

граммном комплексе Ansys Workbench при помощи оболочечного элемента Shell181 [6]. В качестве параметра варьировалось соотношение диаметра цилиндра к его высоте, причем высота принималась за константу.

В результате анализа были выявлены две области соотношения с допустимыми погрешностями не более 15 % (рисунок 2).

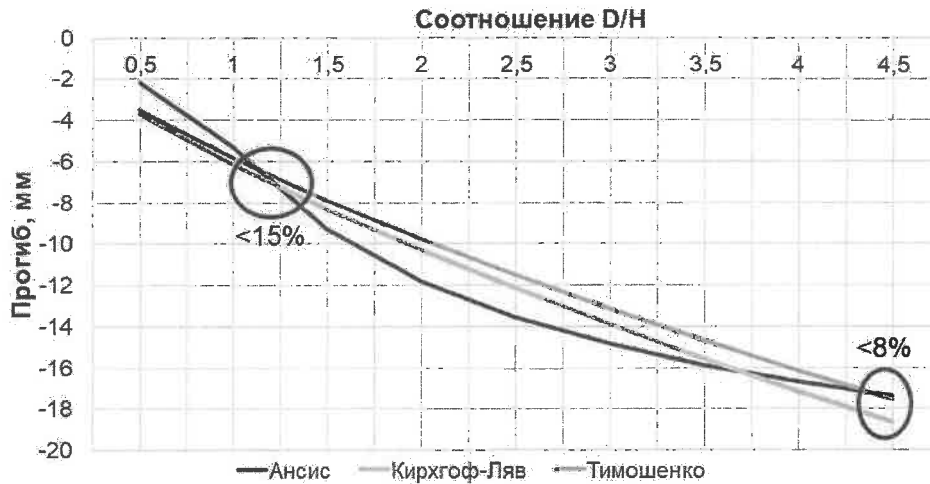


Рисунок 2 – Анализ сходимости для разных методик

Дальнейшее уточнение областей дало четкие соотношения: 1,1 и 4,5. Последующее решение задачи для найденных значений показало большую погрешность для сегмента из четырех опор для соотношения 4,5.

**Вывод.** Геометрическим соотношением диаметра цилиндрической оболочки к высоте, при котором новая методика определения расположения дополнительных опор показывает приемлемые результаты, является 1,1.

#### Список литературы

- 1 Боршевецкий, С. А. Определение нормальных перемещений шарнирно опертой пластины с дополнительными опорами под воздействием сосредоточенной силы / С. А. Боршевецкий, Н. А. Локтева // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симп. им. А. Г. Горшкова*. Т. 2. – М. : ООО «ТРИП», 2021. – С. 19–20.
- 2 Боршевецкий, С. А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии / С. А. Боршевецкий // *Труды МАИ*. – 2023. – № 128. – DOI : 10.34759/trd-2023-128-03.
- 3 Боршевецкий, С. А. Определение положения дополнительных опор для прямоугольной шарнирно опертой пластины при нестационарном воздействии на нее / С. А. Боршевецкий, Н. А. Локтева // *XXV Нуполевские чтения (школа молодых ученых) : материалы Междунар. молодежной науч. конф.* Т. 2. – Казань : Изд-во ИП Сагиева А. Р., 2021. – С. 395–400.
- 4 Боршевецкий, С. А. Определение расположения дополнительных опор в пластине Тимошенко при гармоническом воздействии / С. А. Боршевецкий, Н. А. Локтева // *Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : сб. тр. 12-й Всерос. науч. конф. с международным участием*. – М. : ООО «Сам Полиграфист», 2022. – С. 438–447.
- 5 Лукашевич, А. А. Теория расчета пластин и оболочек : учеб. пособие / А. А. Лукашевич. – СПб. : СПбГАСУ. – 2017. – 127 с.
- 6 Басов, К. А. ANSYS: справочник пользователя / К. А. Басов. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

УДК 539.3

## УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Д. А. БУДНИКОВА

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

В связи широким применением многослойных элементов конструкций в строительстве и транспорте машиностроении разработка математических моделей их деформирования является актуальной задачей. Методы расчета и постановки краевых задач для трехслойных элементов конструкций, учитывающие внешнее воздействие различных физико-механических полей, исследованы в

монографиях [1–7]. Квазистатическое деформирование трехслойных стержней и пластин рассматривалось в работах [8–11]. Статьи [12–17] посвящены динамическому воздействию на трехслойные и пятислойные пластины.

**Постановка задачи** проведена в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Кинематические гипотезы для упругого пятислойного стержня, симметричного по толщине, соответствуют гипотезе ломаной линии: в трех (два внешних и центральный) тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в двух заполнителях – гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на дополнительный угол  $\psi(x)$ . Ось  $x$  направлена вдоль осевой линии стержня. Искомыми функциями являются прогиб стержня  $w(x)$  и относительный сдвиг  $\psi(x)$  в заполнителях. На торцах балки ( $x=0; l$ ) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев  $\psi(0) = \psi(l) = 0$ .

В соответствии с принятыми гипотезами продольное перемещение в слоях:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(4)} &= 0; \\ \varepsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z-h)\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; & \varepsilon_{xz}^{(1)} &= 0; \\ \varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\psi_{,x}; & \varepsilon_{xz}^{(2)} &= 0.\end{aligned}$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна;  $c\psi$  – величина смещения верхнего несущего слоя за счет сдвига в верхнем заполнителе;  $-c\psi$  – смещение нижнего несущего слоя за счет сдвига в нижнем заполнителе, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; верхний коэффициент показывает номера слоев, которые расположены в подобном порядке.

Деформации в слоях выражаются через продольные перемещения в соответствии с соотношениями Коши. Напряжения вычисляются через деформации с помощью закона Гука. Внутренние усилия в слоях стержня введены с помощью компонентов тензора напряжения  $\sigma_x^{(k)}, \sigma_{xz}^{(k)}$ :

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xz}^{(k)} dz.$$

В стержне приняты следующие обобщенные внутренние усилия:

$$M = \sum_{k=1}^5 M^{(k)}; \quad H = (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}); \quad Q = Q^{(3)} + Q^{(5)}.$$

Уравнения колебаний пятислойного стержня получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа с учетом поперечных сил инерции. При определении виртуальной работы внешних сил считалось, что к срединной поверхности заполнителя приложена произвольно распределенная нагрузка  $q(x)$ . В результате имеем следующую систему дифференциальных уравнений поперечных колебаний в усилиях для пятислойного стержня:

$$\begin{aligned}H_{,x} - Q &= 0, \\ M_{,xx} - M_0 \ddot{w} &= -b_0 q,\end{aligned}$$

где  $H_x, M_x, Q$  – обобщенные внутренние усилия;  $b_0$  – ширина стержня;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные силы, причем  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$ ,  $\rho_k$  – плотность материала;  $b_0 l$  – площадь продольного сечения, точка вверху обозначает производную по времени.

**Заключение.** Полученная система уравнений вынужденных поперечных колебаний в усилиях позволяют поставить начально-краевую задачу для определения параметров напряженно-деформированного состояния пятислойных стержней, симметричных по толщине.

### Список литературы

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN RXGSLJ.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 376 с.
- 5 Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2011. – 380 с.
- 6 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 7 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 8 Захарчук, Ю. В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.
- 9 Козел, А. Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.
- 10 Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / E. I. Starovoitov [et. al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, no 4. – P. 1023–1029.
- 11 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
- 12 Tarlakovskii, D. V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.
- 13 Трацевская, Е. Ю. Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е. Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – № 1 (46). – С. 107–111.
- 14 Старовойтов, Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
- 15 Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, no 5. – P. 474–481.
- 16 Leonenko, D. V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, no 4. – P. 359–367. – DOI : 10.1007/s10778-016-0760-8.
- 17 Лачугина, Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

УДК 656:51(075.8)

### ПРЕПОДАВАНИЕ КУРСА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ МАГИСТРАНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ»

*С. П. ВАКУЛЕНКО, С. М. КОКИН, А. М. ФИЛИМОНОВ*  
*Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва*

Рассматривается курс «Прикладная математика», состоящий из практических занятий для студентов-магистрантов специальности «Технология транспортных процессов: Управление перевозочным процессом и транспортное планирование и Мультимодальные логистические комплексы».

В силу практической направленности этой категории студентов в основу содержания курса было положено изучение методов обработки данных, поскольку этот материал представляется необходимым в большинстве видов практической деятельности, связанной с технологией и с обеспечением безопасности транспортных процессов. Курс читается обучающимся в магистратуре, в учебных планах бакалавриата и специалитета его нет.

Поскольку магистранты поступают в университет спустя разное время после окончания вуза, то в начале курса производится краткое напоминание основных вероятностных понятий по принципу «от простого к сложному» и с возможной практической интерпретацией.

Приведем простой пример. Рассматривается задача о минимальной стоимости билета на право разового участия в игре, состоящей в однократном подбрасывании двух игральные кости с последующей выплатой приза: за выпавшие две шестерки 100 руб., за ровно одну шестерку – 10 руб., а при отсутствии шестерок не выплачивается ничего. Затем поясняется, что сходные идеи положены в основу работы страховых компаний и соотношений между страховым взносом и размером страхо-