

О k -субмодулярных подгруппах в конечных группах¹

Васильева Т.И.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. В нильпотентной группе всякая максимальная подгруппа является нормальной. Б. Хупперт [1, гл. VI, теорема 9.2 (b)] установил, что если группа G сверхразрешима, то все ее максимальные подгруппы имеют в G простой индекс. Р. Шмидт в [2] доказал, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M — максимальная нормальная подгруппа в G , либо $G/\text{Core}_G(M)$ неабелева порядка pq для некоторых простых чисел p и q .

Определение 1. Пусть n — натуральное число. Максимальную подгруппу M группы G будем называть n -модулярно вложенной в G , если либо $M \trianglelefteq G$, либо $M \neq \text{Core}_G(M)$, $|G : M| = p$ и $|G/\text{Core}_G(M)| = pq^n$, q^n делит $p - 1$ для некоторых простых чисел p и q .

Определение 2. Пусть k — фиксированное натуральное число. Подгруппу H группы G будем называть k -субмодулярной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{m-1} \leq H_m = G \quad (1)$$

такая, что H_{i-1} n -модулярно вложена в H_i для некоторого натурального $n \leq k$ и любых $i = 1, \dots, m$.

Заметим, что если $n = 1$ и в G максимальная подгруппа n -модулярно вложена, то она модулярна в G в смысле Куроша, т.е. является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы G . Если $k = n = 1$ и в G подгруппа k -субмодулярна, то она субмодулярна в G . Группы с заданными системами субмодулярных подгрупп изучались в [3–6].

Получены свойства k -субмодулярных подгрупп.

Теорема 1. Пусть k — натуральное число и H — подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H k -субмодулярна в G , то H^x k -субмодулярна в G для всех $x \in G$.
- 2) если $H \leq R \leq G$, H k -субмодулярна в R и R k -субмодулярна в G , то H k -субмодулярна в G .
- 3) если H k -субмодулярна в G , то $H \cap U$ k -субмодулярна в U для любой подгруппы U из G .
- 4) если подгруппы H и U k -субмодулярны в G , то $H \cap U$ k -субмодулярна в G .
- 5) если $N \trianglelefteq G$ и H k -субмодулярна в G , то HN/N k -субмодулярна в G/N .
- 6) если $N \trianglelefteq G$, $N \leq H$ и H/N k -субмодулярна в G/N , то H k -субмодулярна в G .
- 7) тогда и только тогда HN k -субмодулярна в G , когда HN/N k -субмодулярна в G/N для любой $N \trianglelefteq G$.
- 8) если G — разрешимая группа и H k -субмодулярна в G , то H $\mathfrak{U}_k$ -субнормальна в G .

В [7] через $\mathfrak{U}_k$ обозначен класс всех сверхразрешимых групп экспоненты, свободной от $(k+1)$ -ых степеней простых чисел, k — натуральное число, и установлено, что $\mathfrak{U}_k$ — наследственная формация. Обратное утверждение к п. 8) теоремы 1 в общем случае неверно. Например, если $k = n = 1$ и $G = \langle a, b \mid a^7 = b^6 = 1, ab = ba^3 \rangle$ — голоморф циклической группы $A = \langle a \rangle$, то в G подгруппа $H = \langle b \rangle$ $\mathfrak{U}_k$ -субнормальна, так как $G \in \mathfrak{U}_k$. Из $\text{Core}_G(H) = 1$ следует, что H не k -субмодулярна в G .

Отметим, что если любая силовская подгруппа Q группы G является k -субмодулярной в G , то Q является $\mathbb{P}$ -субнормальной и $K\mathbb{P}$ -субнормальной в G . Напомним, подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$ -субнормальной в G [8], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (1), в которой $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, m$; $K\mathbb{P}$ -субнормальной в G [9], если существует цепь

¹Исследование выполнено при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция-2025»).

подгрупп (1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \dots, m$. Согласно [10] функция $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формация}\}$ называется формационной функцией. Формация $\mathfrak{F}$ локально определяется формационной функцией f , если $\mathfrak{F} = LF(f) = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(p))$ для каждого главного фактора H/K группы G и для всех простых чисел $p \in \pi(H/K)$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс всех сверхразрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа k -субмодулярна. Тогда $\mathfrak{K}$ — наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{K}$ локально определяется формационной функцией h такой, что $h(p) = (G \mid G \in \mathfrak{A}(p-1)_k)$ и все силовские подгруппы группы G циклические).

Здесь $\mathfrak{A}(p-1)_k$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$ и свободной от $(k+1)$ -ых степеней простых чисел.

Теорема 3. Класс $\mathfrak{F}$ всех групп, в которых каждая силовская подгруппа k -субмодулярна, является наследственной насыщенной формацией и $\mathfrak{F}$ локально определяется формационной функцией f такой, что $f(p) = (G \mid \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1)_k)$ и все силовские подгруппы из G циклические).

Теорема 4. Класс $\mathfrak{K}$ всех сверхразрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа является k -субмодулярной, совпадает с классом всех сверхразрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа $\mathfrak{A}_k$ -субнормальна.

Результаты исследований вошли в препринт [11].

Список литературы

- [1] B. Huppert. Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967.
- [2] R. Schmidt. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen. *J. Ill. Math.*, **13** (1969), 358–377.
- [3] I. Zimmermann. Submodular subgroups in finite groups. *Math. Z.*, **202** (1989), 545–557.
- [4] В. А. Васильев. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами. *Сиб. мат. журн.*, **56**: 6 (2015), 1277–1288.
- [5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков. Конечные группы с тремя заданными подгруппами. *Сиб. мат. журн.*, **59**: 1 (2018), 65–77.
- [6] V. I. Murashka. Finite groups with given sets of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups. *Asian-Eur. J. Math.*, **13**: 4 (2020), 2050073.
- [7] V. S. Monakhov, I. L. Sokhor. Finite groups with formational subnormal primary subgroups of bounded exponent. *Сиб. электрон. матем. изв.*, **20**: 2 (2023), 785–796.
- [8] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О конечных группах сверхразрешимого типа. *Сиб. мат. журн.*, **51**: 6 (2010), 1270–1281.
- [9] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп. *Мат. заметки*, **95**: 4 (2014), 517–528.
- [10] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin — New-York: Walter de Gruyter, 1992.
- [11] T. I. Vasilyeva. On k -submodular subgroups of finite groups. arXiv:2406.04704v1 [math.GR] 7 Jun 2024.