

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Линейные цепи постоянного
и синусоидального тока

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы
студентов электротехнических специальностей

Гомель 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.

Линейные цепи постоянного
и синусоидального тока

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы
студентов электротехнических специальностей

Одобрено методической комиссией электротехнического факультета

Гомель 2009

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2
В67

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электротехника»
В. Г. Черномашенцев (УО «БелГУТ»).

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники. Линейные цепи постоянного и синусоидального тока: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов электротехнических специальностей.
Н. П. Волков ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2009. – 76 с.
ISBN 978 – 985 – 468 – 568 – 7

Даны задания с методическими указаниями для самостоятельной работы студентов при выполнении расчетно-графических и контрольных работ по расчету электрических цепей постоянного и синусоидального тока по курсу «Теоретические основы электротехники». Предназначено для студентов электротехнических специальностей очной и заочной форм обучения.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2

ISBN 978–985–468–568–7

© Н. П. Волков, 2009
© Оформление. УО «БелГУТ», 2009

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Расчетно-графические и контрольные работы являются составной и наиболее важной частью обязательных работ, выполняемых студентами при изучении курса «Теоретические основы электротехники». Они охватывают весь материал курса и соответствуют программе по ТОЭ.

В соответствии с действующими учебными планами студенты электротехнических и электромеханических специальностей изучают 3 части курса ТОЭ и должны выполнить: студенты дневной формы обучения – 6 расчетно-графических (по две в семестре) работ, а студенты заочной формы – 4 контрольные работы. Каждая расчетно-графическая или контрольная работа имеет определенный набор задач, их количество и объем каждой задачи задаются лектором.

Целью выполнения заданий, выносимых для самостоятельной работы, является закрепление студентами теоретических знаний, полученных при изучении курса ТОЭ, освоение методов анализа электрических цепей с использованием современной вычислительной техники, приобретение практических навыков краткого изложения производимых расчетов, анализа полученных результатов

Расчетно-графическая работа выполняется на одной стороне стандартных (формата А4) листов белой писчей бумаги. Студенты заочной формы обучения могут выполнять контрольные работы в тетрадях.

На первой странице (следующей после титульного листа) приводятся: формулировка задачи, схема электрической цепи и параметры ее элементов. Далее приводятся расчетные схемы со всеми необходимыми цифровыми и буквенными обозначениями. На схеме указываются стрелками направления токов и напряжений. Кратко даются пояснения по всем этапам расчета, при этом сначала записываются уравнения и расчетные формулы в общем виде, а затем производится подстановка числовых значений. Рисунки, графики, вспомогательные схемы, векторные диаграммы должны располагаться по

тексту после соответствующих ссылок. Каждый рисунок должен быть подписан.

Вычисления производятся с точностью, при которой относительная погрешность расчета не превышает 1 %.

Для всех используемых в расчетах величин указывается их размерность.

В тексте допускаются только общепринятые сокращения слов.

При построении графиков, векторных диаграмм необходимо обозначать координатные оси, единицы измерения откладываемых по осям величин и градуировку осей в кратных числах.

Исходные данные и расчетные схемы при выполнении каждой задачи студент выбирает в соответствии с трехзначным шифром, который ему сообщает преподаватель.

1 РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Задача 1.1

1 Найти токи ветвей цепи, схема которой представлена на рисунке 1.1,

а) методом контурных токов,

б) методом узловых потенциалов.

2 Составить баланс электрических мощностей (по результатам расчета цепи одним из методов).

3 Построить потенциальную диаграмму для контура, который включает оба источника ЭДС.

4 Методом эквивалентного генератора (напряжения или тока) найти ток в ветви с ЭДС E_2 .

5 Составить сводную таблицу результатов расчета токов ветвей, полученных разными методами.

Параметры источников даны в таблице 1.1, а параметры резисторов – в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Параметр источников	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$E_1, В$	10	24	12	16	15	18	20	23	22	11
$E_2, В$	17	13	24	21	18	12	14	15	13	23
$r_1, Ом$	2	3	1	2	3	2	3	1	3	2
$J, А$	5	3	6	2	4	5	6	4	3	5

Примечание — Внутреннее сопротивление источника ЭДС E_2 равно нулю.

Таблица 1.2

Параметр резисторов, Ом	В а р и а н т ы										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
R_1	6	5	7	8	6	7	9	6	9	8	
R_3	5	6	8	7	9	8	5	4	6	4	
R_4	3	6	4	9	8	7	5	9	4	5	
R_5	4	3	8	9	5	6	7	5	8	9	
R_6	8	6	5	9	4	3	5	7	9	5	
R_7	7	5	9	8	6	7	3	4	6	8	
R_8	4	6	7	9	6	4	3	5	8	7	

Примечание – При выполнении п. 1 задачи можно предварительно произвести эквивалентные преобразования схемы, приводящие к ее упрощению (уменьшению числа узлов и контуров).

Исходные расчетные данные выбираются: по первой цифре шифра – из таблицы 1.1, по второй – из таблицы 1.2, по третьей – номер схемы.

Л и т е р а т у р а [1. С. 24 – 35, 56 – 59; 3. С. 17 – 53].

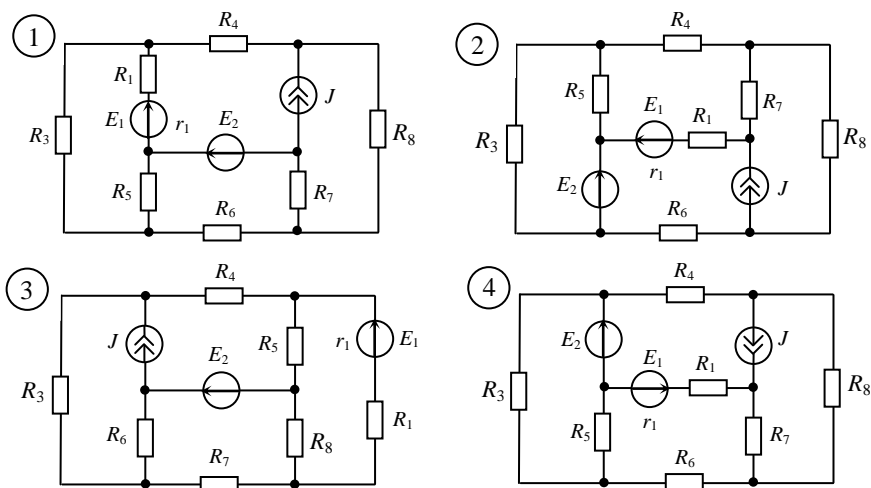


Рисунок 1.1 (начало)

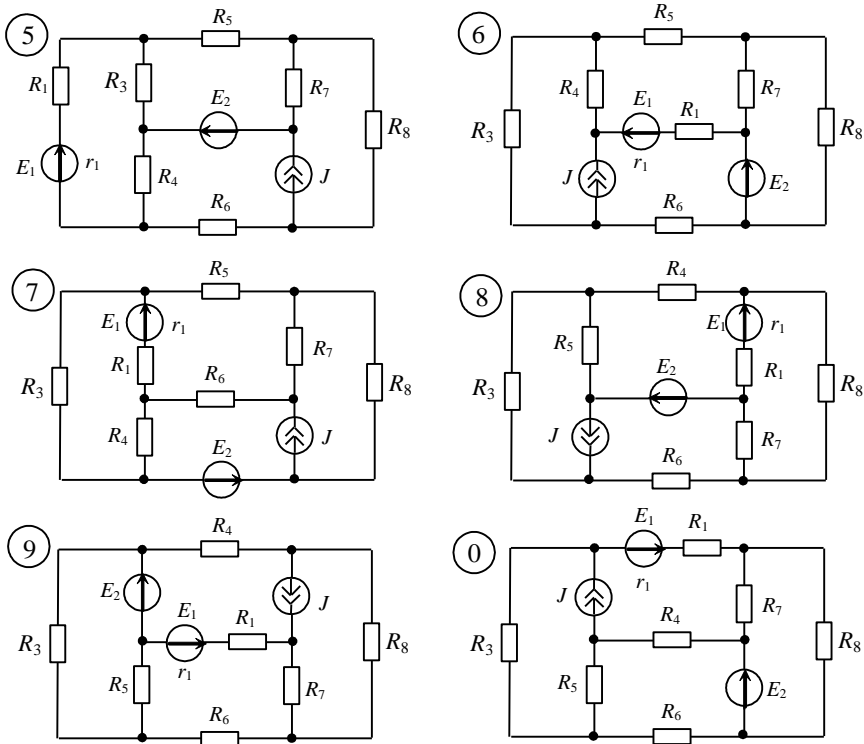


Рисунок 1.1 (окончание)

2 РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Задача 2.1

К электрической цепи (схема на рисунке 2.1) приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Частота источника $-f$.

- 1 Найти комплексные действующие значения токов всех ветвей цепи.
- 2 Составить баланс электрических мощностей.
- 3 Построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов ветвей схемы.
- 4 Полагая, что между индуктивными катушками заданной схемы имеется магнитная связь при взаимной индуктивности, равной M , составить в общем виде систему уравнений по законам Кирхгофа для расчета токов во всех

ветвях, записав ее в символической форме. Ориентируясь на выбранные направления токов в ветвях, одноименные зажимы индуктивных катушек выбрать так, чтобы их включение было встречное, и указать их на схеме соответствующими значками.

Параметры источника приведены в таблице 2.1, а параметры элементов схемы – в таблице 2.2.

Таблица 2.1

Параметр источника	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$U_m, В$	400	250	300	420	280	340	270	290	320	380
$\psi_n, \text{град}$	-30	45	15	-25	60	-75	30	-60	20	-15
$f, \text{Гц}$	200	150	100	50	400	200	150	300	350	250

Таблица 2.2

Параметр элементов	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$r_1, \text{Ом}$	28	22	30	18	26	36	27	32	40	20
$r_2, \text{Ом}$	20	15	18	26	22	30	40	34	25	18
$r_3, \text{Ом}$	27	19	28	30	18	22	34	40	28	23
$r_4, \text{Ом}$	25	18	34	26	31	40	18	21	32	27
$r_5, \text{Ом}$	17	25	30	26	18	16	32	19	20	24
$L_1, \text{мГн}$	12	10	18	24	15	17	21	20	24	18
$L_2, \text{мГн}$	21	18	12	17	21	25	30	16	23	15
$L_3, \text{мГн}$	16	20	18	19	21	24	20	28	18	21
$L_4, \text{мГн}$	27	21	16	18	22	19	24	21	16	23
$L_5, \text{мГн}$	20	18	24	21	19	23	22	16	18	25
$C_1, \text{мкФ}$	30	40	25	45	30	20	45	50	40	35
$C_2, \text{мкФ}$	20	35	45	50	30	40	25	30	25	40
$C_3, \text{мкФ}$	40	36	28	42	36	26	32	27	40	25
$C_4, \text{мкФ}$	32	24	29	33	35	40	28	22	34	32
$C_5, \text{мкФ}$	27	23	31	40	38	34	26	24	22	31

Исходные расчетные данные выбираются: по первой цифре шифра – из таблицы 2.1, по второй – из таблицы 2.2, по третьей – номер схемы.

Л и т е р а т у р а [1. С. 63 – 85, 114 – 122; 3. С. 55 – 95].

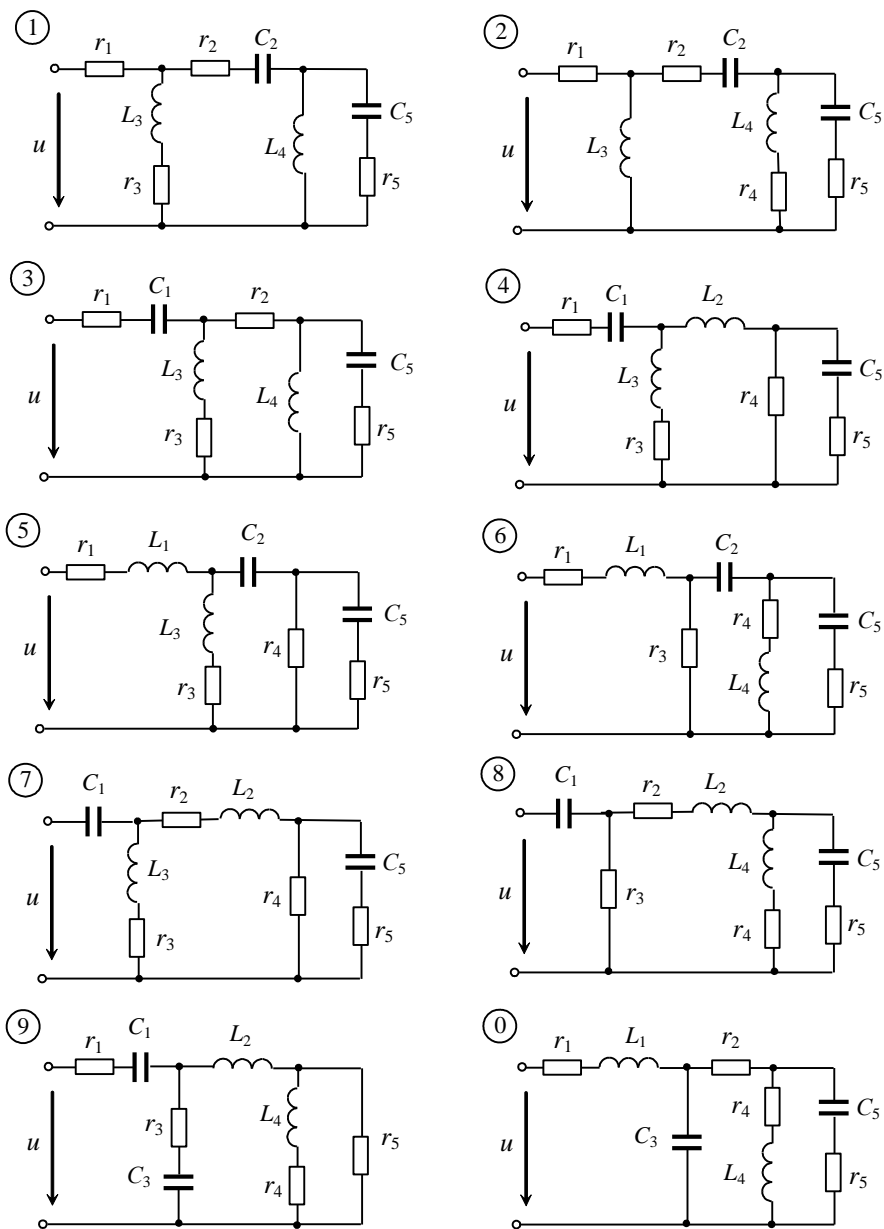


Рисунок 2.1

Задача 2.2

В линейной электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 2.2, имеющей в своем составе резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы, действуют синусоидальные источники ЭДС $e_k = E_{km} \sin(\omega t + \psi_{ke})$ и тока $j_k = J_{km} \sin(\omega t + \psi_{ki})$, где k – порядковый номер обобщенной ветви ($k = 1, 2, \dots, 8$). Параметры пассивных элементов ветвей (r_k, L_k и C_k) приведены в таблице 2.3, а параметры источников ЭДС e_k и тока j_k – в таблице 2.4.

Для заданной схемы:

- 1 Начертить направленный граф (для обобщенных ветвей), указать на нем ветви дерева и связи.
- 2 Записать топологические матрицы: узловую $[A]$, главных контуров $[B]$ и главных сечений $[Q]$.
- 3 Рассчитать комплексные токи ветвей схемы.
- 4 Составить баланс электрических мощностей.
- 5 Построить топографическую диаграмму напряжений для контура, содержащего два или три источника ЭДС, и векторную диаграмму токов ветвей, входящих в выбранный контур.

Таблица 2.3 (начало)

Параметр элементов	В а р и а н т									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
L_1 , мГн	160	170	125	120	240	80	115	160	165	95
L_2 , мГн	180	190	110	90	260	95	130	100	180	85
L_3 , мГн	200	200	115	80	280	110	140	170	195	120
L_4 , мГн	215	160	100	95	310	85	160	175	210	115
L_5 , мГн	210	185	120	115	215	75	145	190	160	125
L_6 , мГн	240	220	130	100	210	100	175	165	185	130
L_7 , мГн	200	180	220	175	240	220	210	180	190	150
L_8 , мГн	170	200	210	160	175	220	180	200	210	190
C_1 , мкФ	75	50	30	55	90	45	60	30	40	65
C_2 , мкФ	65	45	55	35	85	35	45	55	65	30
C_3 , мкФ	55	65	45	40	90	30	65	45	60	45
C_4 , мкФ	60	60	40	60	90	60	50	35	50	50
C_5 , мкФ	80	65	60	30	85	40	65	20	45	60
C_6 , мкФ	70	70	50	75	65	50	45	40	50	40
C_7 , мкФ	60	75	65	50	55	45	65	60	40	30
C_8 , мкФ	50	55	50	45	70	55	80	70	30	65
r_1 , Ом	30	40	50	45	70	35	45	60	30	55
r_2 , Ом	60	50	75	65	80	45	65	70	80	30

Таблица 2.3 (окончание)

r_3 , Ом	50	60	40	70	60	70	75	65	75	30
r_4 , Ом	45	45	70	80	45	65	80	90	60	65
r_5 , Ом	65	55	60	40	55	55	50	30	40	45
r_6 , Ом	45	30	55	60	40	40	30	45	50	70
r_7 , Ом	30	45	50	45	50	80	40	50	60	50
r_8 , Ом	50	65	60	30	60	40	55	75	40	35

Таблица 2.4

Параметр источников	В а р и а н т ы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_{1m}, B	130	140	120	110	150	200	240	220	230	160
E_{2m}, B	160	130	180	130	145	100	180	170	200	190
E_{3m}, B	175	180	150	170	185	150	200	150	210	150
E_{4m}, B	180	200	140	210	160	140	160	190	175	140
E_{5m}, B	110	215	200	185	200	160	190	200	180	175
E_{6m}, B	100	220	165	120	210	220	200	210	205	100
E_{7m}, B	120	200	140	185	220	160	150	100	145	160
E_{8m}, B	210	150	200	160	170	185	140	190	175	150
Ψ_{1e} , град	-15	-60	30	30	60	-20	15	45	20	-30
Ψ_{2e} , град	60	40	-45	50	-35	40	-20	25	15	70
Ψ_{3e} , град	45	-25	-35	30	40	15	25	-45	35	40
Ψ_{4e} , град	20	30	30	35	60	-60	-35	40	-25	35
Ψ_{5e} , град	25	45	-60	-45	45	30	40	20	15	40
Ψ_{6e} , град	30	60	40	-50	20	-30	60	-15	-20	-60
Ψ_{7e} , град	15	-30	25	20	-30	45	-60	10	-15	40
Ψ_{8e} , град	25	45	30	-15	-20	30	45	15	-30	30
J_{1m}, A	2	3	4	6	5	2	4	3	3	5
J_{2m}, A	4	5	6	5	2	4	6	5	6	4
J_{3m}, A	3	6	5	4	4	6	2	4	4	3
J_{4m}, A	5	4	2	3	3	2	3	6	2	4
J_{5m}, A	4	2	3	4	4	3	5	3	5	2
J_{6m}, A	3	5	4	6	6	5	4	4	3	3
J_{7m}, A	2	2	5	5	3	6	2	3	4	6
J_{8m}, A	5	3	3	4	2	4	5	4	5	4
Ψ_{1i} , град	20	25	-15	30	30	-20	40	15	-50	45
Ψ_{2i} , град	-60	-45	60	45	35	25	60	-35	40	50
Ψ_{3i} , град	40	-40	45	-35	-45	-40	15	20	-30	-40
Ψ_{4i} , град	25	20	25	-30	25	50	-20	-15	45	-30

Таблица 2.4 (окончание)

Ψ_{5i} , град	-30	-15	30	15	50	-60	20	20	60	25
Ψ_{6i} , град	45	30	-20	60	-40	30	25	40	30	15
Ψ_{7i} , град	40	25	-30	45	60	45	30	-30	20	25
Ψ_{8i} , град	50	10	15	-20	-50	15	-30	20	-15	30
f , Гц	100	150	200	100	50	150	200	100	50	200

Исходные расчетные данные выбираются: по первой цифре шифра – из таблицы 2.3, по второй – из таблицы 2.4, по третьей – номер схемы.

Л и т е р а т у р а [1. С. 23 – 38, 92 – 100; 2. С. 136 – 153].

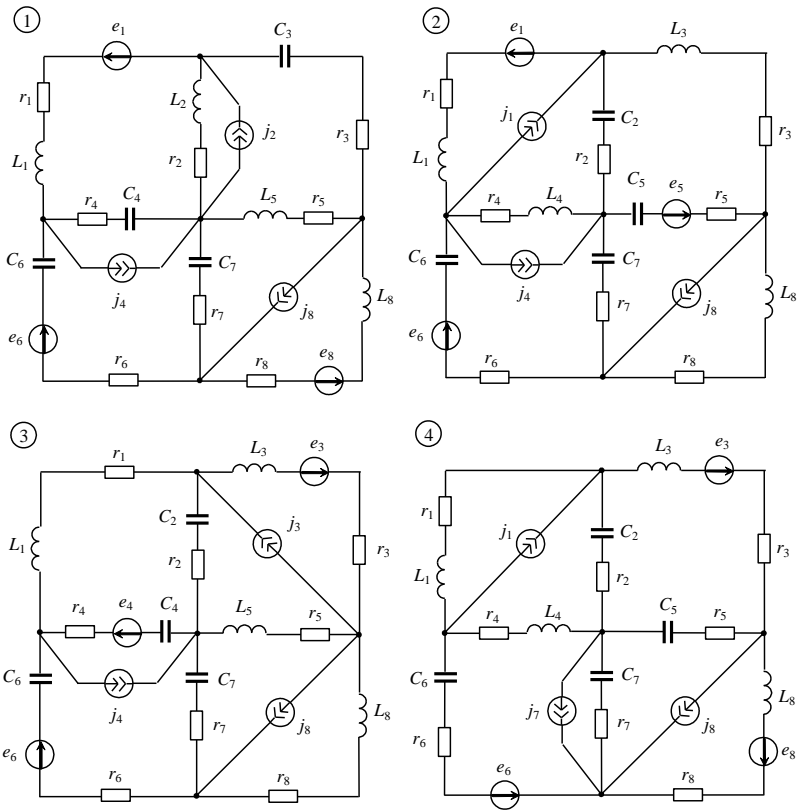
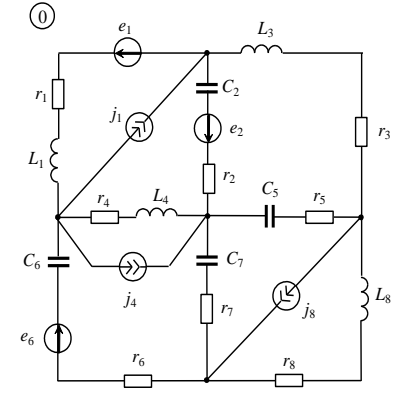
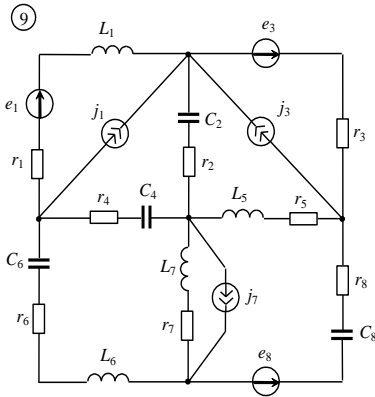
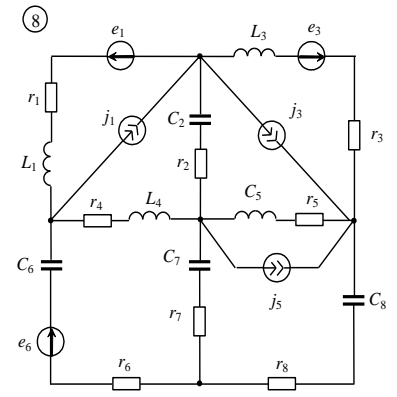
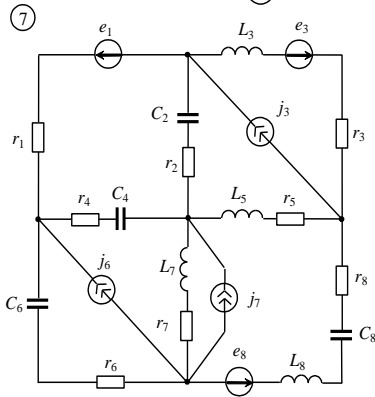
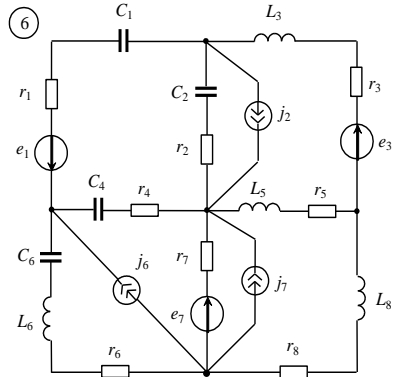
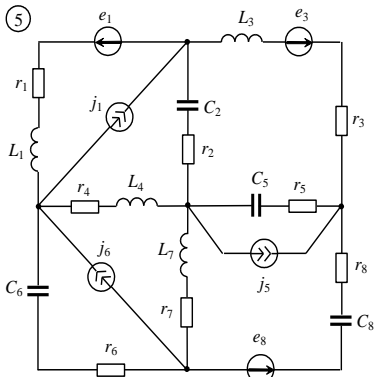


Рисунок 2.2 (начало)



3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1 Основные определения

Электрический ток проводимости представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов и численно равен скорости изменения электрического заряда во времени: $i = dq/dt$, где i – ток, измеряемый в амперах (A); q – заряд в кулонах ($Kл$); t – время в секундах (c).

За направление тока принимается направление движения положительных электрических зарядов.

Электрической цепью называют совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении.

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условное обозначение ее элементов и показывающее соединения этих элементов, называется *схемой* электрической цепи. Понятия “электрическая цепь” и “схема электрической цепи” часто отождествляют.

Отдельные устройства, составляющие электрическую цепь, называются *элементами цепи*. Элементы цепей подразделяются на *источники* и *приемники* электрической энергии, соединенные между собой проводями.

У каждого элемента цепи можно выделить некоторое число зажимов (полюсов или клемм), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают двух- и многополюсные элементы. *Двухполюсники* имеют два зажима.

Участок цепи или ее схемы, вдоль которого протекает один и тот же ток, называется *ветвью*, а место или точку соединения трех и более ветвей называют *узлом* цепи (схемы). Замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям схемы, называется *контуром*. При обходе контура каждый узел в нем встречается не более одного раза.

Все элементы электрической цепи условно подразделяются на *активные* и *пассивные*. Источники электрической энергии относятся к активным элементам. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушки индуктивности

и конденсаторы) энергия.

Источниками электрической энергии (или просто *источниками*) являются такие устройства, в которых происходит преобразование химической, механической, тепловой или другого вида энергии в электрическую. *Приемниками электрической энергии* или *нагрузкой* служат устройства, в которых электрическая энергия превращается в другие виды (тепловую, механическую, световую, химическую и т. д.).

Потенциалом φ некоторой точки электрической цепи называют величину, равную отношению потенциальной энергии w , которой обладает заряд q , находящийся в данной точке, к этому заряду, $\varphi = w/q$. Потенциальная энергия w равна энергии по перемещению заряда из данной точки электрической цепи в точку, имеющую нулевой потенциал.

Электрическим напряжением u называется разность потенциалов между двумя точками, например 1 и 2, электрической цепи: $u = \varphi_1 - \varphi_2$. Потенциал и напряжение измеряют в вольтах (*B*).

Мгновенными электрическими величинами называются величины, зависящие от времени. Мгновенные величины принято обозначать малыми (строчными) буквами. Например:

$i(t)$ – мгновенное значение тока,

$u(t)$ – мгновенное значение напряжения,

$p(t) = i(t)u(t)$ – мгновенное значение мощности.

Как правило, букву t опускают.

Направление тока на отдельных участках электрической схемы указывают стрелкой. Если направление тока заранее неизвестно, то оно выбирается произвольно и называется *положительным направлением тока*. Принимается, что в пассивных элементах ток течет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом. Разность электрических потенциалов на участке цепи, по которому протекает ток, называется *падением напряжения*. Как и для тока, для падения напряжения (или напряжения) выбирают положительное направление. Будем выбирать его совпадающим с положительным направлением тока на этом участке и указывать его соответствующей стрелкой.

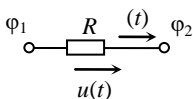


Рисунок 3.1

Резистором называют элемент (рисунок 3.1), в котором текущий через него мгновенный ток $i(t)$ и приложенное к нему мгновенное напряжение $u(t)$ связаны между собой законом Ома для мгновенных величин:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{R} = Gu(t), \quad (3.1)$$

где R – *сопротивление* резистора, измеряемое в *омах* (Ом);

$G = 1/R$ – *проводимость*, измеряемая в *сименсах* (См).

Сопротивление и проводимость можно обозначать также и строчными буквами r и g соответственно.

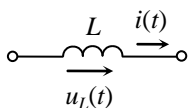


Рисунок 3.2

Условное графическое изображение *катушки индуктивности* приведено на рисунке 3.2. Параметром индуктивной катушки является *индуктивность*, которая измеряется в *генри* (Гн) и обозначается буквой L . Связь между током и напряжением в индуктивной катушке определяется соотношением

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (3.2)$$

Конденсатор на схемах обозначается буквой C (рисунок 3.3), его параметром является *емкость*, которая измеряется в *фарадах* (Ф). Ток, текущий через конденсатор (ток электрического смещения), и напряжение на его зажимах связаны между собой соотношением

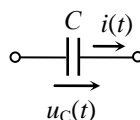


Рисунок 3.3

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (3.3)$$

Если параметры L , R и C элементов цепи не зависят от протекающего через них тока и времени, то цепь называется *линейной* и описывается линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

3.2 Цепи постоянного тока

Если в электрической цепи течет постоянный ток, не меняющийся во времени, то такая цепь называется *цепью постоянного тока*.

Постоянные электрические величины, не зависящие от времени, принято обозначать большими (заглавными) буквами. Например, I – постоянный ток, U – постоянное напряжение, P – мощность постоянного тока.

Цепь постоянного тока состоит из источников энергии и резисторов, соединенных между собой проводами. Источник энергии, условное обозначение которого приведено на рисунке 3.4, а, характеризуется двумя параметрами: ЭДС E и внутренним сопротивлением r_0 . Электродвижущая сила E численно равна разности потенциалов между положительным 1 и отрицательным 2

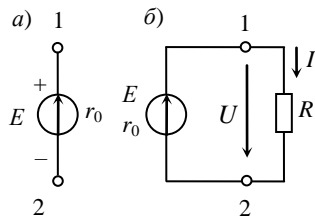


Рисунок 3.4

выводами источника энергии при отсутствии в нем тока, т. е. в *режиме холостого хода*. При подключении к источнику нагрузки с сопротивлением R (см. рисунок 3.4, б) по цепи течет ток I , значение которого определяется законом Ома для полной цепи

$$I = \frac{E}{r_0 + R}. \quad (3.4)$$

Напряжение U на зажимах источника уже не будет равно ЭДС E вследствие падения напряжения на внутреннем сопротивлении r_0 . Если рассматривать источник напряжения, у которого сопротивление r_0 остается постоянным во всем диапазоне изменения тока (от $I = 0$ при холостом ходе до максимального значения $I = E/r_0 = J$ в *режиме короткого замыкания* источника), то получим следующую зависимость $U(I)$:

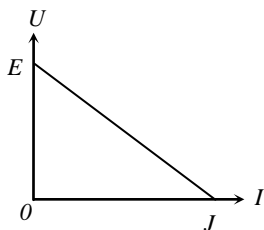


Рисунок 3.5

$$U = E - r_0 I. \quad (3.5)$$

График этой линейной зависимости, которая называется *внешней характеристикой* источника, приведен на рисунке 3.5.

Из формулы (3.4) следует, что внутреннее сопротивление r_0 источника, так же как и сопротивление R нагрузки, ограничивает ток.

Если внутреннее сопротивление r_0 равно нулю (рисунок 3.6, а), то в соответствии с уравнением (3.5) внешняя характеристика источника будет параллельна оси I (рисунок 3.6, б), а напряжение на его зажимах будет постоянным ($U = E$) независимо от нагрузки. Такой источник называется *идеальным источником ЭДС* или *идеальным источником напряжения*.

Разделим левую и правую части уравнения (3.5) на r_0 . В результате получим

$$\frac{E}{r_0} = I + \frac{U}{r_0} \quad \text{или} \quad J = I + I_0, \quad (3.6)$$

где $J = \frac{E}{r_0}$ – ток источника в режиме короткого замыкания (т. е. при сопротивлении нагрузки $R = 0$);

$I_0 = \frac{U}{r_0} = Ug_0$ – ток, протекающий через внутреннее сопротивление источника;

$g_0 = 1/r_0$ – внутренняя проводимость источника тока.

Если внутренняя проводимость источника g_0 будет равна нулю, то получится *идеальный источник тока*, т. е. источник, генерирующий ток $I = J$, не зависящий от сопротивления нагрузки. На схеме идеальный источник тока обозначается символом J (см. рисунок 3.6, в), а внешняя характеристика такого источника представлена на рисунке 3.6, з. Идеальные источники напряжения и тока в соответствии со своими внешними характеристиками являются источниками бесконечно большой мощности.

Источник энергии с известными значениями ЭДС E и внутреннего сопротивления r_0 может быть представлен двумя эквивалентными схемами: последовательной схемой с источником ЭДС (рисунок 3.7, а) и параллельной схемой с источником тока (рисунок 3.7, б) в соответствии с уравнением 3.6. Источники ЭДС и источники тока являются активными элементами электрических схем.

Таким образом, источник напряжения с заданными значениями ЭДС E и последовательно соединенного с ней внутреннего сопротивления r_0 можно заменить параллельным соединением источника тока J и внутреннего сопротивления r_0 (проводимостью g_0). Связь между параметрами эквивалентных схем источника определяется соотношениями:

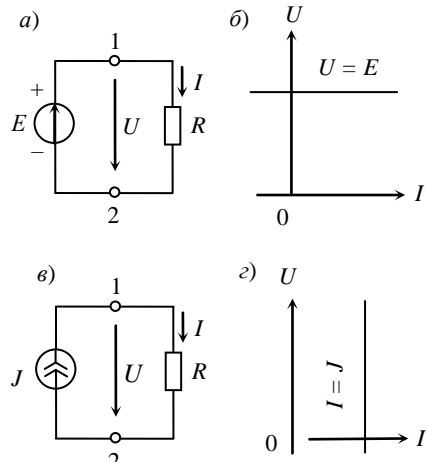


Рисунок 3.6

$$J = E/r_0; \quad E = r_0 J; \quad r_0 = 1/g_0. \quad (3.7)$$

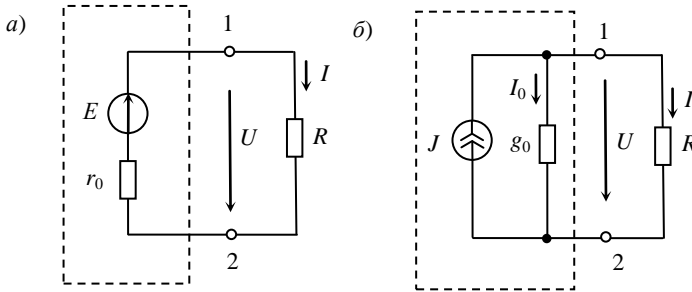


Рисунок 3.7

Несмотря на эквивалентность, в энергетическом отношении схемы замещения источника различны, т. к. в режиме холостого хода для последовательной схемы замещения мощность равна нулю, а для параллельной – нет.

3.2.1 Законы Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю, т. е.*

$$\sum I_k = 0. \quad (3.8)$$

Со знаком “плюс” учитывают токи, направленные от узла, а со знаком “минус” – токи, направленные к узлу.

Второй закон Кирхгофа применяется к контурам электрической цепи и формулируется так: *в любом контуре электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях, входящих в этот контур, равна алгебраической сумме ЭДС источников этого контура, т. е.*

$$\sum R_k I_k = \sum E_k. \quad (3.9)$$

В этом уравнении токи и ЭДС, направление которых совпадает с выбранным направлением обхода рассматриваемого контура, записывают со знаком “плюс”, в противном случае они учитываются со знаком “минус”.

Второй закон Кирхгофа может быть сформулирован по-иному: *алгебраическая сумма напряжений ветвей, образующих контур, равна нулю:*

$$\sum U_k = 0. \quad (3.10)$$

3.2.2 Эквивалентные преобразования электрических схем

При анализе схемы электрической цепи иногда ее предварительно упрощают, т. е. уменьшают количество ветвей, узлов или элементов. *Эквивалентным* называют такое преобразование схемы, когда в нетронутой преобразованиями ее части остается неизменным распределение токов ветвей и потенциалов узлов.

Последовательное соединение элементов

На рисунке 3.8, а представлена схема с последовательным соединением элементов, когда через них проходит один и тот же ток I . Запишем для этой схемы выражение для входного напряжения U , воспользовавшись вторым законом Кирхгофа:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 - E_1 + E_2 - E_3 = (R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 - E_2 + E_3).$$

Группируя величины одинаковой размерности, получим

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + R_3; \\ E &= E_1 - E_2 + E_3, \end{aligned}$$

где R – эквивалентное сопротивление,
 E – эквивалентная ЭДС исходной схемы.

В результате получим выражение для входного напряжения

$$U = RI - E,$$

которому соответствует схема на рисунке 3.8, б.

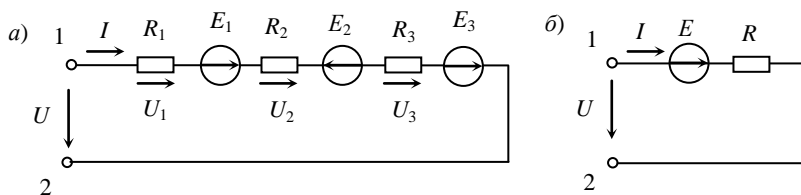


Рисунок 3.8

Таким образом, эквивалентные параметры схемы с последовательным соединением элементов находятся следующим образом:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k ; E = \sum_{k=1}^n E_k . \quad (3.11)$$

Эквивалентное сопротивление R последовательно соединенных резисторов равно сумме сопротивлений этих резисторов, а эквивалентная ЭДС E источников, соединенных последовательно, равна *алгебраической* сумме ЭДС этих источников. Со знаком плюс берут ЭДС тех источников, направление которых совпадает с направлением эквивалентной ЭДС E . Для схемы на рисунке 3.8, б можно записать уравнение

$$I = \frac{U + E}{R} , \quad (3.12)$$

которое представляет собой закон Ома для активного участка цепи или *обобщенный закон Ома*.

Параллельное соединение резисторов

При параллельном соединении ветвей они присоединяются к одной и той же паре зажимов (узлов) и, следовательно, находятся под одним напряжением.

Пусть три пассивных ветви с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 присоединены к узлам 1 и 2, как показано на рисунке 3.9, а. Найдём параметры (R и G) эквивалентной ветви (рисунок 3.9, б).

В соответствии с первым законом Кирхгофа можно записать

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

или
$$I = U(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) = U(G_1 + G_2 + G_3) = UG, \quad (3.13)$$

где
$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 1/R.$$

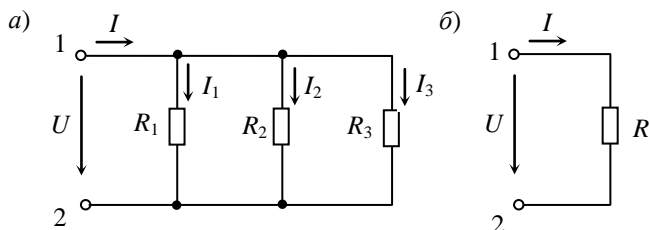


Рисунок 3.9

Эквивалентная проводимость G параллельно соединенных резисторов равна сумме проводимостей этих резисторов.

Для частного случая двух параллельных ветвей с сопротивлениями R_1 и R_2 (рисунок 3.10) формулу для определения эквивалентного сопротивления R можно записать так:

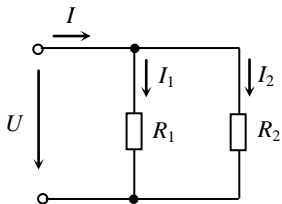


Рисунок 3.10

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.14)$$

При известном токе I значения токов I_1 и I_2 в параллельных ветвях можно рассчитать по формулам:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (3.15)$$

Пример 3.1 Определить входное сопротивление схемы на рисунке 3.11, а при заданных значениях сопротивлений: $R_1 = 24$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 20$ Ом, $R_5 = 12$ Ом, $R_6 = 18$ Ом, $R_7 = 12$ Ом.

Решение. Для определения входного сопротивления произведем эквивалентные преобразования схемы путем “сворачивания” ее относительно входных зажимов. Заменим ветвь с последовательно соединенными сопротивлениями R_5 и R_6 и параллельную ей ветвь с сопротивлением R_4 эквивалентной с сопротивлением

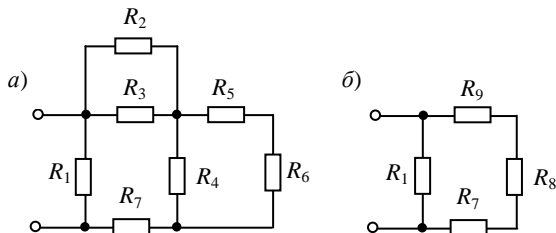


Рисунок 3.11

$$R_8 = \frac{R_4(R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12 \text{ Ом.}$$

Аналогичным образом заменим параллельно включенные сопротивления R_2 и R_3 эквивалентным

$$R_9 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24 \text{ Ом.}$$

Полученную промежуточную схему на рисунке 3.11, б сворачиваем до одного сопротивления, подключенного к входным зажимам схемы:

$$R = \frac{R_1(R_7 + R_8 + R_9)}{R_1 + R_7 + R_8 + R_9} = \frac{24 \cdot 48}{72} = 16 \text{ Ом.}$$

Параллельное соединение активных ветвей

На рисунке 3.12, а три активные ветви с заданными значениями сопротивлений R_1, R_2, R_3 и ЭДС E_1, E_2, E_3 источников подключены к внешнему источнику с напряжением U . Заменим эти ветви эквивалентной (рисунок 3.12, б) и определим параметры её элементов R и E .

Запишем выражения для токов ветвей исходной схемы в соответствии с обобщенным законом Ома:

$$I_1 = \frac{U - E_1}{R_1} = UG_1 - E_1G_1; I_2 = \frac{U + E_2}{R_2} = UG_2 + E_2G_2; I_3 = \frac{U + E_3}{R_3} = UG_3 + E_3G_3.$$

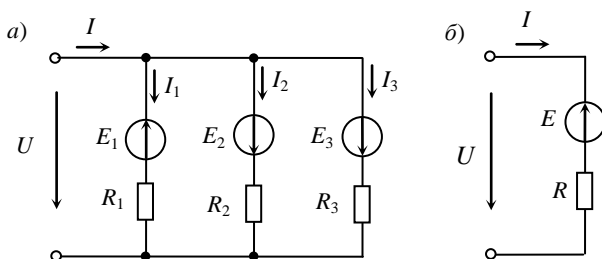


Рисунок 3.12

Найдем входной ток I этой схемы, применив первый закон Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U(G_1 + G_2 + G_3) - (E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3).$$

Входной ток схемы на рисунке 3.12, б определим по обобщенному закону Ома:

$$I = \frac{U - E}{R} = UG - EG.$$

Эквивалентность схем на рисунке 3.12 будет соблюдена при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} G &= G_1 + G_2 + G_3; \\ EG &= E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения находим формулу для вычисления ЭДС E эквивалентной схемы на рисунке 3.12, б):

$$E = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 - E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Для общего случая параллельного соединения n активных ветвей параметры R и E эквивалентной ветви определяют по формулам:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k; \quad R = 1/G;$$

$$E = \sum_{k=1}^n E_k G_k / \sum_{k=1}^n G_k. \quad (3.16)$$

В формуле (3.16) со знаком плюс берутся ЭДС ветвей, направление которых совпадает с направлением эквивалентной ЭДС E .

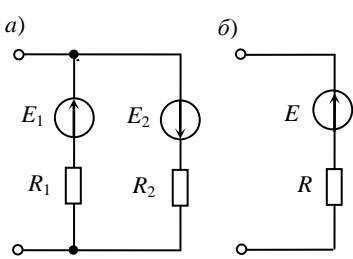


Рисунок 3.13

Для двух параллельных активных ветвей (рисунок 3.13, а) эквивалентная ветвь (рисунок 3.13, б) имеет параметры

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$E = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2}. \quad (3.16, a)$$

Соединение резисторов

треугольником и звездой

Резисторы могут иметь соединение *треугольником* (рисунок 3.14, а) и *звездой* (рисунок 3.14, б).

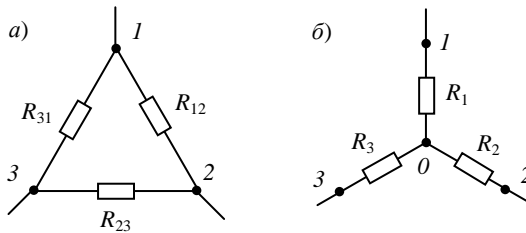


Рисунок 3.14

Формулы преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратного перехода от звезды к эквивалентному треугольнику имеют следующий вид:

$$R_1 = \frac{R_3 R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_1 R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_2 R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad (3.17)$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}; \quad (3.18)$$

Пример 3.2 Определить эквивалентное сопротивление схемы на рисунке 3.15, а, если заданы значения сопротивлений: $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 12 \text{ Ом}$, $R_3 = 9 \text{ Ом}$, $R_4 = 15 \text{ Ом}$, $R_5 = 1,25 \text{ Ом}$, $R_6 = 15 \text{ Ом}$.

Решение. В рассматриваемой схеме нет ни последовательно, ни параллельно соединенных элементов, но есть 2 соединения сопротивлений звездой, образованные ветвями R_2, R_4, R_6 и R_3, R_4, R_5 , и 4 соединения треугольником (R_2, R_3, R_4 ; R_1, R_3, R_5 ; R_4, R_5, R_6 и R_1, R_2, R_6).

Заменяем треугольник сопротивлений R_2, R_3, R_4 эквивалентной звездой сопротивлений R_7, R_8, R_9 , значения которых вычислим по формулам (3.17):

$$R_7 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12 \cdot 9}{36} = 3 \text{ Ом}; \quad R_8 = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{9 \cdot 15}{36} = 3,75 \text{ Ом};$$

$$R_9 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12 \cdot 15}{36} = 5 \text{ Ом}.$$

Преобразованная схема (рисунок 3.15,б) имеет две параллельные ветви, в каждой из которых последовательно соединены по два сопротивления (R_8, R_5 и R_9, R_6 соответственно).

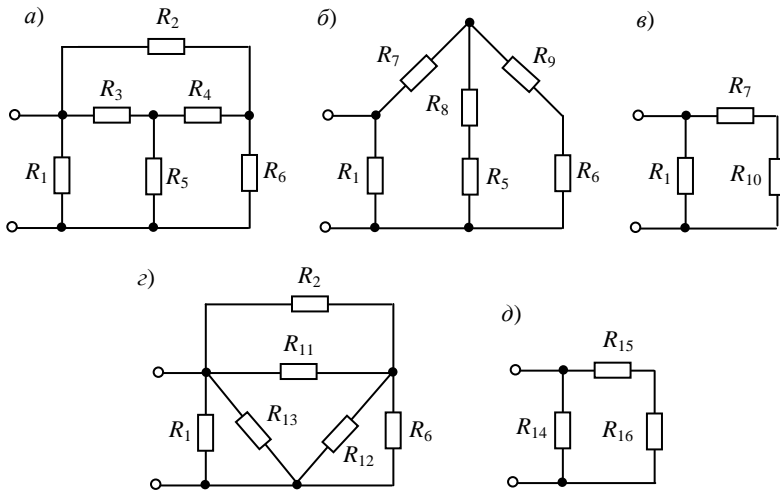


Рисунок 3.15

Найдем эквивалентное сопротивление параллельных ветвей

$$R_{10} = \frac{(R_8 + R_5)(R_9 + R_6)}{R_8 + R_5 + R_9 + R_6} = \frac{5 \cdot 20}{25} = 4 \text{ Ом}$$

и перейдем к схеме на рисунке 3.15, в, для которой вычислим входное сопротивление

$$R = \frac{R_1(R_7 + R_{10})}{R_1 + R_7 + R_{10}} = \frac{3 \cdot 7}{10} = 2,1 \text{ Ом.}$$

Задачу можно решить и путем преобразования звезды сопротивлений R_3, R_4, R_5 в эквивалентный треугольник (рисунок 3.15, г), для чего воспользуемся формулами (3.18).

$$R_{11} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_5} = 9 + 15 + \frac{9 \cdot 15}{1,25} = 132 \text{ Ом;}$$

$$R_{12} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_3} = 15 + 1,25 + \frac{15 \cdot 1,25}{9} = 18,333 \text{ Ом}$$

$$R_{13} = R_5 + R_3 + \frac{R_5 R_3}{R_4} = 1,25 + 9 + \frac{1,25 \cdot 9}{15} = 11 \text{ Ом.}$$

Полученная после преобразования схема имеет три пары параллельно включенных сопротивлений R_2, R_{11} ; R_6, R_{12} и R_1, R_{13} . Их замена эквивалентными сопротивлениями

$$R_{14} = \frac{R_1 R_{13}}{R_1 + R_{13}} = \frac{3 \cdot 11}{14} = 2,357 \text{ Ом;}$$

$$R_{15} = \frac{R_2 R_{11}}{R_2 + R_{11}} = \frac{12 \cdot 132}{144} = 11 \text{ Ом;}$$

$$R_{16} = \frac{R_6 R_{12}}{R_6 + R_{12}} = \frac{15 \cdot 18,333}{33,333} = 8,25 \text{ Ом}$$

приводит к схеме на рисунке 3.15, д, для которой вычисляем входное сопротивление

$$R = \frac{R_{14}(R_{15} + R_{16})}{R_{14} + R_{15} + R_{16}} = 2,1 \text{ Ом.}$$

Перенос источников в схеме

Рассмотрим фрагмент электрической схемы (рисунок 3.16, а), в которой идеальный источник ЭДС E включен между узлами 1 и 2. Если перенести этот источник через узел 2 и включить его во все ветви, присоединенные к узлу 2 (рисунок 3.16, б), то напряжения между узлами 1, 3, 4 и 5 не изменятся. Следовательно, эти схемы можно рассматривать как эквивалентные. При этом напряжение между узлами 1 и 2 становится равным нулю и эти узлы можно объединить. Таким приемом уменьшают

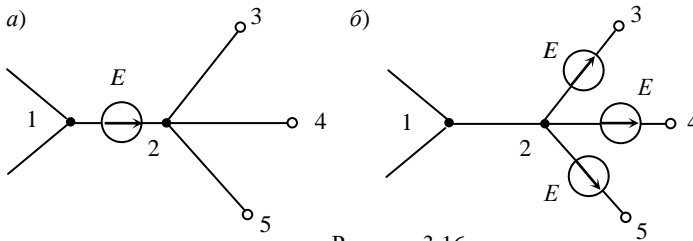


Рисунок 3.16

число узлов в схеме.

На рисунке 3.17, *а* изображена часть разветвленной схемы с одним источником тока J , который присоединен к узлам 1 и 4. Режим в этой схеме не изменится, если вместо одного источника присоединить к узлам 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 три источника тока J (см. рисунок 3.17, *б*). При этом для всех рассматриваемых узлов распределение токов не изменится.

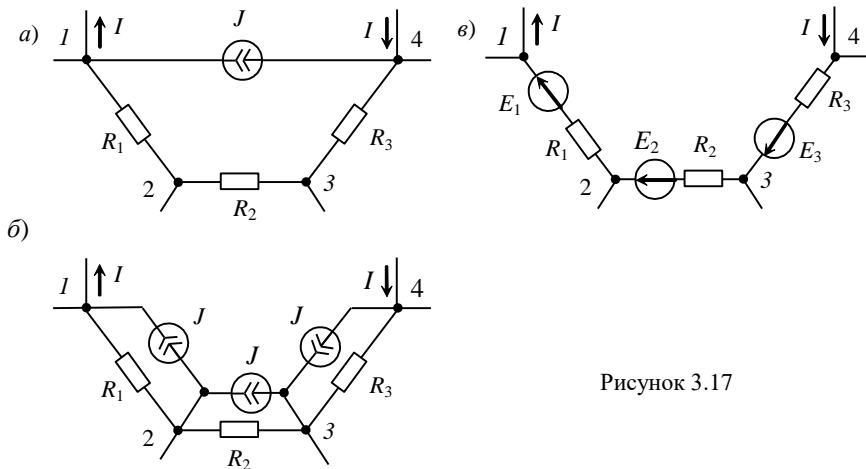


Рисунок 3.17

В соответствии с рассмотренными ранее эквивалентными схемами источника энергии (см. рисунок 3.7) перейдем от схемы рисунка 3.17, *б* к эквивалентной схеме рисунка 3.17, *в*, где

$$E_1 = R_1 J; \quad E_2 = R_2 J; \quad E_3 = R_3 J.$$

Такой вид эквивалентного преобразования схемы позволяет уменьшить число контуров схемы.

Рассмотренные выше преобразования схем путем переноса источников можно использовать, например, для замены активного треугольника эквивалентной активной звездой. Последовательность действий для выполнения этой операции можно проследить на рисунке 3.18, а параметры элементов схем найдем по формулам (3.7) и (3.17):

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$J = E/R_{31}; \quad E_1 = R_1 J; \quad E_3 = R_3 J.$$

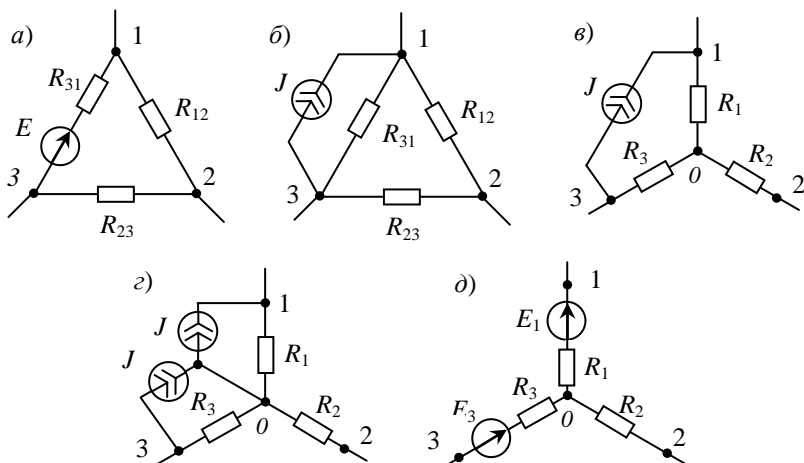


Рисунок 3.18

3.2.3 Методы анализа цепей

Анализ или расчет цепи заключается в определении значений токов, напряжений и мощностей отдельных участков, если заданы параметры схемы замещения цепи. Методы расчета цепей базируются на применении законов Кирхгофа.

Рассмотрим некоторую электрическую цепь, которая содержит n_v узлов и n_b ветвей, в том числе n_t ветвей с источниками тока. Электрический режим цепи будет полностью определен, если будут найдены токи во всех ветвях. Если расчет электрической цепи производить путем непосредственного применения законов Кирхгофа, то необходимо составить систему $n_b - n_t$ уравнений и решить ее. При этом число независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, будет равно $n_v - 1$, т. е. на единицу меньше числа узлов. Остальные уравнения в количестве $n = n_b - (n_v - 1) - n_t$ составляются по второму закону Кирхгофа для *независимых* контуров.

Так как направления токов в ветвях сложной электрической цепи заранее неизвестны (за исключением ветвей с источниками токов), то предварительно выбирают их положительные направления. Контуры следует выбирать так, чтобы в них вошли все ветви схемы, а в каждый из контуров возможно меньшее число ветвей. Контуры взаимно *независимы*, если каждый последующий контур, для которого составляется уравнение, имеет не менее одной новой ветви.

Пример 3.3 Найти токи ветвей и напряжение U_J на зажимах источника тока цепи, схема которой приведена на рисунке 3.19, методом непосредственного применения законов Кирхгофа. Параметры элементов схемы: $E_4 = 6$ В, $E_5 = 4$ В, $J = 3$ А, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, $R_5 = 4$ Ом.

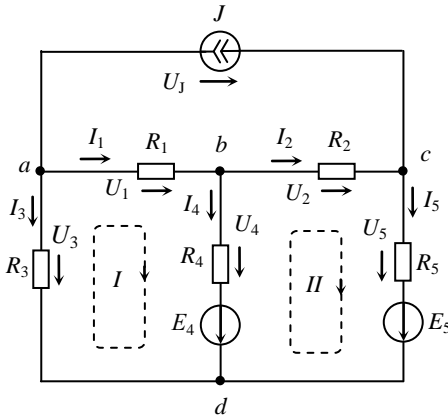


Рисунок 3.19

$$- I_1 + I_2 + I_4 = 0;$$

Решение. Укажем стрелками произвольно выбранные направления токов в ветвях схемы и соответствующие им падения напряжений на сопротивлениях. Обозначим узлы буквами a, b, c и d . Имеем $n_B = 6$, $n_T = 1$, $n_V = 4$. Составим систему уравнений в количестве $n_B - n_T = 5$ для определения неизвестных токов. В соответствии с первым законом Кирхгофа составим три уравнения для узлов a, b и c :

$$I_1 + I_3 - J = 0;$$

$$- I_2 + I_5 + J = 0.$$

По второму закону Кирхгофа необходимо записать два уравнения, для чего выберем два независимых контура I и II с указанными стрелками направлениями их обхода.

$$U_1 + U_4 - U_3 = E_4;$$

$$U_2 + U_5 - U_4 = E_5 - E_4,$$

где $U_1 = R_1 I_1$, $U_2 = R_2 I_2$, $U_3 = R_3 I_3$, $U_4 = R_4 I_4$, $U_5 = R_5 I_5$.

Подставив числовые значения заданных параметров схемы, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 &= 3; \\ - I_1 + I_2 + I_4 &= 0; \\ I_2 + I_5 &= -3; \\ 2I_1 - 5I_3 + 3I_4 &= 6; \\ 4I_2 - 3I_4 + 4I_5 &= -2, \end{aligned}$$

решая которую находим искомые токи:

$I_1 = 2,584 \text{ A}; I_2 = 1,614 \text{ A}; I_3 = 0,416 \text{ A}; I_4 = 0,97 \text{ A}; I_5 = -1,386 \text{ A}.$

Ток I_5 имеет отрицательный знак, это означает, что его действительное направление противоположно предварительно выбранному.

Решение рассмотренного примера можно упростить, если предварительно выполнить эквивалентные преобразования в схеме.

Исключим из исходной схемы (см. рисунок 3.19) источник тока. С этой целью подключим к каждой паре узлов $a - b$ и $b - c$ источник тока J (рисунок 3.20, а), а затем перейдем к эквивалентной схеме на рисунке 3.20, б, где $E_1 = R_1 J = 6 \text{ В}$ и $E_2 = R_2 J = 12 \text{ В}$. В результате получим двухконтурную схему, в которой три активные ветви подключены к узлам b и d . Заменяем левую и среднюю ветви схемы эквивалентной и рассчитаем ее параметры по формулам (3.16, а).

$$E_6 = \frac{E_1 R_4 + E_4 (R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 + R_4} = 6 \text{ В}, \quad R_6 = \frac{(R_1 + R_3) R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = 2,1 \text{ Ом}.$$

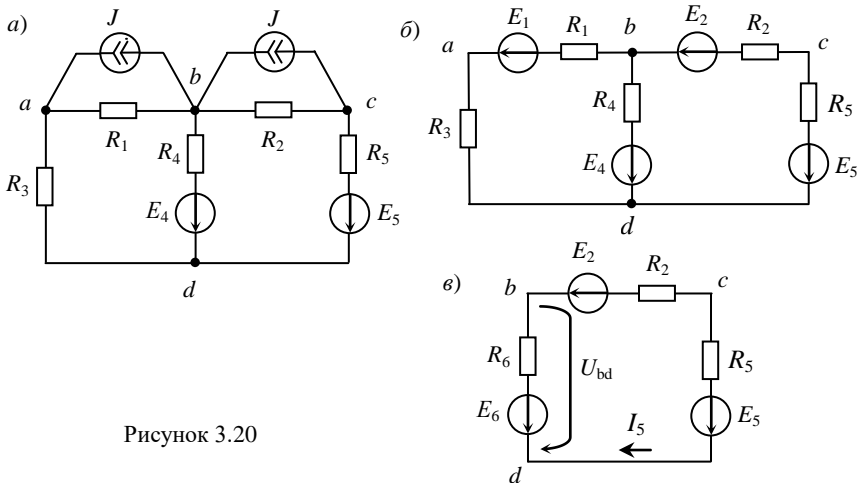


Рисунок 3.20

Таким образом, в результате последнего преобразования получена одноконтурная схема на рисунке 3.20, в, в которой остались неизменными потенциалы узлов b, c, d и ток I_5 . Ток I_5 найдем по закону Ома

$$I_5 = \frac{E_5 - E_6 - E_2}{R_5 + R_6 + R_2} = \frac{-14}{10,1} = -1,386 \text{ A}.$$

Применив второй закон Кирхгофа, найдем межузловое напряжение

$$U_{bd} = R_6 I_5 - E_6 = 2,1(-1,386) - 6 = -3,089 \text{ В.}$$

Переходя к исходной схеме на рисунке 3.19 и применяя законы Ома и Кирхгофа, находим токи в ветвях:

$$I_2 = I_5 + J = 1,614 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{U_{bd} + E_4}{R_4} = 0,97 \text{ А}; \quad I_1 = I_2 + I_4 = 2,584 \text{ А};$$

$$I_3 = J - I_1 = 0,416 \text{ А.}$$

Полученные значения токов такие же, как и найденные ранее.

Метод контурных токов

Число независимых уравнений, описывающих процессы в сложной электрической цепи, можно существенно сократить, воспользовавшись *методом контурных токов*, предложенных Д. К. Максвеллом.

Суть метода состоит в том, что вместо фактических токов ветвей находят фиктивные *контурные токи*, циркулирующие в независимых контурах. При этом ток в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих по этой ветви.

Порядок расчета

1 Произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях исходной схемы.

2 Произвольно выбрать положительные направления контурных токов для каждого независимого контура электрической схемы. Если в схеме есть ветви с источниками тока, то сначала выбирают контурные токи таким образом, чтобы каждый из них проходил по ветви с источником тока и совпадал с ним по направлению. Таким образом, эти контурные токи J_i будут заранее известны. Остальные контурные токи выбирают проходящими по ветвям, не содержащим источников тока.

3 Обходя каждый из независимых контуров в выбранном направлении, записать n линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1k}I_{kk} + \dots + R_{1n}I_{nn} + \sum_{i=1}^{n_T} J_i R_{1i} &= E_{11}; \\ \dots & \dots \\ R_{k1}I_{11} + R_{k2}I_{22} + \dots + R_{kk}I_{kk} + \dots + R_{kn}I_{nn} + \sum_{i=1}^{n_T} J_i R_{ki} &= E_{kk}; \\ \dots & \dots \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nk}I_{kk} + \dots + R_{nn}I_{nn} + \sum_{i=1}^{n_T} J_i R_{ni} &= E_{nn}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где R_{kk} – собственное сопротивление контура k , равное сумме сопротивлений всех ветвей контура k ; значения R_{kk} всегда записывают со знаком “плюс”;

R_{kn} – общее сопротивление контуров k и n , причем, $R_{kn} = R_{nk}$; общее сопротивление контуров записывается со знаком “плюс”, если контурный ток I_{kk} совпадает по направлению с контурным током I_{nn} , в противном случае оно записывается со знаком “минус”;

R_{ki} – общее сопротивление контура k и контура i , по которому циркулирует ток источника тока J ; знак R_{ki} выбирают по тем же правилам, что и сопротивления R_{kn} ;

E_{kk} – контурная ЭДС, равная алгебраической сумме ЭДС контура k ; ЭДС, действующие в направлении обхода контура, берут со знаком „плюс“, а направленные встречно – со знаком “минус”.

4 Вычислить истинные токи в ветвях в виде алгебраических сумм контурных токов, протекающих по соответствующим ветвям.

Пример 3.4 Рассчитать методом контурных токов токи в цепи, схема которой приведена на рисунке 3.21.

Дано: $E_1 = 50$ В, $E_4 = 150$ В, $E_5 = 30$ В, $J = 3$ А, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 25$ Ом.

Решение. Выберем положительные направления токов ветвей и укажем их на схеме стрелками. Схема содержит три независимых контура, в одном из которых контурный ток выберем равным току источника тока J . Два других контурных тока обозначим I_{11} и I_{22} соответственно и укажем их направление. Составим систему линейных алгебраических уравнений в соответствии с (3.19).

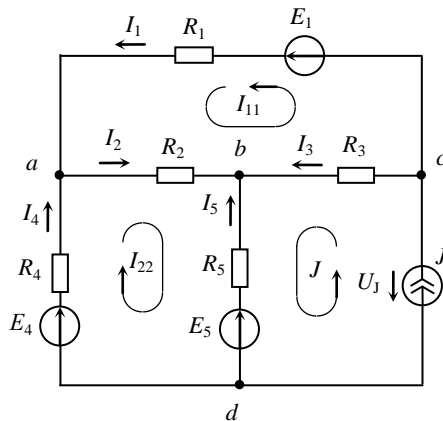


Рисунок 3.21

$$R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}J = E_{11};$$

$$R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}J = E_{22},$$

где $R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 = 30$ Ом; $R_{22} = R_2 + R_4 + R_5 = 45$ Ом; $R_{12} = R_{21} = R_2 = 15$ Ом;

$$R_{13} = -R_3 = 5 \text{ Ом}; R_{23} = R_5 = 25 \text{ Ом}; E_{11} = E_1 = 50\text{В}; E_{22} = E_4 - E_5 = 120 \text{ В}.$$

Подставим числовые значения и получим систему уравнений

$$30I_{11} + 15I_{22} = 65;$$

$$15I_{11} + 45I_{22} = 45,$$

решив которую найдем контурные токи $I_{11} = 2 \text{ А}$, $I_{22} = 0,333 \text{ А}$.

Токи в ветвях равны алгебраической сумме контурных токов, проходящих по этим ветвям:

$$I_1 = I_{11} = 2 \text{ А}; I_2 = I_{11} + I_{22} = 2,333 \text{ А}; I_3 = -I_{11} + J = 1 \text{ А}; I_4 = I_{22} = 0,333 \text{ А};$$

$$I_5 = -I_{22} - J = -3,333 \text{ А}.$$

Ток I_5 имеет направление, противоположное выбранному.

Баланс мощностей

Для проверки правильности результатов расчета электрической схемы составляется баланс электрических мощностей. В соответствии с законом сохранения энергии в любой отдельно взятой электрической цепи мощность, развиваемая источниками в этой цепи, равна мощности, расходуемой в приемниках энергии. При этом следует иметь в виду, что при определенных условиях некоторые источники, действующие в цепи, не генерируют, а, наоборот, потребляют энергию. Следовательно, суммарную мощность источников, действующих в цепи, находят в виде алгебраической суммы мощности отдельных источников. Со знаком “плюс” берется мощность источников, генерирующих энергию (рисунок 3.22, а, б), а со знаком “минус” – мощность источников, потребляющих энергию (рисунок 3.22, в, г). На рисунках буквой A обозначен активный двухполюсник, внутренняя схема которого представляет совокупность источников энергии и резисторов, соединенных между собой определенным образом.

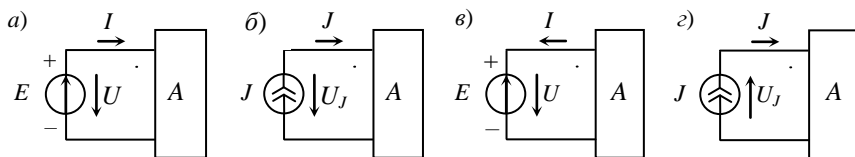


Рисунок 3.22

Мощность источника напряжения равна произведению ЭДС E источника и проходящего по нему тока I ($P = EI$), а мощность источника тока определяется произведением напряжения U_J на его зажимах и генерируемого источником тока J ($P = U_J J$). На рисунке 3.22, а, б мощность источников берется с положительным знаком, а на рисунке 3.22, в, г – отрицательным.

Таким образом, мощность источников, действующих в цепи, находят по формуле

$$P_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^{n_B - n_T} E_k I_k + \sum_{i=1}^{n_T} U_{ji} J_i. \quad (3.20)$$

В резисторах электрическая энергия необратимо превращается в тепловую. Мощность, потребляемая всеми резисторами в цепи, равна сумме мощностей каждого резистора:

$$P_{\text{нагр}} = \sum_{k=1}^{n_B - n_T} I_k^2 R_k. \quad (3.21)$$

Относительную ошибку вычислений находят по формуле

$$\delta_p \% = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{нагр}}|}{0,5(P_{\text{ист}} + P_{\text{нагр}})} \cdot 100 \%. \quad (3.22)$$

Составим баланс мощностей для примера 3.4. Найдем напряжение U_J на зажимах источника тока по второму закону Кирхгофа для контура $b-c-d-b$:

$$U_J = E_5 - R_5 I_5 + R_3 I_3 = 118,325 \text{ В.}$$

Из полученных в результате расчета значений токов следует, что энергию генерируют источники ЭДС E_1 , E_4 и источник тока J , в то время как источник ЭДС E_5 является ее потребителем. Таким образом, мощность, развиваемая источниками,

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_4 I_4 - E_5 I_5 + U_J J = 404,935 \text{ Вт.}$$

Мощность, выделяемая в сопротивлениях резисторов (мощность нагрузки),

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 404,92 \text{ Вт.}$$

Относительная ошибка вычислений

$$\delta_p \% = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{нагр}}|}{0,5(P_{\text{ист}} + P_{\text{нагр}})} \cdot 100 \% = \frac{|404,935 - 404,92|}{0,5(404,935 + 404,92)} \cdot 100 \% = 0,0037 \%$$

Вывод: расчет токов схемы выполнен правильно, т. к. баланс мощностей выполняется.

В схеме можно предварительно произвести эквивалентные преобразования, позволяющие исключить из нее ветви с источниками токов и, следовательно, уменьшить число контуров.

В этом случае система контурных уравнений (3.19) может быть записана в матричной форме:

$$[R][I^{(k)}] = [E^{(k)}], \quad (3.23)$$

$$\text{где } [R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & R_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nk} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}; \quad [I^{(k)}] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ \dots \\ I_{kk} \\ \dots \\ I_{nn} \end{bmatrix}; \quad [E^{(k)}] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \dots \\ E_{kk} \\ \dots \\ E_{nn} \end{bmatrix};$$

$[R]$ – квадратная матрица сопротивлений электрической цепи порядка n ;

$[I^{(k)}]$ – матрица-столбец искомых контурных токов;

$[E^{(k)}]$ – матрица-столбец контурных ЭДС.

Решение матричного уравнения (3.23) находим в следующей форме:

$$[I^{(k)}] = [R]^{-1}[E^{(k)}]. \quad (3.24)$$

При расчете многоконтурных электрических цепей матричная форма записи позволяет использовать при решении системы уравнений ЭВМ.

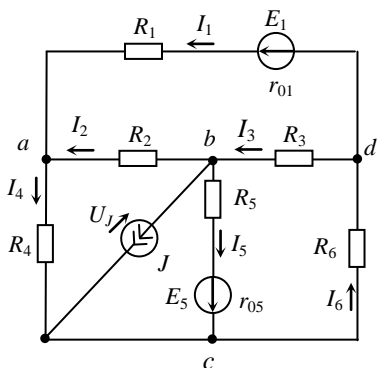


Рисунок 3.23

Пример 3.5 Рассчитать токи в схеме на рисунке 3.23 с параметрами $E_1 = 12$ В, $E_5 = 8$ В, $J = 2$ А, $r_{01} = 1$ Ом, $r_{05} = 1,2$ Ом, $R_1 = 11$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 14$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 6,8$ Ом, $R_6 = 6$ Ом методом контурных токов. Построить потенциальную диаграмму для контура $a-b-c-d-a$.

Решение. Подключим источник тока J параллельно сопротивлению R_2 и R_4 (рисунок 3.24, а), распределение токов в узлах a , b и c при этом останется прежним. Заменяем параллельное соединение

источников тока J и сопротивлений R_2 и R_4 эквивалентным последовательным соединением ЭДС $E_2 = R_2 J = 16$ В и $E_4 = R_4 J = 10$ В с соответствующими сопротивлениями R_2 и R_4 (рисунок 3.24, б).

В результате эквивалентных преобразований получим схему на рисунке 3.25. Токи в ветвях с сопротивлениями R_2 и R_4 этой схемы будут отличаться от токов в исходной схеме, поэтому обозначим их I'_2 и I'_4 .

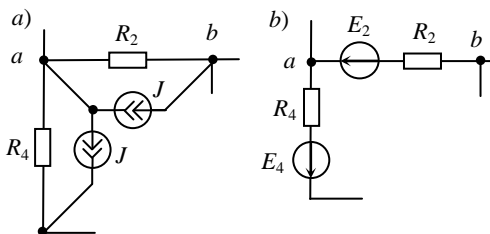


Рисунок 3.24

Выберем независимые контуры и направим в них контурные токи I_{11} , I_{22} и I_{33} . Запишем систему уравнений относительно неизвестных контурных токов в матричной форме и найдем ее решение.

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix},$$

где $R_{11} = R_1 + r_{01} + R_2 + R_3 = 34$ Ом;
 $R_{22} = R_2 + R_4 + r_{05} + R_5 = 21$ Ом;
 $R_{33} = R_3 + R_6 + r_{05} + R_5 = 28$ Ом;
 $R_{12} = R_{21} = -R_2 = -8$ Ом;
 $R_{13} = R_{31} = R_3 = 14$ Ом;

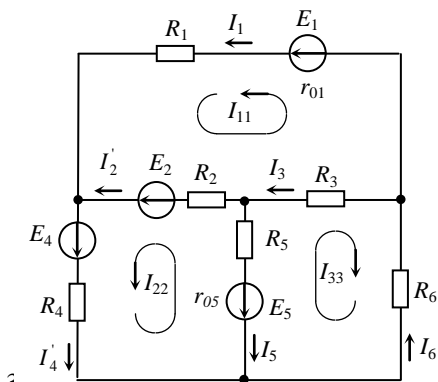


Рисунок 3.25

$$\begin{aligned}
 R_{23} = R_{32} &= r_{05} + R_5 = 8 \text{ Ом}; \\
 E_{11} = E_1 - E_2 &= -4 \text{ В}; \\
 E_{22} = E_2 + E_4 - E_5 &= 18 \text{ В}; \\
 E_{33} = -E_5 &= -8 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений выполним методом Крамера. Найдем определитель матрицы сопротивлений

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -8 & 14 \\ -8 & 21 & 8 \\ 14 & 8 & 28 \end{vmatrix} = 1,012 \cdot 10^4 \text{ Ом}^3,$$

а также следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & 14 \\ 18 & 21 & 8 \\ -8 & 8 & 28 \end{vmatrix} = 6,816 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -4 & 14 \\ -8 & 18 & 8 \\ 14 & -8 & 28 \end{vmatrix} = 1,534 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -8 & -4 \\ -8 & 21 & 18 \\ 14 & 8 & -8 \end{vmatrix} = -1,068 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2.$$

Находим контурные токи:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,674 \text{ А}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,516 \text{ А}; \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1,056 \text{ А}.$$

Токи ветвей схемы 3.25:

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_{11} &= 0,674 \text{ А}; \quad I_2' = -I_{11} + I_{22} = 0,842 \text{ А}; \quad I_3 = -I_{11} - I_{33} = 0,382 \text{ А}; \\
 I_4' &= I_{22} = 1,516 \text{ А}; \quad I_5 = -I_{22} - I_{33} = -0,46 \text{ А}; \quad I_6 = -I_{33} = 1,056 \text{ А}.
 \end{aligned}$$

Вернемся к исходной схеме и определим токи во второй и четвертой ветвях по первому закону Кирхгофа:

$$I_2 = I_3 - I_5 - J = -1,158 \text{ А}; \quad I_4 = I_1 + I_2 = -0,484 \text{ А}.$$

Проверим правильность результатов расчета по балансу электрических мощностей. Найдем напряжение U_J на зажимах источника тока:

$$U_J = -R_2 I_2 - R_4 I_4 = 11,684 \text{ В}.$$

Истинные направления токов I_2 и I_4 противоположны предварительно выбранным.

Из проведенных расчетов следует, что источник ЭДС E_1 и источник тока J функционируют в режиме генерирования энергии, в то время как источник ЭДС E_5 ее потребляет.

$$\text{Мощность источников} \quad P_{\text{ист}} = E_1 I_1 - E_5 I_5 + U_J J = 27,776 \text{ Вт}.$$

Мощность нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 (R_1 + r_{01}) + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 (R_5 + r_{05}) + I_6^2 R_6 = 27,777 \text{ Вт}.$$

Построим потенциальную диаграмму, т. е. распределение потенциалов узлов, в том числе и устранимых m и n вдоль контура $a-b-c-d-a$ (рисунок 3.26) в зависимости от сопротивлений участков, входящих в этот контур. Выделим из схемы 3.23 этот контур и укажем действительные направления токов в ветвях. Ток на любом участке схемы определяется не абсолютными значениями потенциалов точек, к которым этот участок присоединен, а их разностью. Следовательно, потенциал одной из точек схемы можно принять равным нулю. Примем, например, потенциал узла a равным нулю ($\varphi_a = 0$) и найдем потенциалы остальных точек контура:

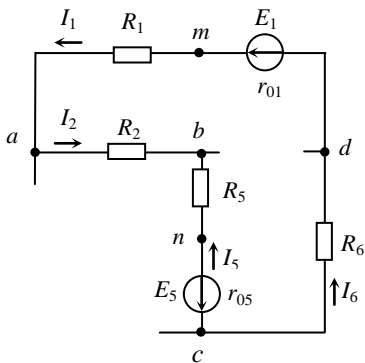


Рисунок 3.26

$$\varphi_b = -R_2 I_2 = -9,264 \text{ В}; \quad \varphi_n = \varphi_b + R_5 I_5 = -6,136 \text{ В}; \quad \varphi_c = \varphi_n + E_5 + r_{05} I_5 = 2,416 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_c - R_6 I_6 = -3,92 \text{ В}; \quad \varphi_m = \varphi_d + E_1 - r_{01} I_1 = 7,406 \text{ В}; \quad \varphi_a = \varphi_m - R_1 I_1 = -0,008 \text{ В}.$$

димостей ветвей, непосредственно соединяющих эти узлы; взаимную проводимость всегда берут со знаком "минус"; при этом

$$G_{km} = G_{mk};$$

$$J_y^{(k)} = \sum_k EG + \sum_k J - \text{узловой ток } k\text{-го узла, состоящий из слагаемых:}$$

$\sum_k EG$ – алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей, присоединенных к узлу k , на их проводимости; при этом со знаком "плюс"

берутся те ЭДС, которые действуют в направлении узла k , а со знаком "минус" – в направлении от узла k ;

$\sum_k J$ – алгебраическая сумма токов источников тока, присоединенных к

узлу k ; эти токи берутся со знаком "плюс", если они направлены к узлу k , и со знаком "минус" при их направлении от узла k .

Система уравнений узловых потенциалов (3.25) может быть записана в матричной форме

$$[G][\varphi] = [J^{(y)}], \quad (3.26)$$

где $[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1k} & \dots & -G_{1m} \\ -G_{21} & G_{22} & \dots & -G_{2k} & \dots & -G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{k1} & -G_{k2} & \dots & G_{kk} & \dots & -G_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{m1} & -G_{m2} & \dots & -G_{mk} & \dots & G_{mm} \end{bmatrix};$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_k \\ \dots \\ \varphi_m \end{bmatrix}; \quad [J^{(y)}] = \begin{bmatrix} J_y^{(1)} \\ J_y^{(2)} \\ \dots \\ J_y^{(k)} \\ \dots \\ J_y^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Решив уравнение (3.26) относительно матрицы $[\varphi]$, получим

$$[\varphi] = [G]^{-1} [J^{(y)}]. \quad (3.27)$$

Порядок расчета

1 Пронумеровать узлы электрической схемы и принять потенциал одного из узлов (базисного) равным нулю, т. е. условно заземлить его.

2 Составить систему уравнений относительно потенциалов незаземленных узлов в соответствии с системой уравнений (3.25).

3 Решая полученную систему уравнений, найти потенциалы узлов.

4 Определить токи в ветвях по закону Ома.

Методом узловых потенциалов целесообразно пользоваться в том случае, когда число уравнений будет меньше числа уравнений, составленных по методу контурных токов.

Пример 3.6 Найти токи в ветвях схемы на рисунке 3.28 методом узловых потенциалов.

Дано: $E_1 = 8 \text{ В}$, $E_3 = 6 \text{ В}$,
 $E_4 = 12 \text{ В}$, $J_3 = 3 \text{ А}$, $J_4 = 4 \text{ А}$,
 $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 6 \text{ Ом}$,
 $R_4 = 5 \text{ Ом}$.

Решение. Обозначим цифрами узлы схемы и примем потенциал базисного узла 3 равным нулю. Составим систему уравнений

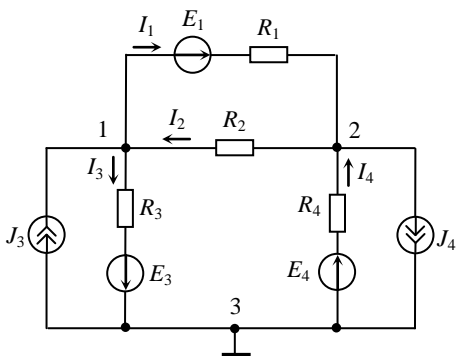


Рисунок 3.28

относительно неизвестных потенциалов φ_1 и φ_2 узлов 1 и 2:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_y^{(1)} \\ J_y^{(2)} \end{bmatrix},$$

где $G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 0,75 \text{ См}$;

$G_{22} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_4 = 0,783 \text{ См}$;

$G_{12} = G_{21} = -(1/R_1 + 1/R_2) = -0,583 \text{ См}$;

$J_y^{(1)} = -E_1/R_1 - E_3/R_3 + J_3 = -0,667 \text{ См}$;

$J_y^{(2)} = E_1/R_1 + E_4/R_4 - J_4 = 1,067 \text{ См}$.

Решая полученную систему уравнений, найдем потенциалы узлов:

$$\varphi_1 = 0,404 \text{ В}, \quad \varphi_2 = 1,663 \text{ В}.$$

Сопоставляя значения потенциалов узлов с ЭДС ветвей, найдем значения и направления токов (укажем их стрелками) ветвей схемы по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = 2,247 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = 0,315 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 + E_3}{R_3} = 1,067 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{-\varphi_2 + E_4}{R_4} = 2,067 \text{ А}.$$

Если какая-либо ветвь электрической цепи имеет только идеальный источник ЭДС, внутреннее сопротивление которого равно нулю, то напряжение между узлами, к которым присоединена эта ветвь, будет равно этой ЭДС. В этом случае целесообразно в качестве базисного узла выбрать один из узлов данной ветви.

Можно также избавиться от этой особой ветви, произведя эквивалентные преобразования схемы путем переноса источника ЭДС через узел.

Пример 3.7 Определить токи в ветвях электрической цепи (схема на рисунке 3.29) методом узловых потенциалов, если $E_4 = 12$ В, $E_6 = 8$ В, $J_7 = 4$ А, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, $R_6 = 7$ Ом, $R_8 = 5$ Ом.

Решение. Электрическая схема содержит ветвь с идеальным источником ЭДС E_4 , которая подключена к узлам 3 и 4. Перенесем эту ЭДС через узел 4 и включим в ветви с сопротивлениями R_1 и R_8 источники ЭДС $E_1 = E_4$ и $E_8 = E_4$ соответственно (рисунок 3.30). Потенциалы узлов 1, 2, 3 и 5 при этом не изменятся, а потенциал узла 4 станет равен потенциалу узла 3. Примем равным нулю потенциал узла 5 и запишем систему уравнений для расчета потенциалов узлов 1, 2 и 3:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_y^{(1)} \\ J_y^{(2)} \\ J_y^{(3)} \end{bmatrix},$$

где $G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 0,475$ См;

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} = 0,435$$
 См;

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} = 0,467$$
 См;

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_2} = 0,125$$
 См;

$$G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_1} = 0,1$$
 См;

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = 0,1167$$
 См.

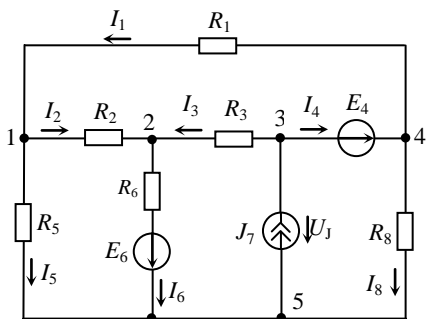


Рисунок 3.29

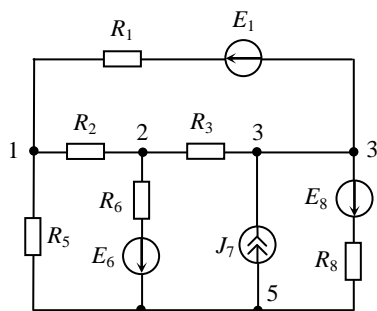


Рисунок 3.30

$$J_y^{(1)} = \frac{E_1}{R_1} = 1,2 \text{ А}; \quad J_y^{(2)} = -\frac{E_6}{R_6} = -1,143 \text{ А}; \quad J_y^{(3)} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_8}{R_8} + J_7 = 0,4 \text{ А}.$$

Решив систему уравнений, найдем искомые потенциалы узлов:

$$\varphi_1 = 2,228 \text{ В}; \quad \varphi_2 = -1,712 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 0,723 \text{ В}.$$

Переходя к исходной схеме на рисунке 3.29, определяем потенциал узла 4:

$$\varphi_4 = \varphi_3 + E_4 = 12,723 \text{ В}.$$

Далее, применяя закон Ома, находим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_1} = 1,05 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = 0,492 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_3} = 0,406 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1}{R_5} = 0,557 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{\varphi_2 - E_6}{R_6} = 0,898 \text{ А}; \quad I_8 = \frac{\varphi_4}{R_8} = 2,545 \text{ А}.$$

Ток I_4 по закону Ома вычислить нельзя, поэтому его значение найдем по первому закону Кирхгофа для узла 4: $I_4 = I_1 + I_8 = 3,595 \text{ А}$.

Проверим правильность результатов расчета токов по балансу электрических мощностей.

Напряжение U_J на полюсах источника тока равно потенциалу узла 3:

$$U_J = \varphi_3 = 0,723 \text{ В}.$$

Мощность источников энергии

$$P_{\text{ист}} = E_4 I_4 + E_6 I_6 + U_J J = 53,216 \text{ Вт}.$$

Мощность нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_8^2 R_8 = 53,221 \text{ Вт}.$$

Относительная погрешность результатов расчета:

$$\delta_p \% = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{нагр}}|}{0,5(P_{\text{ист}} + P_{\text{нагр}})} \cdot 100 \% = 0,0094 \%.$$

Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника)

Этот метод целесообразно применять при расчете тока только в одной из ветвей сложной электрической цепи. В основе метода лежит теорема об эквивалентном источнике, которая формулируется следующим образом:

“Ток в ветви ab (рисунок 3.31, a) линейной электрической цепи не изменится, если остальную часть цепи заменить эквивалентным источником напряжения (генератором напряжения) на рисунке 3.31, b , ЭДС E_{Γ} которого равна напряжению U_x на зажимах a и b разомкнутой ветви, а внутреннее сопротивление r_{Γ} равно входному сопротивлению R_{ab} схемы относительно точек a и b ”. В такой формулировке теорема носит название теоремы Тевенена – Гельмгольца.

В другом варианте теорема об активном двухполюснике (теорема Нортона) формулируется так: “Ток в ветви ab линейной электрической цепи не изменится, если остальную часть цепи заменить эквивалентным источником тока с током J_{Γ} , равным току I_k , протекающему по короткозамкнутому участку ab , и внутренним сопротивлением r_{Γ} , равным входному сопротивлению R_{ab} схемы относительно точек a и b ”.

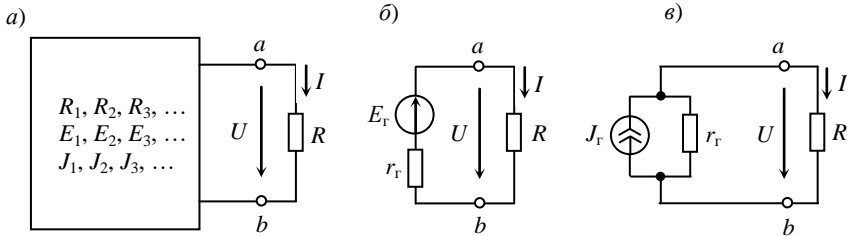


Рисунок 3.31

В соответствии с двумя вариантами теоремы активный двухполюсник может быть представлен двумя схемами замещения:

а) с источником ЭДС E_{Γ} , т. е. эквивалентным генератором напряжения (ЭГН) на рисунке 3.31, b ;

б) с источником тока J_{Γ} , т. е. эквивалентным генератором тока (ЭГТ) на рисунке 3.31, $в$.

Искомый ток в ветви ab для приведенных выше схем находят по следующим формулам:

$$I = \frac{E_{\Gamma}}{R + r_{\Gamma}} - \text{формула Тевенена – Гельмгольца,} \quad (3.28)$$

$$I = J_{\Gamma} \frac{r_{\Gamma}}{R + r_{\Gamma}} - \text{формула Нортонa.} \quad (3.29)$$

При расчете электрических цепей методом эквивалентного генератора операции выполняют в следующем порядке.

Метод эквивалентного генератора напряжений

1 Произвести разрыв схемы электрической цепи в точках присоединения элемента, ток через который требуется определить.

2 Рассчитать напряжение U_x между точками разрыва (напряжение холостого хода), которое будет равно ЭДС E_{Γ} эквивалентного генератора. Расчет схемы в режиме холостого хода для определения U_x можно выполнить любым способом.

3 Определить внутреннее сопротивление r_{Γ} эквивалентного генератора, которое равно входному сопротивлению пассивной цепи относительно точек a и b исходной схемы при условии, что источники ЭДС заменены короткозамкнутыми участками, а источники тока – разрывами цепи.

4 Найти искомый ток по формуле (3.28).

Метод эквивалентного генератора тока

1 Элемент, ток через который требуется найти, заменить короткозамкнутым участком.

2 Определить ток I_k на этом участке, который будет равен току J_{Γ} эквивалентного генератора тока.

3 Рассчитать внутреннее сопротивление r_{Γ} эквивалентного генератора, которое находят точно так же, как в рассмотренном выше методе ЭГН.

4 Найти искомый ток по формуле (3.29).

Пример 3.8 Методом эквивалентного генератора определить ток I_6 схемы электрической цепи на рисунке 3.32, *a*.

Дано: $E_1 = 15$ В, $E_4 = 20$ В, $E_6 = 18$ В, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 16$ Ом, $R_3 = 13$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 18$ Ом, $R_6 = 24$ Ом.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора напряжения. Обозначим направление искомого тока I_6 на исходной схеме. Отключим сопротивление R_6 от схемы и определим напряжение U_x между точками a и b . С этой целью рассчитаем полученную схему (рисунок 3.32, *б*) методом узловых потенциалов. Схема имеет два узла, потенциал одного из которых, например узла 2, примем равным нулю ($\varphi_2 = 0$).

Составим уравнение для определения потенциала φ_1 узла 1:

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5} \right) \varphi_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} + \frac{E_4}{R_4 + R_5}.$$

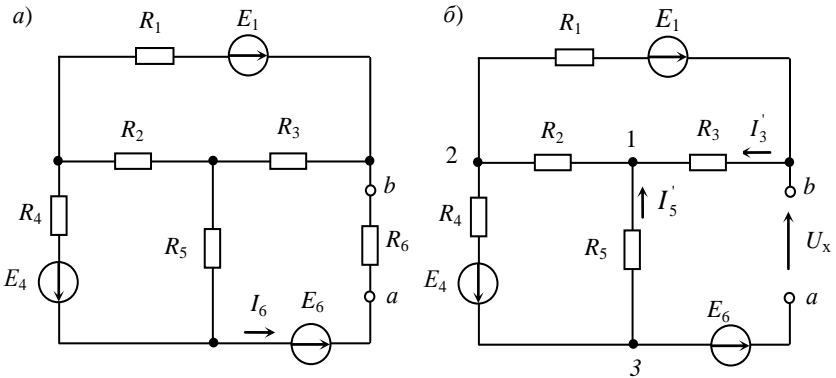


Рисунок 3.32

Решая уравнение, найдем потенциал $\varphi_1 = 9,082$ В, а затем токи I'_3 и I'_5 по закону Ома:

$$I'_3 = \frac{-\varphi_1 + E_1}{R_1 + R_3} = 0,237 \text{ А}; \quad I'_5 = \frac{-\varphi_1 + E_4}{R_4 + R_5} = 0,331 \text{ А}.$$

Обойдя контур $a-b-1-3-a$ по второму закону Кирхгофа, найдем напряжение U_X на зажимах ab :

$$U_X = E_6 + R_5 I'_5 - R_3 I'_3 = 20,878 \text{ В}.$$

Найденное значение U_X равно ЭДС эквивалентного генератора: $E_T = U_X$.

Для определения второго параметра эквивалентного генератора (внутреннего сопротивления r_T) вычислим входное сопротивление схемы на рисунке 3.32, б относительно точек a и b . Источники ЭДС при этом из схемы удаляются и заменяются короткозамкнутыми участками (рисунок

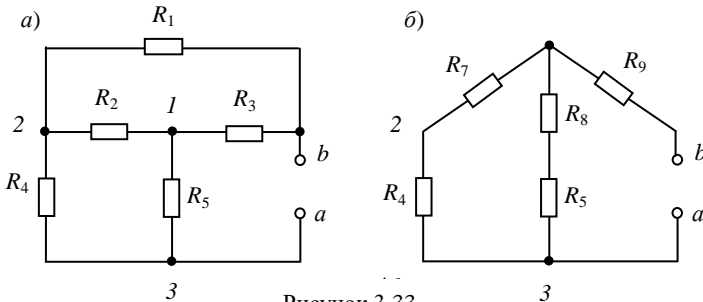


Рисунок 3.33

3.33, а).

Заменяем треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_3 эквивалентной звездой (рисунок 3. 33, б) с сопротивлениями

$$R_7 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 4,683 \text{ Ом}; \quad R_8 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 5,073 \text{ Ом};$$

$$R_9 = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 3,805 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление схемы

$$R_{ab} = \frac{(R_7 + R_4)(R_8 + R_5)}{R_7 + R_4 + R_8 + R_5} + R_9 = 14,427 \text{ Ом}.$$

Оно равно внутреннему сопротивлению r_{Γ} эквивалентного генератора.

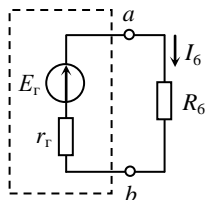


Рисунок 3.34

Таким образом, вычислив параметры эквивалентного генератора напряжения (выделен пунктиром на рисунке 3.34), найдем значение искомого тока по формуле обобщенного закона Ома:

$$I_6 = \frac{E_{\Gamma}}{r_{\Gamma} + R_6} = 0,543 \text{ А}.$$

Метод наложения

Метод наложения (суперпозиции) заключается в том, что в линейной электрической цепи с несколькими источниками ЭДС и токов ток в любой ветви равен алгебраической сумме *частичных* токов, каждый из которых обусловлен действием одного из имеющихся в цепи источников. При использовании этого метода для расчета тока в какой-либо ветви исходной электрической схемы поочередно рассматривают *частичные* схемы, в каждой из которых действует только один источник. Остальные идеальные источники ЭДС заменяют короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками токов разрываются. Искомый ток в ветви определяют алгебраическим суммированием найденных значений частичных токов.

Следует иметь в виду, что принцип наложения неприменим для квадратичных форм, поэтому им нельзя пользоваться при расчете электрической мощности.

Метод наложения целесообразно применять только при расчете относительно простых линейных электрических цепей с небольшим количеством источников энергии.

Пример 3.9 Найти токи в ветвях цепи, схема которой дана на рисунке 3.35, а. Параметры элементов цепи: $E = 6$ В, $J = 4$ А, $R_1 = 9$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 13$ Ом.

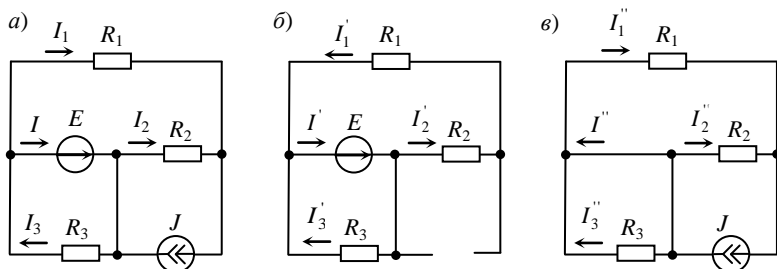


Рисунок 3.35

Решение. Произвольно выберем направления токов в ветвях исходной схемы и обозначим их. Рассмотрим две частичные схемы, в одной из которых действует источник ЭДС E (схема 3.35, б), а в другой – источник тока J (схема 3.35, в). Рассчитаем частичные токи в ветвях каждой схемы:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ А}; \quad I'_3 = \frac{E}{R_3} = 1,5 \text{ А}; \quad I' = I'_2 + I'_3 = 2,0 \text{ А};$$

$$I'' = I''_1 = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,0 \text{ А}; \quad I''_2 = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А}; \quad I''_3 = 0.$$

Вычислим истинные токи в ветвях исходной схемы в виде алгебраических сумм соответствующих частичных токов:

$$I = I' - I'' = 1 \text{ А}; \quad I_1 = -I'_1 + I''_1 = 0,5 \text{ А}; \quad I_2 = I'_2 + I''_2 = 3,5 \text{ А}; \quad I_3 = I'_3 + I''_3 = 1,5 \text{ А}.$$

3.3 Цепи синусоидального тока

Переменным током называют ток, изменяющийся во времени. Токи, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени, называются *периодическими*. На практике широкое применение находит периодический ток, являющийся синусоидальной функцией времени и называемый *синусоидальным* током.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется по формуле:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где I_m – амплитуда тока;
 $(\omega t + \psi_i)$ – фазовый угол (фаза);
 ψ_i – начальная фаза;
 ω – угловая частота, равная скорости изменения фазы тока.

Периодом T синусоидального тока называют наименьший промежуток времени, через который мгновенные значения тока повторяются. Величина, обратная периоду, называется *частотой* периодического тока

$$f = 1/T.$$

Если T измеряется в секундах, то частота измеряется в *герцах* (Гц). Связь между ω и f определяется выражением

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f.$$

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их начальных фаз называют *сдвигом фаз*. Разность фаз напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ на участке цепи обозначают φ :

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Если $\varphi = 0$, то говорят, что напряжение и ток совпадают по фазе.

Если $\varphi > 0$, то ток $i(t)$ отстает от напряжения $u(t)$ по фазе на угол φ .

Если $\varphi < 0$, то ток $i(t)$ опережает напряжение $u(t)$ по фазе на угол φ .

Если $\varphi = \pm \pi$, то говорят, что ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ находятся в противофазе.

Переменный ток характеризуется его *действующим* значением. Действующее значение переменного тока численно равно такому значению I постоянного тока, который на одном и том же сопротивлении за время одного периода произведет тот же самый тепловой эффект, что и периодический ток. Таким образом, действующее значение периодического переменного тока (действующий ток) равно его среднеквадратичному значению за период.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.30)$$

Действующее значение I и амплитуда I_m синусоидального тока связаны между собой соотношением:

$$I = I_m / \sqrt{2}. \quad (3.31)$$

Аналогичные соотношения справедливы для синусоидальных напряжений и ЭДС:

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad E = E_m / \sqrt{2}.$$

3.3.1 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами

Анализ цепей с синусоидальными источниками значительно упрощается, если синусоидальные величины (токи, напряжения, ЭДС и т. д.) изображать вращающимися векторами или комплексными числами.

Пусть синусоидальный ток изменяется по закону $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Проведем из начала прямоугольной системы координат под углом ψ_i относительно оси абсцисс вектор \bar{I}_m , длина которого в масштабе равна амплитуде тока I_m (рисунок 3.36).

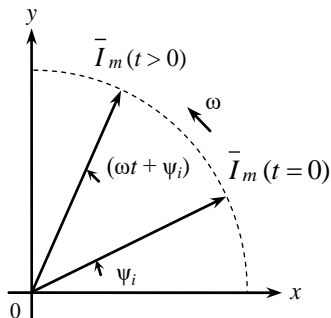


Рисунок 3.36

Проекция вектора \bar{I}_m на ось ординат $i(0) = I_m \sin \psi_i$, что соответствует мгновенному значению тока при $t = 0$. Если вектор вращать в положительном направлении (против движения часовой стрелки) с угловой частотой ω , то для произвольного момента времени t его проекция на вертикальную ось будет равна мгновенному значению тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Таким образом, для сложения двух синусоидальных токов одинаковой частоты $i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1i})$ и $i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2i})$ достаточно сложить изображающие их векторы \bar{I}_{1m} и \bar{I}_{2m} (рисунок 3.37). Проекция полученного при этом вектора $\bar{I}_m = \bar{I}_{1m} + \bar{I}_{2m}$ на вертикальную ось будет равна сумме мгновенных значений токов i_1 и i_2 :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся величины одинаковой частоты (токи, напряжения, ЭДС) в заданный момент времени, называют *векторными диаграммами*. При построении векторных диаграмм целесообразно располагать векторы для момента времени $t = 0$, т. к. взаимное расположение векторов остается неизменным для любого момента времени.

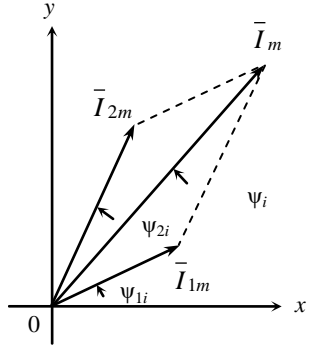


Рисунок 3.37

Применение векторных диаграмм делает анализ цепи более простым и наглядным.

Геометрические операции с векторами можно заменить операциями с комплексными числами, что существенно упрощает расчеты.

Числа вида $\underline{A} = a + jb$, где $j = \sqrt{-1}$, называются *комплексными*.

$a = \text{Re}[\underline{A}]$ – действительная часть комплексного числа \underline{A} .

$b = \text{Im}[\underline{A}]$ – мнимая часть комплексного числа \underline{A} .

Приведенная выше форма записи комплексного числа называется *алгебраической*. Комплексное число \underline{A} изображается на комплексной плоскости точкой с координатами a и jb или радиусом-вектором, проведенным из начала координат в эту точку (рисунок 3.38). Оно может быть также записано в показательной форме $\underline{A} = A e^{j\beta}$, где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ – *модуль* комплексного числа, а $\beta = \text{arc tg } b/a$ – *аргумент* комплексного числа.

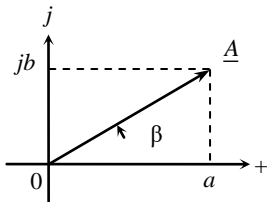


Рисунок 3.38

Комплексные числа $\underline{A} = a + jb$ и $\underline{A}^* = a - jb$ называются *комплексно-сопряженными*.

Вектору \bar{I}_m в декартовой системе координат соответствует комплексное число \underline{I}_m на комплексной плоскости. Комплексная величина $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ называется *комплексной амплитудой* тока. Вращающемуся с угловой частотой ω вектору \bar{I}_m соответствует комплексная функция времени, которая называется *комплексным мгновенным током*:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + jI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \operatorname{Re} [\underline{i}(t)] + j\operatorname{Im} [\underline{i}(t)].$$

Следовательно, синусоидальный ток $i(t)$ и его изображение комплексной величиной однозначно связаны следующим равенством:

$$i(t) = \operatorname{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}] = \operatorname{Im} [I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}] = \operatorname{Im} [I_m e^{j\omega t}] = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Функцию $e^{j\omega t}$ называют *оператором вращения*. Комплексная величина $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$, где $I = I_m / \sqrt{2}$, называется *комплексным действующим током* или просто *комплексным током*.

Таким образом, для мгновенного значения тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ можно записать комплексную амплитуду и комплексный ток. И наоборот, если задана комплексная амплитуда тока \underline{I}_m (комплексный ток \underline{I}), то известны амплитуда (действующее значение) и начальная фаза тока.

Из вышесказанного следует, что комплексная амплитуда тока \underline{I}_m , комплексный ток \underline{I} и комплексный мгновенный синусоидальный ток $\underline{i}(t)$ являются изображениями синусоидального тока $i(t)$.

Метод расчета цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций времени комплексными числами, называется *методом комплексных амплитуд* или *комплексным методом* расчета. При этом параметр времени t можно исключить из расчета.

3.3.2 Мощность в цепи синусоидального тока

Произведение мгновенного значения приложенного к цепи напряжения $u(t)$ и мгновенного значения проходящего по цепи тока $i(t)$ называют *мгновенной мощностью*:

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (3.32)$$

Среднее значение мгновенной мощности за период называется *активной мощностью*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi. \quad (3.33)$$

Активная мощность измеряется в *ваттах* (Вт) и характеризует энергию, которая передается от источника к нагрузке, где она превращается в другие виды энергии.

Множитель $\cos\varphi$ называют *коэффициентом мощности*. Чем больше $\cos\varphi$, тем больше активная мощность при заданных действующих значениях напряжения U и тока I .

Произведение действующих значений напряжения U и тока I называют *полной мощностью*:

$$S = UI. \quad (3.34)$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (ВА) и характеризует предельную мощность источника при $\cos\varphi = 1$.

При расчетах электрических цепей используется также понятие *реактивной мощности*:

$$Q = UI\sin\varphi. \quad (3.35)$$

Реактивная мощность характеризует энергию, которая периодически циркулирует между источником и нагрузкой. Она измеряется в *вольт-амперах реактивных* (вар). При индуктивной нагрузке ($\varphi > 0$) реактивная мощность положительна, а при емкостной нагрузке ($\varphi < 0$) отрицательна.

Активная P , реактивная Q и полная S мощности связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника (треугольника мощностей):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad P = S \cos\varphi; \quad Q = S \sin\varphi. \quad (3.36)$$

Произведение комплексного напряжения \underline{U} и комплексного тока \underline{I}^* , сопряженного с комплексным током \underline{I} , называют *комплексной мощностью*:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} \cos\varphi + jS \sin\varphi = P + jQ. \quad (3.37)$$

Пример 3.10 К цепи на рисунке 3.39 приложено напряжение $u(t) = 200 \sin(\omega t - 30^\circ)$ В промышленной частоты ($f = 50$ Гц). Параметры элементов схемы: $r_1 = 120$ Ом, $r_2 = 80$ Ом, $L_1 = 286,48$ мГн, $L_3 = 477,46$ мГн, $C_2 = 31,83$ мкФ. Требуется:

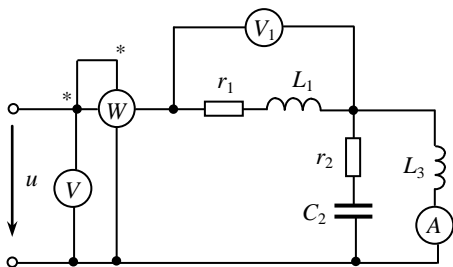


Рисунок 3.39

1 Найти комплексные и мгновенные значения токов в ветвях.

2 Составить баланс мощностей.

3 Определить показания измерительных приборов электродинамической (ваттметра) и электромагнитной (амперметра и вольтметра) систем, включенных в цепь.

4 Построить топографическую диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

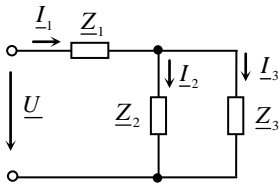


Рисунок 3.40

Решение. Начертим расчетную электрическую схему (рисунок 3.40) и рассчитаем токи ветвей методом комплексных амплитуд.

Вычислим сопротивления реактивных элементов схемы:

$$x_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 90 \text{ Ом};$$

$$x_{L3} = \omega L_3 = 2\pi f L_3 = 150 \text{ Ом};$$

$$x_{C2} = 1/\omega C_2 = 1/2\pi f C_2 = 100 \text{ Ом}.$$

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_{L1} = 120 + j90 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = r_2 - jx_{C2} = 80 - j100 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = jx_{L3} = j150 \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда напряжения на входе цепи:

$$\underline{U}_m = 200 e^{-j30^\circ} = 173,21 - j100 \text{ В}.$$

Комплексное входное сопротивление схемы:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 322,25 + j113,6 \text{ Ом}.$$

Находим комплексные амплитуды токов:

$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = 0,381 - j0,445 = 0,585 e^{-j49,4^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{I}_{1m} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 0,92 + j0,139 = 0,93 e^{j8,6^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3m} = \underline{I}_{1m} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = -0,539 - j0,583 = 0,794 e^{-j132,7^\circ} \text{ А}.$$

Запишем выражения для мгновенных значений токов ветвей:

$$i_1(t) = \text{Im}[\underline{I}_{1m} e^{j\omega t}] = 0,585 \sin(\omega t - 49,4^\circ) \text{ А};$$

$$i_2(t) = \text{Im}[I_{2m}e^{j\omega t}] = 0,93 \sin(\omega t + 8,6^\circ) \text{ A};$$

$$i_3(t) = \text{Im}[I_{3m}e^{j\omega t}] = 0,794 \sin(\omega t - 132,7^\circ) \text{ A}.$$

Комплексные токи ветвей находим, используя соотношение (3.31):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_{1m}}{\sqrt{2}} = 0,414 e^{-j49,4^\circ} = 0,269 - j0,314 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_{2m}}{\sqrt{2}} = 0,658 e^{j8,6^\circ} = 0,65 + j0,0986 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{I}_{3m}}{\sqrt{2}} = 0,56 e^{-j132,8^\circ} = -0,381 - j0,413 \text{ A}.$$

Комплексное входное напряжение:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = 141,42 e^{-j30^\circ} = 122,47 - j70,71 \text{ В}.$$

Составим баланс электрических мощностей.

Комплексная мощность источника:

$$\underline{S}_{ист} = \underline{U} \underline{I}_1^* = (122,47 - j70,71)(0,269 + j0,314) = 55,148 + j19,436 \text{ ВА}.$$

$$P_{ист} = 55,148 \text{ Вт}, \quad Q_{ист} = 19,436 \text{ вар}.$$

Комплексная мощность нагрузки:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{нагр} &= I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_3 = 0,414^2 (120 + j90) + 0,658^2 (80 - j100) + \\ &+ 0,561^2 (j150) = 55,133 + j19,435 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

$$P_{нагр} = 55,133 \text{ Вт}, \quad Q_{нагр} = 19,435 \text{ вар}.$$

Найдем относительную погрешность расчета активной δ_P и реактивной δ_Q мощностей:

$$\delta_P = \frac{|P_{ист} - P_{нагр}|}{0,5(P_{ист} + P_{нагр})} \cdot 100 \% = 0,027 \%;$$

$$\delta_Q = \frac{|Q_{\text{ист}} - Q_{\text{нагр}}|}{0,5(Q_{\text{ист}} + Q_{\text{нагр}})} \cdot 100 \% = 0,0051 \%$$

Определяем показания измерительных приборов. Вольтметр V покажет действующее значение входного напряжения:

$$U_V = 141,42 \text{ В,}$$

а показание вольтметра V_1 составит:

$$U_{V1} = I_1 \sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2} = 0,414 \sqrt{120^2 + 90^2} \text{ В.}$$

Амперметр A измеряет действующий ток I_3 , т. е.

$$I_A = I_3 = 0,56 \text{ А.}$$

Показание ваттметра

$$P_W = \text{Re}[U I_1^*] = 55,148 \text{ Вт.}$$

Построим векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений схемы. Для построения топографической диаграммы напряжений обозначим буквами a, b, c, d, e узлы (включая устранимые) исследуемой схемы (рисунок 3.41). Отложим из начала координат на рисунке 3.42 векторы токов в масштабе $m_i = 0,2 \text{ А/см}$. Примем потенциал точки e равным нулю ($\varphi_e = 0$) и вычислим комплексные потенциалы остальных точек:

$$\underline{\varphi}_d = -jx_{C2} I_2 = -j100(0,65 + j0,0986) = 9,86 - j65 \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_c = jx_{L3} I_3 = j150(-0,381 - 0,4125j) = 61,875 - j57,15 \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + jx_{L1} I_1 = 61,875 - j57,15 + j90(0,269 - j0,314) = 90,135 - j32,94 \text{ В;}$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + r_1 I_1 = 122,415 - j70,62 = 141,32 e^{-j30^\circ} \text{ В;}$$

Отметим на комплексной плоскости в масштабе $m_u = 25 \text{ В/см}$ найденные потенциалы узлов, при этом каждой точке схемы соответствует определенная точка на топографической диаграмме. Соединив

соответствующие точки, получим векторы комплексных напряжений элементов заданной схемы.

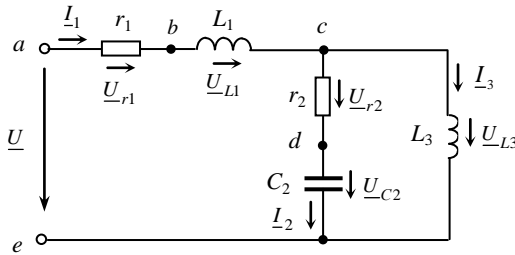


Рисунок 3.41

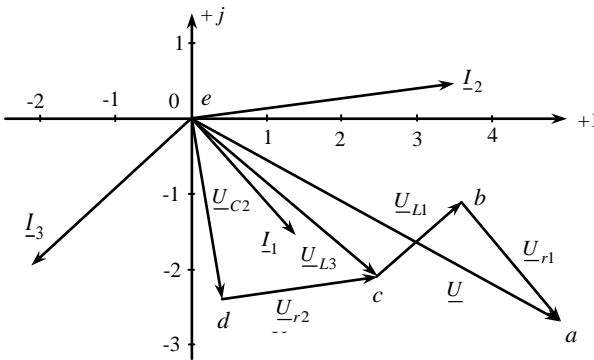


Рисунок 3.42

Следует обратить внимание на то, что векторы напряжений направлены относительно точек топографической диаграммы противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек схемы.

3.3.3 Цепи с индуктивно связанными элементами

Если в электрической цепи есть катушки, магнитные поля которых оказывают друг на друга взаимное влияние, то такая цепь называется *цепью с индуктивно связанными элементами*. Напряжение на зажимах любой из таких катушек зависит от изменения не только тока, проходящего через данную катушку, но и от токов, проходящих через другие индуктивно связанные с ней катушки. Это явление называется *явлением взаимной индукции*.

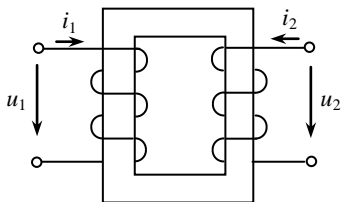


Рисунок 3.43

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, размещенные на общем сердечнике (рисунок 3.43). Если к первой из них подключить источник синусоидального напряжения u_1 , то в ней будет проходить синусоидальный ток i_1 . Он создает магнитное поле, которое будет пересекать витки первой катушки и частично витки второй. При этом в

первой катушке будет наводиться ЭДС самоиндукции $e_{1L} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$, а во второй – ЭДС взаимной индукции $e_{2M} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$, где M_{21} – взаимная индуктивность, измеряемая в генри (Гн). Имеет место и обратное влияние. При протекании тока i_2 во второй катушке под действием источника напряжения u_2 в ней будет наводиться ЭДС самоиндукции $e_{2L} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$, а в первой – ЭДС взаимной индукции $e_{1M} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$. Согласно принципу взаимности $M_{12} = M_{21} = M$.

В зависимости от направления токов в катушках и пространственной ориентации катушек потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой катушке либо складываются (*согласное включение* катушек), либо вычитаются (*встречное включение*). На рисунке (3.43) катушки включены согласно.

Индуктированные в катушках ЭДС самоиндукции и взаимной индукции уравновешиваются приложенными к катушкам напряжениями внешних источников:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (3.38)$$

или для синусоидальных величин в комплексной форме

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2; \quad \underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1.$$

Знак „плюс“ берут при согласном включении катушек, а знак „минус“ – при встречном.

Для удобства определения вида включения на схемах электрических цепей прибегают к специальной разметке выводов индуктивно связанных элементов цепи.

Два вывода, принадлежащих двум разным индуктивно связанным катушкам цепи, называют *одноименными* и обозначают одинаковыми значками (например, * или •), руководствуясь следующим правилом: *при одинаковом направлении токов относительно одноименных выводов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции должны суммироваться.*

На рисунке (3.44, а) приведена схема согласного включения катушек, а на рисунке (3.44, б) – схема встречного включения.

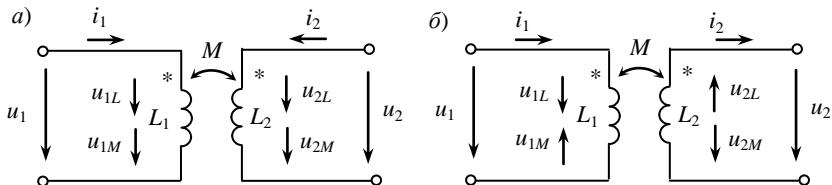


Рисунок 3.44

Степень индуктивной связи двух катушек характеризуется коэффициентом связи

$$k_c = M \sqrt{L_1 L_2}, \quad (3.39)$$

который может принимать значения от 0 до 1.

Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности можно производить, составляя уравнения по законам Кирхгофа, или методом контурных токов. Метод узловых потенциалов применять нельзя, т.к. ток в любой ветви зависит не только от ЭДС, находящегося в ней источника, и от потенциалов тех узлов, к которым ветвь присоединена, но и от токов других ветвей, которые наводят ЭДС взаимной индукции.

Эквивалентное комплексное сопротивление последовательно соединенных двух индуктивно связанных катушек (рисунок 3.45) определяется по формуле:

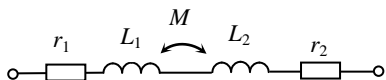


Рисунок 3.45

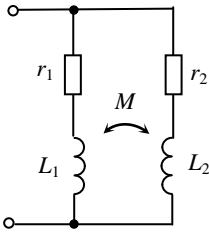
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M, \quad (3.40)$$

где $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$ – комплексное сопротивление первой катушки;

$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$ – комплексное сопротивление второй катушки;

$\underline{Z}_M = j\omega M = jx_M$ – комплексное сопротивление индуктивной связи.

В формуле (3.40) знак „плюс“ соответствует согласному включению катушек, а знак „минус“ – встречному.



При параллельном соединении индуктивно связанных катушек (рисунок 3.46) их эквивалентное комплексное сопротивление находят по формуле:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M} \quad (3.41)$$

Знак „плюс“ в знаменателе ставится при согласном включении катушек, а знак „минус“ – при встречном.

Пример 3.11 К цепи, схема которой дана на рисунке 3.47, приложено напряжение $U = 75$ В с угловой частотой $\omega = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Параметры схемы: $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = 0,1 \text{ мГн}$, $L_2 = 0,2 \text{ мГн}$, $M = 0,1 \text{ мГн}$, $C = 20 \text{ нФ}$. Найти токи ветвей.

Решение. Найдем комплексные сопротивления параллельных ветвей.

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = 100 + j50 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2 = 100 + j100 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление взаимной индукции $\underline{Z}_M = j\omega M = j50 \text{ Ом}$.

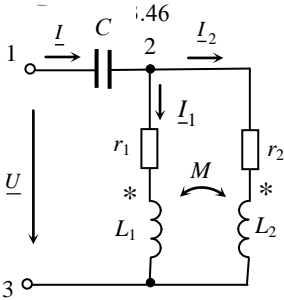


Рисунок 3.47

Входное комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = -j \frac{1}{\omega C} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M} = 52,941 - j38,235.$$

Входной ток цепи $\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = 0,931 + j0,672 = 1,148 e^{j35,8^\circ} \text{ А}$.

Напряжение между узлами 2 и 3 $U_{23} = U + j \frac{1}{\omega C} I = 7,759 + j93,103 \text{ В}$.

Расчет токов в параллельных ветвях проведем по законам Кирхгофа.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I};$$

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1,$$

Решая данную систему уравнений, находим токи:

$$\underline{I}_1 = 0,414 + j0,466 = 0,623 e^{j48,4^\circ} \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 0,517 + j0,207 = 0,557 e^{j21,8^\circ} \text{ А}.$$

3.4 Топологические графы и матрицы электрических цепей

Режим электрической цепи произвольной конфигурации полностью определяется первым и вторым законами Кирхгофа. Вид уравнений электрического состояния цепи, составленных по этим законам, зависит только от схемы соединения элементов (ветвей), т. е. от *топологической* структуры цепи, и не зависит от вида и параметров самих элементов. В таком случае ветви, содержащие различные элементы, можно представлять просто линиями, а структуру цепи – совокупностью этих линий, которая называется *графом* электрической цепи.

При машинном способе формирования уравнений, описывающих электромагнитные процессы в электрических цепях, иногда рассматривают каждый двухполюсный элемент как отдельную ветвь. В этом случае принимают во внимание все узлы, включая *устранимые*. Такое топологическое описание цепи называется расширенным. При сокращенном топологическом описании группы последовательно соединенных элементов рассматривают в качестве отдельных ветвей, а устраняемые узлы в расчет не принимаются.

Любой двухполюсный элемент или группа последовательно соединенных элементов на графе электрической цепи изображается отрезком линии, который называется *ветвью* или *ребром*. Точки соединения ветвей являются *узлами* (*вершинами*) графа. Таким образом, граф есть совокупность узлов, соединенных друг с другом ветвями. В теории электрических цепей в основном находят применение *направленные* (*ориентированные*) графы, у которых каждая ветвь имеет определенную ориентацию, указанную стрелкой. Для графов электрических цепей направление каждой ветви выбирается совпадающим с положительным направлением тока в соответствующей ветви электрической схемы.

Если ветвь и узел графа соприкасаются, то говорят, что они *инцидентны*.

Граф электрической цепи строят по ее эквивалентной схеме. Каждой ветви схемы соответствует ветвь (ребро) графа, а каждому узлу схемы – узел (вершина) графа. Ветви графа с помощью стрелок ориентируют в соответствии с положительным направлением токов, протекающих по соответствующим ветвям схемы. На топологической схеме источники ЭДС и тока не изображаются. При этом ветви с источниками ЭДС сохраняются. Ветви же с идеальными источниками тока вообще не включаются в граф схемы, т.к. сопротивление таких ветвей бесконечно велико.

Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь, схема которой дана на рисунке 3.48, и указаны направления токов в ветвях. Направленный граф этой схемы приведен на рисунке 3.49, а.

Условимся одному из узлов, называемому *базисным*, присваивать номер 0, а остальные узлы нумеровать в произвольном порядке и обозначать арабскими цифрами в кружках. Ветви графа будем нумеровать арабскими цифрами, начиная с 1, так, чтобы номера ветвей совпадали с индексами соответствующих токов на электрической схеме.

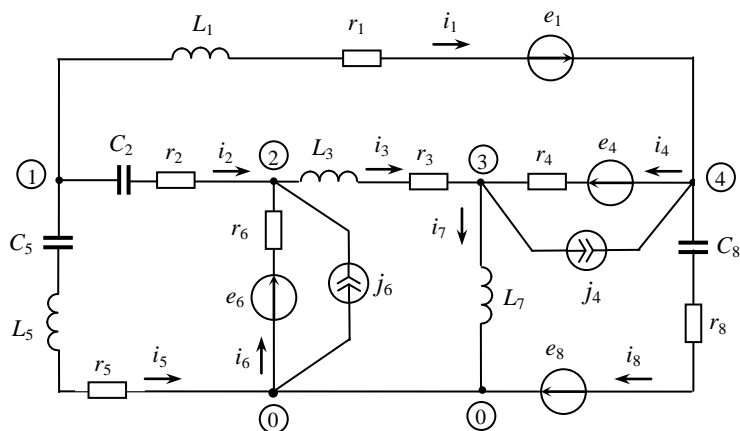


Рисунок 3.48

Любая часть графа, элементы которой являются элементами исходного графа, называется *подграфом*. Его можно получить путем удаления отдельных ветвей исходного графа. Подграфом может быть одна ветвь или один узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в данном графе. В теории электрических цепей большое значение имеют такие подграфы, как *путь*, *дерево*, *связи* и *сечение*.

Совокупность последовательно соединенных между собой ветвей, по которым можно переместиться из одного узла графа в другой, называется *путем*. Каждая ветвь и каждый узел встречаются в пути только раз. Узлы, которые соединены путем графа, называются *концевыми*. Замкнутый путь, у которого начальный и конечный концевые узлы совпадают, называют *контуром*. Каждому из узлов контура инцидентны две ветви этого контура.

Если любые два узла графа соединены путем, то граф называют *связным* (*связанным*). В противном случае граф называют *несвязным*.

Связный подграф, содержащий все узлы графа, но не содержащий ни одного контура, называют *деревом* этого графа. Ветви графа, вошедшие в дерево, называются *ветвями дерева*; ветви, не вошедшие в дерево, называются *ветвями связи* (*связями*) или *хордами* этого дерева. Ветви связи дополняют дерево до полного графа. Условимся в дальнейшем ветви дерева изображать жирными линиями, а ветви связи – тонкими. Для каждого графа можно образовать несколько деревьев, отличающихся друг от друга составом ветвей дерева. Один из таких вариантов представлен на рисунке 3.49, б.

Дерево графа можно построить следующим образом. Наметить узлы графа. Затем, начав с некоторого узла, который называется *корнем*, вычерчивать ветви дерева, соединяющие другие узлы графа, не допуская при этом образования контуров.

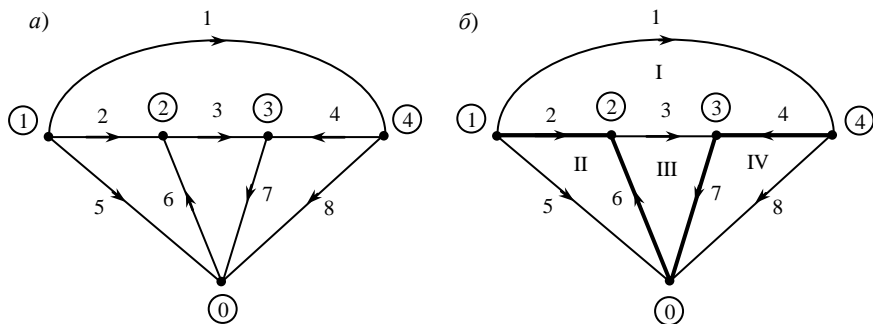


Рисунок 3.49

Добавление к дереву графа любой ветви связи образует контур. Контуры, образованные поочередным добавлением к дереву графа его ветвей связи, называются *главными* контурами.

Число главных контуров равно числу ветвей связи. Условимся номера главных контуров обозначать римскими цифрами. За направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура.

Сечением графа называют систему или множество ветвей, удаление которых разбивает граф на два несвязных подграфа, каждый из которых является связным. В частном случае один из этих подграфов может быть изолированным узлом.

Сечение можно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, которая охватывает часть цепи с одним или несколькими узлами. Ни одна из ветвей графа не должна пересекаться дважды.

Главным сечением графа называется такое сечение, в которое входит только одна ветвь выбранного дерева. Остальные ветви, входящие в главное сечение, являются ветвями связи. Количество главных сечений равно количеству ветвей дерева. За положительное направление главного сечения принимают направление ветви дерева, входящей в данное сечение, и указывают стрелкой. На рисунке 3.50 изображены главные сечения S_1 , S_2 , S_3 и S_4 графа.

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей n_b , числом узлов n_u и способом соединения ветвей между собой.

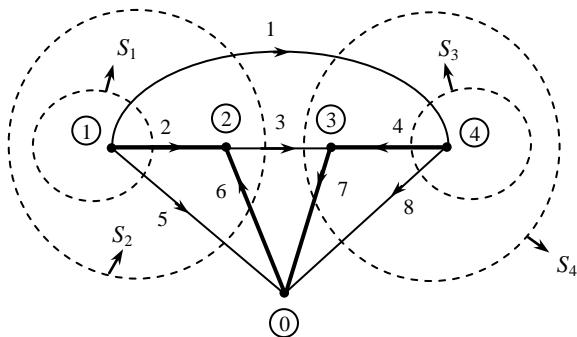


Рисунок 3.50

Топологические матрицы

Для аналитического описания структуры электрической цепи, ее графа и основных законов токораспределения применяют *топологические* матрицы.

Аналитическое представление графа необходимо для формирования уравнений сложной цепи с помощью ЭВМ.

В соответствии с видом уравнений Кирхгофа различают три топологические матрицы: *соединений* (узловую матрицу) $[A]$, *контурную* (главных контуров) $[B]$ и *главных сечений* $[Q]$.

Полное описание структуры направленного графа дает $[n_u \times n_b]$ -матрица соединений, n_u строк которой являются порядковыми номерами узлов, а n_b столбцов – номерами ветвей. Она представляет собой таблицу коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов схемы. Элемент матрицы a_{ij} , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен $+1$, если ветвь j графа соединена с узлом i и направлена от узла. Элемент матрицы $a_{ij} = -1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена к узлу. Элемент матрицы $a_{ij} = 0$, если ветвь j не присоединена к узлу i . Для графа на рисунке 3.49 получим полную матрицу соединений:

		Ветви							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$[A_0]$	1	1	1	0	0	1	0	0	0
	2	0	-1	1	0	0	-1	0	0
	3	0	0	-1	-1	0	0	1	0
	4	-1	0	0	1	0	0	0	1
		0	0	0	0	-1	1	-1	-1

(3.42)

Узлы

В каждом столбце матрицы $[A_0]$ имеется только два ненулевых элемента: $+1$ и -1 , т. к. каждая ветвь инцидентна двум узлам и направлена от одного к другому. Сумма элементов каждого столбца матрицы $[A_0]$ равна нулю, т. е. строки полной матрицы являются линейно зависимыми. Из этого следует, что достаточно заполнить таблицу для $(n_y - 1)$ узлов, которая является *редуцированной* (сокращенной) матрицей соединений $[A]$. Она получается из полной матрицы соединений путем вычеркивания строки, соответствующей выбранному базисному узлу. Вычеркивая последнюю строку в матрице (3.42), получим редуцированную матрицу соединений (узловую матрицу) $[A]$:

		Ветви							
		1	2	3	4	5	6	7	8
$[A]$	1	1	1	0	0	1	0	0	0
	2	0	-1	1	0	0	-1	0	0
	3	0	0	-1	-1	0	0	1	0
	4	-1	0	0	1	0	0	0	-1

(3.43)

Узлы

Матрица главных сечений $[Q]$ представляет собой таблицу коэффициентов, составленных по первому закону Кирхгофа для главных сечений. Строки матрицы $[Q]$ соответствуют сечениям, столбцы – ветвям. Элемент матрицы $q_{ij} = +1$, если ветвь j содержится в сечении i и ее ориентация совпадает с ориентацией сечения, т. е. ориентацией соответствующей ветви дерева относительно линии сечения. Элемент матрицы $q_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в сечении i и направлена противоположно направлению сечения. Элемент матрицы $q_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в сечении i . Запишем матрицу главных сечений для рисунка 3.50:

		Ветви								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
$[Q] =$	S_1	[1	1	0	0	1	0	0	0
	S_2		-1	0	-1	0	-1	1	0	0
	S_3		-1	0	0	1	0	0	0	1
	S_4		-1	0	-1	0	0	0	1	1
]								

(3.44)

Сечения

Матрица главных контуров (контурная матрица) $[B]$ – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки матрицы $[B]$ соответствуют главным контурам, столбцы – ветвям. Элемент матрицы $b_{ij} = +1$, если ветвь j содержится в сечении i и направление ветви совпадает с направлением обхода контура. Элемент матрицы $b_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в сечении i и направление ветви противоположно направлению обхода контура. Элемент матрицы $b_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в контуре i . Составим контурную матрицу для рисунка 3.2.3.9:

		Ветви								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
$[B] =$	I	[1	-1	0	1	0	1	1	0
	II		0	-1	0	0	1	1	0	0
	III		0	0	1	0	0	1	1	0
	IV		0	0	0	-1	0	0	-1	1
]								

(3.45)

Контуры

Матричная запись уравнений электрической цепи

Уравнения в матричной форме, описывающие электрическую цепь и базирующиеся на законах Кирхгофа, получаются более удобными при введении понятия *обобщенной ветви*. В общем случае такая ветвь может содержать пассивные элементы (r_k , L_k , C_k), идеальный источник синусоидальной ЭДС $e_k(t)$ и идеальный источник синусоидального тока $j_k(t)$, соединенных между собой, как показано на рисунке 3.51, *а*. В комплексной форме обобщенная ветвь приведена на рисунке 3.51, *б*.

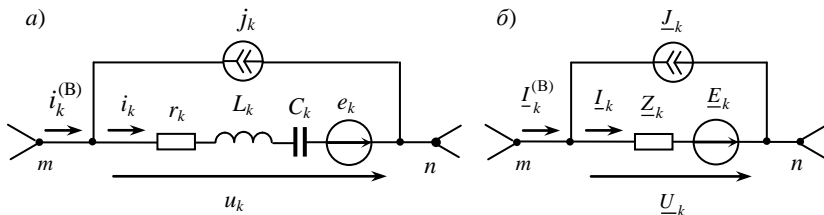


Рисунок 3.51

Для обобщенной k -й ветви с комплексным сопротивлением $\underline{Z}_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$ справедливы соотношения

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k (\underline{I}_k^{(B)} + \underline{J}_k) - \underline{E}_k; \quad (3.46)$$

$$\underline{I}_k^{(B)} = \underline{Y}_k (\underline{U}_k + \underline{E}_k) - \underline{J}_k, \quad (3.47)$$

где $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ – комплексная проводимость обобщенной ветви.

Уравнения (3.46) и (3.47) представляют собой аналитическое выражение закона Ома для обобщенной ветви и называются *компонентными уравнениями*.

При вычерчивании графа электрической схемы каждая обобщенная ветвь изображается одной линией (ребром), а информация о ее внутренней структуре в граф не входит. Таким образом, представляется компонентным уравнением в форме $u(i)$ или $i(u)$.

При формировании системы независимых уравнений по первому закону Кирхгофа составляются уравнения для всех узлов, кроме базисного, или для главных сечений. По второму закону Кирхгофа уравнения записываются только для главных контуров.

Если для токов и напряжений обобщенных ветвей ввести в рассмотрение матричные векторы

$$[\underline{I}^{(B)}] = [\underline{I}_1^{(B)} \ \underline{I}_2^{(B)} \ \dots \ \underline{I}_k^{(B)} \ \dots \ \underline{I}_{nB}^{(B)}]^T$$

и

$$[\underline{U}] = [\underline{U}_1 \ \underline{U}_2 \ \dots \ \underline{U}_k \ \dots \ \underline{U}_{nB}^{(B)}]^T,$$

то систему независимых структурных уравнений можно записать в матричной форме:

$$[A][\underline{I}^{(B)}] = [0] \text{ – первый закон Кирхгофа для узлов,} \quad (3.48)$$

$$[Q][\underline{I}^{(B)}] = [0] \text{ – первый закон Кирхгофа для главных сечений,} \quad (3.49)$$

$$[B][\underline{U}] = [0] \text{ – второй закон Кирхгофа для главных контуров,} \quad (3.50)$$

где $[0]$ – нулевой вектор.

Соотношение (3.46) можно записать для всех n_B ветвей схемы с использованием матриц.

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_k \\ \dots \\ \underline{U}_{nB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{nB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(B)} + \underline{J}_1 \\ \underline{I}_2^{(B)} + \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_k^{(B)} + \underline{J}_k \\ \dots \\ \underline{I}_{nB}^{(B)} + \underline{J}_{nB} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{E}_k \\ \dots \\ \underline{E}_{nB} \end{bmatrix}$$

или
$$[\underline{U}] = [\underline{Z}][\underline{I}^{(B)}] + [\underline{J}] - [\underline{E}], \quad (3.51)$$

где $[\underline{E}]$ – матрица ЭДС источников напряжения обобщенных ветвей,

$[\underline{J}]$ – матрица токов источников тока обобщенных ветвей,

$[\underline{Z}]$ – матрица комплексных сопротивлений обобщенных ветвей,

$[\underline{I}^{(B)}]$ – матрица токов обобщенных ветвей,

$[\underline{I}]$ – матрица токов ветвей.

Аналогичным образом можно получить матричное уравнение, соответствующее соотношению (3.47).

$$[\underline{I}^{(B)}] = [\underline{Y}][\underline{U}] + [\underline{E}] - [\underline{J}], \quad (3.52)$$

где $[\underline{Y}] = \text{diag}[\underline{Y}_1 \ \underline{Y}_2 \ \dots \ \underline{Y}_k \ \dots \ \underline{Y}_{nB}]$ – диагональная матрица комплексных проводимостей обобщенных ветвей.

В матрице комплексных проводимостей элемент $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$, поэтому матрицы $[\underline{Z}]$ и $[\underline{Y}]$ взаимно обратимы, т. е.

$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} \text{ и } [\underline{Z}] = [\underline{Y}]^{-1}.$$

Контурные уравнения в матричной форме

В качестве независимых переменных примем токи, циркулирующие по главным контурам и называемые *контурными*. Зная контурные токи, легко найти токи во всех ветвях схемы.

Для исследуемой схемы на рисунке 3.48 направим контурные токи $\underline{I}_1^{(k)}, \underline{I}_2^{(k)}, \underline{I}_3^{(k)}$ и $\underline{I}_4^{(k)}$ по главным контурам

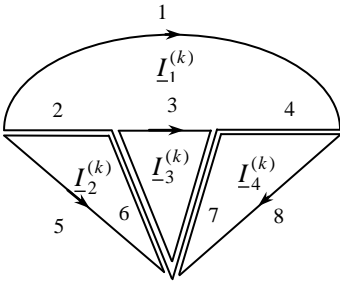


Рисунок 3.52

в направлениях, заданных ветвями связи (рисунок 3.52). Выразим токи обобщенных ветвей схемы через соответствующие контурные токи:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1^{(B)} &= \underline{I}_1^{(k)}; \quad \underline{I}_2^{(B)} = -\underline{I}_1^{(k)} - \underline{I}_2^{(k)}; \\ \underline{I}_3^{(B)} &= \underline{I}_3^{(k)}; \quad \underline{I}_4^{(B)} = \underline{I}_1^{(k)} - \underline{I}_4^{(k)}; \\ \underline{I}_5^{(B)} &= \underline{I}_2^{(k)}; \quad \underline{I}_6^{(B)} = \underline{I}_1^{(k)} + \underline{I}_2^{(k)} + \underline{I}_3^{(k)}; \\ \underline{I}_7^{(B)} &= \underline{I}_1^{(k)} + \underline{I}_3^{(k)} - \underline{I}_4^{(k)}; \quad \underline{I}_8^{(B)} = \underline{I}_4^{(k)}. \end{aligned}$$

Запишем эти соотношения в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(B)} \\ \underline{I}_2^{(B)} \\ \underline{I}_3^{(B)} \\ \underline{I}_4^{(B)} \\ \underline{I}_5^{(B)} \\ \underline{I}_6^{(B)} \\ \underline{I}_7^{(B)} \\ \underline{I}_8^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(k)} \\ \underline{I}_2^{(k)} \\ \underline{I}_3^{(k)} \\ \underline{I}_4^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad [\underline{I}^{(B)}] = [B] \text{T} [\underline{I}^{(k)}], \quad (3.53)$$

где $[\underline{I}^{(k)}] = [\underline{I}_1^{(k)} \quad \underline{I}_2^{(k)} \quad \underline{I}_3^{(k)} \quad \underline{I}_4^{(k)}] \text{T}$ – матрица контурных токов.

Умножим слева обе части выражения (3.51) на матрицу главных контуров $[B]$:

$$[B][\underline{U}] = [B][\underline{Z}][\underline{I}^{(B)}] + [B][\underline{Z}][J] - [B][\underline{E}].$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа (3.50) $[B][\underline{U}] = [0]$. Таким образом,

$$[B][\underline{Z}][\underline{I}^{(B)}] = [B][\underline{E}] - [B][\underline{Z}][J].$$

Выражая токи обобщенных ветвей через контурные токи согласно соотношению (3.53), получим контурные уравнения в матричной форме:

$$[B][Z][B]^T[I^{(k)}] = [B][E] - [B][Z][J]. \quad (3.54)$$

Если ввести обозначения

$$[\underline{Z}^{(k)}] = [B][Z][B]^T \text{ и } [\underline{E}^{(k)}] = [B][E] - [B][Z][J],$$

то контурные уравнения можно записать в компактной форме:

$$[\underline{Z}^{(k)}][I^{(k)}] = [\underline{E}^{(k)}]. \quad (3.55)$$

Матрицу $[\underline{Z}^{(k)}]$ называют *матрицей контурных сопротивлений*, а матрицу $[\underline{E}^{(k)}]$ – *матрицей контурных ЭДС*.

Узловые уравнения в матричной форме

Выразим напряжения обобщенных ветвей схемы на рисунке 3.48, направление которых задано графом схемы (рисунок 3.49, а), через потенциалы узлов с учетом того, что базисный узел 0 имеет нулевой потенциал.

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \varphi_1 - \varphi_4; \quad \underline{U}_2 = \varphi_1 - \varphi_2; \quad \underline{U}_3 = \varphi_2 - \varphi_3; \quad \underline{U}_4 = -\varphi_3 + \varphi_4; \\ \underline{U}_5 &= \varphi_1; \quad \underline{U}_6 = -\varphi_2; \quad \underline{U}_7 = \varphi_3; \quad \underline{U}_8 = \varphi_4. \end{aligned}$$

Запишем полученные выше соотношения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \\ \underline{U}_7 \\ \underline{U}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad [\underline{U}] = [A]^T[\varphi] \quad (3.56)$$

Умножим слева левую и правую части соотношения (3.52) на матрицу соединений $[A]$:

$$[A][\underline{I}^{(B)}] = [A][\underline{Y}][\underline{U}] + [A][\underline{Y}][\underline{E}] - [A][\underline{J}].$$

Согласно первому закону Кирхгофа (3.48) $[A][\underline{I}^{(B)}] = [0]$, следовательно,

$$[A][\underline{Y}][\underline{U}] = [A][\underline{J}] - [A][\underline{Y}][\underline{E}].$$

Если выразить напряжения ветвей через потенциалы узлов, то с учетом соотношения (3.3.22) получим уравнения вида

$$[A][\underline{Y}][A]^T[\underline{\Phi}] = [A][\underline{J}] - [A][\underline{Y}][\underline{E}], \quad (3.57)$$

которые называют *узловыми уравнениями* в матричной форме.

Если ввести обозначения

$$[\underline{Y}^{(y)}] = [A][\underline{Y}][A]^T \text{ и } [\underline{J}^{(y)}] = [A][\underline{J}] - [A][\underline{Y}][\underline{E}],$$

то узловые уравнения примут следующий вид:

$$[\underline{Y}^{(y)}][\underline{\Phi}] = [\underline{J}^{(y)}], \quad (3.58)$$

где $[\underline{Y}^{(y)}]$ – матрица узловых проводимостей, а $[\underline{J}^{(y)}]$ – матрица узловых токов.

Уравнения баланса мощностей в матричной форме

В соответствии с законом сохранения энергии и теоремой Телленджера алгебраическая сумма мощностей обобщенных ветвей изолированной электрической цепи равна нулю:

$$P = \int u(t)i^{(B)}(t) dt = 0,$$

или в матричной форме для комплексных величин

$$[\underline{U}]^T [\underline{I}^{(B)*}] = [0], \text{ где } [\underline{I}^{(B)*}] = [\underline{I}^*] - [\underline{J}^*].$$

Таким образом, получим

$$[\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} - [\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{J} \end{bmatrix} = [0],$$

откуда

$$[\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = [\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{J} \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Для обобщенных ветвей в соответствии с уравнением (3.51) можно записать

$$[\underline{U}]^T = [[\underline{Z}][\underline{I}] - [\underline{E}]]^T = [\underline{I}]^T [\underline{Z}] - [\underline{E}]^T. \quad (3.60)$$

Заменяя в уравнении (3.59) матрицу $[\underline{U}]^T$ соотношением (3.60)

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} - [\underline{E}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = [\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{J} \end{bmatrix},$$

получим

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = [\underline{E}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} + [\underline{U}]^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{J} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Левая часть полученного выражения

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 & \dots & \underline{I}_k & \dots & \underline{I}_{nB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{nB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \underline{I}_1 \\ * \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ * \\ \underline{I}_k \\ \dots \\ * \\ \underline{I}_{nB} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \dots + \underline{Z}_{nB} I_{nB}^2 = \sum_{k=1}^{nB} \underline{Z}_k I_k^2 = \underline{S}_{\text{нагр}} \quad (3.62)$$

определяет суммарную комплексную мощность, потребляемую нагрузкой.

Заменяя в последнем соотношении \underline{Z}_k суммой $r_k + jx_k$, получим

$$\sum_{k=1}^{nB} \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{nB} r_k I_k^2 + \sum_{k=1}^{nB} jx_k I_k^2 = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}},$$

т. е. $\underline{S}_{\text{нагр}} = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}}$, где $P_{\text{нагр}}$ - активная, а $Q_{\text{нагр}}$ - реактивная составляющие комплексной мощности. Правая часть соотношения (3.61)

$$\begin{aligned}
 [\underline{E}]^T [\underline{I}]^* + [\underline{U}]^T [\underline{J}]^* &= [\underline{E}_1 \underline{E}_2 \dots \underline{E}_k \dots \underline{E}_{nB}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \dots \\ \underline{I}_k^* \\ \dots \\ \underline{I}_{nB}^* \end{bmatrix} + [\underline{U}_1 \underline{U}_2 \dots \underline{U}_k \dots \underline{U}_{nB}] \begin{bmatrix} \underline{J}_1^* \\ \underline{J}_2^* \\ \dots \\ \underline{J}_k^* \\ \dots \\ \underline{J}_{nB}^* \end{bmatrix} = \\
 &= \underline{E}_1^* \underline{I}_1 + \underline{E}_2^* \underline{I}_2 + \dots + \underline{E}_k^* \underline{I}_k \dots + \underline{E}_{nB}^* \underline{I}_{nB} + \underline{U}_1^* \underline{J}_1 + \underline{U}_2^* \underline{J}_2 + \dots + \underline{U}_k^* \underline{J}_k \dots + \underline{U}_{nB}^* \underline{J}_{nB} = \\
 &= \sum_{k=1}^{nB} \underline{E}_k^* \underline{I}_k + \sum_{k=1}^{nB} \underline{U}_k^* \underline{J}_k = \underline{S}_{\text{ист}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

выражает мощность, генерируемую источниками ЭДС и источниками тока.

Равенства (3.62) и (3.63) представляют собой математическую запись баланса мощностей.

Пример 3.12 Рассчитать комплексные токи и напряжения ветвей схемы на рисунке 3.48, если ее элементы характеризуются следующими параметрами: $r_1 = 45 \text{ Ом}$, $r_2 = 28 \text{ Ом}$, $r_3 = 32 \text{ Ом}$, $r_4 = 20 \text{ Ом}$, $r_5 = 36 \text{ Ом}$, $r_6 = 24 \text{ Ом}$, $r_8 = 30 \text{ Ом}$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, $L_1 = 50 \text{ мГн}$, $L_3 = 25 \text{ мГн}$, $L_5 = 40 \text{ мГн}$, $L_7 = 35 \text{ мГн}$; $C_2 = 100 \text{ мкФ}$, $C_1 = 125 \text{ мкФ}$; $e_1(t) = 40 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ В}$, $e_4(t) = 20 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$, $e_6(t) = 50 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ В}$, $e_8(t) = 35 \sin(\omega t + 75^\circ) \text{ В}$, $j_4(t) = 2 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А}$, $j_6(t) = 6 \sin(\omega t + 25^\circ) \text{ А}$;

Решение. На рисунке 3.53 изображена комплексная схема замещения исследуемой цепи.

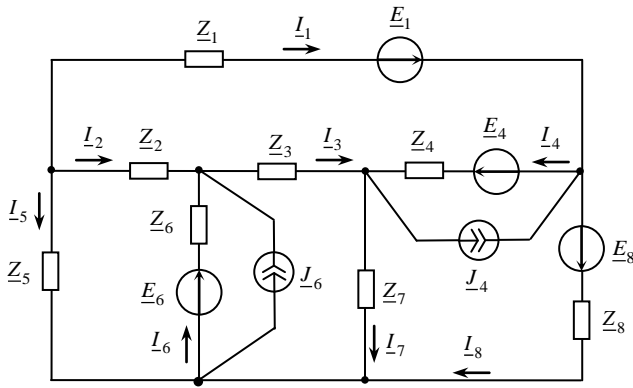


Рисунок 3.53

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 = 45 + j50 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = r_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 28 - j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 + j\omega L_3 = 32 + j25 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_4 = r_4 = 20 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = r_5 + j\omega L_5 - j \frac{1}{\omega C_5} = 36 + j32 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_6 = r_6 = 24 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_7 = j\omega L_7 = j35 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_8 = r_8 - j \frac{1}{\omega C_8} = 30 - j12,5 \text{ Ом}.$$

Определим комплексные действующие значения ЭДС и токов источников тока:

$$\underline{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} = 28,284 e^{-j60^\circ} = 14,142 - j24,495 \text{ В};$$

$$\underline{E}_4 = \frac{E_{4m}}{\sqrt{2}} = 14,142 e^{j30^\circ} = 12,247 + j7,071 \text{ В};$$

$$\underline{E}_6 = \frac{E_{6m}}{\sqrt{2}} = 35,35 e^{-j15^\circ} = 34,145 - j9,149 \text{ В};$$

$$\underline{E}_8 = \frac{E_{8m}}{\sqrt{2}} = 24,745 e^{-j30^\circ} = 21,43 - j12,373 \text{ В};$$

$$\underline{J}_4 = \frac{J_{4m}}{\sqrt{2}} = 1,414 e^{-j30^\circ} = 1,225 - j0,707 \text{ A};$$

$$\underline{J}_6 = \frac{J_{6m}}{\sqrt{2}} = 4,242 e^{j25^\circ} = 3,845 + j1,793 \text{ A}.$$

Расчет схемы проведем методом контурных токов на компьютере с использованием системы Mathcad.

Составим матрицы комплексных сопротивлений $[\underline{Z}]$ ветвей, ЭДС $[\underline{E}]$ источников напряжения и токов $[\underline{J}]$ источников тока:

$$[\underline{Z}] = \text{diag}[\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 \underline{Z}_5 \underline{Z}_6 \underline{Z}_7 \underline{Z}_8] =$$

$$= \begin{bmatrix} 45 + j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 - j10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 + j25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 + j32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 - j12,5 \end{bmatrix} \text{ Ом};$$

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{E}_4 \\ 0 \\ \underline{E}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,142 + j24,495 \\ 0 \\ 0 \\ 12,247 + j7,071 \\ 0 \\ 34,145 - j9,149 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ В}; \quad [\underline{J}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{J}_4 \\ 0 \\ -\underline{J}_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,225 + j0,707 \\ 0 \\ -3,845 + j1,793 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ А}.$$

Расчет будем производить с применением контурных уравнений в матричной форме (3.55):

$$[\underline{Z}^{(k)}][\underline{I}^{(k)}] = [\underline{E}^{(k)}].$$

Запишем матрицу контурных сопротивлений $[\underline{Z}^{(k)}]$ и матрицу контурных ЭДС $[\underline{E}^{(k)}]$:

$$[\underline{Z}^{(k)}] = [B][Z][B]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 45 + j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 - j10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 + j25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 + j32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 - j12,5 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 + j75 & 52 - j10 & 24 + j35 & -20 - j35 \\ 52 - j10 & 88 + j22 & 24 & 0 \\ 24 + j35 & 24 & 56 + j60 & -j35 \\ -20 - j35 & 0 & -j35 & 50 + j22,5 \end{bmatrix} \text{Om.}$$

$$[\underline{E}^{(k)}] = [B][E] - [B][Z][J] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14,142 + j24,495 \\ 0 \\ 0 \\ 12,247 + j7,071 \\ 0 \\ 34,145 - j9,149 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 45 + j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28 - j10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 + j25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 + j32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 - j12,5 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,225 + j0,707 \\ 0 \\ -3,845 + j1,793 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128,314 + j30,599 \\ 126,425 + j33,883 \\ 126,425 + j33,883 \\ 12,253 - j21,211 \end{bmatrix} \text{ В.}$$

Решение уравнения (3.55) позволяет найти матрицу контурных токов:

$$\underline{I}^{(k)} = \underline{Z}^{(k)-1} \underline{E}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0,36 + j0,032 \\ 0,993 + j0,275 \\ 1,084 - j0,427 \\ 0,778 + j0,249 \end{bmatrix} \text{ А.}$$

Далее рассчитываем комплексные токи обобщенных ветвей в соответствии с соотношением (3.53)

$$\underline{I}^{(B)} = \underline{B}^T \underline{I}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0,36 + j0,032 \\ -1,354 - j0,307 \\ 1,084 - j0,427 \\ -0,418 - j0,218 \\ 0,993 + j0,275 \\ 2,438 - j0,12 \\ 0,666 - 0,645 \\ 0,778 + 0,249 \end{bmatrix} \text{ А,}$$

а затем токи, протекающие по комплексным сопротивлениям ветвей,

$$\underline{[I]} = \underline{[I^{(B)}]} + \underline{[J]} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \\ \underline{I}_7 \\ \underline{I}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 + j0,032 \\ -1,354 - j0,307 \\ 1,084 - j0,427 \\ 0,807 - j0,925 \\ 0,993 + j0,275 \\ -1,407 - j1,913 \\ 0,666 - j0,645 \\ 0,778 - j0,249 \end{bmatrix} \text{ А}$$

и напряжения на ветвях

$$\underline{[U]} = \underline{[Z]} \underline{[I]} - \underline{[E]} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \\ \underline{U}_7 \\ \underline{U}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,488 + j43,942 \\ -40,973 + j4,939 \\ 45,361 + j13,439 \\ 3,899 - j25,564 \\ 26,948 + j41,698 \\ -67,921 - j36,759 \\ 22,56 + j23,321 \\ 26,46 - j2,244 \end{bmatrix} \text{ В.}$$

Проверим результаты расчета цепи по балансу электрических мощностей.

Комплексная мощность источников энергии, действующих в цепи,

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{[U]}^{(T)} \begin{bmatrix} * \\ \underline{J} \end{bmatrix} + \underline{[E]}^T \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = 327,031 + j76,943 \text{ ВА.}$$

Комплексная мощность, потребляемая нагрузкой,

$$\underline{S}_{\text{нагр}} = \underline{[I]}^T \underline{[Z]} \begin{bmatrix} * \\ \underline{I} \end{bmatrix} = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}} = 327,031 + j76,94 \text{ ВА.}$$

Баланс мощностей выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Основы теории цепей / Г. В. Зевеке [и др.]. – 5-е изд., перераб. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
- 2 Теоретические основы электротехники. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 536 с.
- 3 **Батура, М. П.** Теория электрических цепей : учеб. для студентов электротехн. спец. / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – 2-е изд., испр. – Минск : Высшэйшая школа, 2007. – 608 с.
- 4 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. М. : Выш. шк., 2006. – 638 с.
- 5 **Новгородцев, А. Б.** Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.
- 6 **Яцкевич, В. В.** Теория линейных электрических цепей : справочное пособие / В. В. Яцкевич. – Минск : Высшэйшая школа, 1990. – 264 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(обязательное)

Рабочая программа по курсу ТОЭ

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1 Цель преподавания дисциплины

Курс "Теоретические основы электротехники" занимает основное место среди фундаментальных и базовых дисциплин, определяющих теоретический уровень профессиональной подготовки инженеров-электриков.

Предметом изучения курса являются электромагнитные явления и их применение для решения проблем энергетики, электроники, автоматики, телемеханики и вычислительной техники.

1.2 Задачи изучения дисциплины

Изучив дисциплину, студент должен:

1.2.1 **ЗНАТЬ** современные методы моделирования электромагнитных процессов, анализа электрических цепей, электрических и магнитных полей.

1.2.2 **УМЕТЬ** применять на практике полученные при изучении дисциплины знания по анализу электрических схем, методам их расчета, пользоваться электроизмерительными приборами, выполнять работы по монтажу и исследованию электрических цепей, пользоваться современными средствами вычислительной техники (микрокалькуляторами, ПЭВМ).

1.2.3 **ИМЕТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ** о способах производства, распределения электрической энергии, применения ее в различных отраслях промышленности и мерах по улучшению качества энергии, современных путях энергосбережения в технологических процессах.

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Часть I

2.1.1 Предмет курса ТОЭ, его структура, связь со смежными и специальными дисциплинами: место в общей системе электротехнического образования инженера. Организация самостоятельной работы по изучению курса ТОЭ.

Краткий исторический очерк развития электротехники. Роль электротехники, вычислительной техники и информатики в развитии современных средств связи и автоматики, в решении актуальных вопросов научно-технического прогресса. Электрификация транспорта.

2.1.2 Электрический ток, принцип непрерывности тока. Электрический потенциал, напряжение, электродвижущая сила (ЭДС). Электрические цепи, их элементы. Классификация цепей и их параметры. Источники напряжения и источники тока. Эквивалентные схемы источников энергии. Условные

положительные направления тока, ЭДС и напряжения. Схемы электрических цепей, их топологическое представление. Ветвь, узел, контур. Законы Кирхгофа и их применение. Топологические графы и их элементы. Матрица соединений. Матрица сечений. Матрица контуров. Законы Кирхгофа в матричной форме. Распределение потенциала вдоль контура электрической цепи, потенциальная диаграмма. Мощность электрического тока, баланс мощностей.

2.1.3 Преобразование электрических цепей. Последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов. Соединения "звездой" и "треугольником" и их эквивалентные преобразования. Преобразование схем с двумя узлами. Перенос источников в схеме. Преобразование симметричных схем.

2.1.4 Методы расчета сложных электрических цепей. Обобщенная ветвь. Компонентные уравнения для обобщенной ветви в матричной форме. Метод контурных токов. Контурные уравнения в матричной форме. Принцип наложения, метод наложения. Метод узловых потенциалов. Узловые уравнения в матричной форме. Входные и передаточные сопротивления и проводимости. Свойство взаимности. Теорема компенсации.

2.1.5 Понятие о двухполюснике. Активные и пассивные двухполюсники. Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному. Условие передачи максимума мощности. Теорема об активном двухполюснике и ее применение для расчета цепей. Метод эквивалентного генератора ЭДС и тока.

2.1.6 Получение переменного тока. Понятие о генераторах синусоидального тока. Изображение синусоидально изменяющихся величин вращающимся радиусом-вектором. Параметры синусоидальной функции: амплитуда, круговая частота, период, начальная фаза. Мгновенное значение синусоидальной функции. Среднее и действующее значение функции. Комплексное представление векторов. Операции с комплексными числами: сложение и вычитание ; умножение и деление; возведение в степень и извлечение корня; дифференцирование и интегрирование.

2.1.7 Неразветвленные цепи переменного тока. Резистор в цепи переменного тока. Активная мощность. Синусоидальный ток в индуктивности. ЭДС самоиндукции. Фазовый сдвиг. Индуктивное сопротивление и проводимость. Мгновенная мощность. Волновая и векторная диаграммы, энергия магнитного поля. Синусоидальный ток в емкости. Ток электрического смещения в конденсаторе. Фазовый сдвиг. Емкостное сопротивление и проводимость. Мгновенная мощность. Энергия электрического поля. Волновая и векторная диаграммы.

2.1.8 Идеальный резистор, катушка индуктивности и конденсатор, включенные последовательно. Уравнение электрического состояния в дифференциальной и комплексной формах. Закон Ома в комплексной форме. Полное комплексное сопротивление и его составляющие.

Треугольники сопротивлений и напряжений. Мощность в цепи синусоидального тока. Треугольник мощностей. Полная, активная и реактивная мощности. Коэффициент мощности и пути его повышения.

2.1.9 Параллельное соединение резистора, катушки индуктивности и конденсатора. Первый закон Кирхгофа в комплексной форме. Полная, активная и реактивная проводимости. Треугольник проводимостей. Активная и реактивная составляющие тока. Треугольник токов. Зависимость между комплексным сопротивлением и проводимостью участка цепи.

2.1.10 Второй закон Кирхгофа в комплексной форме. Обобщенная ветвь. Символический метод расчета сложных цепей синусоидального тока. Матричная форма записи контурных и узловых уравнений. Матричный метод формирования систем уравнений при расчете цепи. Топографические диаграммы. Баланс мощностей.

2.1.11 Анализ процессов в цепях с взаимной индукцией. Простейшие цепи с взаимной индукцией. Последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных элементов цепи. Расчеты разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности. Эквивалентная замена индуктивных связей. Передача энергии между индуктивно связанными элементами.

2.1.12 Резонанс при последовательном и параллельном соединениях элементов. Колебания энергии при резонансе. Резонанс при смешанном соединении элементов. Добротность контура. Резонанс в связанных контурах. Коэффициент передачи, расстройка. Избирательность и полоса пропускания. Частотные характеристики электрических цепей. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики.

Часть II

2.2.1 Многофазные системы. Симметричные многофазные системы. Соединения звездой и треугольником. Симметричный режим трехфазной цепи. Расчет несимметричных режимов трехфазных цепей со статической нагрузкой. Измерение мощности в трехфазных цепях. Коэффициент мощности и способы его повышения. Меры по энергосбережению в системах электроснабжения.

2.2.2 Установившиеся процессы в цепях с несинусоидальными токами и напряжениями. Гармонический анализ и разложение функций в тригонометрический ряд. Применение разложения на гармоники для расчета установившихся процессов в линейных цепях. Особенности несинусоидальных токов. Действующие и средние значения несинусоидальных токов и напряжений; коэффициенты, характеризующие форму кривой. Мощность несинусоидальных токов. Расчет цепей с несинусоидальными периодическими ЭДС и токами. Высшие гармоники в трехфазных цепях.

2.2.3 Возникновение переходных процессов. Законы коммутации и начальные условия. Принужденный и свободный режимы. Классический

метод расчета переходных процессов в простейших цепях при воздействии постоянных и синусоидальных ЭДС. Аперриодический и колебательный переходные процессы при разряде конденсатора. Расчет переходных процессов в разветвленных цепях.

2.2.4 Операторный метод расчета переходных процессов. Преобразование Лапласа. Уравнения электрических цепей в операторной форме. Расчет переходных и свободных напряжений и токов операторным методом. Приведение цепи к нулевым начальным условиям; формулы включения.

2.2.5 Основные положения метода переменных состояния. Составление дифференциальных уравнений состояния электрических цепей. Способы решения уравнений состояния. Применение неявного интегрирования к расчету переходных процессов.

2.2.6 Переходная и импульсная функции цепей. Расчет переходных процессов при воздействии источников напряжения и тока произвольной формы. Интеграл Дюамеля.

2.2.7 Классификация четырехполюсников, их уравнения и параметры. Схемы замещения четырехполюсников. Определение коэффициентов четырехполюсников расчетным и опытным путем. Различные формы записи уравнений четырехполюсников, применение матриц. Характеристическое сопротивление и постоянная передачи четырехполюсника. Соединение четырехполюсников.

Часть III

2.3.1 Нелинейные элементы (НЭ) в электрических цепях. Параметры и свойства НЭ. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов.

2.3.2 Нелинейные цепи постоянного тока. Графические и аналитические методы расчета. Итерационный метод.

2.3.3 Нелинейные магнитные цепи при постоянных потоках. Анализ неразветвленных и разветвленных магнитных цепей. Метод двух узлов.

2.3.4 Свойства нэ на переменном токе с вентилями. Простейшие выпрямители. Сглаживание пульсации, емкостный и индуктивный фильтры.

2.3.5 Методы расчета нелинейных цепей переменного тока: итерационный; гармонической линеаризации; гармонического баланса.

2.3.6 Цепи переменного тока с ферромагнитными элементами. Катушка со сталью, схема замещения, векторная диаграмма. Явление феррорезонанса.

2.3.7 Цепи синусоидального тока с нелинейными элементами, имеющими прямоугольную характеристику.

2.3.8 Переходные процессы в нелинейных цепях. Методы расчета переходных процессов. Устойчивость режима в нелинейной цепи.

2.3.9 Электростатическое поле. Электрическая постоянная. Напряженность электростатического поля, электрическая индукция (электрическое смещение), электрический потенциал. Теорема Гаусса в

интегральной и дифференциальной формах. Проводники в электростатическом поле и граничные условия на поверхности раздела двух диэлектриков. Энергия электростатического поля.

2.3.10 Применение теоремы Гаусса для исследования простейших электростатических полей. Поле параллельных заряженных нитей, параллельных несоосных цилиндров. Методы расчета электростатических полей, метод наложения, метод зеркальных изображений.

2.3.11 Электрическое поле постоянных токов. Законы Ома, Джоуля-Ленца и Кирхгофа в дифференциальной форме. Поле шарового электрода. Шаговое напряжение. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем.

2.3.12 Магнитное поле постоянных токов и методы его расчета. Закон полного тока в интегральной и дифференциальной формах. Применение закона полного тока к расчету магнитных полей. Векторный магнитный потенциал. Расчет индуктивности.

2.3.13 Первое и второе уравнения Максвелла. Полная система уравнений электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга и вектор Пойнтинга. Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике, в хорошо проводящей среде, в диэлектрике с потерями. Применение волоконно-оптических систем для передачи электрических сигналов.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания по выполнению расчетно-графических и контрольных работ	4
1 Расчет линейной электрической цепи постоянного тока	
Задача 1.1	5
2 Расчет линейной электрической цепи синусоидального тока	
Задача 2.1	7
Задача 2.2	9
3 Методические указания	
3.1 Основные определения	14
3.2 Цепи постоянного тока	16
3.2.1 Законы Кирхгофа	19
3.2.2 Эквивалентные преобразования электрических схем	19
3.2.3 Методы анализа цепей	28
3.3 Цепи синусоидального тока	48
3.3.1 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами	49
3.3.2 Мощность в цепи синусоидального тока	51
3.3.3 Цепи с индуктивно связанными элементами	56
3.4 Топологические графы и матрицы электрических цепей	59
Список литературы	
Приложение А Рабочая программа по курсу ТОЭ	77

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО И СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов
электротехнических специальностей

Редактор Н. А. Д а ш к е в и ч
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать 10.08.2009 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,48. Тираж 800 экз.
Зак. № 2186. Изд. № 30.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛИ № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.

246022 г. Гомель, ул. Кирова, 34