

**ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОДГРУПП
КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ФОРМАЦИИ**

А.Ф. Васильев¹, Т.И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,

Советская 104, 246028 Гомель, Беларусь, formation56@mail.ru

²Белорусский государственный университет транспорта,

Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь, tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые ниже группы являются конечными. Пусть \mathfrak{F} – некоторая формация, т. е. замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений класс групп. Х. Фиттинг [1] в 1938 году доказал, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда ее можно представить произведением двух своих нильпотентных подгрупп. Этот результат стал отправной точкой следующей задачи: для формации \mathfrak{F} установить условия, при которых группа $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, принадлежит \mathfrak{F} . Р. Брайс и Дж. Косси [2] решили эту задачу для случая нормальных (субнормальных) A и B . Б. Амберг, Л. С. Казарин и Б. Хефлинг [3] рассмотрели случай произвольных A и B ; А. Ф. Васильев [4, 5] в классе разрешимых групп получил конструктивное решение задачи для случая абнормальных (контранормальных, т.е. $A^G = B^G = G$) A и B . Отметим еще работы [6–8] в этом направлении.

В настоящем сообщении рассматривается еще один случай отмеченной выше задачи. Напомним [9], что группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B , если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A . Если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B , то группа $G = AB$ называется *произведением тотально перестановочных подгрупп* A и B . Рассматриваемая нами задача для тотально перестановочных подгрупп была полностью решена в [10, 11].

В работе [12] было введено

Определение. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс \mathfrak{F} называется *MP-замкнутым в \mathfrak{X}* , если \mathfrak{F} содержит всякую \mathfrak{X} -группу $G = AB$, где A и B – взаимно перестановочные \mathfrak{F} -подгруппы группы G . Пустой класс считается *MP-замкнутым в любом классе \mathfrak{X}* .

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, класс \mathfrak{F} называется *MP-замкнутым*. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, то \mathfrak{F} называется *разрешимым MP-замкнутым классом*.

Примерами *MP-замкнутых формаций* являются формации всех π -групп, формации всех разрешимых π -групп, формации всех дисперсивных по Оре групп (см. [9, с. 156, 162]), другие примеры найдены в [12]. В этой работе была поставлена следующая естественная

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и \mathfrak{X} – класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса \mathfrak{X} описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) \mathfrak{F} , *MP-замкнутые в \mathfrak{X}* .

Мы рассматриваем случай насыщенной формации. Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Многие классические формации являются насыщенными. В силу теоремы Гашюца-Любезедер-Шмида всякая непустая насыщенная формация является локальной тогда и только тогда, когда она насыщена. Все необходимые обозначения и результаты можно найти в [13, гл. IV].

Получена следующая

Теорема 1. Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{F} – насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π -группы, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

1. Если \mathfrak{X} и \mathfrak{F} имеют полные локальные задания x и f , причем $f(p) \subseteq x(p)$ и $f(p)$ является *MP-замкнутой формацией в $x(p)$* для любого простого p , то \mathfrak{F} является *MP-замкнутой формацией в \mathfrak{X}* .

2. Пусть X и F – максимальные внутренние задания соответственно \mathfrak{X} и \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} является *MP-замкнутой в \mathfrak{X}* тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ является *MP-замкнутой в $X(p)$* для любого простого p .

В случае, когда \mathfrak{X} совпадает с классом всех групп, из теоремы 1 получается теорема 2 из [12].

Предложение. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\tau$. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является МР-замкнутой формацией, когда для каждого $p \in \pi \setminus \tau$ выполняется следующее: p не делит $q - 1$ для любого $q \in \tau \setminus \pi$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. На множестве $A = \{\pi_i | \pi_i \subseteq \pi \text{ и } \pi = \bigcup \pi_i \text{ для всех } i \in I\}$ зададим следующее бинарное отношение $\Delta = \{(\pi_i, \pi_j) | \text{ для каждого } p \in \pi_i \setminus \pi_j \text{ следует, что } p \text{ не делит } q - 1 \text{ для любого } q \in \pi_j \setminus \pi_i\}$.

Теорема 2. Формация $\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{G}_{\pi_i} \mathfrak{G}_{\pi_j}$, где каждая пара $(\pi_i, \pi_j) \in \Delta$, является МР-замкнутой формацией.

Напомним [14], что *формацией с условием Шеметкова* называется формация \mathfrak{F} , у которой любая минимальная не \mathfrak{F} -группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Теорема 3. Наследственная насыщенная формация \mathfrak{F} с условием Шеметкова является МР-замкнутой формацией тогда и только тогда, когда она содержит все сверхразрешимые $\pi(\mathfrak{F})$ -группы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 "Конвергенция-2025").

Литература

1. Fitting H. *Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1938. Vol. 48. P. 77–141.
2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups*, Math. Z. 1972. Vol. 127, No 3. P. 217–233.
3. Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями* // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
4. Васильев А. Ф. *Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах* // Украинск. матем. журн. 2002. Т. 54, № 9. С. 1163–1171.
5. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. 2005. Vol. 85, No 1. P. 305–311.
6. Семенчук В. Н. *Разрешимые \mathfrak{F} -радикальные формации* // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 2. С. 261–266.
7. Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyaynov V. N. *On a problem of L.A. Shemetkov on superradical formations of finite groups* // J. Algebra. 2014. V. 403, P. 69–76.
8. Gállego M. P., Hauck P., Pérez-Ramos M. D. *Saturated formations and products of connected subgroups*. J. Algebra. 2011. Vol. 333, No 1. P. 105–119.
9. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of Finite Groups*. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.
10. Maier R. *A completeness property of certain formations* // Bull. London Math. Soc. 1992. Vol. 24. P. 540–544.
11. Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M. D. *A question of R. Maier concerning formations* // J. Algebra. 1996. Vol. 182. P. 738–747.
12. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. *О МР-замкнутых насыщенных формациях конечных групп* // Известия вузов. Математика. 2017. Т. 61, № 6. С. 9–17.
13. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht: Springer, 2006.

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПРИВОДИМЫМИ ПОЛИНОМАМИ В МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Д.В. Васильев¹, В.О. Иванова², Н.И. Калоша¹, Е.В. Сурай¹

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь,
vasilyev@im.bas-net.by, kalosha@im.bas-net.by, suraylena@mail.ru

²ГУО Минский городской педагогический колледж, Макаенка 29, 220114 Минск, Беларусь
someone_vnv@mail.ru

В середине прошлого века одной из самых популярных задач в области диофантовых приближений была проблема К. Малера. Рассмотрим неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-w}, \quad w > 0 \quad (1)$$