

629.15
Л42

С. С. С. Р.

5 НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ В. С. Н. Х. № 65

Труды Центрального Аэро-Гидродинамического
Института. Выпуск 8

Проф. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

О РАСЧЕТЕ ЛОПАСТЕЙ ПРОПЕЛЛЕРА
НА КРУЧЕНИЕ

МОСКВА—1924

1991

1924 г.

С. С. С. Р.

№ 65 НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ В. С. Н. Х. № 65

Труды Центрального Аэро-Гидродинамического
Института. Выпуск 8

629.13
Л42

Абонемент научно-
технической литературы
Дата 2007

Проф. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

О РАСЧЕТЕ ЛОПАСТЕЙ ПРОПЕЛЛЕРА
НА КРУЧЕНИЕ

72983

1975

МОСКВА—1924

БИБЛИОТЕКА
Белгородского
института инженеров

1951

№ 65 НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Институт Выхвостов
Институт Выхвостов

АВТОГРАФИЧЕСКИЙ
КОПИИ
ДАТА

Проф. М. С. ЗЕНБЕНЗОН

О РАСЧЕТЕ ДОПАСТЕЙ ПРОПЕЛЛЕРА
НА КРУЧЕНИЕ

Типо-Литография В. Т. У. имени т. Дунаева. Москва, Советская (Б. Полянка), 9.

Главлит. № 29524.

МОСКВА-1951

Тираж 1000 экз.

БИБЛИОТЕКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ДАТА

Предисловие.

Предлагаемые статьи проф. Л. С. Лейбензона „О расчете лопастей пропеллера на кручение“ представляют весьма большую научную ценность, так как гребные винты работают на кручение не менее, чем на изгиб, и только отсутствие соответствующих математических решений не позволяло вести точного расчета винтов на прочность.

В действительности винты рассчитывались на изгиб с пониженным напряжением.

В Англии и в Америке деформации винтов на кручение за последнее время подробно изучаются и уже принимаются во внимание при расчетах.

Поэтому теория, позволяющая учитывать как деформации, так и напряжения при скручивании лопастей винта, является вполне своевременной.

Член Коллегии ЦАГИ *В. Ветчинкин.*

О расчете лопастей пропеллера на кручение.

Проф. Л. С. Лейбензон.

Статья I.

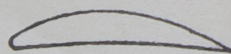
В настоящее время инженеры пришли к заключению о необходимости производить расчет на кручение лопастей гребных винтов. Вызвано это тем, что неоднократно наблюдались такие поломки лопастей винта, что их иначе нельзя и объяснить, как приложением крутящего момента, — всем известно высокое состояние техники выделки винта, этого жизненного нерва аэроплана, чудесной машины-птицы XX века.

С теоретической точки зрения вполне понятно, что распределение давления воздуха (или воды) по профилю поперечного сечения лопасти должно необходимо приводить к крутящему моменту около геометрической оси винта. Но раз самая жизнь аэроплана связана с целостью винта, то, конечно, надо принять все меры к правильному расчету лопастей винта на кручение и вообще на прочность. Подобный вопрос возникает и для перьев быстроходной турбины германского проф. Каплана (последней новинки турбиностроения), так как эта турбина есть простое обращение лопастного пропеллера, полный водный аналог лопастному ветряку „НЕЖ“, изобретенному покойным проф. Н. Е. Жуковским, отличающемуся очень высоким коэффициентом полезного действия, весьма постоянным при перемене нагрузки (то же замечено и для турбины проф. Каплана). Наконец, вполне законна постановка подобной задачи и для лопастей центробежных насосов и вентиляторов особой конструкции. Между тем, в обширной литературе по теории сопротивления материалов совершенно не разобран вопрос о расчете на кручение призмы, поперечное сечение которой ограничено двумя пересекающимися дужками кривых второго порядка или иного типа кривых.

В виду этого мы нашли интересным дать найденное нами решение этой задачи по способу проф. W. Ritz'a, которое при сравнении с точным решением по методам математической теории упругости, найденным нами (доложено осенью 1914 г. Московскому Математическому Обществу) ранее, обладает достаточной для практики точностью.

§ 1. Расчетные формулы.

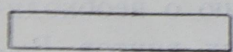
При расчете на кручение лопастей мы имеем дело, с теоретической точки зрения, с расчетом призмы, поперечное сечение которой изображено на фиг. 1. Простейшая мысль, это — заменить означенный профиль прямоугольником, для которого Сен-Венан нашел формулы для расчета на кручение (см. С. П. Тимошенко, „Соппротивление материалов“, второе издание, стр. 90),—именно, наибольшее напряжение имеет место в середине длинной стороны (в точке, ближайшей к оси призмы) и дано формулой (M=крутящему моменту):



Фиг. 1.

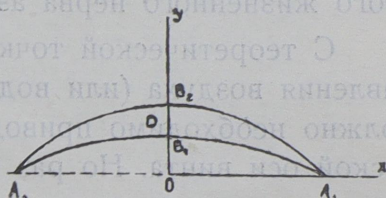
$$p = \frac{3M}{ha^2} \left(1 + 0,6 \frac{a}{h} \right) \dots \dots \dots (1)$$

представляющей достаточное приближение сложной формулы Сен-Венана. Применяемые в настоящее время профили поперечных сечений лопастей гребных винтов, по любезному сообщению проф. Б. Н. Юрьева и проф. В. П. Ветчинкина, могут с достаточной точностью



Фиг. 2.

быть представлены на фиг. 3, где верхнее очертание дано параболой $A_1B_2A_2$ и нижнее—параболой $A_1B_1A_2$, при чем стрелка a_1 очень малая сравнительно со стрелкой a_2 . В действительности есть небольшое отступление у ведущего конца A_2 , но оно повышает прочность на кручение.



$$\begin{aligned} A_1A_2 &= h & O B_2 &= a_2 \\ O B_1 &= a_1 & B_1B_2 &= a \end{aligned}$$

Фиг. 3.

Понятно, что в таком профиле действительное напряжение на кручение много выше того, которое дано формулой (1), ибо, как показал лорд Кельвин, концы A_1 и A_2 прямоугольника уравнивают почти половину скручивающего момента. Наша формула для наибольшего напряжения имеет вид:

$$p = \frac{105}{16} \frac{M}{ha^2} f \left(\frac{a}{h} \right) \dots \dots \dots (2)$$

где M — крутящий момент,
 $a = a_2 - a_1$ — толщина лопасти,
 $f \left(\frac{a}{h} \right)$ — функция отношения $\frac{a}{h}$,
 и в первом приближении

$$f \left(\frac{a}{h} \right) \approx 1,$$

так что упрощенная формула для расчета:

$$p = \frac{105}{16} \frac{M}{ha^2} \dots \dots \dots (3)$$

Это наибольшее напряжение кручения имеет место в той из точек B_1 и B_2 , которая ближе к центру тяжести сечения D . Мы видим, что для небольших значений отношения $\frac{a}{h}$ (которые имеют место в действительности) формула (1), — ее можно написать тогда в виде:

$$p = \frac{3M}{ha^2}, \quad (1')$$

дает вдвое меньшие величины напряжения. Этим вполне доказана необходимость построения формулы (2).

§ 2. Приложение метода Ritz'a к задаче о кручении.

Мы будем следовать методу и обозначениям, примененным проф. С. П. Тимошенко в его известной книге „Теория упругости“ (часть первая), в главе о кручении (см. также A. Föppl. Vorlesungen über Technische Mechanik, том 5-й, § 29).

Вводим так называемую функцию напряжений F . Тогда в плоскости поперечного сечения x о y имеют место два напряжения сдвига

$$X_z = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Y_z = +\frac{\partial F}{\partial x} \quad (4)$$

Крутящий момент M дан формулой (интеграл по всей площади сечения):

$$M = 2 \int \int F \, dx \, dy, \quad (5)$$

при чем функция F удовлетворяет уравнению проф. Л. Прандтля.

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} = -2Gg, \quad (6)$$

где G — модуль сдвига,

g — крутка (угол закручивания на единицу длины).

На функцию F наложено пограничное условие:

$$F = 0 \quad (7)$$

на всем контуре профиля.

Введем функцию W . Ritz'a:

$$U = \int \int \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dF}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 \right\} - 2GgF \right] dx \, dy, \quad (8)$$

при чем двойной интеграл распространен на всю площадь; — легко получим:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \int \left[\frac{dF}{dx} \delta \left(\frac{dF}{dx} \right) + \frac{dF}{dy} \delta \left(\frac{dF}{dy} \right) \right] dx \, dy - 2Gg \int \int \delta F dx \, dy = \\ &= \int \delta F \frac{dF}{dn} ds - \int \int \left(\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + 2Gg \right) \delta F dx \, dy; \quad (8') \end{aligned}$$

но раз на контуре имеет место условие (7), то, очевидно, на контуре

$$\delta F = 0; \dots \dots \dots (7')$$

внося (7') и (6) в (8'), мы получим:

$$\delta U = 0, \dots \dots \dots (9)$$

т.е. интеграция уравнения (6) при условии (7) может быть заменена следующим приемом W. Ritz'a:

Находим функцию $F(x,y)$, удовлетворяющую пограничному условию (7); вносим ее в интеграл (8); выполнив квадратуру, мы вставляем полученное выражение U , зависящее от постоянных параметров функции F , как от переменных, в уравнение (9), — находим соответствующие значения этих параметров, чем задача о кручении будет вполне решена. Уравнение (9) есть известное уравнение W. Ritz'a.

§ 3. Решение задачи о кручении для профиля фиг. 3, т.е. ограниченного двумя пересекающимися парабололами.

Составим уравнение параболы $A_1B_1A_2$. Она проходит через точки

$$A_1(b, 0), A_2(-b, 0), B_1(0, a_1),$$

и ее ось направлена по оси y в сторону отрицательную. Следовательно:

$$y_1 = a_1 \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right),$$

где

$$\frac{1}{2}h = b = OA_1 = OA_2, \quad OB_1 = a_1;$$

также для параболы $A_1B_2A_2$, проходящей через точки

$$A_1(b,0), \quad A_2(-b,0), \quad B_2(0,a_2),$$

с осью по оси y , имеем уравнение:

$$y_2 = a_2 \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right).$$

Вводя для сокращения функцию:

$$f = 1 - \frac{x^2}{b^2}, \dots \dots \dots (10)$$

мы перепишем уравнения парабол в виде:

$$y_1 = a_1 f, \quad y_2 = a_2 f \dots \dots \dots (11)$$

Искомую функцию напряжений возьмем в виде:

$$F = (y - a_1 f) (y + a_2 f) \phi(x,y), \dots \dots \dots (12)$$

где, согласно общему методу теории функций,

$$\phi(x_1y) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} x^m y^n, \dots \dots \dots (12')$$

но в первом приближении, так как отношения

$$\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}$$

суть малые, мы ограничимся в разложении $\phi(x,y)$ только первым постоянным членом, т.-е. примем

$$F = A(y - a_1f)(y - a_2f) \dots \dots \dots (13)$$

Обе формулы для F, т.-е. (12) и (13), дают:

$$F = 0 \dots \dots \dots (7)$$

для

$$y - a_1f = 0, \quad y - a_2f = 0,$$

т.-е. на контуре взятого профиля, а стало быть пограничное условие удовлетворено.

Итак получим:

$$F = A[y^2 - (a_1 + a_2)f + a_1a_2f^2] \dots \dots \dots (13)$$

Составим:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} = 2A \left[\frac{a_1 + a_2}{b^2} y + 1 + \frac{4a_1a_2}{b^2} - 6 \frac{a_1a_2}{b^2} f \right];$$

и далее вычислим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A^2} F \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} \right) &= \frac{a_1 + a_2}{b^2} y^3 + \left[1 + \frac{4a_1a_2}{b^2} - \frac{a_1^2 + a_2^2 + 8a_1a_2f}{b^2} \right] y^2 - \\ &- (a_1 + a_2) \left(1 + \frac{4a_1a_2}{b^2} - \frac{7a_1a_2f}{b^2} \right) f \cdot y + \\ &+ \left(1 + \frac{4a_1a_2}{b^2} - 6 \frac{a_1a_2}{b^2} f \right) a_1a_2f^2 \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

Заметим, что по формуле Грина (которую легко проверить):

$$I = \iint \left[\left(\frac{dF}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dy} \right)^2 \right] dx dy = \int F \frac{dF}{dn} ds - \iint F \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} \right) dx dy;$$

здесь двойные интегралы взяты по всей площади, а контурный интеграл по всему контуру, коего элемент длины есть ds; наконец (П. Апель, Теоретическая механика, 3-й том), $\frac{dF}{dn}$ есть производная по

внешней нормали к контуру. Так как на контуре профиля имеет место условие (7), то, очевидно:

$$I = - \iint F \left(\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} \right) dx dy. \quad (15)$$

При вычислении интеграла I формула (15) значительно упрощает вычисление, хотя можно вычислять и непосредственно. Внося (14) в (15), мы получим вследствие симметрии профиля относительно оси о у:

$$I = -2 \int_0^b \int_{y_1}^{y_2} F \left(\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} \right) dx dy =$$

$$= -4A^2 \int_0^b \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2}{b^2} \left(\frac{y_2^4 - y_1^4}{4} \right) + \left(B - \frac{a_1^2 + a_2^2 + 8a_1 a_2 f}{b^2} \right) \left(\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} \right) - \\ & - (a_1 + a_2) \left(B - \frac{7a_1 a_2 f}{b^2} \right) \cdot f \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} \right) + \\ & + a_1 a_2 f^2 \left(B - \frac{6a_1 a_2 f}{b^2} \right) (y_2 - y_1) \end{aligned} \right\} dx.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} y_2^4 - y_1^4 &= (a_2^4 - a_1^4) f^4, & y_2^3 - y_1^3 &= (a_2^3 - a_1^3) f^3, \\ y_2^2 - y_1^2 &= (a_2^2 - a_1^2) f^2, & y_2 - y_1 &= (a_2 - a_1) f, \end{aligned}$$

мы получим по приведении:

$$I = 4A^2 \int_0^b \left[\frac{(a_2 - a_1)^3 (a_2^2 - 10a_1 a_2 + a_1^2)}{12b^2} f^4 + B \frac{(a_2 - a_1)^3}{6} f^3 \right] dx,$$

где обозначено:

$$B = 1 + \frac{4a_1 a_2}{b^2}.$$

Но легко видеть, что:

$$\int_0^b f^4 dx = \int_0^b \left[1 - \frac{x^2}{b^2} \right]^4 dx = \frac{128}{315} b,$$

$$\int_0^b f^3 dx = \int_0^b \left[1 - \frac{x^2}{b^2} \right]^3 dx = \frac{16}{35} b,$$

а потому получим, внося эти результаты в I:

$$I = \frac{32}{3 \cdot 35} A^2 \left[1 + \frac{4a_1 a_2}{b^2} + \frac{4}{9} \frac{a_1^2 + a_2^2 - 10a_1 a_2}{b^2} \right] \cdot b \cdot (a_2 - a_1)^3,$$

или, еще упрощая,

$$I = \frac{32b}{105} \left[1 + \frac{4(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)}{9b^2} \right] (a_2 - a_1)^3 A^2. \quad (16)$$

Аналогично найдем:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint F dx dy = 2 \int_0^b \int_{y_1}^{y_2} F dx dy = \\ &= 2A \int_0^b \left[\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} - \frac{(a_1 + a_2)(y_2^2 - y_1^2)}{2} f + a_1a_2(y_2 - y_1)f^2 \right] dx = \\ &= -\frac{A}{3} (a_2 - a_1)^3 \int_0^b f^3 dx = -\frac{16}{105} (a_2 - a_1)^3 b A, \end{aligned}$$

т.-е.

$$I_1 = -\frac{16}{105} (a_2 - a_1)^3 b A. \quad (16')$$

Внося (16) и (16') в формулу (8), получим окончательно

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} I - 2GgI_1 = \\ &= \frac{16(a_2 - a_1)^3 b}{105} \left[\left(1 + \frac{4(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)}{9b^2} \right) A^2 + 2GgA \right]; \end{aligned}$$

внося же полученное значение U в уравнение (9), получим условие минимума величины U , рассматриваемой как функция параметра A , в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial A} \delta A = 0,$$

что дает по сокращении:

$$\left[1 + \frac{4}{9} \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2}{b^2} \right] A + Gg = 0,$$

откуда имеем неизвестную величину параметра A .

$$A = -\frac{Gg}{1 + \frac{4}{9} \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2}{b^2}}. \quad (17)$$

Зная значение параметра A , мы можем вычислить величину крутящего момента по формуле (5), которая дает:

$$M = 2I_1 = \frac{32(a_2 - a_1)^3 b Gg}{105 \left[1 + \frac{4}{9} \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2}{b^2} \right]};$$

вводя обозначения

$$a = a_2 - a_1, \quad b = \frac{1}{2}h,$$

получим окончательно:

$$M = \frac{16}{105} Ggha^3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{16}{9} \left[\frac{a_2 a + a_1^2}{h^2} \right]} \quad (18)$$

Вычислим теперь наибольшее напряжение сдвига. По известной теореме Сен-Венана оно должно быть в той точке контура профиля, которая всего ближе к центру тяжести, т.е. или в B_1 , или в B_2 . Имеем из формул (4):

$$X_z = -\frac{\partial F}{\partial y} = -A[2y - (a_1 + a_2)f],$$
$$Y_z = \frac{\partial F}{\partial x} = A \left[-\frac{4a_1 a_2}{b^2} f \cdot x + (a_1 + a_2) \frac{xy}{b^2} \right].$$

Последнее напряжение в точках B_1 и B_2 обращается в нуль; найдем легко, что напряжение

$$X_z = +A \cdot a \quad \text{в точке } B_1,$$
$$X_z = -A \cdot a \quad \text{” ” } B_2;$$

поэтому наибольшее напряжение будет:

$$P = \frac{Gga}{1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{a_1^2 + a_2 a}{h^2}}; \quad (19)$$

вводя же сюда момент кручения M из (18), получим:

$$P = \frac{105}{16} \cdot \frac{M}{h a^2} \quad (20)$$

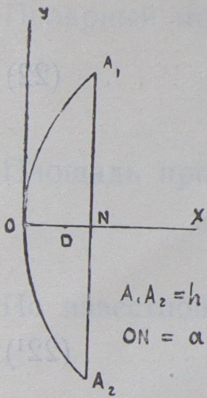
Это и есть расчетное уравнение, которым надо пользоваться при проверке на прочность при закручивании лопастей гребного винта. Более точная формула будет вида (2), как это можно усмотреть из дальнейшего.

§ 4. Решение задачи о кручении для профиля фиг. 4, ограниченного параболой и пересекающей ее прямой.

Этот профиль есть частный случай профиля фиг. 3, когда

$$a_1 = 0;$$

но мы возьмем второе приближение с целью выяснить степень точности нашей формулы (20), которая вполне прилагается к этому профилю. Уравнение параболы $A_1 O A_2$ берем в виде:



Фиг. 4.

$$y^2 - cx = 0, \quad h = 2\sqrt{ac};$$

уравнение прямой A_1A_2 будет

$$x - a = 0;$$

и мы возьмем, в согласии с (12), для F выражение:

$$F = (y^2 - cx)(x - a)(A + Bx) \dots \dots \dots (21)$$

(член, содержащий y , исчезнет в последней скобке вследствие симметрии). После всех приведений мы получим оба интеграла I и I_1 в виде:

$$I = \frac{32a^{7/2} C^{3/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left[(4a + 9c)A^2 + \frac{40a + 110c}{11} ABa + \frac{140a + 559c}{11 \cdot 13} B^2a^2 \right];$$

$$I_1 = \frac{16a^{7/2} C^{3/2}}{105} \left(A + \frac{5}{9} Ba \right).$$

Внося эти значения I и I_1 в формулу (8):

$$U = \frac{1}{2} I - 2 Gg I_1,$$

получим:

$$U = \frac{16a^{7/2} C^{3/2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left[(4a + 9c)A^2 + \frac{40a + 110c}{11} ABa + \frac{140a + 559c}{11 \cdot 13} B^2a^2 - 2Gg(9A + 5Ba) \right].$$

Мы получим U как функцию двух неизвестных параметров A и B , подлежащих определению. Внося полученное значение U в (9), придем к уравнению:

$$(4a + 9c)A + \frac{20a + 55c}{11} Ba - 9 Gg = 0,$$

$$\frac{20a + 55c}{11} A + \frac{140a + 559c}{11 \cdot 13} Ba - 5Gg = 0;$$

решая их, найдем:

$$A = \frac{577566c^2 + 240416ac - 7040a^2}{2(4a + 9c)(32087c^2 + 19712ac + 1920a^2)} Gg,$$

$$Ba = \frac{8 \cdot 11 \cdot 130 \cdot a}{32087c^2 + 19712ac + 1920a^2} Gg.$$

Отсюда составим:

$$\left. \begin{aligned} A + Ba &= \frac{1}{c} f_1 \left(\frac{a}{c} \right) Gg \\ A + \frac{5}{9} Ba &= \frac{1}{c} f_2 \left(\frac{a}{c} \right) Gg \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{577566 + 446336 \left(\frac{a}{c} \right) + 84480 \left(\frac{a}{c} \right)^2}{2 \left[9 + 4 \frac{a}{c} \right] \left[32087 + 19712 \left(\frac{a}{c} \right) + 1920 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right]} \\ f_2 &= \frac{577566 + 354816 \left(\frac{a}{c} \right) + 43804 \left(\frac{a}{c} \right)^2}{2 \left[9 + 4 \frac{a}{c} \right] \left[32087 + 19712 \left(\frac{a}{c} \right) + 1920 \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right]} \end{aligned} \right\} \quad (22^1)$$

Момент кручения будет по формуле (5) иметь значение:

$$M = 2I_1 = \frac{32ac}{105} \left(A + \frac{5}{9} Ba \right) = \frac{32\sqrt{ac} \cdot a^3}{105} Gg f_2 \left(\frac{a}{c} \right);$$

вводя же величину

$$h = 2\sqrt{ac},$$

получим

$$M = \frac{16}{105} Gg a^3 h f_2 \left(\frac{a}{c} \right), \quad (23)$$

где

$$\frac{a}{c} = 4 \left(\frac{a}{h} \right)^2. \quad (24)$$

В первом приближении, отбрасывая члены, содержащие

$$\left(\frac{a}{h} \right)^2 \text{ и } \left(\frac{a}{h} \right)^4,$$

получим

$$f_2 \left(\frac{a}{c} \right) = \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \frac{a}{c}} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9} \frac{a^2}{h^2}}. \quad (23^1)$$

Сравнивая (23) с (18), мы видим, насколько формула (18) является приближенной, — она верна с точностью до величины второго порядка относительно $\frac{a}{h}$.

Имеем значения $f_2 \left(\frac{a}{h} \right)$ для различных значений $\left(\frac{a}{h} \right)$:

| | | | |
|----------------------------------|---|-------|-------|
| $\frac{a}{h}$ | 0 | 0,1 | 0,25 |
| $f_2 \left(\frac{a}{h} \right)$ | 1 | 0,991 | 0,904 |

Полярный момент инерции профиля относительно центра тяжести D:

$$I_D = \frac{ah^3}{30} \left(1 + \frac{48}{35} \cdot \frac{a^2}{h^2} \right)$$

Площадь профиля:

$$S = \frac{2}{3} ah$$

По известной приближенной формуле Сен-Венана имеем:

$$M = \frac{S^4}{KI_D} \cdot Gg; \quad (24)$$

внося сюда полученные значения I_D и S , получим:

$$M = \frac{160}{27K} Gg h a^3 \frac{1}{1 + \frac{48}{35} \left(\frac{a}{h} \right)^2} \quad (24')$$

Здесь K — постоянная Сен-Венана, которую он дал приближенно

$$K = 40$$

Сравнивая с нашей формулой, получим, что у нас для

$$\frac{a}{h} = 0 \quad K = 38,89,$$

$$\frac{a}{h} = \frac{1}{4} \quad K = 39,62.$$

Мы видим, что формула Сен-Венана дает довольно хорошее значение для крутящего момента, но зато она не дает напряжения, а между тем при расчете на прочность, последнее есть главное.

Исследуем теперь ход напряжений по профилю. Внося (21) в формулу (4), мы найдем легко, что наибольшее напряжение сдвига имеет место в точке N, ближайшей к центру тяжести D точке контура, как и должно быть по теореме Сен-Венана; найдем наибольшее напряжение сдвига

$$p = (A + Ba) ac; \quad (25')$$

соединяя (25') с (22), найдем:

$$p = a Ggf_1 \left(\frac{a}{c} \right); \quad (25'')$$

вводя же крутящий момент из (23), мы получим:

$$p = \frac{105}{16} \frac{M}{ha^2} f \left(\frac{a}{h} \right), \quad (25)$$

где:

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{577566 + 1773344\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 135168\left(\frac{a}{h}\right)^4}{577566 + 1419264\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 700864\left(\frac{a}{h}\right)^4}$$

Имеем таблицу значений функции $f\left(\frac{a}{h}\right)$ для различных значений отношения $\frac{a}{h}$.

| $\frac{a}{h}$ | 0 | 0,10 | 0,25 | 0,35 |
|-----------------------------|---|--------|-------|-------|
| $f\left(\frac{a}{h}\right)$ | 1 | 1,0063 | 1,038 | 1,102 |

Мы видим теперь, что, сохраняя величины четвертого порядка отношения $\frac{a}{h}$, мы совершаем, пользуясь нашей формулой (3), ошибку не свыше 10% при очень невыгодной форме профиля ($a = 0,35h$), не имеющей места в действительности; напротив, для профилей, встречающихся на практике, ошибка всего около 1%.

Заметим еще, что сравнение решения (25) с точным решением для случая (решение это найдено нами в 1914 г.)

$$\frac{a}{h} = \frac{1}{4},$$

когда хорда проходит через фокус, показывает, что ошибка — менее 1/4%.

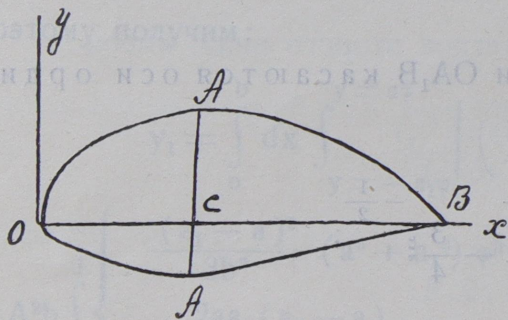
Таким образом, мы достаточно выяснили обоснованность расчетной формулы (3).

О расчете лопастей пропеллера на кручение.

Проф. Л. С. Лейбензон.

Статья II.

Пусть контур (фиг. 1) OAB дан уравнением



Фиг. 1.

$$y = a \sqrt{\frac{x}{b}} \left(1 - \frac{x}{b} \right), \quad (1)$$

где

$$OB = b, \quad a = \text{const}. \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{b}, \\ \varphi(\xi) &= (1 - \xi) \sqrt{\xi}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

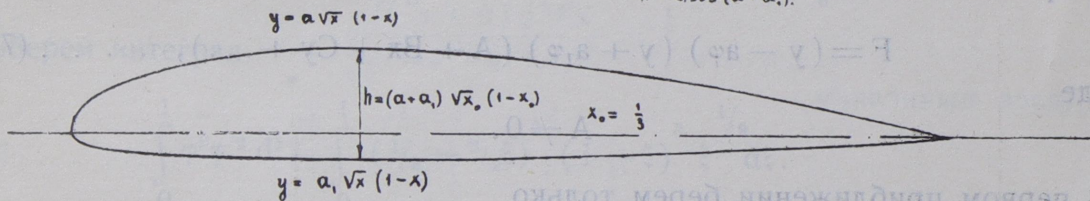
тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi \leq 1, \\ \varphi(0) &= \varphi(1) = 0. \end{aligned}$$

Уравнение контура OA_1B будет

$$y = a \varphi(\xi), \quad (1')$$

$$h = 0.385(a + a_1).$$



Фиг. 1а.

уравнение контура OA_1B берем в форме:

$$y = -a_1 \varphi(\xi) \quad (4)$$

Профиль образован дугами OAB и OA_1B .

Взяв производную, найдем абсциссу $OC = \xi_0$, соответствующую максимуму функции $\varphi(\xi)$,

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{2}} (1 - \xi) - \frac{3}{2} \xi^{\frac{1}{2}} = 0,$$

откуда

$$\xi_0 = \frac{1}{3} \dots \dots \dots (5)$$

Максимальные ординаты AC и A₁C имеют, очевидно, абсциссу

$$x_0 = b \xi_0 = \frac{b}{3}.$$

Обозначив максимальную высоту профиля AA₁ через h, имеем

$$h = (a + a_1) \varphi(\xi_0) \dots \dots \dots (6)$$

В начале, для $\xi = 0$, имеем

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \infty,$$

а) следовательно, обе кривые OAB и OA₁B касаются оси ординат в начале 0. Далее имеем:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -\frac{1}{4} \xi^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \xi^{-\frac{1}{2}};$$

а потому для $0 \leq \xi \leq 1$ имеем всегда

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} < 0,$$

т.е. обе кривые OAB и OA₁B обращены вогнутостью к оси абсцисс. Профиль имеет вид, изображенный на фиг. 1. Согласно приближенному методу W. Ritz'a (приведен в первой статье) берем функцию напряжений в виде

$$F = (y - a\varphi) (y + a_1\varphi) (A + Bx + Cy + \dots), \dots \dots (7)$$

где

$$A \neq 0.$$

В первом приближении берем только

$$F = A (y - a\varphi) (y + a_1\varphi); \dots \dots \dots (8)$$

очевидно, что уравнение

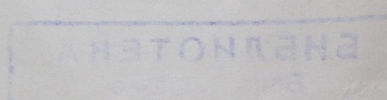
$$F = 0$$

распадается на два уравнения

$$y - a\varphi = 0, \quad y + a_1\varphi = 0,$$

которые суть уравнения кривых OAB и OA₁B.

Следовательно, выбранная нами функция F уничтожается на контуре профиля OABA₁O.



Вычисляем :

$$\left. \begin{aligned} F &= A [y^2 + (a_1 - a) \cdot \varphi \cdot y - aa_1 \varphi^2], \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{A}{b} [(a_1 - a) y \varphi' - 2aa_1 \varphi \varphi'], \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= A [2y + (a_1 - a) \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Отсюда найдем :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = A^2 \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{a_1 - a}{b} \right)^2 y^2 \varphi'^2 + 4 \frac{a^2 a_1^2}{b^2} \varphi^2 \varphi'^2 - \\ &- 4 \frac{aa_1 (a_1 - a)}{b^2} y \varphi \varphi' + 4y^2 + \\ &+ (a_1 - a)^2 \varphi^2 + 4 (a_1 - a) y \varphi \end{aligned} \right\}.$$

Поэтому получим :

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^b dx \int_{y=-a_1 \varphi}^{y=a \varphi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dy = \\ &= A^2 b \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a_1 - a)^2}{3b^2} (a^3 + a_1^3) \varphi^3 \varphi'^2 + 4 \frac{a^2 a_1^3}{b^2} (a + a_1) \varphi^3 \varphi'^2 - \\ &- \frac{2aa_1 (a_1 - a)}{b^2} (a^2 - a_1^2) \varphi^3 \varphi'^2 + \frac{4}{3} (a^3 + a_1^3) \varphi^3 + \\ &+ (a_1 - a)^2 (a + a_1) \varphi^3 + 2 (a_1 - a) (a^2 - a_1^2) \varphi^3 \end{aligned} \right\} d\xi = \\ &= \frac{A^2}{b} \left[\frac{(a_1 - a)^2 (a^3 + a_1^3)}{3} + 4 (a + a_1) a^2 a_1^2 - \right. \\ &\left. - 2aa_1 (a_1 - a) (a^2 - a_1^2) \right] \int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi + \frac{A^2 b (a + a_1)^3}{3} \int_0^1 \varphi^3 d\xi. \end{aligned}$$

Разберем интеграл

$$\int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi \right)^2 (1 - \xi)^3 \xi^{1/2} d\xi.$$

Он, очевидно, конечен для $\xi=0$. Но имеем :

$$\int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi = \left[\varphi^4 \varphi' \right]_0^1 - 3 \int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi;$$

но двойная подстановка в интегрированной части дает нуль, а потому :

$$\int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi = -3 \int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi,$$

что возможно только, если

$$\int_0^1 \varphi^3 \varphi'^2 d\xi = 0. \quad (10)$$

Итак, имеем окончательно

$$J_1 = \frac{A^2 b (a + a_1)^3}{3} \int_0^1 \varphi^3 d\xi \quad (11)$$

Легко видеть, что

$$\int_0^1 \varphi^3 d\xi = \int_0^1 (1 - \xi)^3 \xi^{3/2} d\xi,$$

и, следовательно, вводя Эйлеров интеграл второго вида, имеем:

$$\int_0^1 \varphi^3 d\xi = \frac{\Gamma(4) \Gamma(5/2)}{\Gamma(6^{1/2})},$$

но

$$\Gamma(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\Gamma(6^{1/2}) = 5^{1/2} \cdot 4^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/2} \cdot \Gamma(2^{1/2}),$$

а потому имеем:

$$\int_0^1 \varphi^3 d\xi = \frac{6}{5^{1/2} \cdot 4^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/2}} \quad (12)$$

Следовательно, имеем окончательно

$$J_1 = \frac{2A^2 b (a + a_1)^3}{5^{1/2} \cdot 4^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/2}} \quad (11')$$

Далее вычисляем:

$$I_2 = \int_0^b dx \int_{y=-a_1\varphi}^{y=a\varphi} F dy; \quad (13)$$

имеем:

$$\begin{aligned} I_2 &= Ab \int_0^1 dx \int_{y=-a_1\varphi}^{y=a\varphi} \left[y^2 + (a_1 - a) y\varphi - aa_1 \varphi^2 \right] dy = \\ &= Ab \int_0^1 \left[-\frac{1}{3} (a^3 + a_1^3) \varphi^3 + \frac{(a_1 - a)(a^2 - a_1^2)}{2} \varphi^3 - aa_1 (a + a_1) \varphi^3 \right] d\xi = \\ &= -\frac{Ab (a + a_1)^3}{6} \int_0^1 \varphi^3 d\xi. \end{aligned}$$

Итак, имеем:

$$I_2 = - \frac{Ab (a + a_1)^3}{6} \int_0^1 \varphi^3 d\xi \dots \dots \dots (14)$$

Составим теперь выражение:

$$J = J_1 - 4 Gg J_2 = \frac{b (a + a_1)^3}{3} \left[A^2 + 2 Gg A \right] \int_0^1 \varphi^3 d\xi .$$

Очевидно, условие $\delta I = 0$ дает

$$2 \frac{b (a + a_1)^3}{3} \left[A + Gg \right] \cdot \delta A \cdot \int_0^1 \varphi^3 d\xi = 0 ,$$

откуда имеем основное соотношение

$$A = - Gg \dots \dots \dots (15)$$

Вычислим теперь крутящий момент:

$$M = 2 \int_0^b dx \int_{y=-a_1\varphi}^{y=a\varphi} F dy = 2I_2 ; \dots \dots \dots (16)$$

внося сюда (12), получим окончательно

$$M = \frac{2gGb (a + a_1)^3}{5^{1/2} \cdot 4^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/2}} \dots \dots \dots (17)$$

Напряжения сдвига при кручении профиля даны уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_z &= - \frac{\partial F}{\partial y} = - A \left[2y + (a_1 - a) \varphi \right] , \\ y_z &= \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{A}{b} \left[(a_1 - a) y \varphi' - 2aa_1 \varphi \varphi' \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Согласно теории потенциала наибольшее напряжение может быть только на контуре профиля. Имеем очевидно:

на контуре OAB ($y = a\varphi$):

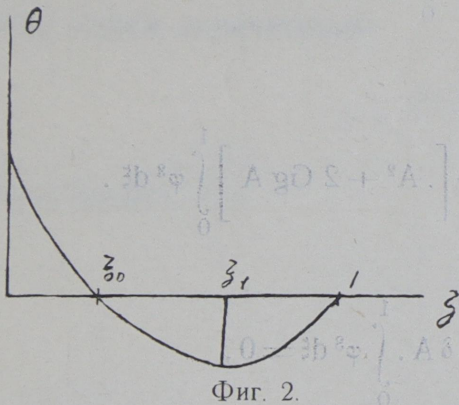
$$\left. \begin{aligned} X_z &= - A (a + a_1) \varphi (\xi) , \\ y_z &= - \frac{Aa (a + a_1)}{b} \Theta (\xi) ; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

на контуре OA₁B ($y = - a_1\varphi$):

$$\left. \begin{aligned} X_z &= + A (a + a_1) \varphi (\xi) , \\ y_z &= - \frac{Aa_1 (a + a_1)}{b} \Theta (\xi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19')$$

где введено обозначение:

$$\Theta(\xi) = \varphi(\xi) \varphi'(\xi) = \frac{1}{2} - 2\xi + \frac{3}{2}\xi^2; \quad \dots \quad (20)$$



Фиг. 2.

ход функции дан на фиг. 2.

Функции $\Theta(\xi)$ обращается в нуль для

$$\xi = \xi_0 = 1/3$$

и для

$$\xi = 1;$$

для минимума ее имеем условие

$$\Theta'(\xi) = -2 + 3\xi = 0,$$

$$\Theta'' = +3 > 0 \quad (\text{условие минимума}).$$

Поэтому, так как $a_1 < a$, имеем условие:

$$\frac{a}{b} \Theta(0) = \frac{a}{2b} < \varphi(\xi_0) = \frac{2}{3} \sqrt{1/3}, \quad \dots \quad (20')$$

при котором наибольшее напряжение на контуре профиля OABA₁O дано формулой

$$\tau = X_z = (a + a_1) A \varphi(\xi_0). \quad \dots \quad (21)$$

Внося сюда значение A из (15), найдем:

$$\tau = + (a + a_1) Gg \varphi(\xi_0), \quad \dots \quad (21')$$

исключая отсюда Gg с помощью формулы (17), получим

$$\tau = \frac{5^{1/2} \cdot 4^{1/2} \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{1/2}}{2b (a + a_1)^2} M \varphi(\xi_0); \quad \dots \quad (22)$$

но из уравнения (6) имеем

$$a + a_1 = \frac{h}{\varphi(\xi_0)^2} \quad \dots \quad (6')$$

а потому, внося (6') в (22), получим

$$\tau = \frac{5,5 \cdot 4,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5}{2} \frac{M}{bh^2} \varphi^3(\xi_0) \quad \dots \quad (22')$$

В нашем случае $\xi_0 = 1/3$; поэтому

$$\varphi(\xi_0) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,385 \dots,$$

а потому наибольшее напряжение на кручение будет

$$\tau = 6,18 \frac{M}{bh^2} \quad \dots \quad (23)$$

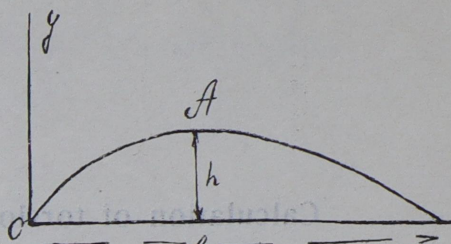
Та же формула справедлива и в частном случае, когда $a_1 = 0$, т.е. кривая OA_1B сливается с осью x , что даст профиль, изображенный на фиг. 3.

В этом случае вместо (6') имеем:

$$a = \frac{h}{\varphi(\xi_0)} \dots \dots \dots (6'')$$

Условие (20) примет вид:

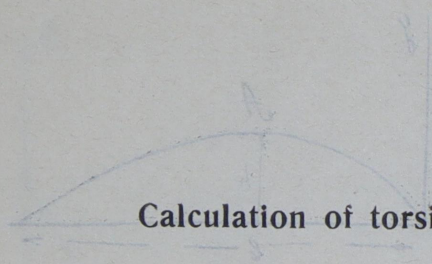
$$\frac{h}{2b \varphi(\xi_0)} \leq \varphi(\xi_0),$$



Фиг. 3.

что дает, внося $\varphi(\xi_0)$, $\frac{h}{b} < \frac{8}{27}$, это всегда выполнено при существующих профилях. То же, конечно, имеет место, если $a_1 \neq 0$, т.е. в общем случае. Формула (23) дает, следовательно, расчетное напряжение, для профиля фиг. 1, на кручение.

Профиль этот указан нам проф В. П. Ветчинкиным.



Calculation of torsional stresses in propeller blades.

L. C. Leibenzon.

1. The author analyzes the question of the torsion of prisms the cross-section of which is bounded by two intersecting parabolae of the second order (Fig. 3). St-Venant's method is applied. An approximate solution of St-Venant's equation (6) is obtained by Walter Ritz's variation method. For this purpose there is formed the first approximation (13) for the stress function F , A being determined by formula (17). The maximum torsional stress is obtained on the outline at the point nearest to the centre of gravity of the cross-section, and is given by formula (20). In the case of the outline shown in Fig. 4 (which is a particular case, when $a_1 = 0$) the second approximation is formed, which for the maximum torsional stress gives the formula (25). An analysis of this formula shows that for small values of the ratio of the rise to the chord the error is insignificant, and even when this ratio is equal to 0,25, which value is not met with in practice, the error is less than 10 per cent [Formula (20) gives smaller values than form. (25)]. Therefore the values obtained by formula (20) ought to be increased maximum by 10 per cent. The angle of torsion per unit of length is denoted by g .

2. The author investigates a special outline, bounded by two intersecting curves given by equations (1). The stress is determined also approximately by W. Ritz's method. The first approximation gives for the torsional stress the value (23). The ratio of the rise to the chord must not exceed 0,25. The second approximation is obtained by increasing the stress given by form. (23) maximum by 10 per cent.

U. S. S. R.

№ 65

SCIENTIFIC-TECHNICAL DEPARTMENT
OF THE SUPREME COUNCIL OF NATIONAL ECONOMY

№ 65

Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical
Institute. № 8

CALCULATION OF
TORSIONAL STRESSES IN PROPELLER
BLADES

by

L. C. LEIBENZON

MOSCOW—1924

ТРУДЫ

ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА.

МОСКВА, Вознесенская, 21.

1. О движении воды в открытом канале и о движении газа в трубах. Проф. *Н. Е. Жуковский*. — О движении воды в открытом канале и о движении газа в трубах. Проф. *Н. Е. Жуковский*. — Аналогия между движением тяжелой жидкости в узком канале и движением газа в трубе с большой скоростью. *Н. Г. Ченцов*. — Движение газа в трубках с трением о стенки. М. 1925.
 2. *Н. В. Красовский и Г. Х. Сабинин*. — Проблема использования энергии ветра. *Н. В. Красовский*. — Русское ветряное хозяйство, его современное состояние и перспективы. *Его же*. — О быстроходных ветряных двигателях (ст. 1-я и 2-я). *Его же*. — Метод расчета ветряных силовых станций. *Его же*. — О работе ветряных двигателей при различных средних скоростях ветра. *Г. Сабинин*. — Основные величины, характеризующие свойства ветряных двигателей. *Его же*. — Ветряной двигатель с самоустанавливающимися лопастями. М. 1923.
 3. *В. П. Ветчинкин и Н. Г. Ченцов*. — Плоский маятник о двух степенях свободы и определение при помощи его высоты центра тяжести и момента инерции твердого тела. М. 1923.
 4. *Н. В. Красовский*. — Новое крыло для русской ветряной мельницы. *В. В. Уткин-Егоров*. — Инструкция для сборки крыльев. М. 1923.
 5. *К. А. Ушаков*. — Новый метод измерения сил при аэродинамических испытаниях. Эталонные весы. М. 1924.
 6. *В. Л. Александров*. — Приложение теории решеток к винту. М. 1924.
 7. *К. Баулин*. — Экспериментальное исследование аэродинамических труб. М. 1924.
 8. *Л. С. Лейбензон*. — О расчете лопастей пропеллера на кручение. М. 1924.
 9. *А. Н. Вегенер*. — Аэродромы. М. 1924.
-