Список литературы

1 **Леоненко, Д. В.** Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – № 2. – С. 162–169.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

3 **Леоненко, Д. В.** Изгиб ступенчатой круговой сэндвич-пластины при тепловом нагружении / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 123–127.

4 **Козел, А. Г.** Термоупругопластический изгиб трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 100–108.

5 **Зеленая, А. С.** Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

6 **Шимановский, А. О.** Моделирование колебаний и напряженно-деформированного состояния пакетов сэндвич-панелей при их транспортировке / А. О. Шимановский, И. Е. Кракова // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 4 (35). – С. 49–57.

7 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич-пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – № 6 (332). – С. 25–35.

8 **Черняк, А. В.** Изгиб сэндвич-пластины с внешними слоями, линейно изменяющимися по толщине / А. В. Черняк // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 235–240.

9 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

10 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

11 **Старовойтов, Э. И.** Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

УДК 539.375

ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЕ В СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ
Институт математики и механики, г. Баку, Азербайджан

Рассмотрена бесконечная изотропная упругая пластина, ослабленная круговым отверстием радиуса R. К пластине приклепаны поперечные упругие ребра жесткости. Контур кругового отверстия свободен от внешних усилий. На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Действие приклепанных стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления.

По мере нагружения пластины силовой нагрузкой в ней будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Принято, что (область) полоса предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в стрингерной пластине. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется связями между ними, имеющими заданную диаграмму деформирования. Физическая природа связей и размеры полосы предразрушения зависят от вида материала пластины. Считается, что закон деформирования связей задан. В общем случае он представляет собой нелинейный закон деформирования.

В исследуемом случае зарождение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Так как зона предразрушения мала по сравнению с остальной частью подкрепленной пластины, ее можно мысленно удалить, заменив разрезом поверхности (взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала). Рассмотрим полосу предразрушения длины l, исходящую из поверхности кругового отверстия и расположенную на отрезке оси абсцисс $y = 0$, $R \le x \le R + l$. Берега полосы предразрушения взаимодействуют, что сдерживает зарождение трещины. Считается, что между берегами имеются связи (силы сцепления). При действии внешних нагрузок на пластину в связях будут возникать усилия $p(x)$, имеющие из-за симметрии задачи относительно оси абсцисс только нормальную составляющую. Следовательно, к берегам полосы предразрушения будут приложены неизвестные нормальные напряжения, численно равные $p(x)$.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют следующий вид:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0 \text{ при } |z| = R \text{ на контуре отверстия;}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad R \le x \le R + 1.$$

Основные соотношения задачи должны быть дополнены уравнением, связывающим перемещения раскрытия берегов полосы предразрушения и усилия в связях:

$$v^{+}(x,0) - v^{-}(x,0) = C(x, p(x))p(x). \tag{1}$$

Здесь функцию $C(x, p)$ можно рассматривать как эффективную податливость связей, зависящую от их натяжения. При постоянных значениях $C(x, p)$ имеем в (1) линейный закон деформирования.

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [1] и краевых условий на контуре кругового отверстия и берегах полосы предразрушения задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ из граничных условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - \left[\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)\right]e^{2i\theta} = 0, \tag{2}$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \overline{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t) = p(x) \text{ при } \quad R \le x \le R + 1. \tag{3}$$

Решение краевой задачи (2), (3) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \qquad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \tag{4}$$

Здесь потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной бездефектной подкрепленной пластине под действием системы сосредоточенных сил P_{mn} и σ_0. Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$ ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{g(t)}{t - z}dt, \quad L_1 = [R, d], \quad d = R + l; \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left[\frac{g(t)}{t - z} - \frac{tg(t)}{(t - z)^2}\right]dt,$$

где $g(t)$ – искомая функция:

$$g(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa}\cdot\frac{d}{dx}\left[v^{+}(x,0) - v^{-}(x,0)\right] \quad \text{на участке } R \le x \le d; \tag{5}$$

Неизвестная функция $g(x)$ и комплексные потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ определяются из краевых условий (2), (3). Для решения этой граничной задачи используется метод Н. И. Мусхелишвили [1]. Требуя, чтобы функции (4) удовлетворяли краевому условию (3) на полосах предразрушения, получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$, содержащее неизвестные величины сосредоточенных сил P_{mn} и усилия $p(x)$.

С помощью закона Гука для искомых величин сосредоточенных сил P_{mn} получены бесконечные системы уравнений.

Для построения решения сингулярного интегрального уравнения использовался метод прямого решения интегральных уравнений [2]. Сингулярное интегральное уравнение с помощью процедуры алгебраизации [3] сводится к системе алгебраических уравнений для M неизвестных $g^0(\tau_m)$ ($m = 1, 2, \ldots, M$), в которые входят неизвестные значения напряжений $p(x)$ в узловых точках, принадлежащих полосе предразрушения. На основании соотношений (1) и (5) имеем

$$-\frac{1 + \kappa}{2\mu}\int_{l}^{x} g(x)dx = C\big(x, p(x)\big)p(x). \tag{6}$$

Для построения недостающих уравнений потребуем выполнения условий (6) в узловых точках, содержащихся в полосе предразрушения (R, d). В результате получили алгебраическую систему из M уравнений для определения приближенных значений $p(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \ldots, M$).

Полученные алгебраические системы оказались связанными и должны решаться совместно. Для замкнутости полученной системы не хватает одного уравнения, определяющего размер полос полосы предразрушения. Таким условием является условие конечности напряжений в вершине полосы предразрушения ($x = d$). Из-за неизвестного размера l полученная алгебраическая система даже при линейных связях оказалась нелинейной. По этой причине для решения полученной системы в случае линейных связей использовался метод последовательных приближений. В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях использовался также алгоритм, подобный методу упругих решений [4].

Для определения предельно-равновесного состояния вершины полосы предразрушения необходимо дополнительное критическое условие. В качестве такого условия принималось условие предельного раскрытия берегов полосы предразрушения. Принято, что разрыв связей на краю полосы предразрушения $x = R$ происходит при выполнении условия

$$v^{+}(R,0) - v^{-}(R,0) = \delta_c,$$

где δ_c – предельная длина (вытяжка) связи.

Совместное решение полученных систем уравнений позволяет (при заданных характеристиках связей) найти критическую внешнюю нагрузку, при которой происходит появление трещины.

Аналогично решена задача о зарождении двух трещин в направлении максимальных растягивающих напряжений, т. е. рассмотрены две полосы предразрушения на отрезках $y = 0,\ R \le |x| \le R + l$.

Список литературы

1 **Мусхелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

2 **Каландия, А. И.** Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 304 с.

3 **Мирсалимов, В. М.** Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М. : Наука, 1987. – 256 с.

4 **Ильюшин, А. А.** Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. : Логос, 2004. – 376 с.

УДК 532.516:539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ ОБОЛОЧКЕ С ВЯЗКИМ ГАЗОМ ВНУТРИ

Л. И. МОГИЛЕВИЧ, Е. В. ПОПОВА, А. И. ЗЕМЛЯНУХИН, В. С. ПОПОВ
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.,
Российская Федерация

Рассмотрена осесимметричная задача о волновом процессе в бесконечной упругой оболочке, заполненной вязким газом. Волновой процесс в упругой оболочке исследован в [1] при ее неполологости, но с частичным учетом моментной теории оболочек. В [2] асимптотически показано, что для бесконечно длинной оболочки волновые процессы исследуются в рамках безмоментной теории. Оба эти фактора позволяют записать уравнения динамики рассматриваемой оболочки как [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu_0\frac{w}{R}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] - \frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{Eh_0}q_x, \tag{1}$$

$$\frac{1}{R}\left[\left(\mu_0\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R}\right)\left(1 - \frac{w}{R}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu_0\frac{w}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - \frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0(1-\mu_0^2)}{Eh_0}q_n,$$

где x – продольная координата; t – время; u – продольное перемещение оболочки; w – прогиб оболочки, положительный к центру ее кривизны; h_0 – толщина оболочки; R – радиус ее срединной поверхности; E, ρ_0, μ_0 – модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки; q_x и q_n – продольное и нормальное поверхностные напряжения со стороны газа.

Напряжения q_x и q_n снесены на срединную поверхность оболочки и имеют вид [4]

$$q_x = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)_{r=R},\quad q_x = \left[-p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right]_{r=R}. \tag{2}$$

Здесь v_x, v_r – компоненты вектора скорости газа в цилиндрической системе координат; p – давление газа; μ – динамический коэффициент вязкости газа.

Уравнения динамики газа при его ползущем течении имеют вид [4]