МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, Л. В. ГОЛОВАЧ

ПРЕДЕЛЫ

Учебно-методическое пособие

Одобрено методической комиссией
электротехнического факультета

Гомель 2007

Кафедра «Высшая математика»

А. М. ЩЕРБО, И. П. ШАБАЛИНА, Л. В. ГОЛОВАЧ

ПРЕДЕЛЫ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2007

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Error! Reference source not found.Пусть функция $y = f(x)$ определена или на всей числовой оси, или для всех x, больших некоторого числа.

Определение 1.1. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число M, что для всех x, больших M, выполняется неравенство

$$\left| f(x) - b \right| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Символическая запись этого определения –

$$\underset{\varepsilon}{\forall}\left(\varepsilon > 0\right) \exists\ M \underset{x}{\forall}\left(x > M\right) \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$$

Записывается это следующим образом: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b.$

Определение 1.2. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число N, что для всех x, меньших N, выполняется неравенство $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$

Символическая запись этого определения –

$$\underset{\varepsilon}{\forall}\left(\varepsilon > 0\right) \exists\ N \underset{x}{\forall}\left(x < N\right) \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon \ \text{ и } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Определение 1.3. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число M (меньшее x_0), что для всех x, лежащих между M и x_0 $\left(M < x < x_0\right)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$

Символическая запись этого определения –

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\underset{M}{\exists}(M<x_0)\underset{x}{\forall}(M<x<x_0)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon \text{ è } \lim_{x\to x_0-0} f(x)=b.$$

Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева, т. е. оставаясь меньше x_0.

Определение 1.4. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (большее x_0), что для всех x, лежащих между x_0 и N $(x_0 < x < N)$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Символическая запись этого определения –

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\underset{N}{\exists}(N>x_0)\underset{x}{\forall}(x_0<x<N)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=b.$$

Пределы функции при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$ называются односторонними пределами. Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f(x)$ имеет двусторонний предел при $x \to x_0$, или просто имеет предел при $x \to x_0$.

Определение 1.5. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такие числа M и N ($N < x_0 < M,$), что для всех x, лежащих в интервале (N, M) (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Символическая запись этого определения –

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\underset{M,N}{\exists}(N<x_0<M)\underset{x}{\forall}\big(x\in(N,M)\big)$$

$$\big(\text{çà èñêëþ÷åí èåì , áû òü ì î æåò, òî ÷êè } x_0\big)\Rightarrow$$

$$|f(x)-b|<\varepsilon \text{ и } \lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Пример 1.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x}=2.$

Решение. Воспользуемся определением 1.1. В данном случае $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}, b=2.$ Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим модуль разности

$$|f(x)-b|=\left|\frac{2x+3}{x}-2\right|=\left|\frac{3}{x}\right|=\frac{3}{|x|}<\varepsilon.$$

Так как $x\to+\infty$, то x можно считать положительным, т. е. $|x|=x.$ Итак, $\dfrac{3}{x}<\varepsilon, x>\dfrac{3}{\varepsilon},$ т. е. число $M=\dfrac{3}{\varepsilon}.$ Следовательно,

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\,\underset{M}{\exists}\left(M=\frac{3}{\varepsilon}\right)\underset{x}{\forall}\left(x>M=\frac{3}{\varepsilon}\right)\Rightarrow\left|\frac{2x+3}{x}-2\right|<\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x}=2.$

Пример 1.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{2x}=\dfrac{3}{2}.$

Решение. Воспользуемся определением 1.2. В данном случае $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}, b=\dfrac{3}{2}.$ Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и рассмотрим модуль разности

$$|f(x)-b|=\left|\frac{3x-1}{2x}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2|x|}<\varepsilon.$$

Так как $x\to-\infty$, то можно считать x отрицательным, т. е. $|x|=-x.$ Итак, $-\dfrac{1}{2x}<\varepsilon, x>-\dfrac{1}{2\varepsilon},$ т. е. число $N=-\dfrac{1}{2\varepsilon}.$ Мы получили, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{2x}=\dfrac{3}{2}.$

Пример 1.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)=1.$

Решение. Воспользуемся определением 1.5. Возьмем произвольное $\varepsilon>0.$ Рассмотрим модуль разности

$$\left|(3x-5)-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<3x-6<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6-\varepsilon<3x<6+\varepsilon \Leftrightarrow 2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, $N=2-\frac{\varepsilon}{3}, M=2+\frac{\varepsilon}{3}.$ Поэтому

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\ \underset{N,\,M}{\exists}\left(N=2-\frac{\varepsilon}{3}<2<M=2+\frac{\varepsilon}{3}\right)$$
$$\underset{x}{\forall}\left(N<x<M=\frac{3}{\varepsilon}\right)\Rightarrow\left|(3x-5)-1\right|<\varepsilon.$$

Пример 1.4. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ если } 0\le x<2; \\ 3-x, \text{ если } 2\le x\le 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке 1.1.

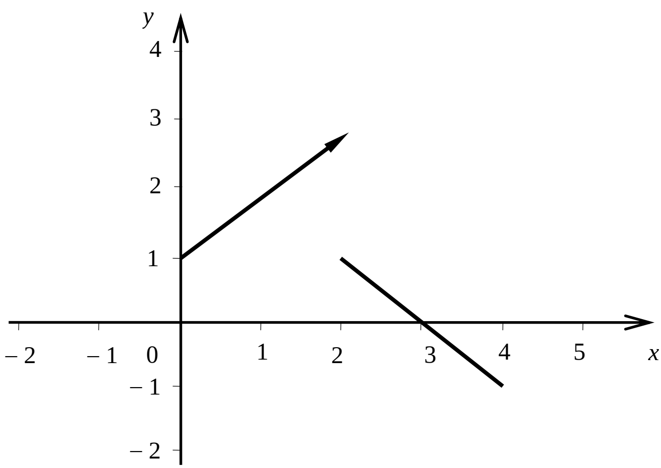

Рисунок 1.1

Найдем предел этой функции при $x \to 2$. Рассмотрим односторонние пределы

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x+1) = 3;\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}(3-x) = 1.$$

Предел слева и предел справа не равны друг другу, поэтому функция $f(x)$ при $x \to 2$ предела не имеет.

Пример 1.5. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ не имеют предела. Значения этих функций все время колеблются между -1 и 1.

Упражнения. Доказать, что указанные функции имеют предел:

1.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x} = 3.$ **1.2** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-3x}{x} = -3.$ **1.3** $\lim\limits_{x\to-1}(2+4x) = -2.$

1.4 $\lim\limits_{x\to1}(5x-4) = 1.$ **1.5** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+4x}{2x} = 2.$ **1.6** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x}{x} = -2.$

2 БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to +\infty$, если ее предел при $x \to +\infty$ равен нулю. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to -\infty, x \to x_0 - 0, x \to x_0 + 0.$ Для определенности все последующие определения и утверждения будем формулировать только для $x \to +\infty$, но они будут справедливы для всех пяти случаев стремления x.

Так как для бесконечно малой функции (б. м. ф.) предел $b = 0$, а $|f(x) - b| = |f(x)|$, то можно дать следующее определение.

Определение 2.1. Функция $y = f(x)$ называется б. м. ф. при $x \to +\infty$, если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое число N, что при всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Символическая запись

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ \underset{x}{\forall}\,(x > N) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Пример 2.1. Покажем, что функция $y=\frac{1}{x^3}$ является б. м. ф. при $x\to+\infty$.

Решение. Для этого надо показать, что при $x\to+\infty$ для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое N, что при всех $x>N$ выполняется неравенство $\left|f(x)\right|<\varepsilon$. Имеем $\left|f(x)\right|=\left|\frac{1}{x^3}\right|=\frac{1}{x^3}<\varepsilon,\ x>\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}=N.$ Итак,

$$\forall\,\varepsilon>0\ \underset{N}{\exists}\left(N=\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)\underset{x}{\forall}\,(x>N)\Rightarrow\left|\frac{1}{x^3}\right|<\varepsilon.$$

Эта же функция $y=\frac{1}{x^3}$ будет б. м. ф. и при $x\to-\infty$.

Вообще, можно показать, что функция $y=\frac{1}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0)$ есть б. м. ф. при $x\to\pm\infty$.

Пример 2.2. Покажем, что функция $y=x^2$ является б. м. ф. при $x\to 0$.

Решение. Зададим $\varepsilon>0$. Неравенство $\left|f(x)\right|=\left|x^2\right|=x^2<\varepsilon$, очевидно, выполняется для всех тех значений x, для которых $|x|<\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $x^2<\varepsilon$ выполняется для всех x, расположенных между $N=-\sqrt{\varepsilon}$ и $M=\sqrt{\varepsilon}$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, т. е. функция $y=x^2$ является б. м. ф. при $x\to 0$.

Вообще, можно показать, что функция $y=x^m\ (m>0)$ является б. м. ф. при $x\to 0$.

Пример 2.3. Функция $y=2-\frac{1}{x}$ не является б. м. ф. при $x\to+\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2\neq 0$.

Для б. м. ф. имеют место следующие *свойства*.

2.1 Алгебраическая сумма конечного числа б. м. ф. есть б. м. ф.
2.2 Произведение б. м. ф. на функцию ограниченную есть б. м. ф.
2.3 Произведение конечного числа б. м. ф. есть б. м. ф.
2.4 Произведение числа на б. м. ф. есть б. м. ф.

Пример 2.4. Функция $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}$ является б. м. ф. при $x\to+\infty,$ так как каждое слагаемое есть б. м. ф. при $x\to+\infty$ (см. пример 2.1).

Пример 2.5. Функция $y=x+x^2+\sqrt[3]{x}$ есть б. м. ф. при $x\to 0,$ так как все функции являются б. м. ф. при $x\to 0$ (см. пример 2.2).

Пример 2.6. Функция $y=\frac{\sin x}{x^2}$ является б. м. ф. при $x\to\pm\infty,$ так как она является произведением ограниченной функции $\sin x$ на б. м. ф. $y=\frac{1}{x^2}$ при $x\to\pm\infty.$

Пример 2.7. Функция $y=x^2\left(1+\sin 2x\right)$ является б. м. ф. при $x\to 0,$ так как она является произведением ограниченной функции $1+\sin 2x$ на б. м. ф. x^2 при $x\to 0.$

Определение 2.2. Функция $y=f\left(x\right)$ называется бесконечно большой функцией (б. б. ф.) при $x\to+\infty,$ если для любого положительного числа L можно подобрать такое число $N,$ что для всех значений $x>N$ выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)\right|>L.$

О бесконечно большой функции (при $x\to\pm\infty$) говорят, что она стремится к бесконечности, или, что она имеет бесконечный предел. Если $f\left(x\right)$ б. б. ф. при $x\to+\infty,$ то это символически записывают так: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\infty.$ Это равенство не следует понимать в том смысле, что функция имеет предел, оно означает только, что функция (не имея предела) является бесконечно большой.

Если б. б. ф. $f\left(x\right)$ положительна для всех достаточно больших значений $x,$ то $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty.$ Если же б. б. ф. $f\left(x\right)$ отрицательна для всех достаточно больших значений $x,$ то $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty.$ Так, например, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty.$

Аналогично даются определения при $x\to-\infty,$ $x\to x_0-0,$ $x\to x_0+0,$ $x\to x_0.$

Можно доказать, что любой многочлен есть б. б. ф. при $x \to \pm\infty$.

Связь между б. м. ф. и б. б. ф. устанавливают следующие *свойства*.

2.5 Если $f(x)$ является б. б. ф., то $\dfrac{1}{f(x)}$ является б. м. ф.

2.6 Если $\varphi(x)$ является б. м. ф. (не обращающейся в ноль), то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ – б. б. ф.

То обстоятельство, что функция, обратная б. м. является б. б; и наоборот, делает естественной следующую символическую запись, часто употребляющуюся для сокращения записей: для любого $a > 0$ верны равенства:

$$\frac{a}{+0} = +\infty; \ \frac{a}{-0} = -\infty; \ \frac{a}{0} = \infty;$$

$$\frac{a}{+\infty} = +0; \ \frac{a}{-\infty} = -0; \ \frac{a}{\infty} = 0.$$

Пример 2.8. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является б. б. ф. при $x \to 0$, тогда $y = x^2$ является б. м. ф. при $x \to 0$.

Пример 2.9. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ является б. м. ф. при $x \to \pm\infty$, тогда $y = x^2$ является б. б. ф. при $x \to \pm\infty$.

Отметим еще следующие *свойства*.

2.7 Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, равный b, то $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б. м. ф. при $x \to +\infty$.

2.8 Если функцию $f(x)$ можно представить $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б. м. ф. при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Пример 2.10. Доказать, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} \right) = 4$.

Решение. Так как функции $\frac{5}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ – б. м. ф. при $x \to -\infty$, то и их сумма является б. м. ф. Функция $4+\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ есть сумма числа 4 и б. м. ф. Значит, согласно свойства 2.8, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=4.$

3 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы.

Т1. Предел постоянной равен самой постоянной, т. е. $\lim\limits_{x\to a} c = c.$

Т2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x).$

Т3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ существуют, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Т4. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$

Т5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, åñëè $\varphi(x)\neq 0.$

Т6. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$

Кроме того, мы будем пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right).$

Если же аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Будем использовать следующие часто встречающиеся пределы:

П1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ åñëè } 0<a<1; \\ +\infty, \text{ åñëè } a>1. \end{cases}$

П2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \text{ åñëè } 0<a<1; \\ 0, \text{ åñëè } a>1. \end{cases}$

П3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ åñëè } 0<a<1; \\ +\infty, \text{ åñëè } a>1. \end{cases}$

П4. $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = \begin{cases} +\infty, \text{ åñëè } 0<a<1; \\ -\infty, \text{ åñëè } a>1. \end{cases}$

П5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0 \text{ ï ðè ëþ áî ì çí à÷åí èè } x.$

П6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}.$

П7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}.$

П8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$

П9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$

Пример 3.1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-4x-3\right).$

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2-4x-3\right)=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}4x-\lim_{x\to 2}3=3\cdot 4-8-3=1.$$

Пример 3.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x-4}{x+1}.$

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x-4}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-5x-4\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)}=\frac{1-5-4}{1+1}=-4,$$

так как $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)\neq 0.$

Пример 3.3. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(5x)^{x-1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 2}5x=10$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1,$ то по Т6: $\lim\limits_{x\to 2}(5x)^{x-1}=10^1=10.$

Пример 3.4. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\arcsin 2x.$

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\arcsin 2x=\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\arcsin\left(2\cdot\frac{1}{4}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$

Пример 3.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x}{x^2}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x}{x^2}=\frac{1}{+0}=+\infty.$

Пример 3.6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^{-x}}{\operatorname{arctg}x}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^{-x}}{\operatorname{arctg}x}=\frac{+0}{\pi/2}=+0.$

Пример 3.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\log_{1/2}x}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\log_{1/2}x}=\frac{\pi/2}{-\infty}=-0.$

4 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Непосредственное применение теорем о пределах функций не всегда приводит к цели. Например, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ таков, что при $x\to x_0$ $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0,$ то говорят, что имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Понимать ее следует так: отношение двух бесконечно малых функций может быть величиной конечной, бесконечно малой, бесконечно большой или вообще не существовать. Нахождение предела такой дроби или установление его отсутствия называется раскрытием этой неопределенности. Всего существует семь типов неопределенных выражений:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ 1^{\infty};\ \infty^{0};\ 0^{0}.$$

Рассмотрим раскрытие отдельных видов неопределенностей.

5 РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ВИДА $\frac{0}{0}$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ неопределенность $\frac{0}{0}$, т. е. $f(x_0)=0, \varphi(x_0)=0.$ Следовательно, x_0 является корнем числителя $f(x)$ и знаменателя $\varphi(x)$, т. е. обе функции можно разложить на множители, одним из которых обязательно будет $x-x_0$. После этого можно дробь сократить на $x-x_0$. Здесь нет сокращения на нуль, что никогда не допустимо. Согласно определения предела функции при $x\to x_0$ (опр. 1.5), аргумент x стремится к своему предельному значению x_0, но $x\neq x_0$. Поэтому здесь $x-x_0\neq 0$.

Пример 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Напомним, что если числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $ax^2+bx+c,$ то $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$

Пример 5.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^2+3x-10}.$

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-3x^2-2x}{x^2+3x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(2x^2-3x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+5\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x\left(x-2\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(x-2\right)\left(x+5\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{x+5}=\frac{10}{7}.$$

Пример 5.3. Найти $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}=\left(\dfrac{0}{0}\right).$ Для разложения выражений в числителе и знаменателе на множители воспользуемся делением многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3+3x^2} & x^2+2x-3 \\
 & -\;\;2x^2+3x & \\
 & \underline{2x^2+6x} & \\
 & -\;\;-3x-9 & \\
 & \underline{-3x-9} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-3x^2-45x-81 \\ \underline{x^3+3x^2} \end{array} & \underline{x+3} \\
\quad -\begin{array}{l} -6x^2-45x \\ \underline{-6x^2-18x} \end{array} & x^2-6x-27 \\
\qquad -\begin{array}{l} -27x-81 \\ \underline{-27x-81} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом,

$$
\lim_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)\left(x^2+2x-3\right)}{(x+3)\left(x^2-6x-27\right)}=
$$

$$
=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2-6x-27}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{x-9}=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}.
$$

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x\to1,5}\dfrac{8x^3-27}{4x^3-4x^2-15x+18}$.

Решение.

$$
\lim_{x\to1,5}\frac{8x^3-27}{4x^3-4x^2-15x+18}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1,5}\frac{(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)}{(x-1,5)\left(4x^2+2x-12\right)}=
$$

$$
=\lim_{x\to1,5}\frac{2\left(4x^2+6x+9\right)}{4x^2+2x-12}=\frac{54}{0}=\infty.
$$

Пример 5.5. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-x^2-4x+3}{x^3+x^2+3x-5}$.

Решение.

$$
\lim_{x\to1}\frac{2x^3-x^2-4x+3}{x^3+x^2+3x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+x-3\right)}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}=
$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+2x+5}=\frac{0}{8}=0.$$

Если неопределенность $\frac{0}{0}$ выражена через иррациональные выражения, то нужно путем преобразования избавиться от иррациональности и затем сократить на множитель $x-x_0$.

Пример 5.6. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{16}.$$

Пример 5.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{\sqrt{x+9}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-2)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x+9-9}=\lim_{x\to 0}(x-2)\left(\sqrt{x+9}+3\right)=-12.$$

Пример 5.8. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{6+x}+x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{6+x}+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{1-4x}-3\right)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)\left(\sqrt{6+x}-x\right)}{\left(\sqrt{6+x}+x\right)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)\left(\sqrt{6+x}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(1-4x-9)\left(\sqrt{6+x}-x\right)}{\left(6+x-x^2\right)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-4(x+2)\left(\sqrt{6+x}-x\right)}{-(x+2)(x-3)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{4\left(\sqrt{6+x}-x\right)}{(x-3)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}=-\frac{8}{15}.$$

Пример 5.9. Найти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7+x}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{7+x}-2\right)\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+2\sqrt[3]{7+x}+4\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+2\sqrt[3]{7+x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{7+x}\right)^3-2^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+2\sqrt[3]{7+x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{7+x-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+2\sqrt[3]{7+x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(7+x)^2}+2\sqrt[3]{7+x}+4\right)}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}.$$

Пример 5.10. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}}{\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{2-5x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}}{\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{2-5x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+3}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)\left(\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}-\sqrt[3]{(x+6)(2-5x)}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)\right)}{\left(\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{2-5x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}-\sqrt[3]{(x+6)(2-5x)}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)\left(\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}-\sqrt[3]{(x+6)(2-5x)}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}\right)\right)}{4(2-x)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x+6)^2}-\sqrt[3]{(x+6)(2-5x)}+\sqrt[3]{(2-5x)^2}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{3x+3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4+4}{3+3}=1.$$

Пример 5.11. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1-\sin^3 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\sin x+\sin^2 x}=\frac{2}{3}.$$

Пример 5.12. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы:

5.1 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4}$. **5.2** $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. **5.3** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}$.

5.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}$. **5.5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$. **5.6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{(3x^2+1)(2x-4)}$.

5.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)}{4x-7}$. **5.8** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}}$. **5.9** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{3x^2+2x+1}$.

5.10 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+4}$. **5.11** $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$. **5.12** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

5.13 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2-2x+1}{-x^2+x+1}$. **5.14** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-7x+10}{8-x^3}$. **5.15** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

5.16 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$. **5.17** $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$. **5.18** $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+6x^2+15x+18}{x^3+5x^2+5x-3}$.

5.19 $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$. **5.20** $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $(a>0)$. **5.21** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

5.22 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$. **5.23** $\lim\limits_{x\to6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$. **5.24** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

5.25 $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$. **5.26** $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$. **5.27** $\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

5.28 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+2\operatorname{ctg}x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$. **5.29** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x+\operatorname{tg}(\pi-x)}{2x(\pi-x)}$. **5.30** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$.

5.31 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt[3]{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$. **5.32** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{2x^2+10x+1}-\sqrt[7]{x^2+10x+1}}{x}$.

5.33 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{2x}$. **5.34** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{9-x}}{\sqrt[4]{x^3+15}-2}$.

5.35 $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}$. **5.36** $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\left(x^2+2x\right)^2-14\left(x^2+2x\right)-15}{x^4-29x^2+100}$.

5.37 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. **5.38** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$.

6 РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ВИДА $\frac{\infty}{\infty}$ И $\infty-\infty$

Если неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ получается при вычислении предела отношения двух многочленов при $x\to\infty\left(x\to\pm\infty\right)$, то нужно числитель и знаменатель дроби разделить на старшую степень переменной.

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+5}{5x^3+x^2-x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+5}{5x^3+x^2-x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)==\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-0+0}{5+0-0+0}=\frac{4}{5}.$$

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x^3+x^2+5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1}{2x^3+x^2+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0+0-0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^3+x+4}{x^2-2x+5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3+x+4}{x^2-2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}}=\frac{3+0+0+0}{0-0+0}=\frac{3}{0}=\infty.$$

Из рассмотренных трех пределов можно вывести *правило* о пределе отношения двух многочленов.

Предел отношения двух многочленов

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to\pm\infty)}}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

равен:

1) $\dfrac{a_0}{b_0}$, если $n=m$;

2) 0, если $n<m$;

3) ∞, если $n > m$.

В дальнейшем будем пользоваться данным правилом.

Пример 6.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x+5}{3x^2+x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x+5}{3x^2+x-1}=\dfrac{4}{3}$.

Пример 6.5. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+2x-4}{x^4+x^2+x+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+2x-4}{x^4+x^2+x+1}=0$.

Рассмотрим другие случаи раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. В подобных примерах полезно иметь в виду, что функция $f(x)=\sqrt[m]{P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, стремится к бесконечности так же, как и функция $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$. Это позволяет выделить высшую степень x, входящую в данное выражение, и разделить числитель и знаменатель на эту степень x. В данном примере надо делить на $\sqrt{x}$, тогда получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4-3\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+2\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x^{1/6}}+\dfrac{2}{x^{3/10}}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[6]{\dfrac{4x^2+4x+1}{x^3}}}=\frac{4-0+0}{2+0}=2.$$

Пример 6.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{2}{2}=1.$$

Здесь использовано $\sqrt{x^2}=|x|=x$ при $x>0$.

Пример 6.8. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}=-\frac{2}{2}=-1.$$

Здесь использовано $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ при $x<0$.

Пример 6.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}$.

Решение. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{2x-3}$ не существует, так как при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ не совпадают.

Рассмотрим неопределенность $\infty-\infty$.

Пример 6.10. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2-5}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}=\frac{4-0}{1+1}=2.$$

Пример 6.11. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-x^2-5}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{5}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\frac{4-0}{-(1+1)}=-2.$$

Здесь использовано $\sqrt{x^2}=|x|=-x,$ так как $x<0.$

Пример 6.12. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 6.13. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\infty(\infty+\infty)=-\infty.$$

Пример 6.14. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right).$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\frac{3}{\infty}=0.$$

Пример 6.15. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1}=\frac{6}{1+1}=3.$$

Пример 6.16. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=+\infty+\infty=+\infty.$

Пример 6.17. Найти $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 6.18. Найти $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{12}{x^3-8}-\frac{1}{x-2}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to2}\frac{12-x^2-2x-4}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6.19. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+1}{3^x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{3^x}}{1-\dfrac{1}{3^x}}=\frac{1+\dfrac{1}{\infty}}{1-\dfrac{1}{\infty}}=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+1}{3^x-1}=\frac{3^{-\infty}+1}{3^{-\infty}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

Пример 6.20. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2+4x-40}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2+4x-40}=\dfrac{0}{5}=0.$

Последний пример показывает, что при вычислении предела $x\to a$ всегда нужно начинать с прямой подстановки $x=a$. Если неопределенности нет, то результат получаем сразу, а при наличии неопределенности нужно выполнять преобразования.

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы:

6.1 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$. **6.2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-2x^2+15}{9x^4+x-13}$. **6.3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+10x^3-x+5}{7x^5+2x^4-5x+1}$.

6.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$. **6.5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$. **6.6** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$.

6.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$. **6.8** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+1}{\sqrt{4x^2+1}}$. **6.9** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+a^2}{x^3+a^3}$.

6.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+10x}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$. **6.11** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$. **6.12** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}}$.

6.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+x^{11}+7x^{13}\right)^3}{\left(1+x^4\right)^{10}}$. **6.14** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}$.

6.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^5+(x+6)^5+(x+7)^5}{x^5+5^5}$. **6.16** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+7x-1\right)^6}{\left(2x^6-13x^2+x\right)^3}$.

6.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+\sqrt{x^3+x^4}}}{\sqrt{x^2+4}}$. **6.18** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+|x|}{\sqrt[6]{x^4+2}-|x|}$.

6.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$. **6.20** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2x^4+x^2+1\right)}{\ln\left(3x^2+x-1\right)}$.

6.21 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$. **6.22** $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

6.23 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. **6.24** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+m)(x+n)}-x\right)$.

6.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. **6.26** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

6.27 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 4x}-\dfrac{1}{4\sin^2 2x}\right)$. **6.28** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x+3}\right)$.

6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+5}-x\right)$. **6.30** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

6.31 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)$. **6.32** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$.

6.33 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$. **6.34** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

6.35 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$. **6.36** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$.

6.37 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$.

6.38 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)$.

6.39 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+4x}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+4}\right)$.

6.40 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$.

6.41 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

6.42 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$.

7 ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

При вычислении пределов тригонометрических и обратных тригонометрических функций часто используется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1, \tag{7.1}$$

который называется первым замечательным пределом. Часто этот предел используют в виде

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1. \tag{7.2}$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1, \tag{7.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k. \tag{7.4}$$

Пример 7.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=1\cdot 2=2.$$

Пример 7.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}5x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\right)=1\cdot\frac{5}{2}\cdot 1=2{,}5.$$

Пример 7.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^2}{(\sin 2x)^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Пример 7.4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{\pi}{2}=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

При вычислении таких пределов важно, чтобы отношение функций было $\frac{0}{0}$, и неважно, что $x\to 1$ (а не к нулю). Этот предел можно вычислить с помощью замены переменной $x=1-t$, при $x\to 1, t\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 7.5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{\sin(3\pi-3\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(1-x)}{\sin 3\pi(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin\pi(1-x)}{\pi(1-x)}}{\frac{\sin 3\pi(1-x)}{3\pi(1-x)}}\cdot\frac{\pi}{3\pi}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Пример 7.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Пример 7.7. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(2\pi-2x)}{\sin(3\pi-3x)}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2(\pi-x)}{\sin 3(\pi-x)}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{\sin 2(\pi-x)}{2(\pi-x)}}{\dfrac{\sin 3(\pi-x)}{3(\pi-x)}}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Здесь нельзя было воспользоваться преобразованием примера 7.6, так как при $x\to\pi$ выражения $2x$ и $3x$ не являются бесконечно малыми.

Пример 7.8. Найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

Решение.

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\dfrac{x+a}{2}\cdot\sin\dfrac{x-a}{2}}{2\cdot\dfrac{x-a}{2}}=-\sin a.$$

Пример 7.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}$.

Решение. Применим подстановку $t = \mathrm{arctg}2x$, $x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}t$ при $x \to 0, t \to 0.$ Тогда

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\mathrm{tg}t} = \left(\frac{0}{0}\right) = 2\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$$

Пример 7.10. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}.$

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{2x-1} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Применим подстановку $t = \arcsin(1-2x)$, $1-2x = \sin t$ при $x \to \frac{1}{2}, t \to 0.$ Тогда имеем $\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{-\sin t} = -\frac{1}{2}.$

Пример 7.11 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4\mathrm{x}}{\sqrt{x+1}-1}.$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right) = 4\cdot 2 = 8.$$

Пример 7.12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0,$ так как данный предел представляет собою отношение ограниченной функции $\sin x$ при $x\to\infty$ к бесконечно большой функции $x,$ равное бесконечно малой функции.

Пример 7.13. Найти $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}.$

Решение.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{\operatorname{tg}(2\pi+\pi x)}{x+2}=$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\operatorname{tg}\pi(2+x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\sin\pi(2+x)}{\pi(x+2)}\cdot\frac{\pi}{\cos\pi(2+x)}=1\cdot\frac{\pi}{1}=\pi.$$

Пример 7.14. Найти $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}3x.$

Решение.

$$\lim_{x\to0}x\operatorname{ctg}3x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{x\cos3x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{\cos3x}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Пример 7.15. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x).$

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы:

7.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$. **7.2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin 2x}$. **7.3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

7.4 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\sin\dfrac{2}{3x}$. **7.5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **7.6** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

7.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. **7.8** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha x}{x}$. **7.9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

7.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$. **7.11** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$. **7.12** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9+x}}{\arcsin 2x}$.

7.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3(x+1)}{x^2+4x-5}$. **7.14** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+16}-4}$. **7.15** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5-\sqrt{x+25}}$.

7.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$. **7.17** $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$. **7.18** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$.

7.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-\mathrm{tg}x}-\sqrt{2-\sin 3x}}{\sin 2x}$. **7.20** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

8 ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{8.1}$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{8.2}$$

называется вторым замечательным пределом.

Лучше использовать эти пределы в такой форме

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e, \tag{8.3}$$

или

$$\lim_{\beta(x)\to 0}\left(1+\beta(x)\right)^{\frac{1}{\beta(x)}}=e. \tag{8.4}$$

С помощью второго замечательного предела раскрывается неопределенность 1^{∞}.

Пример 8.1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{4}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^{4}=e^{4}.$$

Пример 8.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(-5x\right)\right)^{\frac{1}{-5x}\cdot(-5)}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\left(-5x\right)\right)^{\frac{1}{-5x}}\right)^{-5}=e^{-5}.$$

С учетом результатов примеров 8.1 и 8.2 можно использовать формулы

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{k}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e^{k}, \tag{8.5}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1-\frac{k}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=e^{-k}, \tag{8.6}$$

$$\lim_{\beta(x)\to 0}\left(1+k\beta(x)\right)^{\frac{1}{\beta(x)}}=e^{k}, \tag{8.7}$$

$$\lim_{\beta(x)\to 0}\left(1-k\beta(x)\right)^{\frac{1}{\beta(x)}}=e^{-k}. \tag{8.8}$$

Здесь k – число (не обязательно целое).

Пример 8.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{6x+5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{6x+5}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{6x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}\cdot 4}\cdot 1=e^{-4}.$$

Пример 8.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{\frac{1}{4x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3}x\right)^{\frac{1}{4x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{3}x\right)^{\frac{3}{5x}\cdot\frac{5}{12}}=e^{\frac{5}{12}}.$$

Пример 8.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}\cdot\frac{4}{x-2}\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x}{x-2}}=e^{8}.$$

Пример 8.6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x-3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x-3}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-4}{2x+3}\right)^{4x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{4}\cdot\frac{4}{2x+3}\cdot(4x-3)}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x-12}{2x+3}}=e^{-8}.$$

Рассмотрим второй способ вычисления данного предела.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{3}{2x}}\right)^{4x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{4x-3}{2x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}\cdot\frac{3}{2x}(4x-3)}}=\frac{e^{-2}}{e^{6}}=e^{-8}.$$

Пример 8.7. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{3x+2}\right)^{3x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{3x+2}\right)^{3x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}=0.$$

Пример 8.8. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{5x-2}\right)^{2x+1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+1}{5x-2}\right)^{2x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-\infty}=+\infty.$$

Пример 8.9. Найти $\lim\limits_{x\to0}(1+3\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}(1+3\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to0}(1+3\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}=e^{3}.$$

Пример 8.10. Найти $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin3x)^{\frac{2}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}(1+\sin3x)^{\frac{2}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to0}(1+\sin3x)^{\frac{1}{\sin3x}\frac{2\sin3x}{x}}==e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3}=e^{6}.$$

Пример 8.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1.$$

Пример 8.12. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln(3x+1)-\ln(x-2)\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln(3x+1)-\ln(x-2)\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{3x+1}{x-2}=\ln 3.$$

Пример 8.13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+10x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lg\lim_{x\to 0}(1+10x)^{\frac{1}{2x}}=$$

$$=\lg\lim_{x\to 0}(1+10x)^{\frac{1}{10x}\cdot 5}=\lg e^{5}=5\lg e.$$

Рассмотрим нахождение пределов вида в общем случае

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=c.$$

1 Можно воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

2 Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B,$ то $C=A^{B}$.

3 Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \ne 1$ è $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty$, то нужно воспользоваться П1 и П2 из третьего раздела.

4 Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то нужно положить $f(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)\cdot\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot\varphi(x)}.$$

Некоторые из этих преобразований мы уже использовали.

Пример 8.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{2}{x^2}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{2}{x^2}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 0}(1+\cos 4x - 1)^{\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot\frac{2\sin^2 2x}{x^2}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}} = e^{-4\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)^2}{(2x)^2}\cdot 4} = e^{-16}.$$

Пример 8.15. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)^{\operatorname{tg}^2 x} == \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x}\cdot\sin^2 x} =$$

$$= e^{-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot 1} = e^{-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}} = e^{-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^2} = e^{-2\cdot\frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы:

8.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{2x^3}}$. **8.2** $\lim\limits_{z\to 0}\left(1+4z\right)^{\frac{3}{5z}}$. **8.3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$.

8.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$. **8.5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$. **8.6** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

8.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$. **8.8** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$. **8.9** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{x}$.

8.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4x+5}\right)^{x}$. **8.11** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^{x}$. **8.12** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\operatorname{cosec} x}$.

8.13 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **8.14** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}$. **8.15** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\ln\cos\frac{4}{x}\right)$.

8.16 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} 3x}}$. **8.17** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. **8.18** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

8.19 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\left(e+x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$. **8.20** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{\cos x-1}$. **8.21** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2}$.

8.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{3x^2+2x+7}\right)^{\frac{2x^2+5}{x^2-1}}$. **8.23** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}\right)^{3x-1}$.

8.24 $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$. **8.25** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(2x+1\right)\left(\ln\left(3x+1\right)-\ln\left(3x-2\right)\right)\right)$.

9 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОСТОРОННИХ ПРЕДЕЛОВ

Пример 9.1. Найти: а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{5}{\left(x-1\right)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{5}{\left(x-1\right)^3}$.

Решение.

а) При $x\to 1-0$ $x<1$, поэтому $x-1<0$ и б. м. ф., тогда $\left(x-1\right)^3$ – отрицательная б. м. ф., т. е. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{5}{\left(x-1\right)^3}=\frac{5}{-0}=-\infty$.

б) При $x \to 1+0$ $x > 1,$ поэтому $x-1>0$ и б. м. ф., тогда $\left(x-1\right)^3$ – положительная б. м. ф., т. е. $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{5}{\left(x-1\right)^3} = \dfrac{5}{+0} = +\infty.$

Пример 9.2. Найти: а) $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x+1}{2-x}$; б) $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x+1}{2-x}.$

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \to 2-0} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{+0} = +\infty; \quad \text{б) } \lim_{x \to 2+0} \frac{x+1}{2-x} = \frac{3}{-0} = -\infty.$$

Пример 9.3. Найти: а) $\lim\limits_{x \to 2\pi-0} \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; б) $\lim\limits_{x \to 2\pi+0} \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}.$

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \to 2\pi-0} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x \to 2\pi-0} \operatorname{ctg}\left(\pi - 0\right) = -\infty;$$

$$\text{б) } \lim_{x \to 2\pi+0} \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x \to 2\pi+0} \operatorname{ctg}\left(\pi + 0\right) = +\infty.$$

Пример 9.4. Найти: а) $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{4}{1+5^{\frac{1}{x-2}}}$; б) $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{4}{1+5^{\frac{1}{x-2}}}.$

Решение.

а) При $x \to 2-0$ $x < 2,$ т. е. $x-2<0,$ и тогда имеем:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{4}{1+5^{\frac{1}{x-2}}} = \frac{4}{1+5^{\frac{1}{-0}}} = \frac{4}{1+5^{-\infty}} = \frac{4}{1+0} = 4.$$

б) При $x \to 2+0$ $x > 2,$ т. е. $x-2>0,$ и тогда имеем:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{4}{1+5^{\frac{1}{x-2}}} = \frac{4}{1+5^{\frac{1}{+0}}} = \frac{4}{1+5^{+\infty}} = \frac{4}{1+\infty} = +0.$$

Пример 9.5. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\log_5 x}+\arccos x\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+0}\log_5 x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+0}\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\log_5 x}+\arccos x\right)=\frac{1}{-\infty}+\frac{\pi}{2}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 9.6. Найти а) $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-0}\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\operatorname{arctg}(+\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить односторонние пределы функций:

9.1 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-3}{x+2}$. **9.2** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **9.3** $\lim\limits_{x\to3}3^{\frac{1}{x-3}}$. **9.4** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4}{(x-2)^2}$.

9.5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. **9.6** $\lim\limits_{x\to1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$. **9.7** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}$. **9.8** $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$.

9.9 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$. **9.10** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^8}{x^3-1}$. **9.11** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+3}{2x+4}$. **9.12** $\lim\limits_{x\to-1}\left(3^{\frac{1}{x+1}}+1\right)$.

Смешанные примеры на вычисление пределов для самостоятельной работы

Найти пределы:

9.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$. **9.14** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$. **9.15** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+3x+18}{x^2+5x-12}$.

9.16 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-4x^3+x^2-2x+8}{x^2+2x+3}$. **9.17** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

9.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. **9.19** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$. **9.20** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x-1}}$.

9.21 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **9.22** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n-5}{1-n^2}$. **9.23** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

9.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3+9}}$. **9.25** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. **9.26** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6\cdot 2^x+5}{2\cdot 2^x-3}$.

9.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^6+2x^4-x^3-9}{2x^7-8x^5+x^2+7}$. **9.28** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

9.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$. **9.30** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right)$.

9.31 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg} x}\right)$. **9.32** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$. **9.33** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$.

9.34 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$. **9.35** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$. **9.36** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

9.37 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$. **9.38** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^x$. **9.39** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{\frac{1}{2+x}}$.

9.40 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{2+x}$. **9.41** $\lim\limits_{x\to -3}\left(2x-\dfrac{|x+3|}{x+3}\right)$. **9.42** $\lim\limits_{x\to -1} e^{-\frac{1}{x^2-1}}$.

10 ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными (равносильными) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$

Эквивалентность обозначается символом $\sim$, т. е. пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то справедливы основные эквивалентности:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), \tag{10.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \tag{10.2}$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), \tag{10.3}$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x), \tag{10.4}$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x), \tag{10.5}$$

$$\ln\left(1 + \alpha(x)\right) \sim \alpha(x), \tag{10.6}$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a, \tag{10.7}$$

$$\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}. \tag{10.8}$$

При вычислении пределов используются следующие теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях:

Т1. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения функций, им эквивалентных.

Т2. Сумма нескольких бесконечно малых функций различных порядков малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

Пример 10.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\ln(1+4x)\sim 4x\\ \text{ñî ãëàñí î}\ \ (10.6)\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2.$$

Пример 10.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-7x+10}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-7x+10}=\left|\sin(x-2)\sim x-2\right|=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-5)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-5}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 10.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=\left|\sin^2 3x\sim (3x)^2\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 9x^2}{x^2}=18.$$

Пример 10.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin 4x\sim 4x,\ \sin 2x\sim 2x,\\ \operatorname{arctg}^2 2x\sim (2x)^2\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 4x\cdot 2x}{4x^2}=-4.$$

Пример 10.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos 4x-1)}{x^2}=$$

$$=\left|\ln(1+(\cos 4x-1))\sim \cos 4x-1\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 2x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\sin^2 2x\sim (2x)^2\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 4x^2}{x^2}=-8.$$

Пример 10.6. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+3x-4x^2+x^3\right)}$.

Решение. Так как при $x\to 1$ $x-3x^2+2x^3\to 0$ и $3x-4x^2+x^3\to 0$, то по формуле (10.6)

$$\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)\sim x-3x^2+2x^3,\ \ln\left(1+3x-4x^2+x^3\right)\sim 3x-4x^2+x^3.$$

Получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+x-3x^2+2x^3\right)}{\ln\left(1+3x-4x^2+x^3\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3x^2+2x^3}{3x-4x^2+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\left(2x^2-3x+1\right)}{x\left(x^2-4x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x-3)}=2\lim_{x\to 1}\frac{x-\frac{1}{2}}{x-3}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 10.7. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель – б. м. ф. Однако $x\to\pi$ не является бесконечно малой функцией и ошибкой было бы соотношение $\sin 2x\sim 2x$. Сделаем замену переменной $x=\pi-\alpha$, тогда при $x\to\pi$ и $\alpha\to 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2(\pi-\alpha)}{\sin 3(\pi-\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2\pi-2\alpha)}{\sin(3\pi-3\alpha)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\left|\begin{matrix}\sin 2\alpha \sim 2\alpha,\\ \sin 3\alpha \sim 3\alpha\end{matrix}\right|=-\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{3\alpha}=-\frac{2}{3}.$$

Пример 10.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 4x-\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)}{2\sin x\cos 3x}=$$

$$=\left|\begin{matrix}e^{2x}-1\sim 2x,\\ \sin x\sim x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{2x}\cdot\frac{e^{3x}}{\cos 3x}\right)=1\cdot 1=1.$$

Пример 10.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)=\left(\infty\cdot 0\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|a^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{\ln a}{x}\ \left(\text{по формуле }(10.7)\right)\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln a}{x}}{\frac{1}{x}}=\ln a.$$

Пример 10.10. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(3x^2-10x+4\right)}{2x^2-7x+3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left(3x^2-10x+4\right)}{2x^2-7x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\ln\left(1+3x^2-10x+3\right)\sim 3x^2-10x+3\right|=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{2x^2-7x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 3}\frac{x-\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{8}{5}=1{,}6.$$

Пример 10.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x+x^2+x^3}{\operatorname{tg}2x+2\sin^2 x+3x^5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x+x^2+x^3}{\operatorname{tg}2x+2\sin^2 x+3x^5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{ñî ãëàñí î Ò2}\\ 4\sin x+x^2+x^3\sim 4\sin x,\\ \operatorname{tg}2x+2\sin^2 x+3x^5\sim \operatorname{tg}2x\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{\operatorname{tg}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\sin x\sim x,\ \operatorname{tg}2x\sim 2x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2.$$

Пример 10.12. Найти $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение.

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|\ln\frac{x}{e}=\ln\left(1+\frac{x}{e}-1\right)\sim\frac{x}{e}-1\right|=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x-e}{e}}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Пример 10.13. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin\dfrac{\pi-x}{4}\cos\left(\dfrac{\pi+x}{4}\right)}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cdot\dfrac{\pi-x}{4}\cdot 0}{\pi-x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Пример 10.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\mathrm{arctg}x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\mathrm{arctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2-\dfrac{\arcsin x}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}\right)}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Найти пределы:

10.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$. **10.2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{x^2}$. **10.3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^3}{1-\cos 2x}$.

10.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{x^2-7x+6}$. **10.5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x+6}{\ln\left(x^2-11x+19\right)}$. **10.6** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{2x}$.

10.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$. **10.8** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$. **10.9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{arctg}2x)^3}{\sin^3 x}$.

10.10 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$. **10.11** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-3x+2}$. **10.12** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^6}}{\ln(1+3x)}$.

10.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1+2x}}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$. **10.14** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x^7}}{\ln(1-4x)}$. **10.15** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-2x^5}{5x+3x^3+x^4}$.

10.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 4x}{\arcsin 2x}$. **10.17** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\mathrm{tg}^2 8x}$. **10.18** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$.

10.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin\sqrt{x}}{\mathrm{arctg}^{3/2}2x}$. **10.20** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$. **10.21** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

10.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin x+\mathrm{arctg}x^2}$. **10.23** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2-5x+4}$. **10.24** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Найти пределы функций.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-6x+3}{x-1}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2+x-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{2x^2-x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2-2x+4}{x^3+5x+6}$. **2** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x+5}}{(x+3)(x-1)}$. **3** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$.

4 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{3x^2+2x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$. **2** $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt[3]{5x+25}}{x^2-2x+3}$. **3** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

4 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{2x^2+3x-9}$. **5** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{7x+5}{2x^2+3x-2}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{3x^3+x+2}$. **3** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.

4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^2-7x+10}$. **5** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$.

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{10x-1}{4x^2+11x-3}$. **2** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x^3+2x-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2-x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$.

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4}$. **2** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-12}{x+5}$. **3** $\lim\limits_{x\to 2}.\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

4 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2-13x+15}{x^2-4x-21}$. **5** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$.

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2+3}{x^2-9}$. **2** $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{10x+5}{4x^2-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x+1}{x-5}$. **2** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-16x+5}{2x+7}$. **3** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$. **5** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{1-x^2}$. **2** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{4x^2+3x-1}{12x-3}$. **3** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$. **5** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{36-x^2}{\sqrt{x+3}-3}$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x+4}}{25-x^2}$. **2** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x^2-60}}{2x+1}$. **3** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x-6}$. **5** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{14+x}-4}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Найти пределы функций.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^3}{x^3-7x-10}$. **2** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x+5}{0{,}01x^2-6x+3{,}02}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$.

4 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{20}{4-x^2}-\dfrac{5}{x+2}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x+4}{3x^3+x^2+1}$. **2** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+x-15}{10x^4-3x^2+x}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7+5x^2-21x+14}{x^6-4x^4+3x^2-20}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$. **2** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7-4x^5+x-2}{3x^4+2x^3-12}$.

4 $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{12}{x^2-36}-\dfrac{1}{x-6}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2+\sqrt{x^4+2x^2+3}}$.

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$. **2** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x^2+10x}{5x^4+3x^2-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5-10x^3+x-11}{x^3+2x^2-3}$.

4 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-7}-\sqrt{x^2-4x}\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-7}{3-4\sqrt{x^2+2}}$.

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+5}{2x^4+3x-8}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^3-x}{6x^2-4x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{4x^6+3}-x}$.

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-3x}{5x^3-x+2}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^3-7x^2+2}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}.\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+4}-x}{3x-\sqrt{x-6}}$.

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+2x^4-x^3-3}{x^7-4x^5+x^2+4}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+1}{x^3-3x^2+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}-5x^2}{2x-\sqrt{x^2-1}}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-5}{2x^2+x-11}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-7x+4}{3x^4-5x+7}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x-9}-x\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^6+2}-x}$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+16x-4}{3x^2-3x+5}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-x-7}{x^5+4x^3-10}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-6x^2+5}{x^3-3x^2+x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x+3}\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{9x^8+1}}$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{3x^2+5x-1}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x+2}{x^4+10x^3-2x-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x^2+2}{3x^2-7x-5}$.

4 $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-25}\right)$. **5** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[5]{x^5+1}}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Найти пределы функций, применяя первый замечательный предел.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\mathrm{ctg}x$. **2** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$. **3** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin x}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$.

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sin3x}$. **2** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\mathrm{tg}x-\sin x}$. **3** $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to0}\sin8x\cdot\mathrm{ctg}x$. **2** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$. **3** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}4x}{\sin5x}$.

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}4x}{\sin5x}$. **2** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{\sin^2 3x}$. **3** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{\mathrm{tg}3x}$.

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\text{ctg}3x$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\text{tg}x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3(x-1)}{x^2+2x-3}$.

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$. **2** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{27-x^3}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}.\dfrac{x^2\cdot\text{ctg}5x}{\sin 3x}$.

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{2x^2-3x-5}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sin 2x}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\text{tg}2x}{1-\cos 3x}$. **3** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x\cdot\text{ctg}5x$. **2** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\text{tg}(2(x-4))}{x^2-x-12}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin 3x\cdot\text{tg}2x}$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$. **3** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-5}{\sin 8(x+1)}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Найти пределы функций, применяя второй замечательный предел.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+9x)^{\frac{8}{5}x}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{2x-1}\right)^{x^2}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+7x}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{7x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8}{3x+2}\right)^{x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{2x-3}\right)^{2x}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[2x]{1-\frac{x}{3}}$. **6** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{9x}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1-x}\right)^{1+3x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+2}\right)^{x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+2}{3x-1}\right)^{7x}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\frac{x}{2}]{1+\frac{3x}{7}}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-9}\right)^{2x+1}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+2}{7x-1}\right)^{7x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{3x+2}\right)^{x+2}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[9x]{1+\frac{x+2}{3}}$. **6** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\frac{4}{x}$.

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4x}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7+x}{-x}\right)^{2+x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{x+5}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x+2}{14x-3}\right)^{3x}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\frac{7x}{2}]{1+\frac{10x}{3}}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{3x^3}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{4x+1}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{2x-1}\right)^{3x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\frac{3x}{7}]{1-\frac{4x}{5}}$. **6** $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln\left(x^2-x-5\right)}{x+2}$.

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{3x^2}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{9x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-3}{5x+1}\right)^{10x}$. **5** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\frac{x}{3}]{1-13x}$. **6** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\left(x^2-3x+3\right)}{x-1}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{14x}{5}\right)^{\frac{1}{4x}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-10}\right)^{2x+1}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{2x+3}\right)^{x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\frac{4x}{3}]{1-\frac{7x}{2}}$. **6** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\operatorname{cosec} x}$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{12x}{5}\right)^{\frac{1}{3x}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x}\right)^{4x}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+7}{5x-3}\right)^{x+2}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)^{\frac{2x+1}{2}}$. **5** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[9x]{1-\frac{4x}{11}}$. **6** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{5x}{9}\right)^{\frac{3}{7x}}$. **2** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+12}{x}\right)^{\frac{3x-1}{2}}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+2}{6x-4}\right)^{2x+3}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^{5x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\frac{x}{7}]{1+\frac{4x}{7}}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{3x}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Найти пределы функций с помощью формул эквивалентности.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\arcsin 4x)^3}{1-\cos 2x}$.

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 6x}{e^{3x}-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$.

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x-x^3}{\sin x+2x^2-3x^4}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{32x^5+3x^9}}{e^{4x}-1}$.

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$. **3** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$.

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 3x\cdot \arcsin 4x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)^2}{1-\cos x}$.

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin\left(2\pi(x+10)\right)}$.

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$.

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin\left(\pi\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\right)}$. **2** $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4\operatorname{arctg} 3x}$.

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin^2 \pi x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$.

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$. **3** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6

Найти односторонние пределы в пунктах 1) и 2). Исследовать на непрерывность функцию в пункте 3).

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to1} e^{\frac{1}{3x-3}}$. **2** $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$. **3** $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при } x\le 3,\\ x+7, & \text{при } x>3. \end{cases}$

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to3} e^{\frac{2}{x-3}}$. **2** $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1}{(x+2)^2}$. **3** $f(x)=\begin{cases} -x+1, & \text{при } x\le 2,\\ 2x+1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to1} 2^{\frac{1}{x-1}}$. **2** $\lim\limits_{x\to2} \frac{x}{x^2-4}$. **3** $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при } x<3,\\ x+6, & \text{при } x\ge 3. \end{cases}$

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}x}{x}$. **2** $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. **3** $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & \text{при } x<0,\\ -2, & \text{при } x\ge 0. \end{cases}$

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x-x^3}$. **2** $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}\sin x$. **3** $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{при } x\le \frac{\pi}{4},\\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \text{при } x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to2} 3^{\frac{x}{4-x^2}}$. **2** $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x+2}{\operatorname{arctg}(x+2)}$. **3** $f(x)=\begin{cases} x, & \text{при } x\le 2,\\ x+1, & \text{при } x>2. \end{cases}$

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to -1} 5^{\frac{1}{x+1}}$. **2** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-1}{x+3}$. **3** $f(x)=\begin{cases} -2x+3, \text{ при } x<1, \\ 3x+2, \quad \text{при } x\geq 1. \end{cases}$

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to 2} 2^{\frac{3}{2x-4}}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$. **3** $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, \quad \text{при } x\leq 1, \\ 4-2x, \text{ при } x>1. \end{cases}$

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^4}{1-x^5}$. **2** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$. **3** $f(x)=\begin{cases} 4-2x, \text{ при } x<2{,}5, \\ 2x-7, \text{ при } x\geq 2{,}5. \end{cases}$

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x-2}{x+2}$. **2** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x^3+1}$. **3** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ при } x<0, \\ \sin x, \text{ при } x\geq 0. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Каждый вариант контрольной работы состоит из тринадцати заданий, в которых необходимо:

1) в заданиях $1-9$ найти указанные пределы;

2) в задании 10 доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка;

3) в задании 11 найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции;

4) в задании 12 исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках;

5) в задании 13 исследовать данные функции на непрерывность, построить их графики.

Вариант 1

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. **2** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.

4 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$. **5** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$. **6** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

7 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$. **8** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

10 $f(x)=\operatorname{tg}2x,\ \varphi(x)=\arcsin x$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^3-5x^2}$.

12 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\ x_1=3,\ x_2=4$. **13** $f(x)=\begin{cases} x+4, \ x<-1, \\ x^2+2, -1\le x<1, \\ 2x, \ x\ge 1. \end{cases}$

Вариант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$. **3** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$.

4 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$. **5** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$. **6** $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$. **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

10 $f(x)=1-\cos x,\ \varphi(x)=3x^2$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

12 $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1;\ x_1=3,\ x_2=4$. **13** $f(x)=\begin{cases} x+1,\ x\le 0,\\ (x+1)^2,\ 0<x\le 2,\\ -x+4,\ x>2.\end{cases}$

Вариант 3

1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$. **6** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$. **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

10 $f(x)=\operatorname{arctg}^2 3x,\ \varphi(x)=4x^2$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$.

12 $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=3$. **13** $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x\le -1,\\ x^2+1,\ -1<x\le 1,\\ -x+3,\ x>1.\end{cases}$

Вариант 4

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$. **2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$. **5** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$. **6** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$. **8** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2\sin x}$.

10 $f(x)=\sin 3x-\sin x,\ \varphi(x)=5x$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$.

12 $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3};\ x_1=-2,\ x_2=-3.$ **13** $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0,\\ -(x-1)^2,\ 0<x<2,\\ x-3,\ x\ge 2.\end{cases}$

Вариант 5

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}.$ **2** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}.$ **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}.$ **5** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}.$ **6** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}.$

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}.$ **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}.$ **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}.$

10 $f(x)=\cos 3x-\cos x,\ \varphi(x)=7x^2.$ **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{2x^2-3x}.$

12 $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+2;\ x_1=2,\ x_2=3.$ **13** $f(x)=\begin{cases}-2(x+1),\ x\le -1,\\ (x+1)^3,\ -1<x<0,\\ x,\ x\ge 0.\end{cases}$

Вариант 6

1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}.$ **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}.$ **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}.$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}.$ **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}.$ **6** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}.$

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}.$ **8** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}.$ **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$

10 $f(x)=x^2-\cos 2x,\ \varphi(x)=6x^2.$ **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}.$

12 $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=0,\ x_2=2.$ **13** $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 2,\\ x+1,\ x>2.\end{cases}$

Вариант 7

1 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$. **2** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$.

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$. **6** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$. **8** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$. **9** $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

10 $f(x)=\sqrt{1+x}-1,\ \varphi(x)=2x.$ **11** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}2x}$.

12 $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5.$ **13** $f(x)=\begin{cases}x^2+1,\ x\le1,\\ 2x,\ 1<x\le3,\\ x+2,\ x>3.\end{cases}$

Вариант 8

1 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$. **2** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$. **5** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$. **6** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-1}$. **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$. **9** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

10 $f(x)=\sin x+\sin 5x,\ \varphi(x)=2x.$ **11** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

12 $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2;\ x_1=3,\ x_2=4.$ **13** $f(x)=\begin{cases}x-3,\ x<0,\\ x+1,\ 0\le x\le4,\\ 3+x,\ x>4.\end{cases}$

Вариант 9

1 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$. **2** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$.

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$. **6** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$. **8** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$. **9** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

10 $f(x)=\dfrac{3x}{1-x},\ \varphi(x)=\dfrac{x}{4+x}$. **11** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}3x}$.

12 $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3;\ x_1=3,\ x_2=4.$ **13** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x},\ x\le0,\\ 0,\ 0<x\le2,\\ x-2,\ x>2.\end{cases}$

Вариант 10

1 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$. **2** $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$. **5** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$. **6** $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$. **8** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$. **9** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x}$.

10 $f(x)=\dfrac{3x^2}{2+x},\ \varphi(x)=7x^2$. **11** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

12 $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5.$ **13** $f(x)=\begin{cases}2x^2,\ x\le0,\\ x,\ 0<x\le1,\\ 2+x,\ x>1.\end{cases}$

Вариант 11

1 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$. **2** $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$.

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$. **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$. **6** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$. **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$. **9** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

10 $f(x)=2x^3,\ \varphi(x)=\dfrac{5x^3}{4-x}$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$.

12 $f(x)=(x-3)(x+4);\ x_1=-5,\ x_2=-4$. **13** $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<0,\\ x,\ 0\le x\le 2,\\ 0,\ x>2.\end{cases}$

Вариант 12

1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$. **5** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$. **8** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

10 $f(x)=\dfrac{x^2}{5+x},\ \varphi(x)=\dfrac{4x^2}{x-1}$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

12 $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2};\ x_1=3,\ x_2=2$. **13** $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2,\ x\ge\pi.\end{cases}$

Вариант 13

1 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$. **2** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$. **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.

4 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$. **5** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$. **6** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$. **8** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$. **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

10 $f(x)=\sin 8x,\ \varphi(x)=\arcsin 5x$. **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$.

12 $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}};\ x_1=3,\ x_2=4.$ **13** $f(x)=\begin{cases} x-1,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x<2,\\ 2x,\ x\ge 2.\end{cases}$

Вариант 14

1 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}.$ **2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}.$ **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}.$ **5** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}.$ **6** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}.$

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}.$ **8** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}.$ **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}.$

10 $f(x)=\sin 3x+\sin x,\ \varphi(x)=10x.$ **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$

12 $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2.$ **13** $f(x)=\begin{cases} x+1,\ x<0,\\ x^2-1,\ 0\le x<1,\\ -x,\ x\ge 1.\end{cases}$

Вариант 15

1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}.$ **2** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}.$ **3** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}.$

4 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}.$ **5** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}.$ **6** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}.$

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}.$ **8** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}.$ **9** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}.$

10 $f(x)=\cos 7x-\cos x,\ \varphi(x)=2x^2.$ **11** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}.$

12 $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1;\ x_1=0,\ x_2=1.$ **13** $f(x)=\begin{cases} -x,\ x<0,\\ x^2+1,\ 0\le x<2,\\ x+1,\ x\ge 2.\end{cases}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК 517(075.8)
ББК 22.161
Щ66

Р е ц е н з е н т : канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
А. Д. Суворова (УО «БелГУТ»).

Щербо, А. М.

Щ66 Пределы : учеб.-метод. пособие / А. М. Щербо, И. П. Шабалина, Л. В. Головач ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : УО БелГУТ, 2007. – 71 с.
ISBN 978-985-468-330-0

Рассмотрены основные методы вычисления пределов. Излагаемый теоретический материал сопровождается большим количеством примеров с подробными пояснениями, что существенно облегчает усвоение основных положений теории. Приводятся задачи для аудиторных, домашних работ по вычислению пределов. Для проверки полученных знаний даны самостоятельные и контрольная работы.

Предназначено для студентов всех специальностей и составлено в соответствии с действующей программой по высшей математике.

УДК 517. 33(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-468-330-0

Учебное издание

ЩЕРБО Аркадий Митрофанович
ШАБАЛИНА Ирина Петровна
ГОЛОВАЧ Лариса Владимировна

Пределы
Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Э в е н т о в
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать 10.08.2007 г. Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,05. Тираж 1000 экз.
Зак. № . Изд. № 4457.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2004 г.
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.