УДК 519.213:62-192

Д. Н. ШЕВЧЕНКО, кандидат технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАКОПЛЕНИЯ ОТКАЗОВ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ТЕСТИРОВАНИИ ОБЪЕКТА

Рассмотрена случайная величина, равная времени до последовательного наступления двух событий (отказов) при условии гарантированного обнаружения отказов в ходе регулярного тестирования системы. Определена функция распределения этой несобственной случайной величины. Предложенная модель может использоваться при количественном анализе надежности систем, в которых наступление двух отказов в зависимости от их последовательности переводит систему в защитное или опасное состояние.

Концепция безопасности современных систем управления ответственными технологическими процессами (например, систем железнодорожной автоматики и телемеханики) предусматривает, что все одиночные отказы элементов не должны переводить систему в опасное состояние и должны обнаруживаться на рабочих или тестовых воздействиях не позднее чем в системе возникнет следующий отказ [1].

Поскольку предотвратить появление кратных отказов в системах невозможно, их анализу (в том числе с учетом периодического тестирования систем) посвящено множество публикаций последних лет. При этом обычно считается, что любой кратный отказ – опасный. Такое допущение упрощает модель надежности, но значительно занижает значения показателей безопасности функционирования по сравнению с неизвестными истинными значениями. В особенности такое допущение неадекватно для систем, в которых наступление двух отказов, произошедших в одной последовательности (A_2, A_1), переводит систему в защитное состояние, а в иной последовательности (A_1, A_2) – в опасное состояние.

В связи с этим представляет научный и практический интерес определение вероятности безопасного функционирования систем, подверженных накапливающимся в определенной последовательности отказам с учетом тестирования, которое в компьютерных системах выполняется (обычно) через равные интервалы времени.

Постановка задачи. Рассматривается абстрактная техническая система, подверженная двум независимым отказам: A_1 и A_2. В случае, когда данные отказы происходят в последовательности A_1, A_2, система переходит в опасное состояние; в противном случае A_2, A_1 – в защитное состояние.

Наряду с отказами в системе предусмотрено тестирование. Интервал времени между тестированиями есть константа T, которая много меньше средней наработки системы между отказами. Предполагается, что в процессе тестирования, а также после перехода в защитное состояние все отказы обнаруживаются наверняка, после чего система полностью восстанавливает свой ресурс.

Рассмотрим пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega = (t_1, t_2) \,|\, 0 < t_1 < \infty,\ 0 < t_2 < \infty\}$, где определены две независимые непрерывные положительно распределенные случайные величины $\xi_i = t_i$, характеризующие время до наступления i-го отказа ($i = 1, 2$), с функциями распределения

$$F_i(x) = P(\xi_i < x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(y)\,dy,\ i = \overline{1, 2}.$$

Предположим, что каждый из двух отказов обнаруживается (в процессе тестирования) наверняка, интервал времени между тестированием равен константе T, которая много меньше средней наработки до каждого из двух возможных отказов:

$$T << M(\xi_i),\ i = \overline{1, 2}.$$

Тогда величина τ – время до обнаружения первого отказа (из двух) практически подчиняется равномерному распределению на интервале $(0, T)$ с функцией плотности распределения [2, с. 156]

$$f_\tau(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{T},\ 0 < x < T; \\ 0,\ x \notin (0, T). \end{cases}$$

Определим третью случайную величину η – время наработки системы до опасного отказа:

$$\eta = \begin{cases} \xi_2,\ \text{если}\ 0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau; \\ \infty,\ \text{если}\ \xi_1 \ge \xi_2, \end{cases} \qquad (1)$$

которая является несобственной случайной величиной, т. к. с ненулевой вероятностью она принимает бесконечное значение, а ее функция распределения не стремится к единице при $x \to \infty$.

Поставим задачу определения функции распределения величины η:

$$F(x) = P(\eta < x) = \begin{cases} P(\xi_2 < x),\ \text{если}\ 0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau; \\ 0,\ \text{если}\ \xi_1 \ge \xi_2. \end{cases}$$

Решение задачи. Рассмотрим функцию плотности распределения величины η:

$$f_\eta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau\})}{\Delta x}.$$

Выразим событие $\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau\}$ (исходы, благоприятные данному событию, показаны на рисунке 1 штриховкой) следующим образом:

$$\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau\}$$
$$= \begin{pmatrix} (\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < x\}) \\ (\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < \xi_2 - \tau\}) \end{pmatrix} \cup$$
$$\cup\ (\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x < \xi_1 < \xi_2\}) = (A \setminus B) \cup C.$$

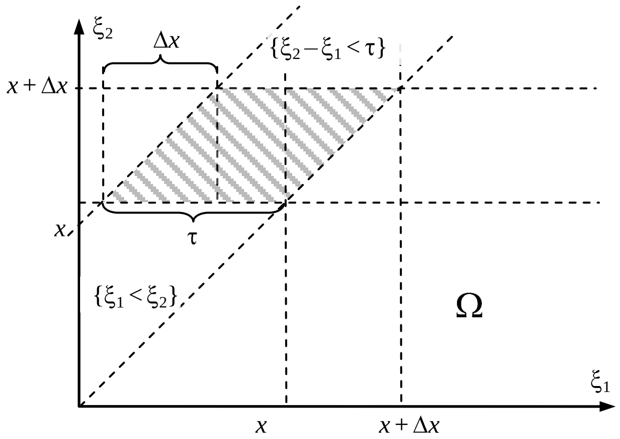

Рисунок 1 – Демонстрация события
$\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau\}$

Учитывая, что событие $B \subset A$ (см. рисунок 1), а события $(A \setminus B)$ и C несовместны:

$$f_\eta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{0 < \xi_2 - \xi_1 < \tau\})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < x\})}{\Delta x} -$$
$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < \xi_2 - \tau\})}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x < \xi_1 < \xi_2\})}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Рассмотрим по отдельности каждое слагаемое в выражении (2), учитывая, что величины ξ_1 и ξ_2 независимы и абсолютно непрерывные:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < x\})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi_2 < x + \Delta x) P(x - \tau < \xi_1 < x)}{\Delta x} =$$
$$= P(x - \tau < \xi_1 < x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi_2 < x + \Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= P(x - \tau < \xi_1 < x) f_2(x);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < \xi_2 - \tau\})}{\Delta x} \le$$
$$\le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x - \tau < \xi_1 < x - \tau + \Delta x\})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi_2 < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} P(x - \tau < \xi_1 < x - \tau + \Delta x) =$$
$$= f_2(x) \cdot 0 = 0;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x < \xi_1 < \xi_2\})}{\Delta x} \le$$
$$\le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(\{x < \xi_2 < x + \Delta x\} \cap \{x < \xi_1 < x + \Delta x\})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi_2 < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} P(x < \xi_1 < x + \Delta x) =$$
$$= f_2(x) \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, выражение (2) упрощается, и функция плотности распределения величины η определяется выражением

$$f_\eta(x) = P(x - \tau < \xi_1 < x) f_2(x). \qquad (3)$$

Первый множитель в выражении (3) выразим по формуле полной вероятности, рассматривая в качестве гипотез все возможные значения величины $\tau \in (0, T)$ с вероятностями $f_\tau(y)dy$:

$$P(x - \tau < \xi_1 < x) = \int_0^T f_\tau(y) P(x - \tau < \xi_1 < x) dy =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T P(x - y < \xi_1 < x) dy = \frac{1}{T}\int_0^T (F_1(x) - F_1(x - y)) dy =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T F_1(x) dy - \frac{1}{T}\int_0^T F_1(x - y) dy =$$
$$= \frac{F_1(x)}{T}\int_0^T dy - \frac{1}{T}\int_0^T F_1(x - y) dy =$$
$$= F_1(x) - \frac{1}{T}\int_0^T F_1(x - y) dy.$$

Подставляя полученную вероятность в выражение (3), получим

$$f_\eta(x) = F_1(x) f_2(x) - \frac{f_2(x)}{T}\int_0^T F_1(x - y) dy.$$

Следовательно, функция распределения величины η – времени наработки системы до опасного отказа (функция опасного отказа)

$$F(x) = \int_0^x F_1(y) f_2(y) dy - \int_0^x \frac{f_2(y)}{T}\int_0^T F_1(y - z) dz\, dy. \qquad (4)$$

Примечательно, что если тестирование в системе не предусматривается (т. е. $T \to \infty$), то функция распределения времени наработки системы до опасного отказа определяется выражением

$$F(x) = \int_0^x F_1(y) f_2(y) dy,$$

полученным ранее в статье [3].

Пример. Рассмотрим систему пожаротушения здания. Определим события: A_1 = {отказ системы пожаротушения}, A_2 = {появление источника возгорания}, B = {пожар}. Пусть случайная величина ξ_1 – время до наступления события A_1 – подчиняется распределению Вейбулла – Гнеденко с функцией

$$F_1(x) = P(\xi_1 < x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\dfrac{x}{20}\right)^3\right), & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

а ξ_2 – время до наступления события A_2 – распределено экспоненциально с функцией

$$F_2(x) = P(\xi_2 < x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{12}\right), & x > 0. \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Пусть периодичность контроля технического состояния системы пожаротушения составляет $T = 12$ мес.

Очевидно, что событие B наступает одновременно с событием A_2, если перед ним уже произошло событие A_1. В противном случае событие B не происходит никогда. Тогда время до наступления события B определяется случайной величиной η и выражением (1), а ее функция распределения $F(x)$ – выражением (4).

Основные числовые характеристики случайной величины η представлены в таблице 1, а график функции распределения – на рисунке 2.

Таблица 1 – **Основные числовые характеристики рассматриваемых величин**

Наименование	ξ_1	ξ_2	η, мес.		
			$T = 12$	$T = 24$	$T \to \infty$
Математическое ожидание, мес.	17,86	12	–	–	–
Стандартное отклонение, мес.	6,491	12	–	–	–
Квантиль уровня 0,01, мес.	4,316	0,121	9,717	9,447	9,221
Квантиль уровня 0,02, мес.	5,447	0,242	12,291	11,807	11,427
Квантиль уровня 0,05, мес.	7,431	0,616	17,952	16,529	15,632
Квантиль уровня 0,1, мес.	9,446	1,264	–	23,452	20,867
Медиана, мес.	17,7	8,318	–	–	–
$\lim_{x\to\infty} F(x)$	1	1	0,096	0,148	0,26

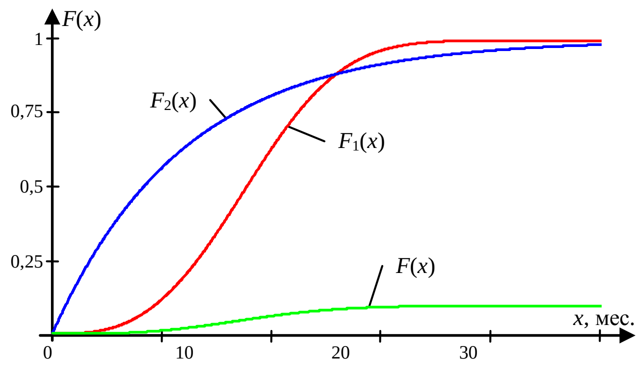

Рисунок 2 – Функции распределения величин ξ_1, ξ_2 и η (для $T = 12$ мес.)

На рисунке 3 представлены графики функции распределения величины η для различных значений T – интервалов времени между тестированием системы.

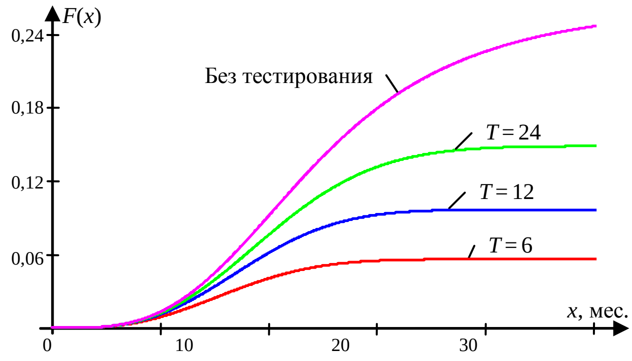

Рисунок 3 – Функция распределения величины η для различных интервалов времени между тестированием

Заключение. В статье показан способ вычисления функции распределения времени до последовательного наступления двух отказов системы по известным функциям распределения времени до наступления каждого из них с учетом гарантированного обнаружения отказов в ходе периодического тестирования.

Подобная модель применима для количественного анализа безопасности функционирования систем, кратные отказы которых переводят систему в опасное состояние только при наступлении в строго определенной последовательности.

Кроме того подобная модель применима для анализа деревьев отказов с причинно-следственными связями «приоритетное И», которые учитывают последовательность отказов и других воздействий на объект.

Список литературы

1 **Острейковский, В. А.** Теория надежности : учеб. для вузов / В. А. Острейковский. – М. : Высш. шк., 2003. – 463 с.

2 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

3 **Шевченко, Д. Н.** Анализ динамического дерева отказов / Д. Н. Шевченко // Электромагнитная совместимость и безопасность на железнодорожном транспорте. – 2011. – № 2. – Д. : Изд-во ДНУЖТ, 2011. – С. 142–148.

Получено 13.09.2017

D. N. Shevchenko. The probability of successive accumulation of failures with regular testing of an object.

We consider a random variable equal to the time before the occurrence of two consecutive events (failures) takes place subject to a guaranteed failure detection during routine testing of the system. The distribution function of the improper random variable is determined. The proposed model can be used in the quantitative analysis of reliability of systems in which two offensive failures, depending on their sequence the system into a protective or hazardous state.