УДК 539.3, 539.8

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИИ ДЛЯ ПОЛЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Н. А. ЗВЕРЕВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация
А. В. ЗЕМСКОВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

В данной работе приводится математическая постановка и предлагается алгоритм решения одномерной полярно-симметричной задачи термоупругой диффузии для однородного ортотропного многокомпонентного полого цилиндра, находящегося под действием нестационарных поверхностных возмущений. В работе учтена конечная скорость распространения температурных и диффузионных возмущений.

Система дифференциальных уравнений, описывающая физико-механические процессы в цилиндре, получена из общей модели термомеханодиффузии, приведенной в работе [1], и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=c_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{c_{22}}{r^2}u_r-b_1\frac{\vartheta}{r}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_1^{(i)}\frac{\partial\eta^{(i)}}{\partial r},\\
&\rho c_0\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\tau_\vartheta\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right)=\kappa_1\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)-T_0b_1\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t}+\tau_\vartheta\frac{\partial^3 u_r}{\partial r\partial t^2}\right)-\\
&-\rho RT_0\sum_{i=1}^{N}\frac{\ln\left(n_0^{(i)}\gamma^{(i)}\right)}{m^{(q)}}\left(\frac{\partial\eta^{(i)}}{\partial t}+\tau_\vartheta\frac{\partial^2\eta^{(i)}}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial\eta^{(q)}}{\partial t}+\tau_\eta^{(q)}\frac{\partial^2\eta^{(q)}}{\partial t^2}=-\Lambda_{11}^{(q)}\left(\frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r^3}\right)+\\
&+\sum_{r=1}^{N}D_1^{(qr)}\left(\frac{\partial^2\eta^{(r)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\eta^{(r)}}{\partial r}\right)-M_1^{(q)}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где t – время; r – координата; u_r – радиальная компонента вектора механических перемещений; ϑ – изменение (приращение) температуры; ρ – плотность тела (сплошной среды); $\eta^{(q)}=n^{(q)}-n_0^{(q)}$ – приращение концентрации многокомпонентного вещества; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и текущая концентрации q–го вещества в составе (N + 1)-компонентной сплошной среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q–го вещества в составе $(N+1)$-компонентной сплошной среды; T_0, T – начальная и актуальная температуры сплошной среды; R – универсальная газовая постоянная; $\tau_\eta^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; τ_ϑ – время релаксации тепловых потоков; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активации; c_0 – удельная теплоемкость; c_{ij} – упругие постоянные; b_i – компонента тензора температурных постоянных; κ_i – коэффициенты теплопроводности; $D_i^{(q)}$ – коэффициенты диффузии и $\alpha_i^{(q)}$ – упругодиффузионные коэффициенты, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии. Остальные коэффициенты определяются так:

$$\Lambda_{11}^{(q)}=\frac{m^{(q)}n_0^{(q)}D_1^{(q)}\alpha_1^{(q)}}{\rho RT_0},\quad M_1^{(q)}=\frac{n_0^{(q)}}{T_0}\ln\left(n_0^{(q)}\gamma^{(q)}\right)D_1^{(q)}.$$

Система (1) включает в себя уравнение движения цилиндрического тела, одно уравнение теплопереноса, а также N дифференциальных уравнений массопереноса.

Цилиндр (внутренний радиус R_1, внешний – R_2) находится под действием равномерно распределённого по поверхностям нестационарного давления, что описывается следующими краевыми условиями:

$$\left.\left(c_{11}u'+c_{12}\frac{u}{r}-b_1\vartheta-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)}\right)\right|_{r=R_1}=f_{11}(\tau),\quad \left.\vartheta\right|_{r=R_1}=0,\quad \left.\eta^{(q)}\right|_{r=R_1}=0,$$

$$\left.\left(c_{11}u'+c_{12}\frac{u}{r}-b_1\vartheta-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)}\right)\right|_{r=R_2}=f_{12}(\tau),\quad \left.\vartheta\right|_{r=R_2}=0,\quad \left.\eta^{(q)}\right|_{r=R_2}=0. \qquad (2)$$

Начальные условия принимаются нулевыми, что соответствует невозмущенному начальному состоянию.

При заданных граничных условиях аналитическое решение задачи (1), (2) получить крайне затруднительно. Поэтому в работе используется метод эквивалентных граничных условий [2, 3], согласно которому задача решается в два этапа.

Вначале рассматривается вспомогательная задача, для которой граничные условия подбираются таким образом, чтобы ее решение можно было получить аналитически. В качестве таковых выступают следующие граничные условия:

$$\left.\left(c_{11}u'+c_{11}\frac{u}{r}-b_1\vartheta-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)}\right)\right|_{r=R_1}=f_1^*(\tau),\quad \left.\vartheta\right|_{r=R_1}=0,\quad \left.\eta^{(q)}\right|_{r=R_1}=0,$$

$$\left.\left(c_{11}u'+c_{11}\frac{u}{r}-b_1\vartheta-\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\eta^{(j)}\right)\right|_{r=R_2}=f_2^*(\tau),\quad \left.\vartheta\right|_{r=R_2}=0,\quad \left.\eta^{(q)}\right|_{r=R_2}=0, \qquad (3)$$

где функции $f_k^*(\tau)$ подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) ищется в виде

$$\begin{Bmatrix} u(r,\tau) \\ \vartheta(r,\tau) \\ \eta^{(q)}(r,\tau) \end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{2}\int_0^\tau \begin{Bmatrix} G_{1k}(r,\tau-t) \\ G_{2k}(r,\tau-t) \\ G_{q+2,k}(r,\tau-t) \end{Bmatrix} f_k^*(t)\,dt.$$

Здесь G_{mk} – поверхностные функции задачи (1), (3), которые находятся с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени и разложения в ряды по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора. Оригиналы по Лапласу находятся с помощью таблиц операционного исчисления и вычетов.

Вторым этапом строятся интегральные соотношения, связывающие между собой правые части краевых условий исходной и вспомогательной задач, а полученная система интегральных уравнений решается численно с помощью квадратурной формулы средних прямоугольников. Далее вычисляются свертки найденных таким образом функций с функциями Грина вспомогательной задачи (1), (3), что в результате дает решение исходной задачи (1), (2).

На примере полого цилиндра, выполненного из трехкомпонентного материала (сплав алюминия, цинка и меди), промоделировано взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей в равномерно нагруженном по обеим поверхностям цилиндре.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 23-21-00189.

Список литературы

1 **Земсков, А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

2 Математические основы термоупругости : учеб. пособие / В. А. Вестяк [и др.]. – М. : Изд-во МАИ, 2021. – 92 с.

3 **Зверев, Н. А.** Моделирование нестационарных механодиффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // Математическое моделирование. – 2023. – Т. 35, № 1. – С. 95–112.