линейных связях оказалась нелинейной. По этой причине для решения полученной системы в случае линейных связей использовался метод последовательных приближений. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [4].

Для определения предельно-равновесного состояния вершины полосы предразрушения необходимо дополнительное критическое условие. В качестве такого условия принималось условие предельного раскрытия берегов полосы предразрушения. Принято, что разрыв связей на краю полосы предразрушения $x = R$ происходит при выполнении условия

$$v^{+}(R,0) - v^{-}(R,0) = \delta_c,$$

где δ_c – предельная длина (вытяжка) связи.

Совместное решение полученных систем уравнений позволяет (при заданных характеристиках связей) найти критическую внешнюю нагрузку, при которой происходит появление трещины.

Аналогично решена задача о зарождении двух трещин в направлении максимальных растягивающих напряжений, т. е. рассмотрены две полосы предразрушения на отрезках $y = 0,\ R \le |x| \le R + l$.

Список литературы

1 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
2 **Каландия, А. И.** Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.
3 **Мирсалимов, В. М.** Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
4 **Ильюшин, А. А.** Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Логос, 2004. – 376 с.

УДК 532.516:539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ С ВЯЗКИМ ГАЗОМ ВНУТРИ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ПОПОВА, А. И. ЗЕМЛЯНУХИН, В. С. ПОПОВ
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.,
Российская Федерация

Рассмотрена осесимметричная задача о волновом процессе в бесконечной упругой оболочке, заполненной вязким газом. Волновой процесс в упругой оболочке исследован в [1] при ее непологости, но с частичным учетом моментной теории оболочек. В [2] асимптотически показано, что для бесконечно длинной оболочки волновые процессы исследуются в рамках безмоментной теории. Оба эти фактора позволяют записать уравнения динамики рассматриваемой оболочки как [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu_0 \frac{w}{R}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] - \frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{Eh_0} q_x, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R}\left[\left(\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R}\right)\left(1 - \frac{w}{R}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu_0 \frac{w}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - \frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{Eh_0} q_n,$$

где x – продольная координата; t – время; u – продольное перемещение оболочки; w – прогиб оболочки, положительный к центру ее кривизны; h_0 – толщина оболочки; R – радиус ее срединной поверхности; E, ρ_0, μ_0 – модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки; q_x и q_n – продольное и нормальное поверхностные напряжения со стороны газа.

Напряжения q_x и q_n снесены на срединную поверхность оболочки и имеют вид [4]

$$q_x = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)_{r=R},\quad q_x = \left[-p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right]_{r=R}. \tag{2}$$

Здесь v_x, v_r – компоненты вектора скорости газа в цилиндрической системе координат; p – давление газа; μ – динамический коэффициент вязкости газа.

Уравнения динамики газа при его ползущем течении имеют вид [4]

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2}-\frac{V_r}{r^2}\right)+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_x}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial V_x}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho V_r)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0 .$$

Считаем состояние газа изотермическим, т. е. $p / \rho = a^2 = \text{const}$, где a – изотермическая скорость звука в газе.

Граничные условия уравнений (3) – суть условия прилипания газа:

$$V_x=\frac{\partial U}{\partial t},\ V_r=-\frac{\partial W}{\partial t} \text{ при } r=R-W , \tag{4}$$

а также условия на оси симметрии, сформулированные и обоснованные Могилевичем Л. И. в [5],

$$r\frac{\partial V_x}{\partial r}=0,\ r\frac{\partial V_r}{\partial r}=0 \text{ при } r=0 . \tag{5}$$

Проводя асимптотический анализ сформулированной задачи аэроупругости аналогично [5], при схожем выборе безразмерных переменных и малых параметров и переходя к уравнениям тонкого цилиндрического слоя вязкого газа аналогично [6], получено следующее эволюционное уравнение для рассматриваемой оболочки в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\sqrt{1-\mu_0^2}\,\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}=-\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{l}{\varepsilon^2\rho_0 h_0 c_0^2}\left[q_x-\mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right]_{r^*=1} \tag{6}$$

и безразмерные уравнения динамики вязкого газа

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*}=0,\ \frac{\partial P^0}{\partial x^*}=\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}\right),\ \frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial P^0}{\partial t^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* v_r^0\right)+\frac{\partial v_x^0}{\partial x^*}=0, \tag{7}$$

с граничными условиями

$$r^*\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*}=r^*\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}=0 \text{ при } r^*=0, \tag{8}$$

$$v_r^0=-\frac{\partial u_3}{\partial t^*},\ v_x^0=\frac{\partial u_1}{\partial t^*} \text{ при } r^*=1 .$$

Здесь $\xi = x^* - (1-\mu_0^2)^{1/2}t^*$, $\tau = \varepsilon t^*$, $\mathrm{Ma} = c_0^2 / a_0^2$, $\mathrm{Re} = \rho_{00}c_0\varepsilon l / \mu$, $c_0 = E / (\rho_0(1-\mu_0^2)^{1/2})$ – скорость распространения линейных упругих волн в оболочке; a_0 – изотермическая скорость звука в газе в невозмущенном состоянии; ρ_{00} – плотность газа в невозмущенном состоянии; $\varepsilon = h_0 / R$ – малый параметр задачи; l – длина волны, принимаемая за характерный линейный размер; u_{10} – безразмерное продольное перемещение оболочки; v_x, v_r – безразмерные компоненты вектора скорости газа; P^0 – безразмерное давление газа. Параметры с верхним индексом * соответствуют безразмерным координатам и времени.

Заметим, что при отсутствии газа внутри оболочки последние два члена в правой части (6) равны нулю. В результате получается уравнение Кортевега де Вриза для $\partial u_{10} / \partial\xi$, которое имеет точное решение в виде уединенной волны, являющейся солитоном.

Задача (7), (8) решалась методом итерации аналогично [6] и, на основе полученного решения, правую часть (6) представили в виде

$$\left[q_x-\mu_0\frac{R}{l}\frac{\partial q_n}{\partial\xi}\right]_{r^*=1}=\frac{\mu\varepsilon c_0}{R}\left[4\sqrt{1-\mu_0^2}(1-2\mu_0)^2\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-32\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}(1-\mu_0^2)(1-2\mu_0)^2 u_{10}\right].$$

В результате получено новое эволюционное уравнение нелинейного волнового процесса в рассматриваемой оболочке

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\sqrt{1-\mu_0^2}\,\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}+\frac{2\mu l(1-2\mu_0)^2}{\varepsilon R\rho_0 h_0 c_0}\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}-16\frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{Re}}\frac{\mu l\sqrt{1-\mu_0^2}(1-2\mu_0)^2}{\varepsilon R\rho_0 h_0 c_0}u_{10}=0, \tag{9}$$

решение которого возможно только численное. Для реализации численного решения может быть предложен подход перехода к адекватной разностной схеме при помощи техник базисов Гребнера [7, 8], использованный в [2, 5].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00071.

Список литературы

1 **Zemlyanukhin, A. I.** Physically Admissible and Inadmissible Exact Localized Solutions in Problems of Nonlinear Wave Dynamics of Cylindrical Shells / A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev, N. A. Artamonov // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2024. – Vol. 20, no. 2. – P. 219–229.

2 Solitary deformation waves in two coaxial shells made of material with combined nonlinearity and forming the walls of annular and circular cross-section channels filled with viscous fluid / L. I. Mogilevich [et al.] // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. – 2024. – Vol. 32, no. 4. – P. 521–540.

3 **Вольмир, А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. – 432 с.

4 **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.

5 Эволюция уединенных гидроупругих волн деформации в двух коаксиальных цилиндрических оболочках с физической нелинейностью Шамеля / Ю. А. Блинков [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. – 2023. – Т. 16, № 4. – С. 430–444.

6 **Попов, В. С.** Колебания стенки канала на нелинейно-упругом подвесе под воздействием пульсирующего слоя вязкого газа, находящегося в канале / В. С. Попов, Л. И. Могилевич, А. А. Попова // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2023. – Т. 66, № 10. – С. 821–834.

7 **Gerdt, V. P.** Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations / V. P. Gerdt, Yu. A. Blinkov, V. V. Mozzhilkin // SIGMA. – 2006. – Vol. 2. – Art. no. 051.

8 **Блинков, Ю. А.** Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры / Ю.А. Блинков, В. П. Гердт, К. Б. Маринов // Программирование. – 2017. – № 2. – С. 28–34.

УДК 539.3

ИЗНОС И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОКРЫТИЯХ ЗУБЬЕВ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ, С. В. КИРГИНЦЕВА
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Зубчатые колеса считаются очень важной частью взаимодействующих элементов деталей машин в машиностроении и на транспорте. Для зубчатых колес используются многочисленные покрытия, которые обеспечивают защиту их к износу. В настоящем исследовании ограничимся рассмотрением покрытий из композитов, в которых материал покрытия обладает анизотропными свойствами, а основание – изотропными.

В данной работе развиты математические и численные модели и теории о контактном взаимодействии изотропных и анизотропных цилиндрических тел (в том числе с покрытиями), которые применимы для построения методики по расчету износа, напряженного состояния и деформативности зубьев зубчатых колес из композитов. Принципиальная схема взаимодействия элементов зубчатых передач показана на рисунке 1.

Износ и напряжения в зубьях и в покрытиях из ортотропного материала при взаимодействии зубьев определяется по разработанной методике [1–3].

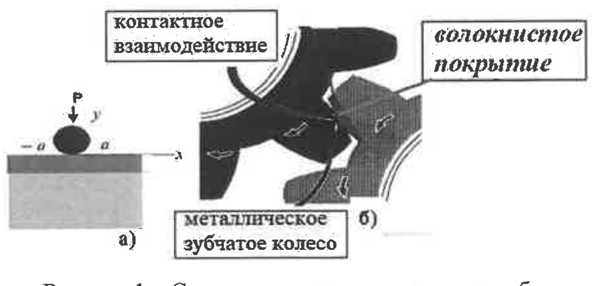

Рисунок 1 – Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием

Теоретической основой реализации поставленной задачи являются решения о контактном взаимодействии цилиндров с ортотропным покрытием, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес. В работах [1, 2] дана методика расчета параметров контакта и напряжений при взаимодействии жесткого цилиндра с ортотропным покрытием. Для определения линейного износа зубьев с покрытием необходимо знать размеры зоны контакта, которые легко можно определить исходя из графиков на рисунке 2.