УДК 539.3, 539.8

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНОДИФФУЗИЯ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ

А. В. ЗЕМСКОВ

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассматривается задача о нестационарных колебаниях консольно закрепленной с одной стороны прямоугольной ортотропной пластины Тимошенко, выполненной из многокомпонентного материала. Примыкающие к консоли стороны являются шарнирно опёртыми. Схема приложенных сил и изгибающих моментов, а также ориентация осей прямоугольной декартовой системы координат представлена на рисунке 1.

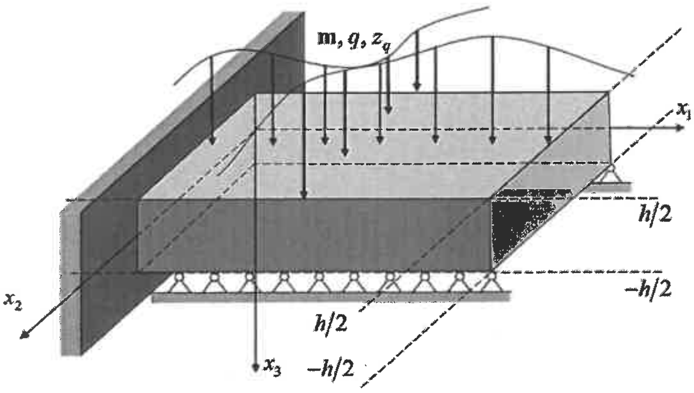

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений поперечных колебаний ортотропной прямоугольной пластины, полученная в работе [1]:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\chi}_1 = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + C_{66}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} + C_{55}k_T^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \chi_1\right) + \left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{q=1}^{N}\alpha_1^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_1} - \frac{12}{h^3}m_1,\\
&\ddot{\chi}_2 = C_{66}\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1^2} + C_{22}\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_2^2} + C_{44}k_T^2\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \chi_2\right) + \left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{q=1}^{N}\alpha_2^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_2} - \frac{12}{h^3}m_2,\\
&\ddot{w} = C_{55}k_T^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right) + C_{44}k_T^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2}\right) + \frac{q}{h}, \quad H_{N+1} = -\sum_{q=1}^{N}H_q,\\
&\dot{H}_q + \tau_q\ddot{H}_q = \left(D_1^{(q)}\frac{\partial^2 H_q}{\partial x_1^2} + D_2^{(q)}\frac{\partial^2 H_q}{\partial x_2^2}\right) + \Lambda_{11}^{(q)}\frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1^3} + \Lambda_{12}^{(q)}\frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \Lambda_{21}^{(q)}\frac{\partial^3 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \Lambda_{22}^{(q)}\frac{\partial^3 \chi_2}{\partial x_2^3} + \frac{12}{h^3}z_q.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь точки обозначают производную по времени. Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения:

$$
x_i = \frac{x_i^*}{l},\ w = \frac{w^*}{l},\ \tau = \frac{Ct}{l},\ C_{ij} = \frac{C_{ij}^*}{C_{11}^*},\ C^2 = \frac{C_{11}^*}{\rho},\ l_m = \frac{l_m^*}{l},\ \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l},\ m_i = \frac{m_i^*}{C_{11}^*},
$$

$$
\alpha_i^{(q)} = \frac{\alpha_i^{*(q)}}{C_{11}^*},\ D_i^{(q)} = \frac{D_i^{*(q)}}{Cl},\ \Lambda_{ij}^{(q)} = \frac{m^{(q)}D_i^{*(q)}\alpha_j^{*(q)}n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l},\ q = \frac{q^*}{C_{11}^*},\ z_q = \frac{lz^{(q)}}{C},\ h = \frac{h^*}{l},
$$

где x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; w^* – прогибы пластины; χ_i – углы поворота нормальных к срединной поверхности волокон; l – характерный линейный размер; l_1^* и l_2^* – длина и ширина пластины; h^* – толщина пластины; $\eta^{(q)} = x_3 H_q$ – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе $N+1$ – компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q-го вещества; C_{ij}^* – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_i^{*(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_i^{*(q)}$ – коэффициенты диффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; m_i^* – распределенные по поверхности моменты; q^* – распределённая по поверхности поперечная нагрузка; $z^{(q)}$ – распределённая по поверхности плотность объемных источников массопереноса; k_T – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению пластины.

Замыкают постановку однородные начально-краевые условия, которые в случае консольного закрепления, изображённого на рисунке 1, имеют вид

$$
\begin{gathered}
w\big|_{x_1=0}=0,\ \chi_1\big|_{x_1=0}=0,\ H_q\big|_{x_1=0}=0,\ \chi_2\big|_{x_1=0}=0,\ \ \chi_2\big|_{x_1=l_1}=0,\ \chi_1\big|_{x_2=0}=0,\ w\big|_{x_2=0}=0,\ w\big|_{x_2=l_2}=0,\\
\left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_2^{(j)}H_j\right)\right|_{x_2=0}=0,\ \left.\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2}\right)\right|_{x_1=l_1}=0,\ H_q\big|_{x_2=0}=0,\ \ \chi_1\big|_{x_2=l_2}=0,\\
\left.\left(D_1^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_1}+\Lambda_{11}^{(q)}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x_1^2}+\Lambda_{12}^{(q)}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{x_1=l_1}=0,\ \left.\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\chi_1\right)\right|_{x_1=l_1}=\frac{Q}{hC_{55}},\ H_q\big|_{x_2=l_2}=0,\\
\left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_2^{(j)}H_j\right)\right|_{x_2=l_2}=0,\ \left.\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j\right)\right|_{x_1=l_1}=0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Для решения задачи используется метод эквивалентных граничных условий [2], в соответствии с которым вначале вместо исходной задачи (1), (2) рассматривается вспомогательная задача, описываемая уравнениями (1) со следующими граничными условиями:

$$
\begin{gathered}
w\big|_{x_1=0}=0,\ \chi_1\big|_{x_2=0}=0,\ w\big|_{x_2=0}=0,\ H_q\big|_{x_2=0}=0,\ H_q\big|_{x_1=0}=0,\ \chi_2\big|_{x_1=0}=0,\ \chi_1\big|_{x_1=l_1}=f_1,\ \chi_1\big|_{x_2=l_2}=0,\\
\left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_2^{(j)}H_j\right)\right|_{x_2=0}=0,\ \left.\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{12}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j\right)\right|_{x_1=0}=f_2,\\
\left.\left(D_1^{(q)}\frac{\partial H_q}{\partial x_1}+\Lambda_{11}^{(q)}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial x_1^2}+\Lambda_{12}^{(q)}\frac{\partial^2\chi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right|_{x_1=l_1}=0,\ \left.\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\chi_1\right)\right|_{x_1=l_1}=f_3=\frac{Q}{hC_{55}},\\
\left.\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\chi_1}{\partial x_2}\right)\right|_{x_1=l_1}=0,\ \left.\left(C_{12}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1}+C_{22}\frac{\partial\chi_2}{\partial x_2}+\sum_{j=1}^{N}\alpha_2^{(j)}H_j\right)\right|_{x_2=l_2}=0,\ w\big|_{x_2=l_2}=0,\ H_q\big|_{x_2=l_2}=0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Решение задачи (1), (3) ищется с помощью преобразования Лапласа и разложения в ряды Фурье. Далее строятся соотношения, связывающее правые части граничных условий обеих задач, представляющие собой систему интегральных уравнений Вольтерры 1-го рода. Эта система решается численно с помощью квадратурных формул. Вычисляя затем свёртку полученных отсюда функций с функциями Грина задачи (1), (3), находим решение исходной задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-19-00217).

Список литературы

1 **Zemskov, A.** Modeling an unsteady elastic diffusion processes in a Timoshenko plate / A. Zemskov, D. Tarlakovskii, N. Grigorevskiy // 9th edition of the International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (COUPLED PROBLEMS 2021) [Electronic resource]. – Mode of access : https://www.scipedia.com/public/Zemskov_et_al_2021a. – Data of access : 03.09.2024.

2 **Вестяк, А. В.** Нестационарные упругодиффузионные колебания консольно-закрепленной пластины Тимошенко с шарнирным опиранием по боковым краям под действием нагрузки, приложенной к свободному краю / А. В. Вестяк, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXX Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. – М. : ООО «ТРП», 2024. – С. 95–99.