

14 Современные проблемы моделирования теплопереноса в технологических процессах селективного лазерного спекания и сплавления / С. И. Жаворонок [и др.] // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 6. – С. 919–952.

15 Research of the Problem of Loss of Stability of Cylindrical Thinwalled Structures under Intense Local Temperature Exposure / A. S. Kurbatov [et al.] // Periodico Tche Quimica. – 2020. – Vol. 17. – P. 884–891.

16 Основные проблемы при создании систем тепловой защиты на базе структурно-неоднородных материалов и методы их решения / А. Н. Астапов [и др.] // Теплофизика высоких температур. – 2021. – Т. 59, № 2. – С. 248–279.

17 Кузнецова, Е. Л. Задача типа Стефана в композиционных материалах с произвольным числом подвижных границ фазовых превращений / Е. Л. Кузнецова, С. И. Жаворонок // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. – 2023. – Т. 165, № 4. – С. 236–245.

УДК 539.3

ОБ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЯХ РАУСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НЕТОНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДАХ

С. И. ЖАВОРОНОК, А. С. КУРБАТОВ

Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва

Рассмотрено развитие иерархической теории нетонких неоднородных анизотропных оболочек как континуально-дискретных систем [1] на базе вариационного формализма аналитической динамики континуума и метода редукции пространственной размерности трехмерной модели деформируемого твердого тела [2–7]. В основу «квазитрехмерной» теории оболочек, способной аппроксимировать напряженно-деформированное состояние в окрестностях боковых поверхностей, областей наложения кинематических связей, линий разрыва компонентов поля главного вектора внешних сил, окрестностях волновых фронтов и т. п. областях неприводимости [1] к двумерной модели тонкого тела положена вариационная формулировка модели линейно-упругой неоднородной анизотропной среды, заданная в рамках формализма Лагранжа аналитической механики континуальных систем [8] одной переменной поля первого рода – вектором перемещения, пространственной и граничной плотностями функционала Лагранжа. Модель оболочки формулируется в терминах двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности, с заданной на нем системой криволинейных координат; оболочка как трехмерное тело отнесена к системе координат, нормально связанной с реперной поверхностью [2]. С целью построения системы уравнений, разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка по одной из координат на многообразии, осуществляется преобразование Лежандра функционала Лагранжа трехмерной модели упругой среды по данным ковариантным производным, и вводятся новые переменные, определенные на касательном расслоении многообразия и имеющие смысл обобщенных напряжений [9] (аналогично обобщенным импульсам, порождаемым преобразованием Лежандра функции Лагранжа дискретной системы по обобщенным скоростям). Полученная в результате преобразования Лежандра по части пространственных производных функция интерпретируется как плотность обобщенного функционала Рауса упругой среды [9, 10]. Краевые условия, поставленные на лицевых поверхностях оболочки в трехмерной постановке задачи, записываются относительно новых переменных. Пространственная редукция трехмерной модели упругой среды, которая задана вектором перемещения и вектором обобщенного напряжения, осуществляется путем разложения данных величин по некоторой системе функций безразмерной нормальной к реперной поверхности координаты, образующей биортогональный базис в функциональном пространстве $H[-1,1]$ [9–11], и интегрирования плотности функционала Лагранжа по нормальной координате, а также переноса краевых условий с лицевых поверхностей на реперную поверхность оболочки [12, 13] и их записи относительно коэффициентов разложений и их ковариантных производных. Модель оболочки, таким образом, определена фазовым пространством со множеством обобщенных перемещений и обобщенных сил, заданных коэффициентами разложения векторов перемещения и обобщенного напряжения [9, 10] по биортогональной системе функций, поверхностной и контурной плотностями функционала Рауса и ограничениями в форме равенств, которые вытекают из краевых условий, перенесенных с лицевых поверхностей на реперную поверхность оболочки. Уравнения движения и определяющие уравнения строятся методом множителей Лагранжа [12, 13] и интерпретируются как обобщенные уравнения Рауса двумерной континуальной системы с ограничениями. Теория оболочек N -го порядка формулируется

при удержании $N + 1$ членов частичных сумм рядов для перемещения и обобщенного напряжения. В отличие от уравнений [9–11], новая формулировка расширенной теории оболочек обеспечивает точное удовлетворение краевых условий на лицевых поверхностях оболочки при любом порядке теории N за счет введения ограничений в вариационную формулировку теории. В частном случае зависимости решения только от одной из криволинейных координат в классе статических задач полученные обобщенные уравнения Рауса сводятся к уравнениям Гамильтона с множителями связей, либо к эквивалентной им системе уравнений Намбу, являющихся обобщением уравнений [4–6]. Рассмотрено приложение обобщенных уравнений Рауса расширенной теории оболочек к описанию дисперсии волн в неоднородных анизотропных волноводах. Формулировка системы уравнений, разрешенной относительно пространственной производной первого порядка по одной из координат, в данном классе задач обеспечивает переход к проблеме собственных значений для волнового числа при рассмотрении фазовой частоты как параметра и построение вследствие этого дисперсионных кривых как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн [15, 16]. Рассмотрено решение задач о нестационарном взаимодействии оболочек с акустической средой, где системы первого порядка обладают преимуществами перед уравнениями второго порядка [16–19].

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (№1023032300192-8-2.3.2).

Список литературы

- 1 Кильчевский, Н. А. Основы аналитической механики оболочек / Н. А. Кильчевский. – Киев : АН УССР, 1963. – 354 с.
- 2 Векуа, И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. – М. : Наука, 1982. – 282 с.
- 3 Хома, И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек / И. Ю. Хома. – Киев : Наук. думка, 1986. – 172 с.
- 4 Амосов, А. А. К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач / А. А. Амосов, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 69–80.
- 5 Амосов, А. А. О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции / А. А. Амосов, А. А. Князев, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 1. – С. 60–72.
- 6 Amosov, A. A. An Approximate High-order Theory of thick anisotropic shells / A. A. Amosov, S. I. Zhavoronok // International J. for Computational Civil and Structural Engineering. – 2003. – Vol. 1, no. 5. – P. 28–38.
- 7 Аннин, Б. Д. Неклассические модели теории пластин и оболочек / Б. Д. Аннин, Ю. М. Волчков // ПМТФ. – 2016. – Т. 57, № 5. – С. 5–14.
- 8 Кильчевский, Н. А. Аналитическая механика континуальных систем / Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчинская, Н. Е. Ткаченко. – Киев : Наук. думка, 1979. – 188 с.
- 9 Жаворонок, С. И. Обобщенные уравнения Рауса в теории оболочек N -го порядка и их приложение к задачам о дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах / С. И. Жаворонок, А. С. Курбатов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 399–431.
- 10 Zhavoronok, S. I. On various equations of the analytical mechanics of thick-walled heterogeneous shells and some of their applications in wave dispersion problems / S. I. Zhavoronok, A. S. Kurbatov, O. V. Egorova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, no. 6. – P. 2501–2517.
- 11 Zhavoronok, S. I. The generalized Routh equations in the plate theory of N th order and their use in problems of normal wave dispersion in heterogeneous waveguides / S. I. Zhavoronok, A. S. Kurbatov, L. N. Rabinskiy // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, no. 7. – P. 2010–2018.
- 12 Жаворонок, С. И. Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N -го порядка анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 3. – С. 370–381.
- 13 Егорова, О. В. О вариационных уравнениях расширенной теории N -го порядка упругих оболочек и их приложения к некоторым задачам динамики / О. В. Егорова // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 2. – С. 36–59.
- 14 Жаворонок, С. И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 4. – С. 227–260.
- 15 Жаворонок, С. И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86.
- 16 Плоская задача дифракции акустической волны давления на тонкой ортотропной панели, помещенной в жесткий экран / А. Г. Горшков [и др.] // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 209–220.
- 17 Жаворонок, С. И. Осесимметричная задача нестационарного взаимодействия акустической волны давления с упругой оболочкой вращения / С. И. Жаворонок, Л. Н. Рабинский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 541–554.
- 18 Егорова, О. В. Взаимодействие оболочки средней толщины с акустической волной / О. В. Егорова, С. И. Жаворонок, Л. Н. Рабинский // Вестник МАИ. – 2010. – Т. 17, № 2. – С. 127–135.
- 19 Численно-аналитические методы решения задач дифракции акустических волн на абсолютно твердых телах и оболочках / С. И. Жаворонок [и др.]. – М. : Физматлит, 2010. – 192 с.