$$+\frac{q_0}{8a_6}\left\{\left(\frac{r^4-5b^4}{8}-\frac{b^4}{2}\ln\left(\frac{r}{b}\right)-b^2r^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{b^2r^2}{2}\right)H_0(b-r)+b^2r^2(\ln r-1)+\frac{b^2}{4}r^2\left(2-b^2\right)+\frac{b^4}{2}\ln r+\frac{b^4}{4a_6}+\frac{b^2}{2a_6}\right\}. \quad (3)$$

Численно исследованы прогиб и сдвиг (3) в защемленной по контуру пятислойной круговой пластине единичного радиуса, симметричной по толщине. За базовую расчетную модель принята пластина, слои которой набраны из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины несущих слоев: $h_1 = h_2 = h_4 = 0{,}02$, заполнителей: $h_3 = h_5 = 0{,}1$, величина нагрузки $q_0 = 10$ МПа. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1].

Зависимость максимальных перемещений от величины пятна нагрузки (1) при различной толщине внутреннего несущего слоя следующая: уменьшение толщины внутреннего слоя в 2 раза приводит к увеличению прогиба на 11,4 процента; увеличение толщины внутреннего несущего слоя в 1,5 раза приводит к уменьшению прогиба на 15,2 процентов.

Предложенное в работе решение позволяет моделировать напряженно-деформированное состояние круговых пятислойных пластин при локальных поверхностных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние радиуса пятна нагрузки и жесткости материалов несущих слоев на величину максимальных перемещений в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Список литературы

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.

2 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

3 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.

5 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

6 **Старовойтов, Э. И.** Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.

7 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

8 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993. – EDN UARYZD.

9 **Захарчук, Ю. В.** Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

10 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке / Э. И. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 56–62.

11 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

12 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

13 **Салицкий, В. С.** Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

15 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

УДК 539.3

СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНА ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКЕ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Введение. Конструктивные слоистые элементы широко применяются с середины прошлого века в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве. Исследование их поведения при динамическом нагружении с учетом окружающей температуры является одним из наиболее актуальных вопросов в последнее время. Созданию необходимых математических моделей посвящен многочисленный ряд публикаций. Рассмотрим некоторые из них.

Монографии [1–6] посвящены разработке расчетных моделей деформирования слоистых конструкций при воздействии различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения задач статики и динамики, отмечаются возникающие особенности при температурных воздействиях. В статьях [7–9] рассмотрены свободные колебания и нестационарные нагружения тонкостенных элементов конструкций, включая цилиндрические оболочки. В работах [10–16] исследовано напряженно-деформированное состояние трехслойных стержней и пластин при квазистатическом нагружении.

1 Постановка задачи проведена в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для тонких несущих слоев с одинаковыми толщинами $h_1 = h_2 = h$ справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком относительно толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) принята гипотеза Тимошенко. К внешней поверхности $z = c + h_1$ в начальный момент времени подается тепловой поток интенсивности q_t, благодаря которому изменяется усредненная температура пластины.

Для связи напряжений и деформаций в слоях использовался закон Гука с учетом температуры:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k э_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T) \quad (\alpha = r, \varphi),$$
$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k э_{rz}^{(3)}, \tag{1}$$

где $s_\alpha^{(k)}, s_{rz}^{(3)}$, $(э_\alpha^{(k)}, \varepsilon_{rz}^{(3)})$ – девиаторы тензоров напряжений (деформаций); $\sigma^{(k)}$, $(\varepsilon^{(k)})$ – среднее напряжение (деформация); $G_k(T)$, $K_k(T)$ – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования, совпадающие в несущих слоях $G_1 = G_2 = G$ $K_1 = K_2 = K$; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материалов слоев.

Гармоническая силовая нагрузка, равномерно распределена по поверхности верхнего слоя:

$$q(r,t) = q_0(D\cos(\omega_k t) + E\sin(\omega_k t)), \tag{2}$$

где $q_0 = \text{const}$; ω_k – интенсивность и частота нагрузки, совпадающая с одной из собственных частот пластины $\omega_k = \omega_n$; D, E – параметры нагрузки.

Общие уравнения колебаний рассматриваемой пластины без учета воздействия температурного поля приведены в [1]. В нашем случае сэндвич-пластины уравнений останется два, коэффициенты a_i будут зависеть от температуры через модули упругости, а в правой части второго уравнения появится резонансная нагрузка (2):

$$\mathrm{L}_2(a_4\psi - a_5 w,_r) = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_5\psi - a_6 w,_r) - M_0\ddot{w} = q_0(D\cos(\omega_k t) + E\sin(\omega_k t)), \tag{3}$$

где $w(r, t)$, $\psi(r, t)$ – искомые прогиб и относительный сдвиг; $M_0\ddot{w}$ – инерционные силы, причем $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)r_1^2$, ρ_k – плотность материала, точка вверху обозначает производную по времени; дифференцирование по координате r обозначено запятой в нижнем индексе; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 –

$$a_4 = c^2\left(2hK^+ + \frac{2}{3}cK_3^+\right), \quad a_5 = c\left[2h\left(c + \frac{1}{2}h\right)K^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+\right], \quad a_6 = 2h\left(c^2 + ch + \frac{1}{3}h\right)K^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+$$

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad \mathrm{L}_2(g) \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad \mathrm{L}_3(g) \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \tag{4}$$

Для описания зависимости упругих характеристик материалов слоев от температуры применялась известная формула Белла [1].

На контуре пластины принимается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев $\psi(r_1, t) = 0$. Граничные условия при шарнирном опирании:

$$\psi(r_1,t) = w(r_1,t) = 0, \quad M_r(r_1,t) = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_r^{(k)} z\,dz = 0, \tag{5}$$

где $\sigma_r^{(k)}$ – радиальные напряжения; M_r – радиальный изгибающий момент.

В начальный момент времени прогиб и скорость отсутствуют:

$$w(r,0)=0, \quad \dot{w}(r,0)=0\,. \tag{6}$$

2 Решение задачи. Система (3) после элементарных преобразований приводится к виду

$$\psi=\frac{a_5}{a_4}w,_r+C_3r+\frac{C_4}{r}\,,$$

$$\mathrm{L}_3(w,_r)+M^4\ddot{w}=q_0(D\cos(\omega_k t)+E\sin(\omega_k t))\,. \tag{7}$$

где $M^4=\dfrac{a_4}{a_6a_4-a_5^{\;2}}M_0$.

В (7) необходимо положить константу интегрирования $C_4=0$, т. к. относительный сдвиг ψ ограничен в центре пластины. Подставив первое уравнение (7) в граничные условия (5), выразим оставшуюся константу интегрирования через значение производной от прогиба на контуре:

$$C_3=-\frac{a_5}{a_4r_1}w,_r(r_1,t)\,.$$

Используя это выражение, получим второе граничное условие для прогиба:

$$w=0\,, \quad a_6w,_{rr}+\frac{a_{60}}{r_1}w,_r=0\,, \quad (r=r_1). \tag{8}$$

Следовательно, прогиб рассматриваемой пластины, должен удовлетворять дифференциальному уравнению в (7), начальным условиям (6) и граничным условиям (8).

Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций $v_n(\beta_n r)$, [1]:

$$w(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}v_nT_n(t)\,, \quad \psi(r,t)=\frac{a_5}{a_4}\sum_{n=0}^{\infty}v,_rT_n(t)\,, \quad q(r,t)=M_0\sum_{n=0}^{\infty}v_nq_n(t)\,,$$

$$v_n(\beta_n r)\equiv\frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_n r)-\frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)}I_0(\beta_n r)\right], \tag{9}$$

где $T_n(t)$ – неизвестная функция времени; β_n – собственные числа; d_n – нормировочный коэффициент; $J_0(\beta_n r), I_0(\beta_n r)$ – функции Бесселя; $q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки (2) в ряд

$$q_n(t)=\frac{1}{M_0}\int_0^{r_1}q(r,t)v_nr\,dr=D_n\cos(\omega_k t)+E_n\sin(\omega_k t)\,,$$

$$D_n=Df(\beta_n), \quad E_n=Ef(\beta_n)\,, \quad f(\beta_n)=\frac{q_0r_1}{M_0d_n\beta_n}\left[J_1(\beta_n r_1)-\frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)}I_1(\beta_n r_1)\right].$$

Если во второе уравнение системы (7) подставить выражения (9) с учетом коэффициентов $q_n(t)$, то, используя ортонормированность системы собственных функций v_n, получим дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения искомой функции времени $T_n(t)$:

$$\ddot{T}_n(t)+\omega_n^2T_n(t)=D_n\cos(\omega_k t)+E_n\sin(\omega_k t)\,. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) можно принять в виде

$$T_n(t)=A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)+y_n(t)\,, \tag{11}$$

где $y_n(t)$ – частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки ω_k,

$$y_n(t)=\begin{cases}\dfrac{E_n}{\omega_n^2-\omega_k^2}\sin(\omega_k t)+\dfrac{D_n}{\omega_n^2-\omega_k^2}\cos(\omega_k t) & \text{при } n\neq k,\\[2ex] \dfrac{D_k}{2\omega_k}t\sin(\omega_k t)-\dfrac{E_k}{2\omega_k}t\cos(\omega_k t), & \text{при } n=k.\end{cases}$$

Подставив в начальные условия выражение для прогиба (9) и функцию (11), получим константы интегрирования A_n, B_n. Таким образом, резонансные колебания рассматриваемой пластины, учитывающие окружающую температуру, описываются выражениями (9) с функцией времени (11).

Выводы. Предложенная математическая модель термосилового резонансного воздействия на трехслойную упругую круговую пластину позволяет учитывать влияние температуры окружающей среды на параметры колебаний. Численная апробация решения показала, что при резонансе по более высокой собственной частоте происходит уменьшение скорости увеличения амплитуды колебаний за принятый интервал времени. Например, максимальный прогиб при частоте ω_0 больше соответствующего прогиба при частоте ω_1 примерно в 15 раз. Нагревание пластины приводит к росту прогиба на 11 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

Список литературы

1 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN RXGSLJ.

2 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

3 **Zhuravkov, M. A** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.

5 **Carrera, E.** Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells : Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press, 2016. – 440 p.

6 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

7 **Старовойтов, Э. И.** Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.

8 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, no 4. – P. 359–367. – DOI : 10.1007/s10778-016-0760-8.

9 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

10 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

11 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

12 **Трацевская, Е. Ю.** Динамическая неустойчивость квазитиксоторопных моренных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – № 1 (46). – С. 107–111.

13 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

14 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12.– С. 152–157.

15 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

16 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ ТЕПЛОВОГО УДАРА НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Э. И. СТАРОВОЙТОВ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Трехслойные элементы конструкций, в том числе пластины, широко применяются с середины прошлого века в транспортном машиностроении и строительстве. Для проведения их прочностных расчетов возникает необходимость создания расчетных математических моделей, чему и посвящен многочисленный ряд публикаций.