	9	12	6
16	2	45	6	15	2
17	1	60	15	9	2
18	0,6	60	20	18	10
19	1	60	9	9	5
20	2	30	6	12	2
21	1,5	30	5	16	3
22	2	60	20	11	5
23	1	30	6	8	2
24	2	45	5	5	1
25	0,5	30	10	6	8
26	1	30	6	11	5
27	0,7	60	12	7	3
28	0,5	30	9	10	8
29	2	60	25	9	1
30	1	30	18	10	5

ЗАДАЧА 7

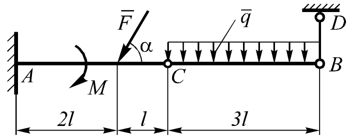
ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны *m*. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{вр}$ либо моменты сопротивления $M_с$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен *f*, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*. В начальный момент система находилась в покое.

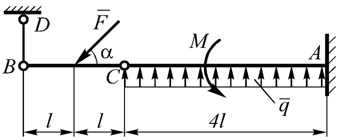
1



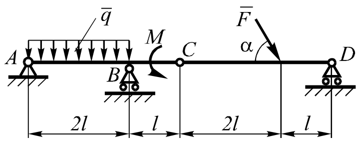
2



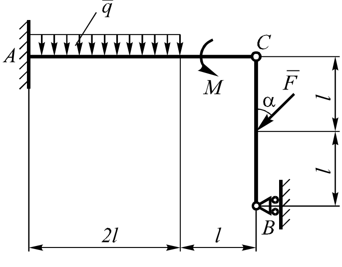
3



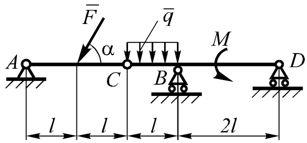
4



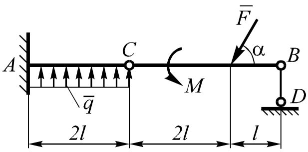
5



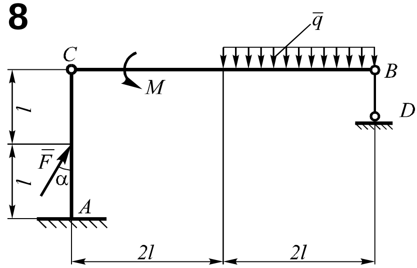
6



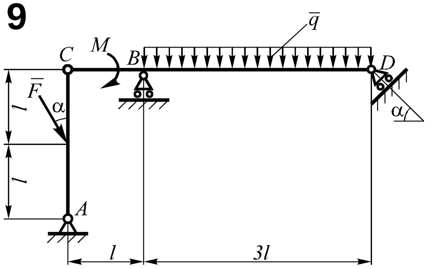
7



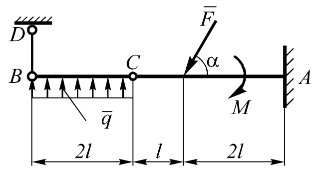
8



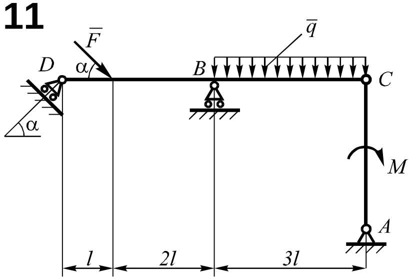
9



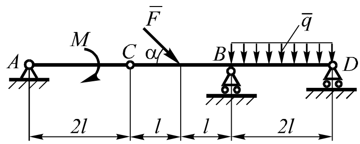
10



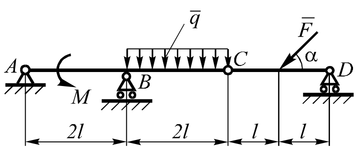
11



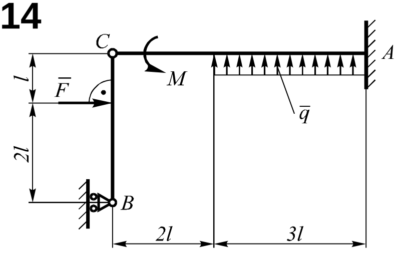
12



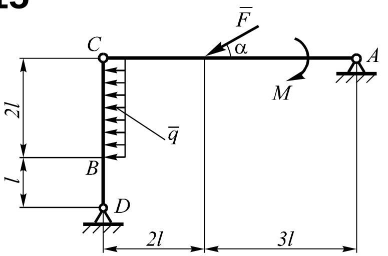
13



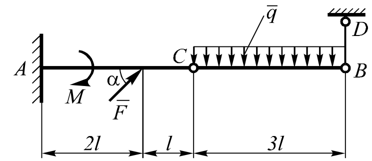
14



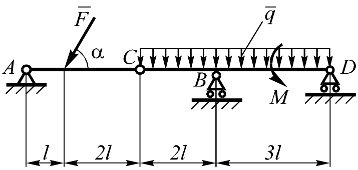
15



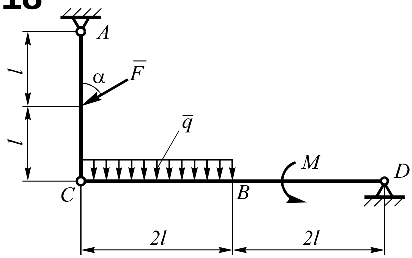
16



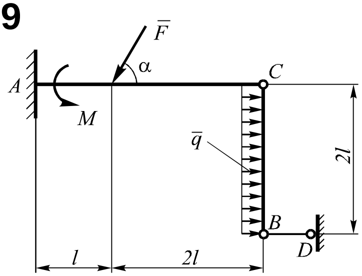
17



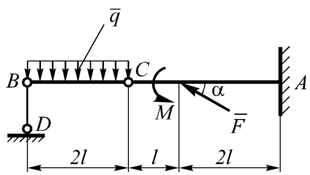
18



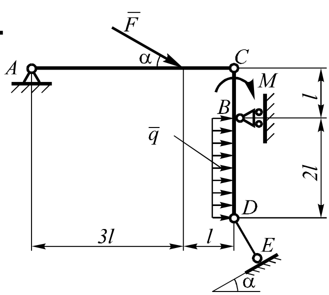
19



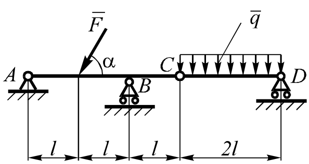
20



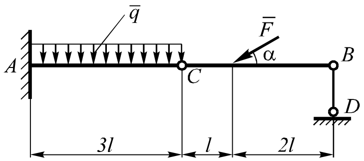
21



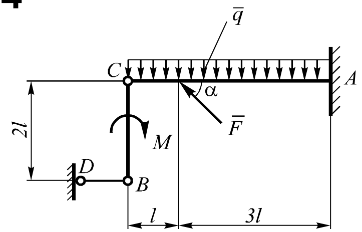
22



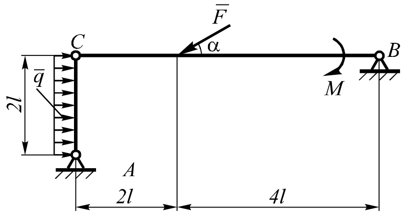
23



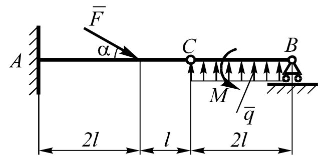
24



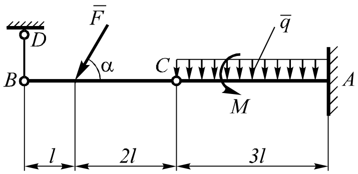
25



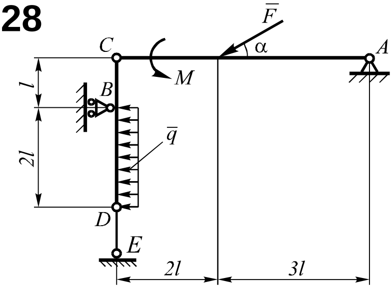
26



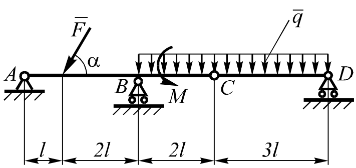
27



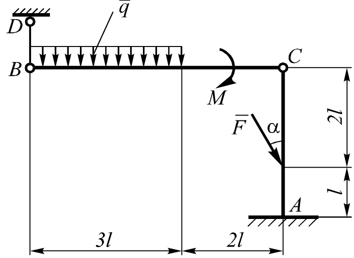
28



29



30



8 ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

8.1 Некоторые положения теории

8.1.1 Общее уравнение динамики механической системы

Общее уравнение динамики (или принцип Даламбера-Лагранжа) является удобным методом решения задач о движении несвободных механических систем. Он основан на синтезе двух методов: принципа возможных перемещений и принципа Даламбера. Сущность принципа возможных перемещений подробно рассмотрена в задаче Д-7. Математическое выражение его имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = 0;$$

т.е. для равновесия несвободной механической системы, на которую наложены идеальные стационарные связи необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из положения равновесия равнялась нулю.

Сущность принципа Даламбера для механической системы: если в данный момент времени к каждой точке механической системы, кроме действующих сил, добавить силы инерции, то система будет находиться в состоянии формального равновесия.

$$\sum \overline{F}_i + \sum \overline{R}_i + \sum \overline{\Phi}_i = 0.$$

Также, умножая на радиус-вектор *i*-ой точки и выполняя суммирование каждого произведения, находим

$$\sum M_0\left(\overline{F}_i\right) + \sum M_0\left(\overline{R}_i\right) + \sum M_0\left(\overline{\Phi}_i\right) = 0,$$

где F_i – внешние силы, действующие на *i*-ю точку системы; R_i – реакции связей; Φ_i – силы инерции.

С учетом свойства внутренних сил принципу Даламбера для механической системы можно придать следующую математическую форму:

$$\overline{F_i} + \overline{R_i} + \overline{\Phi_i} = 0;$$

$$\overline{M}_0^F + \overline{M}_0^R + \overline{M}_0^{\Phi} = 0,$$

где F_i, R_i, Φ_i – главные векторы внешних сил, сил реакций связей и сил инерции соответственно; $\overline{M}_0^F, \overline{M}_0^R, \overline{M}_0^{\Phi}$ – главные моменты внешних сил, сил реакций связей и сил инерции соответственно.

Полученные уравнения по форме совпадают с условиями равновесия статики. В общем случае они позволяют получить шесть скалярных равенств (равенства нулю проекций сил, включая силы инерции, на каждую из координатных осей и равенства нулю сумм моментов сил относительно координатных осей).

Силой инерции материальной точки называют силу, равную по модулю произведению массы точки *m* и ее ускорения *a*. Она всегда направлена в сторону, противоположную вектору ускорения. Величина силы инерции определяется по формуле

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}.$$

Следовательно, прежде чем показать направление вектора силы инерции точки, необходимо точно установить направление вектора ускорения. В различных случаях движения твердого тела к нему нужно прикладывать следующие силы и моменты сил инерции:

а) *поступательное движение*;

Необходимо прикладывать только силу инерции к центру масс груза, направив ее в сторону противоположную вектору ускорения *a*.

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}, \qquad (8.1)$$

где m_1 – масса тела;

б) *вращение тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс тела*;

Сила инерции равна нулю. Необходимо приложить момент сил инерции, направленный противоположно угловому ускорению ε.

$$M^{\Phi} = I_z \varepsilon, \qquad (8.2)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

в) *плоскопараллельное движение твердого тела*;

В этом случае необходимо прикладывать силу инерции к центру массы катка и момент сил инерции. Величины их определяются формулами (8.1) и (8.2). Следует иметь в виду, если момент инерции I_z определяется относительно оси z, проходящей через центр масс тела, то сила инерции прикладывается к центру масс противоположно вектору ускорения.

8.1.2 Порядок решения задач с применением общего уравнения динамики системы

Решение задач с применением общего уравнения динамики системы рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1. Выбрать по варианту механическую систему, изобразить все тела с учетом масштаба.
2. Определить число степеней свободы системы и выбрать обобщенную координату, назначая положительное направление отсчета.
3. Прикладываем к системе активные силы и силы трения. К каждому телу системы добавляем силы инерции или моменты сил инерции в зависимости от вида движения тела.
4. Сообщаем механической системе возможные перемещения (δS_i или $\delta\varphi_i$).
5. Подсчитываем сумму работ активных сил и сил инерции, действующих на тела системы на этих перемещениях, и приравниваем ее к нулю.
6. Установить зависимость между возможными перемещениями, линейными и угловыми ускорениями.
7. Из полученного уравнения определяем ускорение a_1 тела 1.
8. С использованием принципа Даламбера определить натяжения, возникающие в нитях, удерживающих груз1.

8.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Груз 1 (рисунок 8.1) скользит по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ и посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, состоящий из дисков 2 и 3, приводит в движение каток 4, заставляя его катиться без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Массы тел 1, 2,3 и 4 соответственно равны m_1=3m, m_2=m, m_3=2m, m_4=m. На тело 2 действует активная пара сил с моментом $M = m_4 g r_4$. Коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость равен f = 0,2. Каток 4 представляет собой однородный сплошной диск. Проскальзывание нити по блоку отсутствует. Определить ускорение тела 1, а также натяжение нити, прикрепленной к телу 1.

Рисунок 8.1.

Решение.

Применим к решению задачи общее уравнение динамики.

1. Изображаем механизм с учетом заданных размеров. Система имеет одну степень свободы, следовательно, одну обобщенную координату.

2. Изображаем на рисунке 8.2 активные силы $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$ и $\overline{G}_4$. На систему наложены внешние связи: цилиндрические шарниры тел, закрепленных в неподвижных точках, трением в этих шарнирах пренебрегаем; горизонтальная плоскость, по которой без проскальзывания катится каток 4 и шероховатая наклонная плоскость, по которой скользит груз 1. Реакция шарнира приложена в неподвижной точке, реакция горизонтальной плоскости – в мгновенном центре скоростей. Работа этих сил на возможных перемещениях точек их приложения равна нулю. Эти связи являются идеальными. Сила трения, действующая на груз со стороны наклонной плоскости, будет совершать работу при скольжении груза. Эта связь неидеальна. Силу трения отнесем к активным силам. Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы есть сила трения скольжения, то во всех вариантах целесообразно по исходным данным найти исходное направление движения системы, чтобы правильно показать направление сил трения. Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получится со знаком «минус». В этом случае необходимо изменить направление сил трения и сил инерции и внести поправки в общее уравнение динамики. В данном примере движение системы таково, что груз 1 опускается. Прикладываем силу трения скольжения $F_{тр}$ в противоположную сторону.

Рисунок 8.2.

Модуль силы $\overline{F}_{тр}$ определяем по закону Кулона $F_{тр} = f N_1$, где $N_1 = G_1 \cos\alpha$ – нормальная реакция наклонной плоскости, f – коэффициент трения скольжения. Поэтому $F_{тр} = f G_1 \cos\alpha$.

3. Приложим к системе силы инерции. Так как груз 1 движется поступательно, система сил инерции его точек приводится к равнодействующей $\overline{\Phi}_1 = -m_1 \overline{a}_1$, приложенной в его центре масс и направленной противоположно ускорению груза, где a_1 – ускорение груза 1. Блок, состоящий из двух жестко соединенных дисков 2 и 3, совершает

вращательное движение вокруг оси, проходящей через его центр масс, и приводится к поре с моментом

$$M_2^{\Phi} = I_z \varepsilon_2 ,$$

где I_z – момент инерции блока относительно оси вращения *z*. Так как блок состоит из двух дисков, наложенных на одну ось, то I_z определяется по формуле

$$I_z = \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^2}{2} ;$$

где ε_2 – угловое ускорение блока; r_2, r_3 – радиусы большего и меньшего диаметров блока соответственно.

Момент сил инерции M_2^{Φ} прикладываем противоположно угловому ускорению блока ε_2.

4. Каток 4 совершает плоское движение, перемещаясь по горизонтали с ускорением центра масс a_4 и поворачиваясь относительно точки соприкосновения с горизонтальной плоскостью (мгновенный центр ускорений (МЦУ)) с угловым ускорением ε_4. Прикладываем в центре масс силу инерции $\Phi_4 = m_4 a_C$, где a_C – ускорение центра масс катка 4, а также момент сил инерции $M_4^{\Phi} = I_4 \varepsilon_4$. Так как каток считается однородным сплошным цилиндром радиуса r_4, то момент инерции катка I_4 относительно оси, проходящей через центр масс катка равен $I_4 = \dfrac{m_4 r_4^2}{2}$.

5. Сообщим системе возможные перемещения. Пусть груз 1 переместится на расстояние δS_1 вдоль наклонной плоскости, тогда блок, состоящий из жестко скрепленных дисков 2 и 3, повернется на угол $\delta\varphi_2$, а каток 4 повернется относительно мгновенного центра скоростей на угол $\delta\varphi_4$, а его центр масс переместится вдоль горизонтальной плоскости на расстояние δS_C .

6. Составим общее уравнение динамики, т.е. запишем выражение для суммы работ всех активных сил и сил инерции на возможном перемещении каждого тела системы и приравняем его к нулю

$$G_1 \sin\alpha\, \delta S_1 - F_{mp} \delta S_1 - \Phi_1 \delta S_1 + M \delta\varphi_2 - M_2^{\Phi} \delta\varphi_2 - \Phi_4 \delta S_C - M_4^{\Phi} \delta\varphi_4 = 0 . \quad (8.3)$$

Зависимости между возможными перемещениями у системы такие же, как и между соответствующими скоростями.

7. Выразим скорости центров масс и угловые скорости тел системы через скорость тела 1.

Для этого воспользуемся методом общей точки. Рассмотри точку *A*, общую для тел 1 и 2 (рисунок 8.1). В силу нерастяжимости нитей $v_A = v_1$. С другой стороны, точка *A* принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Следовательно, $v_A = \omega_2 r_2$, $\omega_2 = \dfrac{v_A}{r_2}$. Тогда

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \omega_3 .$$

Чтобы выразить ω_4 и a_C через v_1 рассмотрим точки B_3 и B_4. Точка B_3 принадлежит вращательно движущемуся телу 3. Значит $v_{B_3} = \omega_3 r_3 = v_1 \dfrac{r_3}{r_2}$. Точка B_4 принадлежит плоско движущемуся телу 4. Мгновенный центр скоростей катящегося колеса находится в точке касания с неподвижной поверхностью *P*. Тогда $v_{B_4} = \omega_4 B_4 P = \omega_4 2r_4$, $\omega_4 = \dfrac{v_{B_4}}{2r_4}$. Следовательно

$$\omega_4 = v_1 \frac{r_3}{2r_2 r_4} .$$

Скорость точки *C* определяется следующим образом: $v_C = \omega_4 CP = \omega_4 r_4$. Значит

$$v_C = v_1 \frac{r_3}{2r_2} .$$

Такие же соотношения будут и между линейными и угловыми возможными перемещениями системы. Выразим возможные перемещения $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_4$ и δS_4 через δS_1:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{r_2}; \qquad \delta\varphi_4 = \frac{\delta\varphi_2 r_2}{2r_4} = \frac{\delta S_1 r_3}{2r_2 r_4}; \qquad \delta S_C = \frac{\delta S_1 r_3}{2r_2}. \qquad (8.4)$$

Подставим их в уравнение (8.3)

$$G_1 \sin\alpha\,\delta S_1 - F_{mp}\delta S_1 - \Phi_1\delta S_1 + M\frac{\delta S_1}{r_2} - M_2^{\phi}\frac{\delta S_1}{r_2} - \Phi_4\frac{\delta S_1 r_3}{2r_2} - M_4^{\phi}\frac{\delta S_1 r_3}{2r_2 r_4} = 0.$$

Подставим значения, входящих в уравнение величин G_1, $F_{\text{тр}}$, Φ_1, M_1, Φ_4, M_4, используя формулы (8.1) и (8.2)

$$m_1 g\sin\alpha - m_1 gf\cos\alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2} - \frac{I_z\varepsilon_2}{r_2} - m_4 a_C\frac{r_3}{2r_2} - \frac{I_4\varepsilon_4 r_3}{2r_2 r_4} = 0. \qquad (8.5)$$

Выразим ускорения a_4, ε_2 и ε_4 мгновенное ускорение тела 1.

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3; \qquad \varepsilon_4 = \frac{a_1 r_3}{2r_2 r_4}; \qquad a_C = \frac{a_1 r_3}{2r_2}$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (8.5)

$$\begin{aligned} &m_1 g\sin\alpha - m_1 gf\cos\alpha - m_1 a_1 + \frac{M}{r_2^2} - \left(\frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^3}{2}\right)\frac{a_1}{r_2^2} - \\ &- m_4\frac{a_1 r_3^2}{4r_2^2} - \frac{m_4 r_4^2}{2}\cdot\frac{a_1 r_3^2}{4r_2^2 r_4^2} = 0 \end{aligned}.$$

Выразим из последнего уравнения искомое ускорение a_1

$$m_1 g\sin\alpha - m_1 gf\cos\alpha + \frac{M}{r_2^2} = a_1\left[\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3 r_3^3}{2r_2^2}\right) - \frac{m_4 r_3^2}{4r_2^2} - \frac{m_4 r_3^2}{8r_2^2}\right]. \qquad (8.6)$$

Подставим численные значения, входящих в уравнение (8.6) величин

$$a_1 = \frac{m_1 g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \dfrac{m_4 g r_4}{r_2^2}}{m_1 + \dfrac{m_2}{2} + \dfrac{m_3 r_3^3}{2r_2^2} - \dfrac{m_4 r_3^2}{4r_2^2} - \dfrac{m_4 r_3^2}{8r_2^2}}.$$

Подставим численные значения величин, входящих в последнее уравнение

$$a_1 = \frac{3\cdot 9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}86) + \dfrac{9{,}8\cdot 0{,}25}{0{,}1}}{3 + 0{,}5 + \dfrac{0{,}3^2}{0{,}1^2} - \dfrac{0{,}3^2}{4\cdot 0{,}1^2} - \dfrac{0{,}3^2}{8\cdot 0{,}1^2}} = \frac{14{,}86}{8{,}5} = 1{,}75\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для определения натяжения нити, прикрепленной к телу 1, используем принцип Даламбера. Нить мысленно разрежем и заменим ее действие на груз реакцией T_1. Расставим все силы, действующие на тело 1. Это сила тяжести $\overline{G}_1$, нормальная реакция поверхности $\overline{N}$, сила натяжения нити $\overline{T}_1$ и сила инерции $\overline{\Phi}_1$.

Рисунок 8.3.

Используем принцип Даламбера:

$$G_1\sin\alpha - F_{тр} - \Phi_1 - T_1 = 0;$$

$$T_1 = G_1\sin\alpha - fG_1\cos\alpha - \Phi_1 = 3mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - 3ma_1 = \\ = 3m(9{,}8\cdot(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}86) - 1{,}75) = 4{,}39m.$$

Ответ: ускорение тела 1: a_1 = 1,75 м/с^2;
сила натяжения нити: T_1 = 4,39m

8.3 Условие задания Д-8.

Применение общего уравнения динамики для описания движения механической системы

Для изображенных на рисунке 8.4 механизмов заданы массы всех тел, радиусы колес, коэффициент скольжения тела (кроме вариантов) по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, а также момент *M*, приводящий в движение заданную систему.

На основании приведенных в таблице 8.1 исходных данных в задаче Д-8 необходимо:

1) изобразить механизм в масштабе в соответствии с правилами инженерной графики;

2) к системе тел приложить все активные силы: силы тяжести тел, момент *M*.

3) противоположно ускорениям приложить силы инерции и моменты сил инерции;

4) задать системе тел возможное перемещение и составить общее уравнение динамики;

5) выразить все возможные перемещения в системе через одно из них по аналогичным зависимостям;

6) записать соотношения между угловыми и линейными ускорениями;

7) с использованием принципа Даламбера найти натяжение нити, прикрепленной к телу 1.

Таблица 8.1 – Исходные данные к заданию Д-8

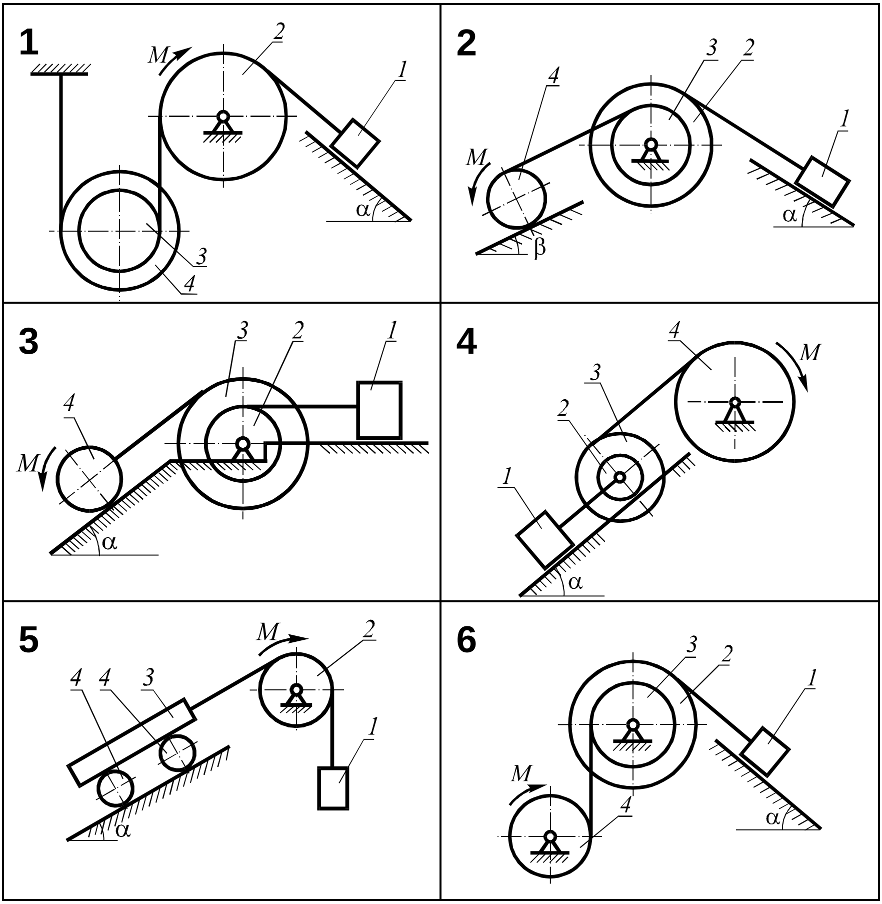
№	Массы тел, кг					Радиусы колес, см				f	M, Н·м	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	r_2	r_3	r_4	r_5			
1	$3m$	$2m$	$4m$	$2m$	—	10	15	20	—	0,2	mgr_2	30
2	$2m$	$5m$	$3m$	$2m$	—	40	20	30	—	0,3	mgr_4	60
3	m	$3m$	$2m$	m	—	20	10	15	—	0,1	$2mgr_4$	60
4	$4m$	$2m$	m	$3m$	—	10	25	20	—	0,2	mgr_4	60
5	$3m$	$2m$	$3m$	m	m	20	—	10	10	—	mgr_2	30
6	$2m$	$2m$	m	$3m$	—	30	15	40	—	0,3	mgr_4	45
7	m	$2m$	m	$3m$	m	40	20	—	10	0,2	$2mgr_5$	60
8	$3m$	$2m$	m	$3m$	—	50	30	20	—	0,1	mgr_2	30
9	m	m	$2m$	$3m$	—	20	15	30	—	0,2	$2mgr_2$	30
10	$2m$	m	m	$2m$	—	10	10	30	—	0,1	$3mgr_2$	60
11	$3m$	m	$3m$	$2m$	—	10	30	20	—	0,3	$2mgr_3$	60
12	$3m$	$2m$	$3m$	m	—	15	25	10	—	0,2	mgr_3	45
13	$2m$	m	$2m$	$3m$	—	10	30	30	—	—	$2mgr_3$	60
14	$3m$	m	$3m$	$2m$	$3m$	10	40	25	40	0,3	$3mgr_3$	30
15	$2m$	$2m$	m	$3m$	m	30	20	—	10	—	$4mgr_2$	45
16	$3m$	$2m$	$4m$	$2m$	—	20	40	15	—	0,1	mgr_3	30
17	m	$3m$	$2m$	$2m$	—	30	25	20	—	0,2	$4mgr_4$	60
18	$4m$	$3m$	$2m$	m	—	20	15	15	—	0,1	$3mgr_2$	30
19	$3m$	$2m$	m	$2m$	—	40	30	20	—	—	mgr_2	30
20	$2m$	$2m$	m	$2m$	—	30	20	30	—	0,3	$2mgr_4$	45
21	m	m	$3m$	$2m$	$2m$	10	25	20	15	0,1	$3mgr_3$	30

22	$3m$	$2m$	m	m	—	40	25	20	—	—	$3mgr_2$	—
23	$4m$	$3m$	$2m$	$4m$	m	40	25	—	10	—	$4mgr_2$	45
24	m	$2m$	$3m$	$3m$	—	15	20	40	—	0,2	$2mgr_4$	60
25	$2m$	m	$3m$	$2m$	—	15	40	20	—	0,1	$2mgr_3$	30
26	$3m$	m	$3m$	$3m$	$2m$	20	30	30	15	0,2	mgr_4	45
27	$2m$	$3m$	$2m$	m	$2m$	40	30	20	20	—	$3mgr_2$	30
28	$4m$	m	$2m$	$2m$	m	10	30	15	—	0,1	$4mgr_3$	60
29	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	—	10	20	40	—	—	mgr_4	30
30	$3m$	$2m$	m	$2m$	$3m$	30	20	30	40	—	$3mgr_3$	30

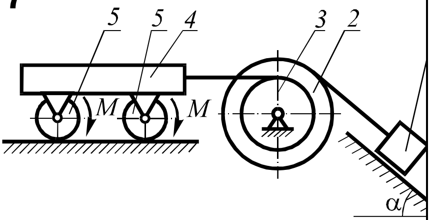
ЗАДАЧА 8

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

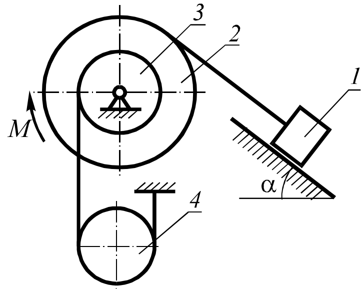
В изображенной на рисунке системе массы всех пронумерованных тел одинаковы и равны m. Все тела, движущиеся непоступательно, представляют собой сплошные однородные цилиндры. К некоторым из них приложены вращающие моменты $M_{\text{вр}}$ либо моменты сопротивления $M_{\text{с}}$. Коэффициент трения скольжения тел по плоскости равен f, угол наклона плоскости к горизонту – α. Качение во всех случаях происходит без проскальзывания. Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути s. В начальный момент система находилась в покое.



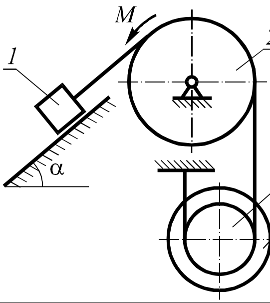
7



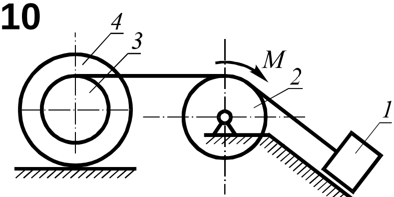
8



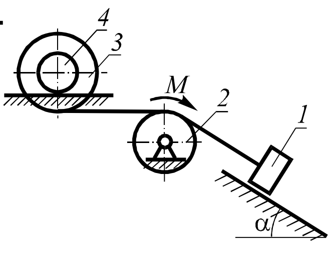
9



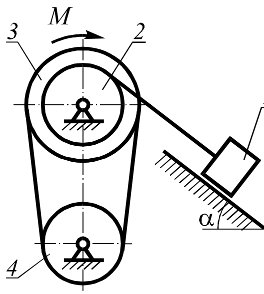
10



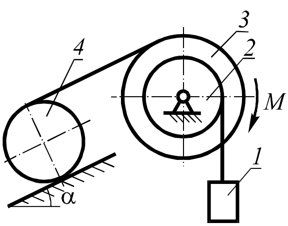
11



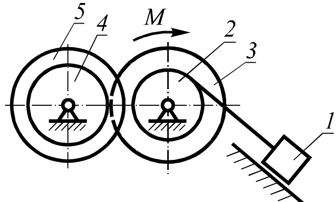
12



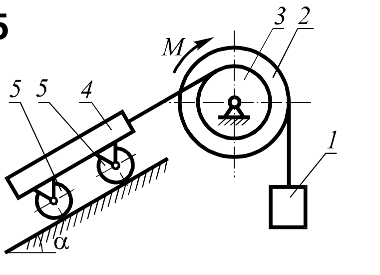
13



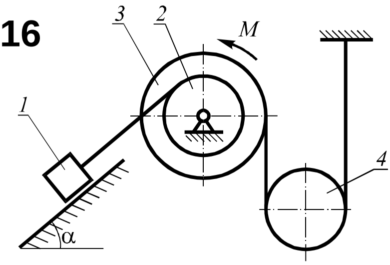
14



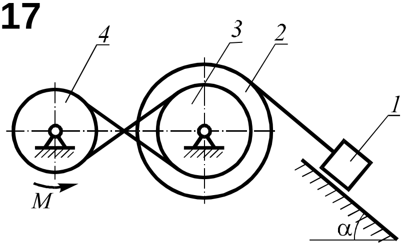
15



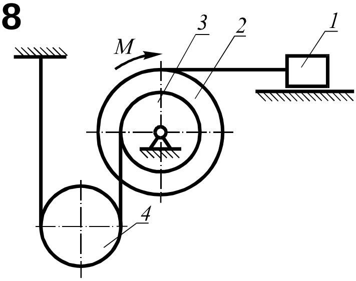
16



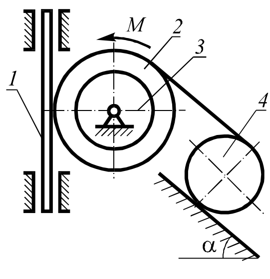
17



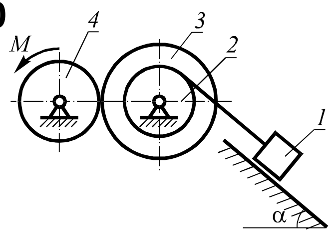
18



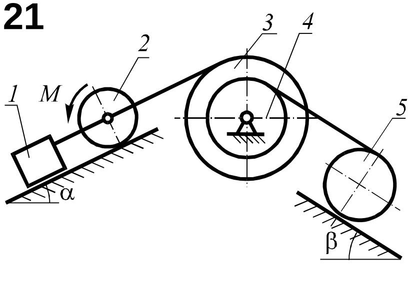
19



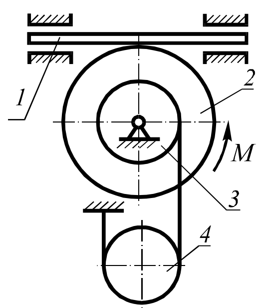
20



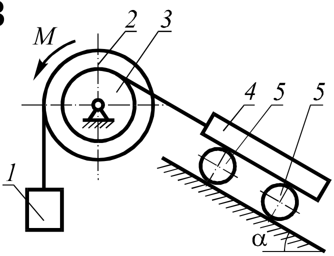
21



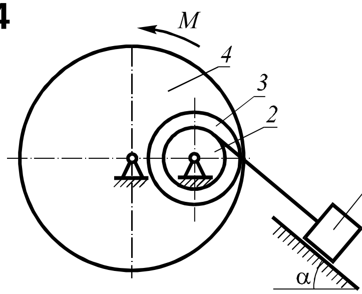
22



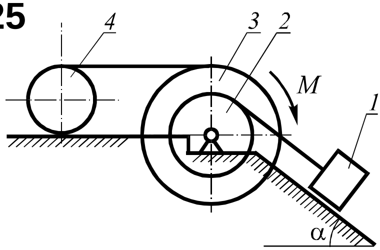
23



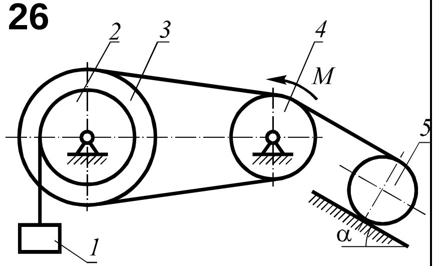
24



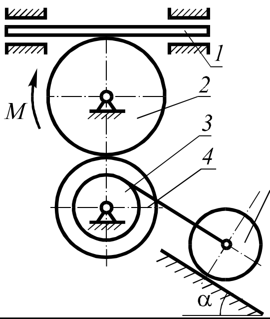
25



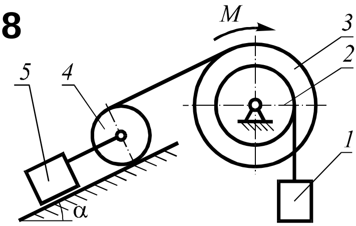
26



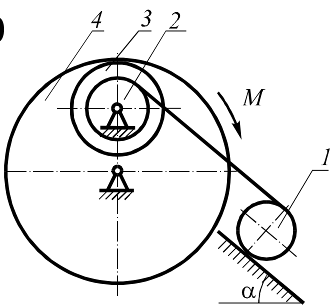
27



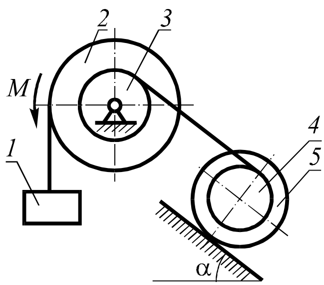
28



29



30



СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики.– СПб.: Издательство «Лань», 1998.– 736 с.

2. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики.— М.: Высшая школа, 1995.— 416 с.

3. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: Т. 1. Статика и кинематика.— М.: Наука, 1990.— 670 с.

Учебное издание

Александр Олегович ШИМАНОВСКИЙ
Галина Михайловна КУЗЕМКИНА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
РАЗДЕЛ «КИНЕМАТИКА»
(Обзор материала и задания для контрольных работ)
Пособие для студентов технических специальностей вузов

Редактор М.П. Дежко
Технический редактор В.Н. Кучерова
Корректор О.В. Занина

Подписано в печать 28.12.2001 г. Формат бумаги 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Гарнитура “Таймс”. Офсетная печать.
Усл. печ. л.3,02. Уч.-изд. л. 3,15. Тираж 800 экз.
Зак. № 2416. Изд. № 3654.

Редакционно-издательский отдел БелГУТа, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛВ № 57 от 22.10.97 г.

Типография БелГУТа, 246022, г. Гомель, ул. Кирова, 34.
Лицензия ЛП № 360 от 26.07.99 г.