УДК 511.92

О ВЗАИМОСВЯЗИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

Н. Ф. СЕМЕНЮТА

Белорусский государственный университет транспорта

Классические числа Фибоначчи составляют основу рекуррентной последовательности чисел:

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} \ldots, \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55\ldots, \end{matrix} \tag{1}$$

в которой каждый последующий ее член равен сумме двух предыдущих членов

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{2}$$

при условии, что $F_1 = F_2 = 1$, $n > 2$.

Эдуард Люка (1842–1891) во второй половине девятнадцатого столетия активно занимался исследованиями по теории чисел Фибоначчи. Именно благодаря Э. Люка рекуррентные числа последовательности (1) получили название «числа Фибоначчи» и стали общеупотребительными. Э. Люка в своих работах по теории чисел большое внимание уделил обобщенным числам Фибоначчи, порождаемых рекуррентным соотношением

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}. \tag{3}$$

В зависимости от значений начальных чисел G_{n-1} и G_{n-2} рекуррентное соотношение (3) порождает бесконечное количество числовых последовательностей.

Из всех возможных последовательностей, порождаемых (3) наибольший практический интерес, кроме ряда Фибоначчи (1), представляет ряд, предложенный Люка. Числа ряда Люка могут быть получены из ряда Фибоначчи (1) путем сложения через одно из его чисел, т. е.

$$L_{\text{n}} = F_{\text{n}-1} + F_{\text{n}+1}, \tag{4}$$

Ряд Люка в этом случае принимает вид

$$3\ 4\ 7\ 11\ 18\ 29\ 47\ 123\ 170\ldots \tag{5}$$

и $L_1 = 3$ и $L_2 = 4$.

Не изменяя общности, добавим к последовательности (5) член $L_1 = 1$ и представим ряд Люка в общем виде:

$$\begin{matrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9 & L_{10} \ldots, \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 123 & 170\ldots\,. \end{matrix} \tag{6}$$

Ряд (6) соответствует также рекуррентному соотношению

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \tag{7}$$

со значениями начальных чисел $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$, $\text{n} > 2$.

Рассмотрим рекуррентные ряды чисел исходя из ряда Фибоначчи (1), дополненного числом $F_0 = 0$, и суммирования по правилу (4). В результате суммирования получим таблицу 1 множества «усеченных» рекуррентных рядов.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$FL_n(1)$		5	10	15	25	40	65	105	170	275
$LF_n(2)$			20	35	55	90	145	235	380	615
$FL_n(3)$				75	125	200	325	525	850	1375
$LF_n(4)$					275	450	725	1175	1900	3075
$FL_n(5)$						1000	1625	2625	4250	6875

Первая строка таблицы (F) – классический ряд Фибоначчи, вторая строка (L) – классический ряд Люка. Остальные строки получены по правилу соотношения (4). Для рядов F и L характерны следующие взаимосвязи:

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1} = L_n = F_n + 2F_{n-1}, \qquad 2F_{n+1} = L_n + F_n .$$

Разделим приведенную таблицу на две. В основу первой из них положим ряд Фибоначчи и нечетные ряды (таблица 2), которые подобно принятой в математике практике (ряды Фибоначчи-Пойя, Фибоначчи-Барра, Фибоначчи-Шишкова), назовем рядами Фибоначчи–Семенюты (FS), а вторые четные ряды (таблица 3) – рядами Люка–Семенюты (LS).

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
$FS_n(1)$	**5**	5	10	15	25	40	65	105	170	275	...
$FS_n(3)$	**25**	**25**	**50**	75	125	200	325	525	850	1375	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	...
$LS_n(2)$	**5**	**15**	20	35	55	90	145	235	380	615	...
$LS_n(4)$	**25**	**75**	**100**	**175**	275	450	725	1175	1900	3075	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

В обоих случаях рекуррентные множества FS и LS дополнены начальными числами (отмечены жирными цифрами), которые устраняют «усеченность» рядов. Из таблиц 2 и 3 следуют фундаментальные свойства рядов Фибоначчи и Люка и их производных:

$FS_n(1) = 5F_n$, $\quad LS_n(2) = 5L_n$,

$FS_n(3) = 5FS_n(1) = 25F_n$, $\quad LS_n(4) = 5LS_n(2) = 25L_n$

....

Таким образом, числа ряда Фибоначчи (1) являются порождающими для нечетных производных рядов, а числа ряда Люка – для четных. Все производные ряды связаны с классическими рядами Фибоначчи и Люка через сакральную цифру 5 в соответствующей степени. Из анализа производных рядов FS и LS также можно установить, что предел отношения двух рядом расположенных чисел равен, как и в ряде Фибоначчи, соответственно прямому $\Phi = 1{,}618\ldots$ и обратному $1/\Phi = 0{,}618\ldots$ золотому сечению.

В заключение следует отметить, что производные ряды FS и LS требуют дальнейшего исследования. Закономерности иррационального золотого сечения и связанных с ним целочисленных рядов Фибоначчи, Люка и производных рекуррентных рядов FS и LS открывают новую страницу в исследовании золотого сечения.

УДК 621.372

О ВЗАИМОСВЯЗИ ЧИСЕЛ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ И ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Н. Ф. СЕМЕНЮТА

Белорусский государственный университет транспорта

Исходные положения. Бином Ньютона, треугольник Паскаля и связанные ними биномиальные коэффициенты широко распространены в комбинаторике и прикладной информатике. Это объясняется тем, что с использованием биномиальных коэффициентов возможно решение