

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Пособие

Часть I

Гомель 2024

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра электротехники

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Часть I

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области транспорта и транспортной деятельности
для студентов специальности 6-05-0715- 09
«Системы обеспечения движения поездов»
в качестве пособия по учебной дисциплине
«Теоретические основы электротехники»*

Гомель 2024

УДК 621.3.01.7(075.8)
ББК 31.211.512
В67

Рецензенты: кафедра физики и электротехники (зав. кафедрой – д-р физ.-мат. наук, профессор *П. А. Хило*) (ГГТУ им. П. О. Сухого);
доцент кафедры электроснабжения канд. техн. наук, доцент *Т. В. Алферова* (ГГТУ им. П. О. Сухого)

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники. Линейные цепи : пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Н. П. Волков ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 114 с.
ISBN 978-985-891-171-3 (ч. 1)

Приведены основные положения по методам расчета линейных электрических цепей постоянного и синусоидального тока.

Предназначено для самостоятельной работы студентов при выполнении лабораторных, расчетно-графических и контрольных работ по курсу «Теоретические основы электротехники».

УДК 621.3.01.7(075.8)
ББК 31.211.512

ISBN 978-985-891-171-3 (ч. 1)
ISBN 978-985-891-170-6

© Волков Н. П., 2024
© Оформление. БелГУТ, 2024

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В различных устройствах энергетики, радиотехники, автоматики, телемеханики, электросвязи и других отраслей техники протекают электромагнитные процессы, которые описываются определенными математическими уравнениями. Рассмотрим основные величины, которые используются в этих уравнениях, а также в законах, устанавливающих соотношения между ними.

Взаимодействие отдельных элементов этих устройств происходит через изменяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле, которое создается за счет перемещения электрических зарядов. Электрические заряды бывают двух видов: положительные и отрицательные. Электромагнитное поле представляет собой совокупность электрического и магнитного полей. Электромагнитные процессы, проходящие в этих устройствах, сопровождаются преобразованием электромагнитной энергии в другие виды энергии.

Электрический ток проводимости представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Под термином «ток» понимают также интенсивность этого процесса, которая измеряется количеством электрического заряда q , прошедшего через поперечное сечение проводника в единицу времени

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

где i – ток в *амперах* (А);

q – заряд в *кулонах* (Кл);

t – время в *секундах* (с).

В соответствии с формулой (1.1) ток численно равен скорости изменения заряда во времени и является скалярной величиной, знак которой определяется направлением движения зарядов одного вида. За направление тока принимают направление движения положительных электрических зарядов.

Электрической цепью называют совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении. Электрическая цепь может содержать измерительные приборы.

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условное обозначение ее элементов и показывающее способ соединения этих элементов, или *топологию* цепи, называется *схемой* электрической цепи. Понятия «*электрическая цепь*» и «*схема электрической цепи*» часто отождествляют.

Отдельные устройства, образующие электрическую цепь и выполняющие в ней определенные функции, называются *элементами цепи*.

У каждого элемента цепи можно выделить некоторое число *зажимов* (*полюсов* или *клемм*), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают двух-, трех- и многополюсные элементы. Элементы, имеющие два зажима (полюса), называются *двухполюсниками*, а элементы, у которых имеется две пары зажимов, называют *четыреполюсниками*.

Потенциалом φ некоторой точки электрической цепи называют величину, равную пределу отношения потенциальной энергии w , которой обладает заряд q , находящийся в данной точке, к значению этого заряда при стремлении заряда к нулю:

$$\varphi = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}. \quad (1.2)$$

Потенциал рассматриваемой точки электрической цепи численно равен работе по перемещению единичного положительного заряда из данной точки в точку с нулевым потенциалом. *Электрическим напряжением* u называется разность потенциалов между двумя точками электрической цепи, например, между точкой 1 с потенциалом φ_1 и точкой 2 с потенциалом φ_2 :

$$u = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.3)$$

Напряжение между точками 1 и 2 электрической цепи можно определить как предел отношения энергии электрического поля w , которая затрачивается на перенос положительного заряда q из точки 1 в точку 2, к этому заряду при $q \rightarrow 0$:

$$u = \frac{dw}{dq}. \quad (1.4)$$

При измерении энергии в джоулях (Дж) потенциал и напряжение выражают в вольтах (В), и они оба являются скалярными величинами.

В общем случае ток и напряжение зависят от времени. Их значения в различные моменты времени называют *мгновенными*. Мгновенные величины принято обозначать строчными буквами: $i(t)$ – мгновенный ток; $u(t)$ – мгновенное напряжение. Как правило, букву t опускают.

Если направление тока заранее неизвестно, то оно выбирается произвольно и называется *положительным направлением тока*. Направление тока на отдельных участках электрической схемы указывают стрелкой около

соединительного провода или непосредственно на проводе. Принимается, что в электрических схемах ток течет от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким потенциалом.

Разность электрических потенциалов на участке цепи, по которому протекает ток, называется *падением напряжения*. Как и для тока, для падения напряжения (или напряжения) выбирают положительное направление. Будем выбирать направление напряжения на некотором участке, совпадающее с положительным направлением тока на этом участке, и указывать его соответствующей стрелкой. Такой прием называют *согласованием* направлений тока и напряжения на участках цепи. Стрелки могут быть произвольной длины и конфигурации. Введенное представление о согласовании токов и напряжений на элементах цепи позволяет ограничиться указанием направления одной из величин, например, тока.

Передача энергии w по электрической цепи, рассеяние энергии, т. е. переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс. Интенсивность или скорость преобразования электрической энергии называют *мощностью* p , которая измеряется в ваттах (Вт):

$$p = \frac{dw}{dt}. \quad (1.5)$$

С учетом соотношений (1.1)–(1.4) получим формулу мгновенной мощности участка цепи, выраженной через напряжение и ток этого участка:

$$p(t) = u(t)i(t), \quad (1.6)$$

т. е. мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений напряжения и тока.

Элементы цепей подразделяются на *источники* и *приемники* электрической энергии, соединенные между собой проводами.

Источниками электрической энергии (или просто *источниками*) являются такие устройства, в которых происходит преобразование химической, механической, тепловой или другого вида энергии в электрическую. *Приемниками электрической энергии* или *нагрузкой* служат устройства, в которых электрическая энергия превращается в другие виды (тепловую, механическую, световую, химическую и т. д.) или накапливается.

Анализ электрической цепи с заданной структурой и известными параметрами ее элементов подразумевает исследование процессов, протекающих в ней с помощью математической модели в идеализированной форме. Иными словами, электрическая цепь представляется некоторым числом идеализированных элементов с определенными свойствами, соединенных

между собой с помощью проводов. На свойства элементов накладываются определенные ограничения, т. е. свойства этих элементов идеализируются. Такие элементы называются *идеальными*. При этом любой реальный элемент может быть представлен его эквивалентной схемой, составленной из идеальных элементов и учитывающей все конкретные свойства этого реального элемента.

Все элементы электрической цепи условно подразделяются на *пассивные* и *активные*. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается или накапливается энергия. Активными элементами цепи называют источники электрической энергии. *Активная цепь* или ее отдельный активный участок содержит хотя бы один активный элемент.

Различают три вида пассивных элементов.

Идеальный резистивный элемент – элемент цепи, полностью рассеивающий энергию. В этом элементе, называемом *сопротивлением*, электрическая энергия необратимо переходит в другие виды энергии. В различных устройствах используют реальные элементы с подобными свойствами, которые называются *резисторами*. В резистивном элементе (рисунок 1.1)

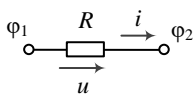


Рисунок 1.1

мгновенный ток i и мгновенное напряжение u на его зажимах связаны между собой законом Ома для мгновенных величин:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = Gu, \quad (1.7)$$

где R – сопротивление, измеряется в *омах* (Ом);

$G = 1/R$ – проводимость, измеряется в *сименсах* (См).

Сопротивление и проводимость можно обозначать также и строчными буквами r и g соответственно.

Мгновенная мощность в резистивном элементе

$$p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R} = u^2 G. \quad (1.8)$$

Идеальный индуктивный элемент изображен на рисунке 1.2. В отличие от резистивного, идеальный индуктивный элемент, или *индуктивность*, не рассеивает, а накапливает энергию в своем магнитном поле и может возвращать ее в цепь. Реальным элементом, свойства которого близки к идеальной индуктивности, является *катушка индуктивности*. Параметром индуктивной катушки является *индуктивность*, которая измеряется в *генри* (Гн) и обозначается буквой L .

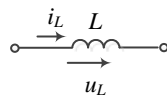


Рисунок 1.2

Связь между током и напряжением в индуктивной катушке определяется соотношением

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (1.9)$$

Идеальный емкостный элемент, или *емкость*, является элементом, в котором накапливается энергия электрического поля (рисунок 1.3). Реальным элементом со свойствами, близкими к емкостному, является *конденсатор*.

На схемах емкостный элемент обозначают буквой C . Его параметром является электрическая *емкость*, которая измеряется в *фарадах* (Φ). Ток i , протекающий через емкость и называемый *током электрического смещения*, и напряжение u_C на зажимах емкости связаны между собой соотношением

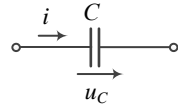


Рисунок 1.3

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.7), (1.9) и (1.10), в каждом из которых устанавливается определенная зависимость между напряжением и током отдельного элемента, называются *компонентными уравнениями*.

Если параметры R , L и C элементов цепи не зависят от протекающего через них тока и времени, то цепь называется *линейной* и описывается линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Цепи, электромагнитные процессы в которых локализованы в отдельных их элементах, называют *цепями с сосредоточенными параметрами*. Математически они описываются уравнениями, в которые входят токи, напряжения, ЭДС и параметры элементов.

2 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Если в электрической цепи течет постоянный ток, т. е. не меняющийся во времени, то такая цепь называется *цепью постоянного тока*.

Постоянные электрические величины, которые не зависят от времени, принято обозначать большими (заглавными) буквами, например, I – постоянный ток, U – постоянное напряжение, P – мощность.

В соответствии с формулой (1.9) напряжение на индуктивности при протекании через нее постоянного тока равно нулю. Следовательно, в таком случае она представляет собой короткозамкнутый участок.

Емкость согласно формуле (1.10) препятствует прохождению через нее постоянного тока и на схеме представляется разрывом. Следовательно, участки с емкостями в цепях постоянного тока следует исключать из схем.

Таким образом, цепь постоянного тока состоит из источников энергии и сопротивлений, соединенных между собой проводниками. При исследовании

электрических цепей сопротивлением соединительных проводов будем пренебрегать.

Резисторы в цепи постоянного тока обладают только свойствами резистивного элемента. Поэтому термины «резистор» и «сопротивление» в этом случае можно считать идентичными.

2.1 Идеальные источники энергии

К активным элементам электрических схем относят *идеальные источники напряжения и тока*. Они обладают способностью отдавать свою энергию подключенной к ним нагрузке.

Идеальный источник напряжения, или источник ЭДС, является идеализированным источником, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока.

В цепи постоянного тока такой источник характеризуется электродвижущей силой E , не зависящей от времени. ЭДС источника равна работе по перемещению единичного положительного заряда от точки с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом за счет сторонних сил, т. е. сил не электрической природы.

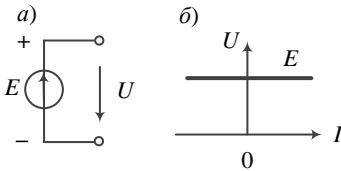


Рисунок 2.1

На рисунке 2.1, *а* приведено условное графическое изображение идеального источника напряжения.

Направление ЭДС источника обозначено стрелкой внутри кружка, которая направлена от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с более высоким потенциалом и указывает направление перемещения положительных зарядов внутри источника за счет сторонних сил.

Напряжение U на зажимах источника направлено от зажима с более высоким потенциалом к зажиму с меньшим потенциалом. Зависимость между напряжением на зажимах источника и протекающим через него током называется *внешней характеристикой источника*. Для идеального источника напряжения она представляет собой прямую линию, параллельную оси тока (рисунок 2.1, *б*).

Рассмотрим простейшую цепь на рисунке 2.2, состоящую из идеального источника ЭДС и подключенной к его зажимам нагрузки с сопротивлением R .

В соответствии с законом Ома напряжение U на нагрузке пропорционально протекающему через нее току:

$$U = RI. \quad (2.1)$$

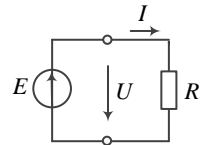


Рисунок 2.2

Эта зависимость называется *вольт-амперной характеристикой* (ВАХ) сопротивления и графически изображается прямой, проходящей через начало координат (рисунок 2.3).

Ток и мощность в нагрузке находятся в соответствии с соотношениями:

$$I = \frac{U}{R} = UG; \quad (2.2)$$

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} = U^2 G. \quad (2.3)$$

С уменьшением сопротивления R ток I в нагрузке и соответствующая току мощность P неограниченно возрастают, в силу чего такой источник напряжения можно рассматривать как источник бесконечной мощности.

Протекание через источник напряжения бесконечно большого тока означает, что его внутреннее сопротивление равно нулю.

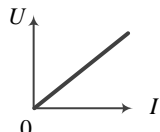


Рисунок 2.3

Идеальный источник тока — это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах.

Графически источник тока изображается на схеме двойной стрелкой внутри кружка и обозначается на схеме буквой J (рисунок 2.4, а). Стрелка указывает направление тока в источнике.

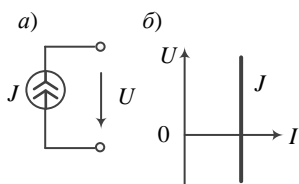


Рисунок 2.4

Внешняя характеристика источника тока, т. е. зависимость напряжения U на зажимах источника от тока I , изображается на рисунке 2.4, б прямой, параллельной оси напряжения. Если к внешним выводам источника тока подключить нагрузку с сопротивлением R (рисунок 2.5), то напряжение на сопротивлении нагрузки и выделяемая в сопротивлении мощность будут определяться следующими соотношениями:

$$U = RI = RJ;$$

$$P = I^2 R = J^2 R.$$

При увеличении сопротивления R напряжение U на нагрузке и выделяемая в ней мощность P неограниченно растут. Следовательно, источник тока, как и идеальный источник напряжения, представляет собой источник бесконечной мощности. При этом его внутреннее сопротивление равно бесконечности.

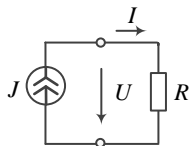


Рисунок 2.5

2.2 Схемы замещения реальных источников

Реальные источники энергии по своим свойствам в значительной степени отличаются от идеальных источников, рассмотренных выше. Они обладают конечной мощностью, не могут генерировать бесконечно большие токи и иметь неограниченные значения напряжения на внешних выводах.

При прохождении тока внутри таких источников выделяется тепловая энергия, следовательно, можно считать, что они обладают некоторым внутренним сопротивлением.

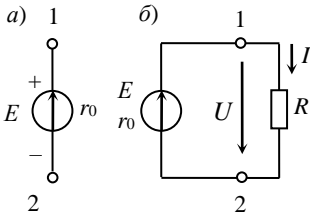


Рисунок 2.6

Рассмотрим источник, схема которого приведена на рисунке 2.6, *а*. Источник характеризуется двумя параметрами: ЭДС E и внутренним сопротивлением r_0 . Электродвижущая сила E численно равна разности потенциалов между положительным 1 и отрицательным 2 выводами источника при отсутствии в нем тока, т. е. в *режиме холостого хода*. При подключении к источнику нагрузки с сопротивлением R (рисунке 2.6, *б*) по цепи будет протекать ток I , значение которого определяется *законом Ома для полной цепи*:

$$I = \frac{E}{r_0 + R}. \quad (2.4)$$

Напряжение U на зажимах источника уже не будет равно ЭДС E вследствие падения напряжения на внутреннем сопротивлении r_0 . Если рассматривать источник напряжения, у которого сопротивление r_0 остается постоянным во всем диапазоне изменения тока (от $I = 0$ при *холостом ходе* до максимального значения $I = I_k = E/r_0 = J$ в *режиме короткого замыкания* источника), то получим следующую зависимость $U(I)$:

$$U = E - r_0 I. \quad (2.5)$$

График этой линейной зависимости, т. е. *внешней характеристики* источника, приведен на рисунке 2.7.

Из формулы (2.4) следует, что внутреннее сопротивление r_0 источника, так же как и сопротивление R нагрузки, ограничивает ток.

Если внутреннее сопротивление r_0 вынести за пределы источника, то получим схему, в которой идеальный источник напряжения с ЭДС E включен последовательно с сопротивлением r_0 и нагрузкой (рисунке 2.8, *а*). Такая схема называется

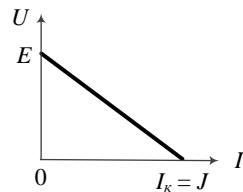


Рисунок 2.7

ся *последовательной* эквивалентной схемой реального источника.

Рассмотрим другую схему замещения источника, в которой имеется идеальный источник тока. С этой целью разделим левую и правую части соотношения (2.5) на r_0 . Получим

$$\frac{U}{r_0} = \frac{E}{r_0} - I$$

или

$$J = I_0 + I, \quad (2.6)$$

где $J = \frac{E}{r_0}$ – ток источника в режиме короткого замыкания;

$$I_0 = \frac{U}{r_0} = U g_0 \text{ – ток в ветви с проводимостью } g_0;$$

$g_0 = 1/r_0$ – внутренняя проводимость источника тока.

Согласно соотношению (2.6) получим *параллельную* схему замещения источника на рисунке 2.8, б.

Переход от одной схемы источника к другой, ей эквивалентной, возможен только тогда, когда внутреннее сопротивление имеет конечное значение: $r_0 \neq 0$ и $r_0 \neq \infty$. Связь между параметрами эквивалентных схем источника определяется соотношениями:

$$J = \frac{E}{r_0}; \quad E = r_0 J; \quad r_0 = \frac{1}{g_0}. \quad (2.7)$$

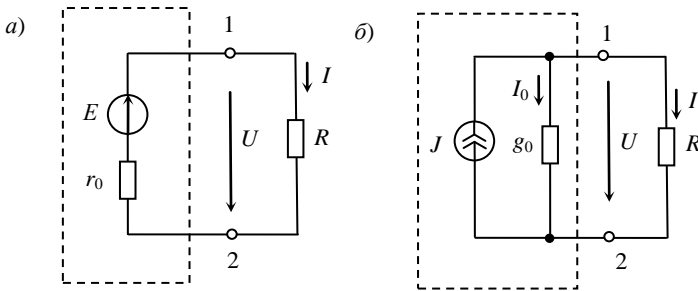


Рисунок 2.8

Несмотря на эквивалентность, в энергетическом отношении схемы замещения источника различны, так как в режиме холостого хода для последовательной схемы замещения мощность равна нулю, а для параллельной – нет.

Идеальные источники напряжения, обладающие нулевым внутренним сопротивлением, и источники тока с бесконечными внутренними сопротивлениями не могут эквивалентно преобразовываться друг в друга.

2.3 Закон Ома для активного участка цепи

На рисунке 2.9 представлен участок электрической схемы, состоящий из соединенных последовательно сопротивления R и идеального источника напряжения с ЭДС E . Участок схемы присоединен к точкам a и b . Пусть ток I течет из точки a , имеющей потенциал φ_a , в точку b , потенциал которой равен φ_b . Напряжение $U = \varphi_a - \varphi_b$ на данном участке и падение напряжения $U_R = RI$ на сопротивлении обозначим стрелками, направление которых согласуем с направлением тока. При переходе из точки a в точку c потенциал последней уменьшается на RI , а потенциал точки b приобретает значение

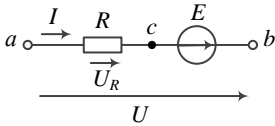


Рисунок 2.9

$\varphi_b = \varphi_a - RI + E$.

Из полученного соотношения выразим ток:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R}. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) представляет собой формулу закона Ома для активного участка цепи или обобщенного закона Ома. Из формулы следует, что ток на участке цепи определяется не абсолютными значениями потенциалов точек, к которым он присоединен, а их разностью. Это значит, что потенциал одной из точек может принимать любое значение, в том числе равное нулю, т. е. эту точку можно условно заземлить.

Напряжение на участке цепи между точками a и b

$$U = RI - E. \quad (2.9)$$

2.4 Законы Кирхгофа

Для анализа цепи и ее схемы введем понятия ветви, узла и контура.

Участок цепи или ее схемы, вдоль которого протекает один и тот же ток, называется ветвью.

Место электрического соединения трех и более ветвей называют узлом цепи (схемы) и обозначают жирной точкой. Если к какой-либо точке схемы присоединяются только две ветви, то такой узел называется устранимым.

На рисунке 2.10, a изображен фрагмент схемы, где четыре элемента присоединены к одному узлу. Иногда для удобства построения схемы узел изображают несколькими точками, соединенными между собой короткозамкнутыми участками. Так, на рисунке 2.10, b приведена другая конфигурация этого же фрагмента схемы, при которой имеются четыре точки соединения элементов, представляющие один и тот же узел.

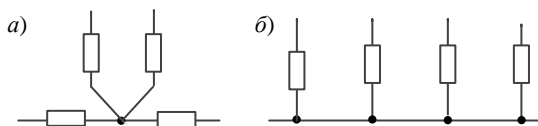


Рисунок 2.10

Замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям схемы, называется *контуром*. При обходе контура каждый узел в нем должен встречаться не более одного раза.

В качестве примера рассмотрим схему разветвленной цепи, приведенную на рисунке 2.11. Схема имеет четыре узла, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, и шесть ветвей. Точки соединения *m* и *n* представляют собой устранимые узлы. Схемы такой конфигурации в электротехнике называют *схемами мостового типа*.

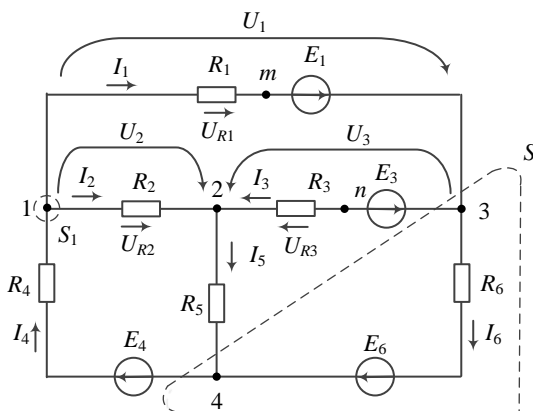


Рисунок 2.11

Выберем произвольно положительные направления токов ветвей и укажем их стрелками. Проведем вокруг узла 1 замкнутую поверхность S_1 . Из области, ограниченной этой поверхностью, вытекают токи I_1 и I_2 , а ток I_4 втекает в эту область. Так как электрические заряды подвижны и не могут скапливаться в отдельных частях цепи, в том числе и в узлах, то можно сделать следующий вывод: количество зарядов, втекающих в единицу времени внутрь этой поверхности, должно равняться количеству зарядов, вытекающих за это же время за пределы этой поверхности. Другими словами, *сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из него*.

С учетом соотношения (1.1) приходим к формулировке *первого закона Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю*, т. е.

$$\Sigma \pm I_k = 0. \quad (2.10)$$

Со знаком «плюс» учитывают токи, направленные от узла, а со знаком «минус» – токи, направленные к узлу.

Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов рассматриваемой схемы:

$$\begin{aligned} - \text{ для узла 1} & \quad I_1 + I_2 - I_4 = 0; \\ - \text{ для узла 2} & \quad -I_2 - I_3 + I_5 = 0; \\ - \text{ для узла 3} & \quad -I_1 + I_3 + I_6 = 0; \\ - \text{ для узла 4} & \quad I_4 - I_5 - I_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При сопоставлении записанных выше уравнений очевидно, что последнее уравнение представляет собой линейную комбинацию первых трех уравнений, на основании чего можно сделать следующий вывод: *по первому закону Кирхгофа независимых уравнений можно записать на единицу меньше числа узлов*.

Первый закон Кирхгофа применим не только к узлам, но и к любой замкнутой поверхности, которая пересекает ветви схемы. Так, для поверхности S , рассекающей схему на рисунке 2.11 на две части, будет справедливо следующее уравнение:

$$-I_1 + I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

След замкнутой поверхности S в плоскости рисунка, рассекающей схему на две части, изображает *сечение* схемы.

Выберем на схеме рисунка 2.11 замкнутый контур 1 – m – 3 – n – 2 – 1 и обойдем его по направлению движения часовой стрелки. Укажем стрелками падения напряжений на сопротивлениях и напряжения на зажимах ветвей выбранного контура, согласовав эти направления с соответствующими направлениями токов ветвей. Приняв потенциал узла 1 равным φ_1 , выразим потенциалы других узлов контура:

$$\varphi_3 = \varphi_1 - U_1;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 - U_3 = \varphi_1 - U_1 - U_3.$$

Возвращаясь при обходе контура в исходный узел 1, запишем значение его потенциала:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + U_2 = \varphi_1 - U_1 - U_3 + U_2.$$

Исключая из этого соотношения φ_1 , получим следующее выражение:

$$U_1 + U_3 - U_2 = 0, \quad (2.12)$$

из которого следует, что *алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей, образующих контур цепи, равна нулю*. Это формулировка *второго закона Кирхгофа*:

$$\Sigma \pm U_k = 0. \quad (2.13)$$

В формуле (2.13) со знаком «плюс» учитывают напряжения ветвей, направление которых совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «минус» – противоположного направления.

По второму закону Кирхгофа можно составить не только уравнения для напряжений ветвей, но и записать их с учетом параметров элементов, входящих в ветви каждого контура. Запишем в соответствии с формулой (2.9) выражения для напряжений ветвей рассмотренного выше контура:

$$U_1 = R_1 I_1 - E_1;$$

$$U_2 = R_2 I_2;$$

$$U_3 = R_3 I_3 + E_3$$

и, подставив их в формулу (2.12), получим:

$$R_1 I_1 - E_1 + R_3 I_3 + E_3 - R_2 I_2 = 0.$$

Группируя падения напряжений в левой части соотношения, а ЭДС в правой, получим еще один вариант формулы второго закона Кирхгофа для рассматриваемого контура:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = E_1 - E_3.$$

Таким образом, получим другую формулировку второго закона Кирхгофа в следующей форме: *в любом замкнутом контуре цепи алгебраическая сумма падений напряжений на сопротивлениях равна алгебраической сумме ЭДС источников напряжения, действующих в этом контуре*, т. е.

$$\Sigma \pm R_k I_k = \Sigma \pm E_k. \quad (2.14)$$

В этом уравнении токи и ЭДС, направление которых совпадает с выбранным направлением обхода рассматриваемого контура, записывают со знаком «плюс», в противном случае они учитываются со знаком «минус».

Второй закон Кирхгофа можно применять для определения напряжения между двумя произвольными точками схемы, в том числе для точек разо-

мкнутого участка. В этом случае в левую часть уравнения необходимо ввести искомое напряжение вдоль пути, которое будет дополнять незамкнутый контур до замкнутого.

2.5 Применение законов Кирхгофа для анализа цепей

Анализ или расчет цепи заключается в определении значений токов, напряжений и мощностей отдельных участков, если заданы параметры элементов схемы замещения цепи. Анализ электрической цепи произвольной конфигурации полностью базируется на законах Кирхгофа.

В электрической цепи, которая содержит p узлов и q ветвей, электрический режим будет полностью определен, если будут найдены токи во всех ветвях.

Если расчет электрической цепи производить путем непосредственного применения законов Кирхгофа, то необходимо сформировать систему из q уравнений и решить ее. При этом число независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, будет равно $p - 1$, т. е. на единицу меньше числа узлов. Остальные уравнения в количестве $q - (p - 1)$ составляются по второму закону Кирхгофа.

Число контуров в схеме может превышать необходимое количество уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа. Поэтому при составлении независимых уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо правильно выбирать контуры. Их следует выбирать так, чтобы в них вошли все ветви схемы, а в каждый из контуров возможно меньшее число ветвей. Контуры должны иметь общие ветви.

Назовем *ячейкой* контур, составленный из минимального количества ветвей и не имеющий внутренних ветвей.

Контуры взаимно *независимы*, если каждый последующий контур, для которого составляется уравнение, имеет не менее одной новой ветви и не получается из контуров, для которых уже написаны уравнения, путем удаления из этих контуров общих ветвей.

Приведенная на рисунке 2.11 схема имеет семь контуров и только три из них являются независимыми.

Пусть требуется рассчитать токи ветвей электрической схемы на рисунке 2.12 путем непосредственного применения законов Кирхгофа, если заданы параметры элементов схемы, т. е. значения ЭДС источников и сопротивлений.

Так как направления токов в ветвях электрической схемы неизвестны, то предварительно произвольно выбираем их положительные направления и указываем соответствующими стрелками. Также указываем стрелками падения напряжений на сопротивлениях, согласовывая их с направлениями токов.

При наличии трех узлов можно составить два независимых уравнения по первому закону Кирхгофа, например, для узлов 1 и 2. Оставшиеся три уравнения следует составить по второму закону Кирхгофа.

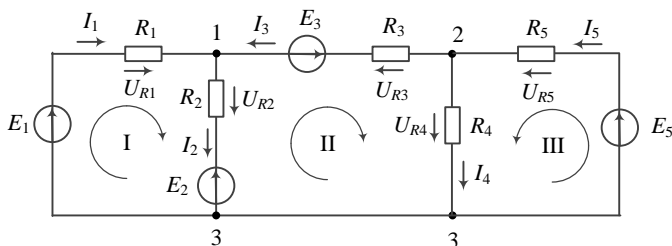


Рисунок 2.12

С этой целью требуется выбрать три независимых контура. В качестве таковых рассмотрим три ячейки, отмеченные на рисунке римскими цифрами I, II, III. Направления обхода контуров обозначим соответствующими стрелками.

Запишем систему уравнений относительно искомых токов:

- для узла 1
$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0;$$
- для узла 2
$$I_3 + I_4 - I_5 = 0;$$
- для контура I
$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - E_2;$$
- для контура II
$$-R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 = E_2 + E_3;$$
- для контура III
$$R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_5.$$

Решая систему уравнений, найдем токи ветвей. Если в результате расчета какие-либо токи будут получены с отрицательными знаками, то это будет означать, что их истинные направления противоположны выбранным.

Схема может включать ветви, имеющие в своем составе источники тока. Это значит, что токи в таких ветвях заданы как по значению, так и по направлению. Сопротивления таких ветвей бесконечно велики. Такие ветви называют *особыми* или *вырожденными*.

Если общее количество ветвей схемы равно q , а число ветвей с источниками тока равно n_t , то число независимых уравнений, записываемых для определения токов по законам Кирхгофа, будет равно $q - n_t$.

Контуры, которые выбирают для записи уравнений по второму закону Кирхгофа, не должны иметь в своем составе ветвей с источниками тока, так как их сопротивления бесконечно велики.

Пример 2.1 Рассчитать токи ветвей схемы, приведенной на рисунке 2.13, методом непосредственного применения законов Кирхгофа. Определить напряжение U_J на зажимах источника тока. Параметры элементов схемы: $E_1 = 10$ В, $E_3 = 6$ В, $E_4 = 18$ В, $J_6 = 3$ А, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, $R_5 = 8$ Ом.

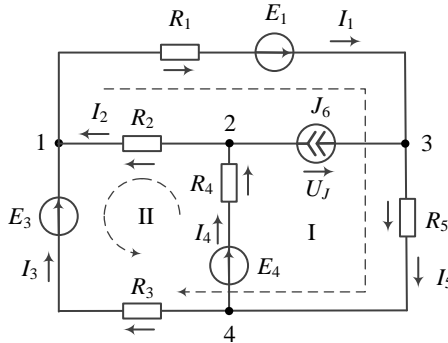


Рисунок 2.13

Решение. Произвольно выбираем и указываем стрелками направления токов в ветвях схемы. Отмечаем также стрелками падения напряжений на сопротивлениях, согласовывая их с направлениями токов. Обозначим узлы цифрами 1, 2, 3 и 4. Количество ветвей в схеме $q = 6$, в том числе с источником тока $n_T = 1$, число узлов $p = 4$. Составим систему уравнений в количестве $q - n_T = 5$ относительно искомых токов. В соответствии с первым законом Кирхгофа составим три уравнения для узлов 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ I_2 - I_4 &= J_6; \\ -I_1 + I_5 &= -J_6. \end{aligned} \tag{2.15}$$

По второму закону Кирхгофа необходимо записать два уравнения в соответствии с формулой (2.14), для чего выберем два независимых контура I и II и обозначим стрелками направления обхода контуров

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_5 I_5 &= E_1 + E_3; \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_4 I_4 &= -E_3 + E_4. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Составленную по законам Кирхгофа систему уравнений (2.15) и (2.16) запишем в матричной форме:

$$[C][I]=[F], \quad (2.17)$$

где $[C]$ – квадратная матрица коэффициентов перед токами в уравнениях (2.15) и (2.16), т. е.

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 \end{bmatrix};$$

$[I]$ – матрица-столбец токов ветвей, т. е.

$$[I]=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix};$$

$[F]$ – матрица-столбец правых частей уравнений (2.15) и (2.16), т. е.

$$[F]=\begin{bmatrix} 0 \\ J_6 \\ -J_6 \\ E_1 + E_3 \\ -E_3 + E_4 \end{bmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений (2.17), подставив в матрицы $[C]$ и $[F]$ численные значения элементов матриц:

$$\begin{aligned} [I]=[C]^{-1}[F]&=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_5 \\ 0 & R_2 & -R_3 & R_4 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ J_6 \\ -J_6 \\ E_1 + E_3 \\ -E_3 + E_4 \end{bmatrix}= \\ &=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4,571 \\ 3,81 \\ 0,762 \\ -0,19 \\ 0,571 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате расчета получены следующие значения токов ветвей:

$$I_1 = 4,571 \text{ A}; I_2 = 3,81 \text{ A}; I_3 = 0,762 \text{ A}; I_4 = -0,19 \text{ A}; I_5 = 0,571 \text{ A}.$$

Ток I_4 имеет отрицательный знак, это означает, что его действительное направление противоположно предварительно выбранному.

Напряжение U_J на зажимах источника тока определим по второму закону Кирхгофа, записав его для верхнего контура схемы:

$$U_J = -R_4 I_4 - R_5 I_5 = 14,382 \text{ В}.$$

2.6 Баланс мощностей

Для проверки правильности результатов расчета электрической схемы составляется баланс электрических мощностей. В соответствии с законом сохранения энергии в любой отдельно взятой электрической цепи мощность, развиваемая источниками в этой цепи, равна мощности, расходуемой в приемниках энергии. При этом следует иметь в виду, что при определенных условиях некоторые источники, действующие в цепи, не генерируют, а, наоборот, потребляют энергию. Следовательно, суммарную мощность источников, действующих в цепи, находят в виде алгебраической суммы мощностей отдельных источников.

Рассмотрим режим работы идеальных источников напряжения и тока в составе сложной электрической цепи. С этой целью выделим их в виде отдельных ветвей, а остальную часть цепи представим в виде активного двухполюсника. На рисунке 2.14 приведены 4 схемы соединения идеальных источников напряжения и тока с активным двухполюсником, который обозначен буквой A .

Активный двухполюсник представляет собой цепь в виде совокупности источников энергии и сопротивлений, соединенных между собой определенным образом. На рисунке 2.14, a и b представлены схемы, на которых направления напряжений на зажимах источников согласованы с направлениями токов, проходящих через них. В этом случае оба источника работают в режиме генерирования энергии, и их энергия учитывается с положительным знаком. На рисунке 2.14, $в$ и $г$ в представленных схемах направления напряжений на источниках не согласованы с направлениями соответствующих токов. Следовательно, оба источника не генерируют, а потребляют электрическую энергию от других источников активного двухполюсника. В таком случае энергия этих источников должна учитываться в балансе мощности со знаком «минус».

Мощность источника напряжения равна произведению ЭДС E источника и проходящего по нему тока I :

$$P = EI,$$

а мощность источника тока определяется произведением напряжения U_J на его зажимах и генерируемого источником тока J :

$$P = U_J J.$$

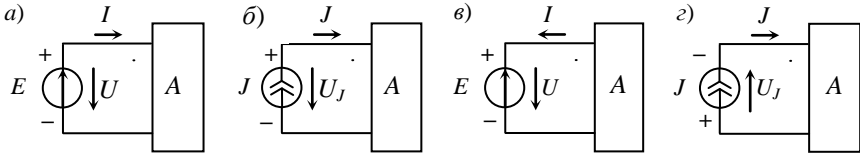


Рисунок 2.14

Таким образом, мощность источников, действующих в цепи, находят по формуле

$$P_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^{q-n_{\Gamma}} \pm E_k I_k + \sum_{i=1}^{n_{\Gamma}} \pm U_{Ji} J_i. \quad (2.18)$$

В сопротивлениях электрическая энергия необратимо превращается в тепловую или в другие виды. Мощность, потребляемая всеми сопротивлениями в цепи, равна сумме мощностей каждого из них:

$$P_{\text{нагр}} = \sum_{k=1}^q I_k^2 R_k. \quad (2.19)$$

Относительную погрешность вычислений находят по формуле

$$\delta_p \% = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{нагр}}|}{0,5(P_{\text{ист}} + P_{\text{нагр}})} \cdot 100 \%. \quad (2.20)$$

Проверим по балансу мощностей результаты расчета токов в примере 2.1. Мощность действующих в цепи источников

$$\begin{aligned} P_{\text{ист}} &= E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4 + U_J J_6 = \\ &= 10 \cdot 4,571 + 6 \cdot 0,762 + 18 \cdot (-0,19) + 14,382 \cdot 3 = 104,39 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Мощность, развиваемая на сопротивлениях нагрузки,

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 104,383 \text{ Вт.}$$

Найдем относительную погрешность результатов расчета

$$\delta_p = \frac{|P_{\text{ист}} - P_{\text{нагр}}|}{0,5(P_{\text{ист}} + P_{\text{нагр}})} \cdot 100 = \frac{|104,39 - 104,383|}{0,5(104,39 + 104,383)} \cdot 100 = 0,0067 \text{ \%}.$$

Баланс мощностей выполняется.

2.7 Топологические графы электрических цепей

Как отмечалось ранее, режим электрической цепи произвольной конфигурации полностью определяется первым и вторым законами Кирхгофа.

Вид уравнений, составленных по законам Кирхгофа в соответствии с формулами (2.10) и (2.13), не зависит от того, какие элементы входят в состав цепи, а определяется только ее топологической структурой, т. е. способом соединения элементов между собой, и не зависит от вида и параметров самих элементов. При этом сами токи и напряжения зависят как от соответствующих элементов ветвей, так и от топологии схем. Это следует из закона Ома для всех участков цепи, пассивных и активных.

В таком случае ветви, содержащие различные элементы, можно представлять просто линиями, а структуру цепи – совокупностью этих линий, которая называется *графом* электрической цепи.

Любой двухполюсный элемент или группа последовательно соединенных элементов на графе электрической цепи изображается отрезком линии, который называется *ветвью* или *ребром*. Точки соединения ветвей являются *узлами* (*вершинами*) графа. Таким образом, граф есть совокупность узлов, соединенных друг с другом ветвями. В теории электрических цепей в основном находят применение *направленные* (*ориентированные*) графы, у которых каждая ветвь имеет определенную ориентацию, указанную стрелкой. Для графов электрических цепей направление каждой ветви выбирается совпадающим с положительным направлением тока в соответствующей ветви электрической схемы.

Если ветвь и узел графа соприкасаются, то говорят, что они *инцидентны*. Граф электрической цепи строят по ее эквивалентной схеме. Каждой ветви схемы соответствует ветвь графа, а каждому узлу схемы – узел графа. Ветви графа с помощью стрелок ориентируют в соответствии с положительным направлением токов, протекающих по соответствующим ветвям схемы.

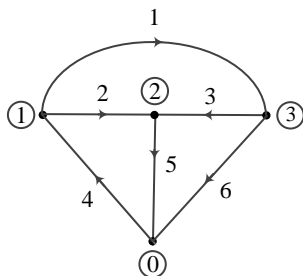


Рисунок 2.15

Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь, схема которой с указанными направлениями токов в ветвях дана на рисунке 2.11. Направленный граф этой схемы приведен на рисунке 2.15.

Условимся одному из узлов графа, называ-

емому *базисным* или *опорным*, присваивать номер 0, а остальные узлы нумеровать в произвольном порядке и обозначать арабскими цифрами в кружках. Ветви графа будем нумеровать арабскими цифрами, начиная с 1, так, чтобы номера ветвей совпадали с индексами соответствующих токов на электрической схеме.

Любая часть графа, элементы которой являются элементами исходного графа, называется *подграфом*. Его можно получить путем удаления отдельных ветвей исходного графа. Подграфом может быть одна ветвь или один узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в данном графе. В теории электрических цепей большое значение имеют такие подграфы, как *путь*, *дерево*, *связи* и *сечение*.

Совокупность последовательно соединенных между собой ветвей, по которым можно переместиться из одного узла графа в другой, называется *путем*. Каждая ветвь и каждый узел встречаются в пути только раз. Узлы, которые соединены путем графа, называются *концевыми*. Замкнутый путь, у которого начальный и конечный концевые узлы совпадают, называют *контуром*. Каждому из узлов контура инцидентны две ветви этого контура.

Если любые два узла графа соединены путем, то граф называют *связным* (*связанным*). В противном случае граф называют *несвязным*.

Связный подграф, содержащий все узлы графа, но не содержащий ни одного контура, называют *деревом* этого графа. Ветви графа, вошедшие в дерево, называются *ветвями дерева*; ветви, не вошедшие в дерево, называются *ветвями связи* (*связями*). Ветви связи дополняют дерево до полного графа.

Условимся в дальнейшем ветви дерева изображать жирными линиями, а ветви связи – тонкими. Для каждого графа можно образовать несколько деревьев, отличающихся друг от друга составом ветвей дерева. Один из таких вариантов представлен на рисунке 2.16, а.

Дерево графа можно построить следующим образом. Наметить узлы графа. Затем, начав с некоторого узла, который называется *корнем*, вычерчивать ветви дерева, соединяющие другие узлы графа, не допуская при этом образования контуров.

Добавление к дереву графа любой ветви связи образует контур. Контур, образованный поочередным добавлением к дереву графа его ветвей связи, называются *главными* контурами. Главные контуры I, II и III рассматриваемого графа условно показаны на рисунке 2.16, б.

Число главных контуров равно числу ветвей связи. Номера главных контуров будем обозначать римскими цифрами. За направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура.

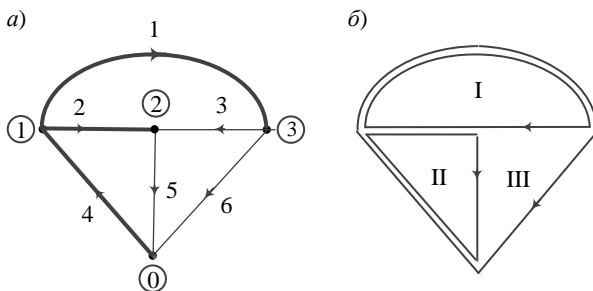


Рисунок 2.16

Сечением графа называют совокупность ветвей связного графа, пересекаемых замкнутой поверхностью, которая делит граф на две части.

Сечение изображается в виде следа замкнутой поверхности, которая охватывает часть цепи с одним или несколькими узлами. Ни одна из ветвей графа не должна пересекаться дважды.

Главным сечением графа называется такое сечение, в которое входит только одна ветвь выбранного дерева. Остальные ветви, входящие в главное сечение, являются ветвями связи. Количество главных сечений равно количеству ветвей дерева.

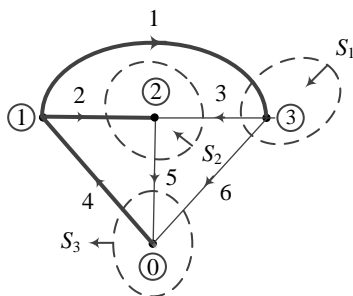


Рисунок 2.17

За положительное направление главного сечения принимают направление ветви дерева, входящей в данное сечение, и указывают его стрелкой. На рисунке 2.17 изображены главные сечения S_1 , S_2 и S_3 графа и их направления.

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей q , числом узлов p и способом соединения ветвей между собой.

2.8 Топологические матрицы

Для аналитического описания структуры электрической цепи, ее графа и основных законов токораспределения применяют *топологические* матрицы.

Аналитическое представление графа необходимо для формирования уравнений сложной цепи с помощью вычислительной техники.

В соответствии с видом уравнений Кирхгофа различают три топологические матрицы: *соединений* (узловую матрицу) $[A]$, *контурную* (главных контуров) $[B]$ и *главных сечений* $[Q]$.

Полное описание структуры направленного графа дает *матрица соединений* размером $(p \times q)$, p строк которой являются порядковыми номерами узлов, а q столбцов – номерами ветвей. Она представляет собой таблицу коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для всех узлов схемы.

Элемент матрицы a_{ij} , расположенный на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен $+1$, если ветвь j графа соединена с узлом i и направлена от узла. Элемент матрицы $a_{ij} = -1$, если ветвь j соединена с узлом i и направлена к узлу. Элемент матрицы $a_{ij} = 0$, если ветвь j не присоединена к узлу i .

Для графа на рисунке 2.17 получим полную матрицу соединений:

		Номера ветвей					
		1	2	3	4	5	6
$[A_0] =$	1	$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$					
	2						
	3						
	0						

Номера
узлов

В каждом столбце матрицы $[A_0]$ имеется только два ненулевых элемента: $+1$ и -1 , так как каждая ветвь инцидентна двум узлам и направлена от одного к другому. Сумма элементов каждого столбца матрицы $[A_0]$ равна нулю, т. е. строки полной матрицы являются линейно зависимыми. Из этого следует, что достаточно заполнить таблицу для $(p - 1)$ узлов, которая является *редуцированной* (сокращенной) матрицей соединений $[A]$. Она получается из полной матрицы соединений путем вычеркивания строки, соответствующей выбранному базисному узлу. Вычеркивая последнюю строку в матрице $[A_0]$, получим редуцированную матрицу соединений (узловую матрицу) $[A]$:

		Номера ветвей					
		1	2	3	4	5	6
$[A] =$	1	$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$					
	2						
	3						

Номера
узлов

Матрица главных сечений $[Q]$ представляет собой таблицу коэффициентов, составленных по первому закону Кирхгофа для главных сечений. Строки матрицы $[Q]$ соответствуют сечениям, столбцы – ветвям. Элемент матрицы $q_{ij} = +1$, если ветвь j содержится в сечении i и ее ориентация совпадает с ориентацией сечения, т. е. с ориентацией соответствующей ветви дерева относительно линии сечения. Элемент матрицы $q_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в сечении i и направлена противоположно направлению сечения. Элемент матрицы $q_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в сечении i . Запишем матрицу главных сечений для графа на рисунке 2.17:

$$[Q] = \begin{array}{c} \text{S}_1 \\ \text{S}_2 \\ \text{S}_3 \end{array} \begin{array}{c} \text{Номера ветвей} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Главные
сечения

Матрица главных контуров (*контурная матрица*) $[B]$ – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки матрицы $[B]$ соответствуют главным контурам, столбцы – ветвям. Элемент матрицы $b_{ij} = +1$, если ветвь j содержится в контуре i и направление ветви совпадает с направлением обхода контура. Элемент матрицы $b_{ij} = -1$, если ветвь j содержится в контуре i и направление ветви противоположно направлению обхода контура. Элемент матрицы $b_{ij} = 0$, если ветвь j не содержится в контуре i . Составим контурную матрицу для графа на рисунке 2.17:

$$[B] = \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \text{Номера ветвей} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Главные
контурные

2.9 Уравнения Кирхгофа в матричной форме

Составим уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3 графа на рисунке 2.15:

$$I_1 + I_2 - I_4 = 0;$$

$$-I_2 - I_3 + I_5 = 0;$$

$$-I_1 + I_3 + I_6 = 0$$

и запишем их в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В левой части соотношения имеем произведение матрицы соединений $[A]$ и матрицы токов ветвей $[I]$, а в правой – нулевую матрицу (нулевой вектор-столбец):

$$[A][I] = [0] \quad (2.21)$$

Полученное соотношение является формулой первого закона Кирхгофа для узлов в матричной форме.

Подобным образом можем получить матричную форму первого закона Кирхгофа для главных сечений. С этой целью запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для главных сечений S_1 , S_2 и S_3 графа на рисунке 2.17:

$$I_1 - I_3 - I_6 = 0;$$

$$I_2 + I_3 - I_5 = 0;$$

$$I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

Представим данную систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем уравнение первого закона Кирхгофа для главных сечений в матричной форме:

$$[Q][I] = [0] \quad (2.22)$$

При записи уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, будем использовать главные контуры I, II и III графа на рисунке 2.16, а

$$U_1 - U_2 + U_3 = 0;$$

$$U_2 + U_4 + U_5 = 0;$$

$$U_1 + U_4 + U_6 = 0$$

и применим к полученной системе уравнений матричную форму записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Систему уравнений, составленную по второму закону Кирхгофа, запишем в форме матричного произведения

$$[B][U] = [0]. \quad (2.23)$$

Выразим напряжения ветвей через потенциалы узлов, к которым присоединены ветви, для графа на рисунке 2.15, приняв потенциал узла 0 равным нулю

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_3; \quad U_3 = -\varphi_2 + \varphi_3; \quad U_4 = -\varphi_1;$$

$$U_2 = \varphi_1 - \varphi_2; \quad U_5 = \varphi_2; \quad U_6 = \varphi_3.$$

Запишем эти уравнения в виде матричного соотношения:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

или

$$[U] = [A]^T [\varphi], \quad (2.24)$$

где $[U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$ – вектор напряжений ветвей;

$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – транспонированная узловая матрица;

$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$ – вектор потенциалов узлов.

2.10 Теорема Телледжена

Рассмотрим произвольную электрическую цепь постоянного тока, состоящую из p узлов и q ветвей. Представим схему направленным графом и согласуем направления напряжений и токов всех ветвей. Теорема Телледжена утверждает, что *сумма произведений напряжений U_k и токов I_k всех q ветвей ориентированного графа, удовлетворяющих законам Кирхгофа, равна нулю*, т. е.

$$\sum_{k=1}^q U_k I_k = 0. \quad (2.25)$$

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими соотношениями:
– формулой (2.21) первого закона Кирхгофа в матричной форме

$$[A][I] = [0],$$

где $[I] = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ \dots \ I_q]^T$ – вектор токов ветвей;

– формулой (2.24), в которой напряжения ветвей связаны с вектором потенциалов узлов,

$$[U] = [A]^T[\Phi],$$

где $[U] = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_q]^T$ – вектор напряжений ветвей.

Представим формулу (2.25) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^q U_k I_k = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_q] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_q \end{bmatrix} = [U]^T [I]. \quad (2.26)$$

Из операций с матрицами следует, что $[[B][C]]^T = [C]^T [B]^T$, следовательно, формулу (2.26) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^q U_k I_k = [U]^T [I] = \left[[A]^T [\varphi] \right]^T [I] = [\varphi]^T [A] [I].$$

Принимая во внимание, что согласно уравнению (2.21) $[A][I] = [0]$, получим доказательство теоремы:

$$\sum_{k=1}^q U_k I_k = [U]^T [I] = [0].$$

2.11 Эквивалентные преобразования электрических схем

При анализе схемы электрической цепи иногда следует ее предварительно упростить, т. е. уменьшить количество ветвей, узлов или элементов. *Эквивалентным* называют такое преобразование схемы, когда в нетронутой преобразованиями ее части остается неизменным распределение токов ветвей и потенциалов узлов.

2.11.1 Последовательное соединение элементов

На рисунке 2.18, а дана схема с последовательным соединением элементов, когда через них проходит один и тот же ток I . Запишем для этой схемы выражение для входного напряжения U , воспользовавшись вторым законом Кирхгофа:

$$U = U_{R1} + U_{R2} + U_{R3} - E_1 + E_2 - E_3 = (R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 - E_2 + E_3).$$

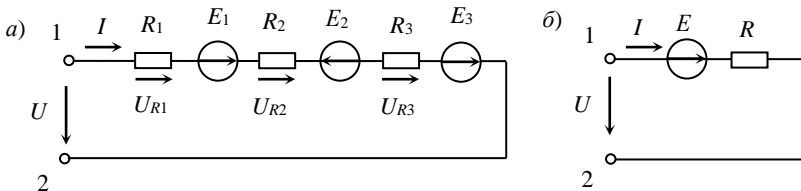


Рисунок 2.18

Группируя величины одинаковой размерности, получим:

$$R = R_1 + R_2 + R_3;$$

$$E = E_1 - E_2 + E_3,$$

где R – эквивалентное сопротивление,

E – эквивалентная ЭДС схемы.

В результате получим выражение для входного напряжения

$$U = RI - E,$$

которому соответствует схема на рисунке 2.18, б. Таким образом, эквивалентные параметры схемы с последовательным соединением элементов находятся следующим образом:

$$R = \sum R_k ; E = \sum \pm E_k. \quad (2.27)$$

Эквивалентное сопротивление R последовательно соединенных резисторов равно сумме сопротивлений этих резисторов.

Эквивалентная ЭДС E источников, соединенных последовательно, равна алгебраической сумме ЭДС этих источников. Со знаком «плюс» берут ЭДС источников, направление которых совпадает с направлением эквивалентной ЭДС E , а со знаком «минус» – ЭДС противоположного направления.

2.11.2 Параллельное соединение сопротивлений

При параллельном соединении ветви присоединяются к одной и той же паре узлов и, следовательно, находятся под одним напряжением. Пусть три пассивные ветви с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 присоединены к узлам 1 и 2, как показано на рисунке 2.19, а. Найдем параметры R и G эквивалентной ветви (рисунок 2.19, б).

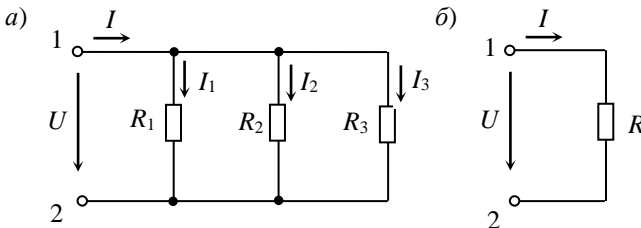


Рисунок 2.19

Токи ветвей, находящиеся под напряжением U , находим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = G_1 U; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = G_2 U; \quad I_3 = \frac{U}{R_3} = G_3 U.$$

Входной ток схемы на рисунке 2.19, *a* в соответствии с первым законом Кирхгофа равен сумме токов параллельных ветвей:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = (G_1 + G_2 + G_3)U.$$

Заменив сумму однотипных величин эквивалентной, получим:

$$I = GU, \quad (2.28)$$

где $G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Таким образом, эквивалентная проводимость G параллельно соединенных ветвей равна сумме проводимостей этих ветвей.

Формуле (2.28) соответствует схема на рисунке 2.19, *б*, на которой параметр R представляет собой эквивалентное сопротивление исходной схемы с параллельно соединенными ветвями:

$$R = \frac{1}{G} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Для частного случая параллельного соединения двух ветвей с сопротивлениями R_1 и R_2 (рисунок 2.20) формула для определения эквивалентного сопротивления R записывается в такой форме:

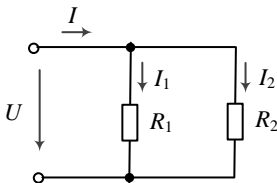


Рисунок 2.20

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.30)$$

При известном входном токе I схемы значения токов I_1 и I_2 в параллельных ветвях находят по следующим формулам:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (2.31)$$

которые представляют собой формулы деления тока в параллельных ветвях.

Пример 2.2 Определить входное сопротивление схемы на рисунке 2.21, *a* при заданных параметрах элементов: $R_1 = 24$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 20$ Ом, $R_5 = 12$ Ом, $R_6 = 18$ Ом, $R_7 = 12$ Ом.

Решение. Сопротивления схемы соединены смешанным образом. Для определения входного сопротивления произведем эквивалентные преобразования схемы путем ее последовательного «свертывания» относительно входных зажимов. Параллельно соединенные резисторы с сопротивлениями R_2 и R_3 заменим эквивалентным резистором с сопротивлением

$$R_8 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24 \text{ Ом.}$$

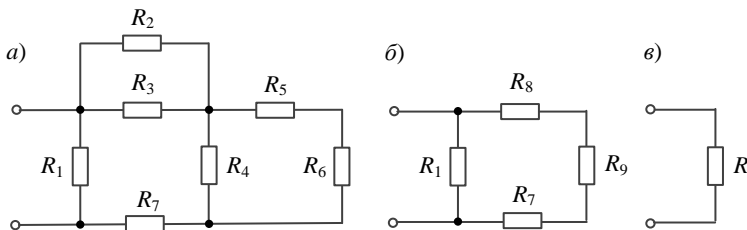


Рисунок 2.21

Затем найдем эквивалентное сопротивление ветви с последовательно соединенными сопротивлениями R_5 и R_6 и параллельной ей ветви с сопротивлением R_4

$$R_9 = \frac{R_4(R_5 + R_6)}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 30}{50} = 12 \text{ Ом.}$$

Полученную после преобразований схему на рисунке 2.21, б «свернем» до одного сопротивления (рисунок 2.21, в), подключенного к входным зажимам схемы:

$$R = \frac{R_1(R_7 + R_8 + R_9)}{R_1 + R_7 + R_8 + R_9} = \frac{24 \cdot 48}{72} = 16 \text{ Ом.}$$

2.11.3 Параллельное соединение активных ветвей

На рисунке 2.22, а три активные ветви с заданными значениями сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 и ЭДС источников E_1 , E_2 , E_3 подключены к внешнему источнику с напряжением U .

Заменяем параллельно соединенные ветви одной эквивалентной ветвью (рисунок 2.22, б) и определим параметры R и E ее элементов.

Запишем выражения для токов ветвей исходной схемы в соответствии с обобщенным законом Ома:

$$I_1 = \frac{U - E_1}{R_1} = UG_1 - E_1G_1;$$

$$I_2 = \frac{U + E_2}{R_2} = UG_2 + E_2G_2;$$

$$I_3 = \frac{U + E_3}{R_3} = UG_3 + E_3G_3.$$

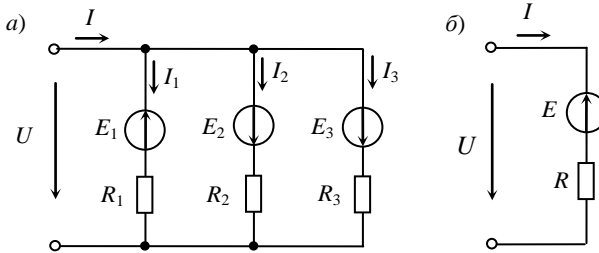


Рисунок 2.22

Найдем входной ток I этой схемы, применив первый закон Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U(G_1 + G_2 + G_3) - (E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3).$$

Входной ток схемы на рисунке 2.22, б выразим по закону Ома:

$$I = \frac{U - E}{R} = UG - EG.$$

Эквивалентность схем a и b на рисунке 2.22 будет соблюдена при выполнении следующих условий:

$$UG = U(G_1 + G_2 + G_3);$$

$$EG = E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3,$$

из которых находим формулы для вычисления параметров элементов G и E эквивалентной ветви на рисунке 2.22, б:

$$G = G_1 + G_2 + G_3;$$

$$E = \frac{E_1G_1 - E_2G_2 - E_3G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

В общем случае при параллельном соединении n активных ветвей параметры R и E эквивалентной ветви определяют по следующим формулам:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k; \quad R = \frac{1}{G}; \quad (2.32)$$

$$E = \frac{\sum_{k=1}^n \pm E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \quad (2.33)$$

В формуле (2.33) со знаком «плюс» записывают ЭДС источников исходной схемы, направление которых совпадает с направлением эквивалентной ЭДС E , и со знаком «минус» – ЭДС противоположного направления.

При замене двух параллельных активных ветвей на рисунке 2.23, а одной эквивалентной (рисунок 2.23, б) параметры эквивалентной ветви находят по следующим формулам:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad (2.34)$$

$$E = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2.35)$$

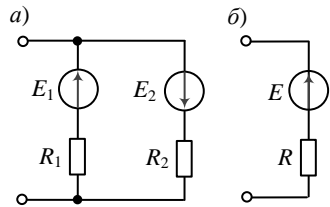


Рисунок 2.23

2.11.4 Соединение сопротивлений треугольником и звездой

В практике анализа электрических цепей встречаются случаи, когда пассивные элементы соединяются *треугольником* (рисунок 2.24, а) и *звездой* (рисунок 2.24, б), и возникает необходимость перехода от одного типа соединения к другому, ему эквивалентному. Запишем без приведения необходимых выкладок формулы эквивалентных преобразований для этих типов соединений элементов.

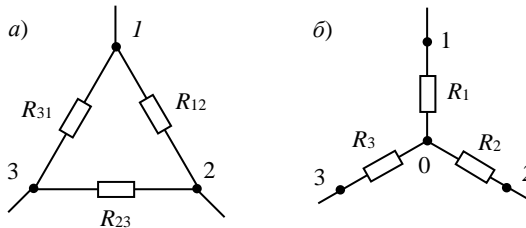


Рисунок 2.24

Формулы преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду имеют следующий вид:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \quad (2.36)$$

Переход от соединения звездой к эквивалентному соединению треугольником осуществляют по формулам:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}. \quad (2.37)$$

Пример 2.3 Определить эквивалентное сопротивление схемы на рисунке 2.25, а. Сопротивления элементов схемы: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 9$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 1,25$ Ом, $R_6 = 15$ Ом.

Решение. В рассматриваемой схеме нет ни последовательного, ни параллельного соединения элементов, но есть два соединения сопротивлений звездой, образованные ветвями $R_2-R_4-R_6$ и $R_3-R_4-R_5$, и четыре соединения треугольником (сопротивления $R_2-R_3-R_4$; $R_1-R_3-R_5$; $R_4-R_5-R_6$ и $R_1-R_2-R_6$).

Заменяем треугольник сопротивлений $R_2-R_3-R_4$ эквивалентной звездой сопротивлений $R_7-R_8-R_9$, значения которых вычислим по формулам (2.36):

$$R_7 = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3+R_4} = \frac{12 \cdot 9}{36} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_8 = \frac{R_3R_4}{R_2+R_3+R_4} = \frac{9 \cdot 15}{36} = 3,75 \text{ Ом};$$

$$R_9 = \frac{R_2R_4}{R_2+R_3+R_4} = \frac{12 \cdot 15}{36} = 5 \text{ Ом}.$$

Преобразованная схема (рисунок 2.25, б) имеет две параллельные ветви, в каждой из которых последовательно соединены по два сопротивления (R_8-R_5 и R_9-R_6 соответственно).

Найдем эквивалентное сопротивление параллельных ветвей

$$R_{10} = \frac{(R_8 + R_5)(R_9 + R_6)}{R_8 + R_5 + R_9 + R_6} = \frac{5 \cdot 20}{25} = 4 \text{ Ом}$$

и перейдем к схеме на рисунке 2.25, в, для которой вычислим входное сопротивление

$$R = \frac{R_1(R_7 + R_{10})}{R_1 + R_7 + R_{10}} = \frac{3 \cdot 7}{10} = 2,1 \text{ Ом.}$$

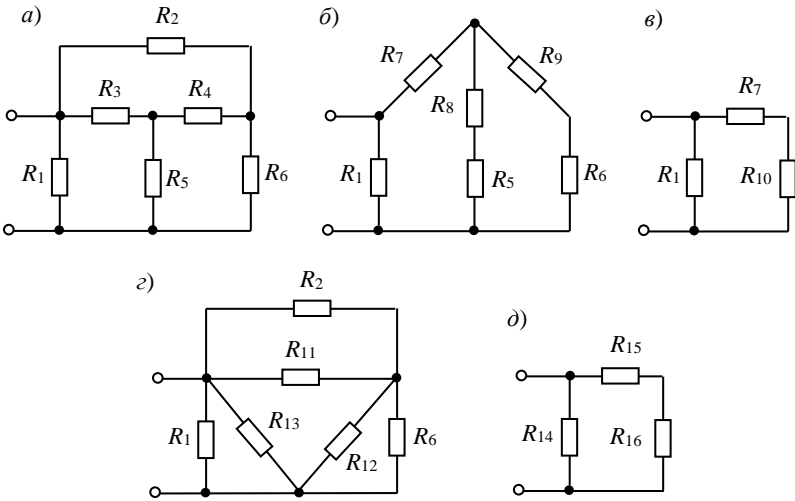


Рисунок 2.25

Задачу можно решить и путем преобразования звезды сопротивлений R_3 – R_4 – R_5 в эквивалентный треугольник сопротивлений R_{11} – R_{12} – R_{13} (см. рисунок 2.25, з), для чего воспользуемся формулами (2.37).

$$R_{11} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_5} = 9 + 15 + \frac{9 \cdot 15}{1,25} = 132 \text{ Ом;}$$

$$R_{12} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_3} = 15 + 1,25 + \frac{15 \cdot 1,25}{9} = 18,333 \text{ Ом;}$$

$$R_{13} = R_5 + R_3 + \frac{R_5 R_3}{R_4} = 1,25 + 9 + \frac{1,25 \cdot 9}{15} = 11 \text{ Ом.}$$

Полученная после преобразования схема имеет три пары параллельно соединенных сопротивлений R_2 – R_{11} ; R_6 – R_{12} и R_1 – R_{13} . Их замена эквивалентными сопротивлениями

$$R_{14} = \frac{R_1 R_{13}}{R_1 + R_{13}} = \frac{3 \cdot 11}{14} = 2,357 \text{ Ом;}$$

$$R_{15} = \frac{R_2 R_{11}}{R_2 + R_{11}} = \frac{12 \cdot 132}{144} = 11 \text{ Ом};$$

$$R_{16} = \frac{R_6 R_{12}}{R_6 + R_{12}} = \frac{15 \cdot 18,333}{33,333} = 8,25 \text{ Ом}$$

приводит к схеме на рисунке 2.25, *д*, для которой вычисляем входное сопротивление

$$R = \frac{R_{14}(R_{15} + R_{16})}{R_{14} + R_{15} + R_{16}} = 2,1 \text{ Ом.}$$

2.11.5 Перенос источников в схеме

Рассмотрим фрагмент электрической схемы (рисунок 2.26, *а*), на которой идеальный источник ЭДС E включен между узлами 1 и 2. Если перенести этот источник через узел 2 и включить его во все ветви, присоединенные к узлу 2 (рисунок 2.26, *б*), то напряжения между узлами 1, 3, 4 и 5 не изменятся.

Следовательно, эти обе схемы можно рассматривать как эквивалентные. При этом напряжение между узлами 1 и 2 становится равным нулю и эти узлы можно объединить. Таким приемом уменьшают число узлов в схеме.

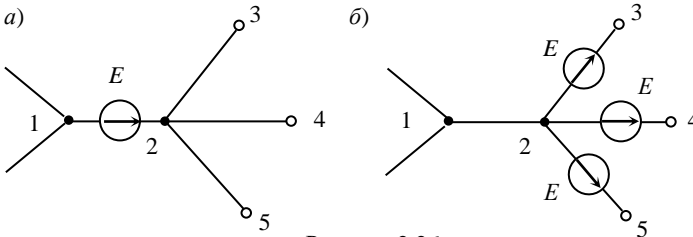


Рисунок 2.26

На рисунке 2.27, *а* изображена часть разветвленной схемы с одним источником тока J , который присоединен к узлам 1 и 4. Режим в этой схеме не изменится, если вместо одного источника присоединить к узлам 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 три источника тока J (рисунок 2.27, *б*). При этом для всех рассматриваемых узлов распределение токов не изменится.

В соответствии с рассмотренными ранее эквивалентными схемами источника энергии (см. рисунок 2.8) перейдем от схемы на рисунке 2.27, *б* к эквивалентной схеме на рисунке 2.27, *в*, где

$$E_1 = R_1 J; \quad E_2 = R_2 J; \quad E_3 = R_3 J.$$

Такой вид эквивалентного преобразования схемы позволяет уменьшить число контуров схемы.

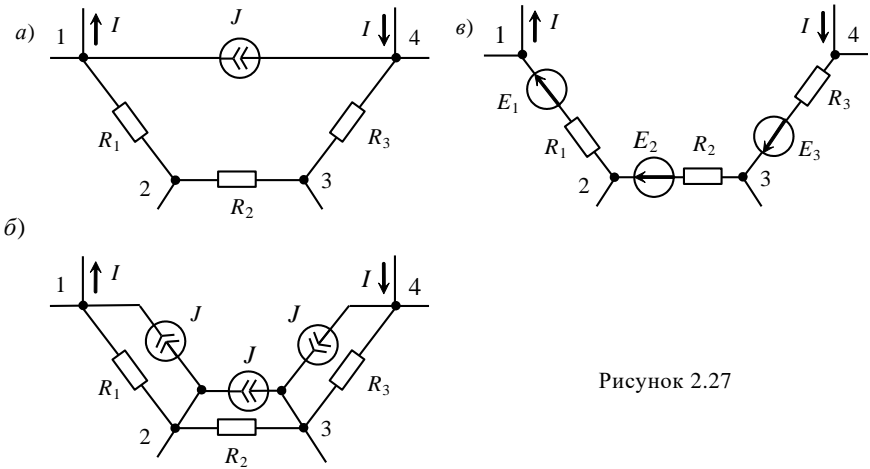


Рисунок 2.27

Рассмотренные выше преобразования схем путем переноса источников можно использовать, например, для замены активного треугольника эквивалентной активной звездой. Последовательность действий для выполнения этой операции можно проследить на рисунке 2.28.

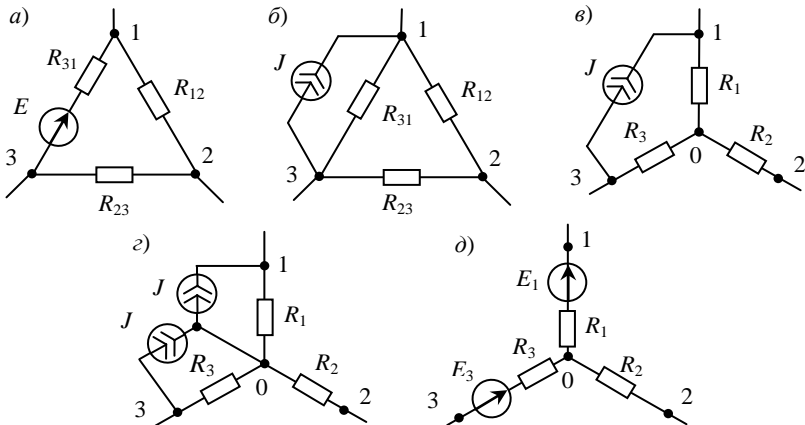


Рисунок 2.28

Параметры элементов схем найдем по формулам (2.7) и (2.36)

$$J = \frac{E}{R_{31}}; \quad E_1 = R_1 J; \quad E_3 = R_3 J;$$

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}.$$

2.12 Метод узловых потенциалов

Этот метод базируется на применении первого закона Кирхгофа для схемы, имеющей p узлов, и закона Ома для пассивных и активных ветвей. Суть метода заключается в том, что расчетным путем определяются потенциалы узлов электрической схемы относительно какого-либо узла, принято в качестве *базисного*, потенциал которого принимают равным нулю. Расчет сводится к решению системы из $t = p - 1$ уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Решив систему уравнений, находят потенциалы узлов, а затем по закону Ома определяют токи ветвей, соединяющих узлы.

Общие принципы составления уравнений данным методом рассмотрим на схеме электрической цепи с заданными параметрами элементов, приведенной на рисунке 2.29. Примем узел, отмеченный цифрой 0, в качестве базисного и будем полагать его потенциал равным нулю. Запишем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 2:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_5 - J_6 &= 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Выразим токи ветвей схемы через потенциалы узлов согласно закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = G_1\varphi_2 - G_1\varphi_1 + E_1G_1;$$

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = G_2\varphi_1 - G_2\varphi_2;$$

$$I_3 = \frac{-\varphi_1 - E_3}{R_3} = G_3\varphi_1 - E_3G_3;$$

$$I_4 = \frac{-\varphi_1 + E_4}{R_4} = -G_4\varphi_1 + E_4G_4;$$

$$I_5 = \frac{-\varphi_2}{R_5} = -G_5\varphi_2$$

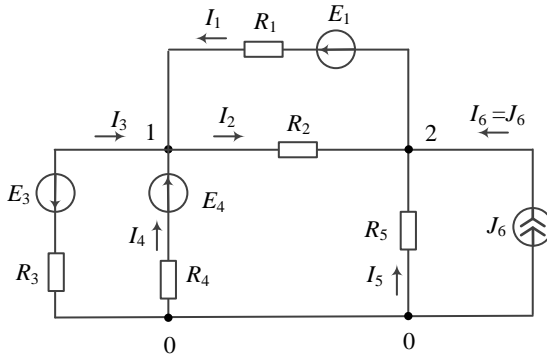


Рисунок 2.29

и подставим их в уравнения (2.38). После подстановки, раскрытия скобок и группировки подобных членов уравнения первого закона принимают вид

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_3 + G_4)\varphi_1 - (G_1 + G_2)\varphi_2 &= E_1G_1 - E_3G_3 + E_4G_4; \\ -(G_1 + G_2)\varphi_1 + (G_1 + G_2 + G_5)\varphi_2 &= -E_1G_1 + J_6 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 &= J_{1y}; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 &= J_{2y}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

где $G_{11} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$; $J_{1y} = E_1G_1 - E_3G_3 + E_4G_4$;

$$G_{22} = G_1 + G_2 + G_5; \quad J_{2y} = -E_1G_1 + J_6.$$

$$G_{12} = G_{21} = G_1 + G_2;$$

Запишем уравнения (2.39) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \end{bmatrix}.$$

В общем случае для цепи с p узлами можно составить систему $m = p - 1$ уравнений с m неизвестными, общая матричная запись которой имеет вид

$$[G^{(y)}][\varphi] = [J^{(y)}], \tag{2.40}$$

где $[G^{(y)}]$ – матрица узловых проводимостей схемы;

$[\varphi]$ – вектор потенциалов узлов;

$[J^{(y)}]$ – вектор узловых токов.

$$[G^{(y)}] = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1k} & \dots & -G_{1m} \\ -G_{21} & G_{22} & \dots & -G_{2k} & \dots & -G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{k1} & -G_{k2} & \dots & G_{kk} & \dots & -G_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{m1} & -G_{m2} & \dots & -G_{mk} & \dots & G_{mm} \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_k \\ \dots \\ \varphi_m \end{bmatrix}; \quad [J^{(y)}] = \begin{bmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \\ \dots \\ J_{ky} \\ \dots \\ J_{my} \end{bmatrix}.$$

Матрица узловых проводимостей $[G^{(y)}]$ является квадратной и симметричной. По диагонали матрицы расположены элементы с одинаковыми индексами G_{kk} . Другие элементы матрицы, расположенные симметрично главной диагонали, обозначаются двумя разными индексами $G_{km} = G_{mk}$.

Величину G_{kk} называют собственной узловой проводимостью узла k , она равна сумме проводимостей ветвей, присоединенных к этому узлу. Величина $G_{km} = G_{mk}$ представляет собой взаимную проводимость между узлами k и m и равна сумме проводимостей ветвей, непосредственно соединяющих эти узлы.

В системе уравнений (2.40) собственные проводимости всегда учитывают с положительным знаком, а взаимные проводимости – всегда с отрицательным знаком.

Вектор $[J^{(y)}]$ является матрицей-столбцом узловых токов, элемент которой

$$J_{ky} = \sum_k \pm EG + \sum_k \pm J,$$

где $\sum_k \pm EG$ – алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей, присоединенных к узлу k , на их проводимости;

$\sum_k \pm J$ – алгебраическая сумма токов источников тока, присоединенных к узлу k .

Со знаком «плюс» берутся ЭДС E и токи источников J , которые действуют в направлении узла k , а со знаком «минус» – противоположного направления.

Решив систему уравнений (2.40) относительно матрицы $[\varphi]$, найдем значения искомых потенциалов узлов схемы:

$$[\varphi] = [G^{(y)}]^{-1} [J^{(y)}]. \quad (2.41)$$

Порядок расчета схемы методом узловых потенциалов:

- 1 Пронумеровать узлы электрической схемы и принять потенциал одного из них (базисного) равным нулю.
- 2 Составить систему уравнений относительно искомых потенциалов узлов в соответствии с формулой (2.40).
- 3 Решая полученную систему уравнений, найти потенциалы узлов.
- 4 Определить токи в ветвях по закону Ома.

Пример 2.4 Найти токи ветвей схемы на рисунке 2.30 методом узловых потенциалов. Параметры элементов схемы: $E_1 = 6 \text{ В}$, $E_4 = 8 \text{ В}$, $E_5 = 12 \text{ В}$, $J_3 = 4 \text{ А}$, $J_6 = 3 \text{ А}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_4 = 3 \text{ Ом}$, $R_5 = 7 \text{ Ом}$. Составить баланс мощностей.

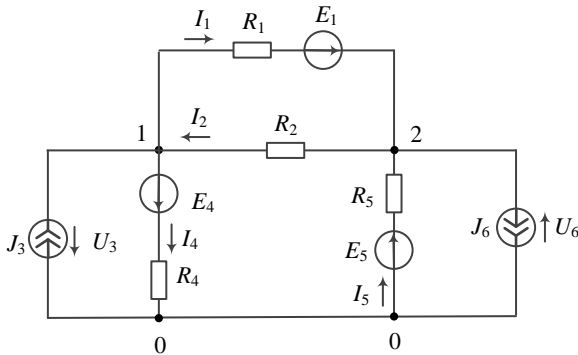


Рисунок 2.30

Решение. Обозначим цифрами узлы схемы и примем потенциал базисного узла 0 равным нулю. Составим систему уравнений относительно неизвестных потенциалов φ_1 и φ_2 узлов 1 и 2:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \end{bmatrix},$$

где $G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = 0,783 \text{ См}$; $J_{1y} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_4}{R_4} + J_3 = 2,383 \text{ А}$;

$$G_{22} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 0,593 \text{ См}; \quad J_{2y} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_5}{R_5} - J_6 = -2,336 \text{ А};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0,45 \text{ См}.$$

Получаем матричную систему уравнений с численными значениями коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} 0,783 & -0,45 \\ -0,45 & 0,593 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,383 \\ -2,336 \end{bmatrix}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем потенциалы узлов:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,783 & -0,45 \\ -0,45 & 0,593 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2,383 \\ -2,336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,382 \\ -2,891 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_1 = 1,382 \text{ В}, \quad \varphi_2 = -2,891 \text{ В}.$$

Значения токов ветвей схемы определяем по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_1}{R_1} = 2,055 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = 1,182 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 + E_4}{R_4} = 3,127 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{-\varphi_2 + E_5}{R_5} = 2,127 \text{ А}.$$

Определим мощность, развиваемую источниками. С этой целью найдем значения напряжений на выводах источников тока:

$$U_3 = \varphi_1 = 1,383 \text{ В}; \quad U_6 = -\varphi_2 = 2,891 \text{ В}.$$

Учтем, что на схеме ЭДС источников напряжения и напряжения на зажимах источников тока направлены согласованно с соответствующими токами

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_4 I_4 + E_5 I_5 + U_3 J_3 + U_6 J_6 = 87,71 \text{ Вт}.$$

Мощность нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 87,711 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей выполняется.

Электрические цепи могут иметь в своем составе вырожденные ветви, т. е. ветви, содержащие только идеальные источники напряжения. Если какая-либо ветвь электрической цепи имеет только идеальный источник напряжения, внутреннее сопротивление которого равно нулю, то напряжение между узлами, к которым присоединена эта ветвь, будет равно ЭДС этого источника. В этом случае целесообразно в качестве базисного узла выбрать один из узлов данной ветви.

Можно также избавиться от этой вырожденной ветви, произведя эквивалентные преобразования схемы путем переноса источника ЭДС через узел.

Пример 2.5 Определить методом узловых потенциалов токи в ветвях электрической цепи на рисунке 2.31, а. Элементы цепи имеют следующие параметры: $E_4 = 12$ В, $E_6 = 8$ В, $J_7 = 4$ А, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, $R_6 = 7$ Ом, $R_8 = 5$ Ом.

Решение. Электрическая схема содержит ветвь с идеальным источником ЭДС E_4 , которая подключена к узлам 3 и 4. Перенесем эту ЭДС через узел 4 и включим в ветви с сопротивлениями R_1 и R_8 источники ЭДС $E_1 = E_4$ и $E_8 = E_4$ соответственно (рисунок 2.31, б). Потенциалы узлов 1, 2, 3 и 0 при этом не изменятся, а потенциал узла 4 станет равен потенциалу узла 3.

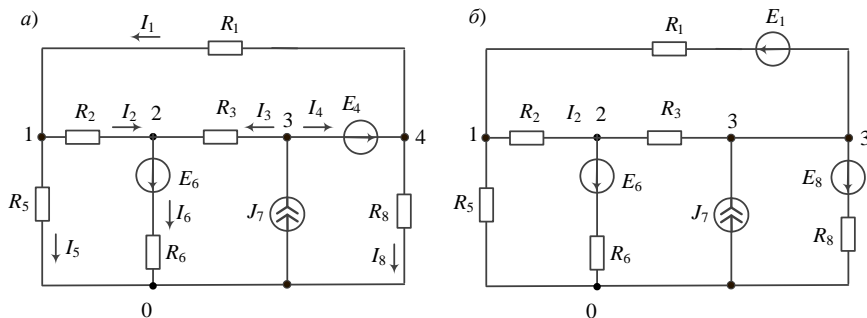


Рисунок 2.31

Примем равным нулю потенциал узла 0 и запишем систему уравнений для расчета потенциалов узлов 1, 2 и 3 схемы 2.31, б в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \\ J_{3y} \end{bmatrix},$$

где $G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 0,475$ См; $G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_2} = 0,125$ См;

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} = 0,435 \text{ См}; \quad G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_1} = 0,1 \text{ См};$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_8} = 0,467 \text{ См}; \quad G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = 0,1167 \text{ См}.$$

$$J_{1y} = \frac{E_1}{R_1} = 1,2 \text{ А}; \quad J_{2y} = -\frac{E_6}{R_6} = -1,143 \text{ А}; \quad J_{3y} = -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_8}{R_8} + J_7 = 0,4 \text{ А}.$$

Решив систему уравнений, найдем искомые потенциалы узлов:

$$\varphi_1 = 2,228 \text{ В}; \quad \varphi_2 = -1,712 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 0,723 \text{ В}.$$

Переходя к исходной схеме на рисунке 2.31, а, находим потенциал узла 4:

$$\varphi_4 = \varphi_3 + E_4 = 12,723 \text{ В}.$$

Далее, применяя закон Ома, находим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_1} = 1,05 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = 0,492 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_3} = 0,406 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1}{R_5} = 0,557 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{\varphi_2 - E_6}{R_6} = 0,898 \text{ А}; \quad I_8 = \frac{\varphi_4}{R_8} = 2,545 \text{ А}.$$

Ток I_4 по закону Ома вычислить нельзя, поэтому его значение найдем по первому закону Кирхгофа для узла 4:

$$I_4 = I_1 + I_8 = 3,595 \text{ А}.$$

2.13 Метод контурных токов

Число независимых уравнений, описывающих процессы в сложной электрической цепи по законам Кирхгофа, можно существенно сократить, воспользовавшись *методом контурных токов*, предложенным английским ученым Д. К. Максвеллом. Суть метода состоит в том, что вместо фактических токов ветвей находят фиктивные *контурные токи*, циркулирующие в независимых контурах. При этом ток в любой ветви равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих по этой ветви.

В основе метода лежит применение второго закона Кирхгофа для независимых контуров анализируемой цепи.

Для получения основных положений этого метода расчета цепи рассмотрим схему на рисунке 2.32, которая имеет 4 узла и 6 ветвей.

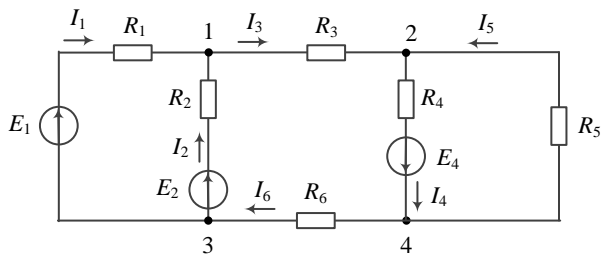


Рисунок 2.32

Выберем произвольно положительные направления токов ветвей и укажем их стрелками. Для выбора независимых контуров схемы начертим направленный граф исследуемой цепи на рисунке 2.33, *a*, обозначим на нем ветви дерева и связи. В результате получаем 3 главных (независимых) контура, по которым циркулируют контурные токи $I_{1к}$, $I_{2к}$ и $I_{3к}$ (рисунок 2.33, *б*).

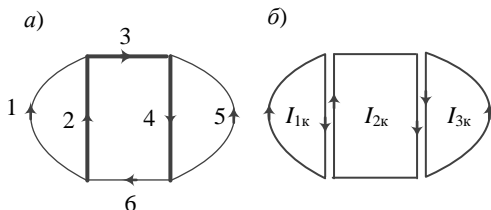


Рисунок 2.33

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для выбранных контуров:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 &= E_1 - E_2; \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_6 I_6 &= E_2 + E_4; \\ R_4 I_4 + R_5 I_5 &= E_4. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Выразим токи ветвей схемы в виде алгебраических сумм контурных токов, проходящих по соответствующим ветвям:

$$I_1 = I_{1к}; \quad I_2 = -I_{1к} + I_{2к}; \quad I_3 = I_{2к}; \quad I_4 = I_{2к} + I_{3к}; \quad I_5 = I_{3к}; \quad I_6 = I_{2к} \quad (2.43)$$

и подставим их в систему уравнений (2.42). После группирования слагаемых с одинаковыми контурными токами получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_{1к} - R_2 I_{2к} &= E_1 - E_2; \\ -R_2 I_{1к} + (R_2 + R_3 + R_4 + R_6) I_{2к} + R_4 I_{3к} &= E_2 + E_4; \\ R_4 I_{2к} + (R_4 + R_5) I_{3к} &= E_4. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Запишем полученную систему уравнений относительно контурных токов в такой форме:

$$\begin{aligned} R_{11} I_{1к} + R_{12} I_{2к} + R_{13} I_{3к} &= E_{1к}; \\ R_{21} I_{1к} + R_{22} I_{2к} + R_{23} I_{3к} &= E_{2к}; \\ R_{31} I_{1к} + R_{32} I_{2к} + R_{33} I_{3к} &= E_{3к}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $R_{11} = R_1 + R_2$; $R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 + R_6$; $R_{33} = R_4 + R_5$;

$$R_{12} = R_{21} = -R_2; \quad R_{13} = R_{31} = 0; \quad R_{23} = R_{32} = R_4;$$

$$E_{1к} = E_1 - E_2; \quad E_{2к} = E_2 + E_4; \quad E_{3к} = E_4.$$

Уравнения (2.45) можно представить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1к} \\ I_{2к} \\ I_{3к} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1к} \\ E_{2к} \\ E_{3к} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Найдем контурные токи, решая систему уравнений методом Крамера:

$$I_{1к} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad I_{2к} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{3к} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{1к} & R_{12} & R_{13} \\ E_{2к} & R_{22} & R_{23} \\ E_{3к} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{1к} & R_{13} \\ R_{21} & E_{2к} & R_{23} \\ R_{31} & E_{3к} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{1к} \\ R_{21} & R_{22} & E_{2к} \\ R_{31} & R_{32} & E_{3к} \end{vmatrix}.$$

Токи ветвей схемы на рисунке 2.32 находим по формулам (2.43) в виде алгебраических сумм контурных токов, протекающих по данным ветвям.

Для расчета схемы с числом узлов p и числом ветвей q методом контурных токов необходимо составить $n = q - (p - 1)$ уравнений для независимых контуров. Матричная форма этой системы уравнений имеет вид:

$$[R]^{(к)} [I]^{(к)} = [E]^{(к)}, \quad (2.47)$$

где $[R]^{(к)}$ – матрица контурных сопротивлений;

$[I^{(k)}]$ – вектор контурных токов;

$[E^{(k)}]$ – вектор контурных ЭДС.

$$[R^{(k)}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & R_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nk} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}; \quad [I^{(k)}] = \begin{bmatrix} I_{1k} \\ I_{2k} \\ \dots \\ I_{kk} \\ \dots \\ I_{nk} \end{bmatrix}; \quad [E^{(k)}] = \begin{bmatrix} E_{1k} \\ E_{2k} \\ \dots \\ E_{kk} \\ \dots \\ E_{nk} \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных сопротивлений $[R^{(k)}]$ является квадратной и симметричной. По диагонали матрицы расположены элементы с двумя одинаковыми индексами типа R_{kk} . Другие элементы матрицы, расположенные симметрично диагонали, обозначаются двумя разными индексами $R_{kn} = R_{nk}$.

Коэффициент R_{kk} называют *собственным сопротивлением* контура k , он равен сумме сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур. *В уравнениях собственные сопротивления всегда берут с положительным знаком.*

Коэффициенты с разными индексами, например, $R_{kn} = R_{nk}$, называются *общими сопротивлениями* контуров k и n . Они равны сумме сопротивлений общих ветвей обоих контуров. Знак общего сопротивления определяется относительным направлением контурных токов в общих ветвях. При протекании двух контурных токов по этим ветвям в одном направлении сопротивление R_{kn} учитывается со знаком «плюс», при противоположном направлении контурных токов – со знаком «минус». Если контуры не имеют общих ветвей, то общее сопротивление принимается равным нулю.

Правые части системы уравнений (2.47) называются *контурными ЭДС*. Каждая контурная ЭДС равна алгебраической сумме ЭДС источников, действующих в данном контуре. С положительным знаком берут ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода контура, а противоположно направленные ЭДС учитывают с отрицательным знаком.

Если в схеме имеются ветви с идеальными источниками тока, то составить уравнения по указанному выше принципу не представляется возможным, так как внутреннее сопротивление таких источников бесконечно велико. В таких случаях целесообразно включать источники тока в отдельные контуры, по каждому из которых протекает лишь один контурный ток, задаваемый током источника тока. *При изображении цепи в виде направленного графа ветви с источниками тока относят к связям.* Для контуров, имеющих в своем составе источники тока, контурные уравнения не составляют, поскольку по ним циркулируют известные токи источников тока. Для

остальных контуров контурные уравнения составляются по обычным правилам.

Можно воспользоваться эквивалентными преобразованиями цепи и избавиться от ветвей с источниками тока путем их переноса. В таком случае схема будет иметь каноническую форму, в составе которой не будет выродивших ветвей.

Порядок расчета цепи методом контурных токов:

1 Произвольно выбрать положительные направления токов в ветвях исходной схемы.

2 Выбрать независимые контуры и указать направление контурных токов, циркулирующих в каждом из них. Если в схеме есть ветви с источниками тока, то сначала выбирают контурные токи таким образом, чтобы каждый из них проходил по ветви с источником тока и совпадал с ним по направлению. Таким образом, эти контурные токи будут заранее известны. Остальные контурные токи выбирают таким образом, чтобы они проходили по ветвям, не содержащим источников тока.

3 Обходя каждый из независимых контуров в выбранном направлении, записать n линейных алгебраических уравнений вида (2.47). Решая систему уравнений, найти контурные токи.

4 Вычислить истинные токи в ветвях в виде алгебраических сумм контурных токов, протекающих по соответствующим ветвям.

Пример 2.6 Рассчитать методом контурных токов токи в цепи, схема которой дана на рисунке 2.34. Дано: $E_1 = 50$ В, $E_4 = 150$ В, $E_5 = 30$ В, $J_6 = 3$ А, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 25$ Ом.

Решение. Выберем положительные направления токов ветвей и укажем их на схеме стрелками. В качестве независимых контуров будем рассматривать элементарные ячейки. В одном из контуров контурный ток выберем равным току источника тока $I_{3к} = J_6$. Два других контурных тока обозначим $I_{1к}$ и $I_{2к}$ соответственно и укажем их направление. Составим систему линейных алгебраических уравнений в соответствии с формулой (2.45):

$$R_{11}I_{1к} + R_{12}I_{2к} + R_{13}I_{3к} = E_{1к};$$

$$R_{21}I_{1к} + R_{22}I_{2к} + R_{23}I_{3к} = E_{2к},$$

где $R_{11} = R_1 + R_2 + R_3 = 30$ Ом; $R_{22} = R_2 + R_4 + R_5 = 45$ Ом;

$$R_{12} = R_{21} = R_2 = 15$$
 Ом; $R_{23} = R_5 = 25$ Ом; $R_{13} = -R_3 = -5$ Ом;

$$E_{1к} = E_1 = 50 \text{ В}; \quad E_{2к} = E_4 - E_5 = 120 \text{ В}.$$

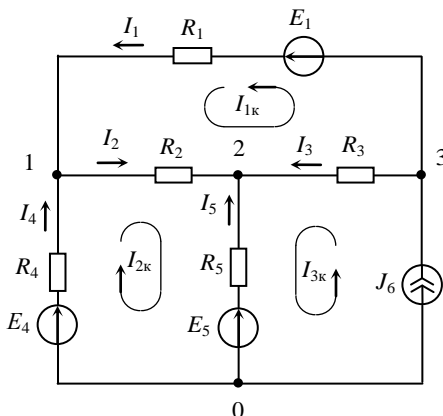


Рисунок 2.34

Подставим числовые значения и получим систему уравнений

$$30I_{1к} + 15I_{2к} = 65;$$

$$15I_{1к} + 45I_{2к} = 45,$$

решив которую, найдем контурные токи $I_{1к} = 2 \text{ А}$ и $I_{2к} = 0,333 \text{ А}$.

Токи в ветвях схемы вычислим в виде алгебраических сумм контурных токов, проходящих по этим ветвям:

$$I_1 = I_{1к} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = I_{1к} + I_{2к} = 2,333 \text{ А};$$

$$I_3 = -I_{1к} + J_6 = 1 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{2к} = 0,333 \text{ А};$$

$$I_5 = -I_{2к} - J_6 = -3,333 \text{ А}.$$

Действительное направление тока I_5 противоположно предварительно выбранному.

Пример 2.7 Для схемы на рисунке 2.35 известны параметры элементов: $E_1 = 12 \text{ В}$, $E_5 = 8 \text{ В}$, $J = 2 \text{ А}$, $r_{01} = 1 \text{ Ом}$, $r_{05} = 1,2 \text{ Ом}$, $R_1 = 11 \text{ Ом}$, $R_2 = 8 \text{ Ом}$, $R_3 = 14 \text{ Ом}$, $R_4 = 5 \text{ Ом}$, $R_5 = 6,8 \text{ Ом}$, $R_6 = 6 \text{ Ом}$. Требуется:

- 1) рассчитать токи ветвей методом контурных токов;
- 2) проверить результаты расчета токов по балансу мощностей;

3) построить потенциальную диаграмму для контура $a-b-m-c-d-n-a$.

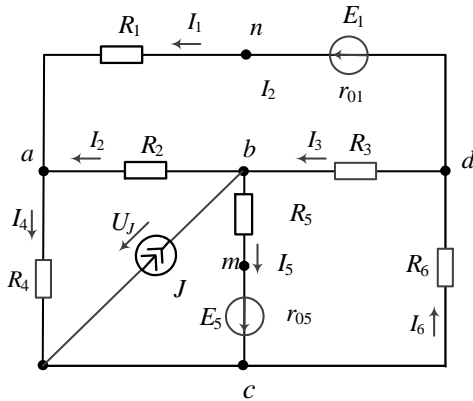


Рисунок 2.35

Решение. Обозначим узлы схемы буквами a, b, c и d . Произвольно выберем положительные направления токов ветвей и укажем их стрелками.

В схеме имеется ветвь с источником тока. Приведем схему к каноническому виду, с этой целью проведем в исходной схеме эквивалентные преобразования, устранив из нее ветвь с источником тока J . Заменяем источник тока J исходной схемы двумя источниками с токами, равными J , и подключим их параллельно сопротивлениям R_2 и R_4 (рисунок 2.36, a). Распределение токов в узлах a, b и c схемы при этом останется прежним. В результате получаем два источника энергии с параллельными схемами замещения, в которых сопротивления R_2 и R_4 можно рассматривать в качестве внутренних сопротивлений источников. Применив формулы (2.7), перейдем к последовательным схемам этих источников на рисунке 2.36, b , ЭДС которых получают значения $E_2 = R_2 J = 16$ В и $E_4 = R_4 J = 10$ В соответственно. В результате эквивалентных преобразований получим схему на рисунке 2.37. Токи в ветвях с сопротивлениями R_2 и R_4 этой схемы будут отличаться от токов в исходной схеме, поэтому обозначим их I_2' и I_4' .

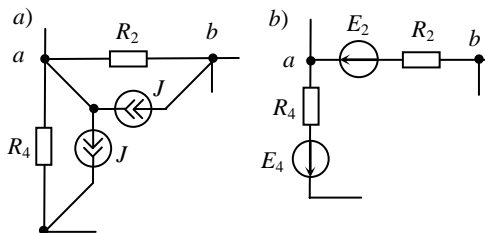


Рисунок 2.36

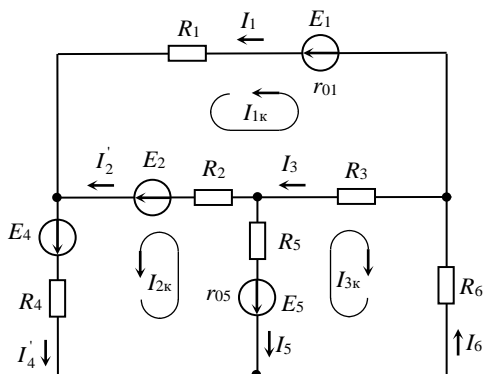


Рисунок 2.37

Выберем 3 независимых контура, по которым циркулируют контурные токи $I_{1к}$, $I_{2к}$ и $I_{3к}$. Запишем систему уравнений относительно неизвестных контурных токов в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{1к} \\ I_{2к} \\ I_{3к} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1к} \\ E_{2к} \\ E_{3к} \end{bmatrix},$$

где $R_{11} = R_1 + r_{01} + R_2 + R_3 = 34 \text{ Ом}$; $R_{12} = R_{21} = -R_2 = -8 \text{ Ом}$;

$R_{22} = R_2 + R_4 + r_{05} + R_5 = 21 \text{ Ом}$; $R_{13} = R_{31} = R_3 = 14 \text{ Ом}$;

$R_{33} = R_3 + R_6 + r_{05} + R_5 = 28 \text{ Ом}$; $R_{23} = R_{32} = r_{05} + R_5 = 8 \text{ Ом}$;

$E_{1к} = E_1 - E_2 = -4 \text{ В}$; $E_{2к} = E_2 + E_4 - E_5 = 18 \text{ В}$; $E_{3к} = -E_5 = -8 \text{ В}$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений выполним методом Крамера. Найдем определитель матрицы контурных сопротивлений

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -8 & 14 \\ -8 & 21 & 8 \\ 14 & 8 & 28 \end{vmatrix} = 1,012 \cdot 10^4 \text{ Ом}^3,$$

а также следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{1к} & R_{12} & R_{13} \\ E_{2к} & R_{22} & R_{23} \\ E_{3к} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & 14 \\ 18 & 21 & 8 \\ -8 & 8 & 28 \end{vmatrix} = 6,816 \cdot 10^3 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -4 & 14 \\ -8 & 18 & 8 \\ 14 & -8 & 28 \end{vmatrix} = 1,534 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & -8 & -4 \\ -8 & 21 & 18 \\ 14 & 8 & -8 \end{vmatrix} = -1,068 \cdot 10^4 \text{ В} \cdot \text{Ом}^2.$$

Вычисляем контурные токи:

$$I_{1к} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,674 \text{ А}; \quad I_{2к} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1,516 \text{ А}; \quad I_{3к} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1,056 \text{ А}.$$

Ток каждой ветви схемы на рисунке 2.37 находим путем алгебраического суммирования контурных токов, проходящих по этой ветви:

$$I_1 = I_{1к} = 0,674 \text{ А}; \quad I_2' = -I_{1к} + I_{2к} = 0,842 \text{ А}; \quad I_3 = -I_{1к} - I_{3к} = 0,382 \text{ А};$$

$$I_4' = I_{2к} = 1,516 \text{ А}; \quad I_5 = -I_{2к} - I_{3к} = -0,46 \text{ А}; \quad I_6 = -I_{3к} = 1,056 \text{ А}.$$

Вернемся к исходной схеме на рисунке 2.35 и определим токи во второй и четвертой ветвях по первому закону Кирхгофа:

$$I_2 = I_3 - I_5 - J = -1,158 \text{ А}; \quad I_4 = I_1 + I_2 = -0,484 \text{ А}.$$

Истинные направления токов I_2 и I_4 противоположны выбранным.

Проверим правильность результатов расчета по балансу электрических мощностей. Найдем напряжение U_J на зажимах источника тока:

$$U_J = -R_2 I_2 - R_4 I_4 = 11,684 \text{ В}.$$

Из проведенных расчетов следует, что источник ЭДС E_1 и источник тока J функционируют в режиме генерирования энергии, в то время как источник ЭДС E_5 ее потребляет.

Мощность источников

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 - E_5 I_5 + U_J J = 27,776 \text{ Вт}.$$

Мощность нагрузки

$$P_{\text{нагр}} = I_1^2 (R_1 + r_{01}) + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 (R_5 + r_{05}) + I_6^2 R_6 = 27,777 \text{ Вт}.$$

Построим потенциальную диаграмму, т. е. распределение потенциалов узлов, в том числе и устранимых m и n , вдоль контура $a-b-m-c-d-n-a$ в зависимости от сопротивлений участков, входящих в контур. Выделенный из исходной схемы на рисунке 2.35 указанный контур представлен на рисунке 2.38. В ветвях рассматриваемого контура указаны действительные направления токов, полученные в результате расчета. Примем потенциал узла a равным нулю ($\varphi_a = 0$) и найдем потенциалы остальных точек контура:

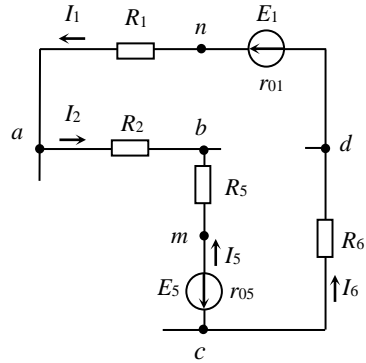


Рисунок 2.38

$$\begin{aligned} \varphi_b &= -R_2 I_2 = -9,264 \text{ В}; & \varphi_m &= \varphi_b + R_5 I_5 = -6,136 \text{ В}; \\ \varphi_c &= \varphi_m + E_5 + r_{05} I_5 = 2,416 \text{ В}; & \varphi_d &= \varphi_c - R_6 I_6 = -3,92 \text{ В}; \\ \varphi_n &= \varphi_d + E_1 - r_{01} I_1 = 7,406 \text{ В}; & \varphi_a &= \varphi_n - R_1 I_1 = -0,008 \text{ В}. \end{aligned}$$

Потенциальная диаграмма представлена на рисунке 2.39.

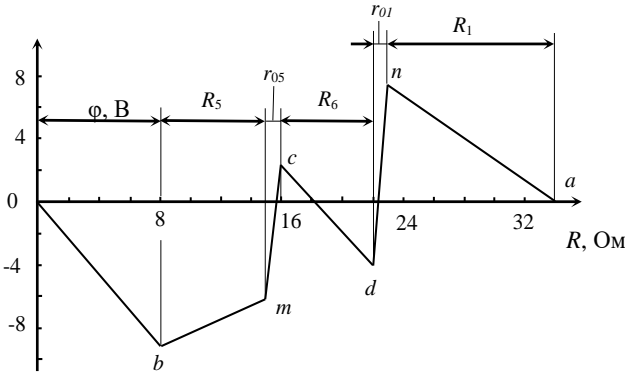


Рисунок 2.39

2.14 Принцип наложения

Рассмотрим приведенный в предыдущем параграфе анализ цепи методом контурных токов на примере схемы 2.32. Для определения контурных токов решение системы уравнений производили по правилу Крамера. В соответствии с этим правилом контурный ток $I_{1к}$, который в свою очередь равен току I_1 ветви, находят в виде отношения определителей

$$I_1 = I_{1к} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{1к} & R_{12} & R_{13} \\ E_{2к} & R_{22} & R_{23} \\ E_{3к} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель Δ_1 по элементам первого столбца:

$$\Delta_1 = E_{1к}\Delta_{11}(-1)^2 + E_{2к}\Delta_{12}(-1)^3 + E_{3к}\Delta_{13}(-1)^4,$$

где Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{13} – миноры, получающиеся вычеркиванием из определителя Δ сопровитлений первого столбца и соответственно первой, второй и третьей строки:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{22} & R_{23} \end{vmatrix}.$$

Заменим в выражении для определителя Δ_1 контурные ЭДС алгебраическими суммами ЭДС действующих в цепи источников:

$$E_{1к} = E_1 - E_2; \quad E_{2к} = E_2 + E_4; \quad E_{3к} = E_4.$$

После несложных преобразований получим выражение для тока I_1 :

$$I_1 = E_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} - E_2 \frac{\Delta_{11} + \Delta_{12}}{\Delta} - E_4 \frac{\Delta_{12} - \Delta_{13}}{\Delta} = I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

Из полученной формулы следует, что ток I_1 в ветви исследуемой схемы, в которой действуют несколько источников, равен алгебраической сумме частичных токов, вызываемых каждым источником в отдельности.

Это формулировка принципа наложения, который базируется на линейности электрической цепи и позволяет свести задачу анализа цепи к рассмотрению частных режимов, в каждом из которых учитывается один независимый источник.

В общем случае принцип наложения применим для любой линейной цепи, в которой действуют как источники ЭДС, так и источники тока. Этот принцип является основой метода анализа, который называется *методом наложения*.

Следует иметь в виду, что принцип наложения не применим для квадратичных форм, поэтому им нельзя пользоваться при расчете электрической мощности.

2.15 Метод наложения

При использовании этого метода для расчета тока в какой-либо ветви исходной электрической схемы поочередно рассматривают *частичные* схемы, в каждой из которых действует только один источник. Остальные источники учитываются своими внутренними сопротивлениями. При этом идеальные источники ЭДС заменяют короткозамкнутыми участками, а ветви с источниками токов разрываются. Искомый ток в ветви определяют алгебраическим суммированием найденных значений частичных токов.

Метод наложения целесообразно применять только при расчете относительно простых линейных электрических цепей с небольшим количеством источников энергии.

Пример 2.8 Найти методом наложения токи в ветвях цепи, схема которой приведена на рисунке 2.40, *а*. Параметры элементов цепи: $E = 6$ В, $J = 4$ А, $R_1 = 9$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 13$ Ом.

Решение. Произвольно выберем направления токов в ветвях исходной схемы и обозначим их. Рассмотрим две частичные схемы, в одной из которых действует источник ЭДС E (рисунок 2.40, *б*), а в другой – источник тока J (рисунок 2.40, *в*).

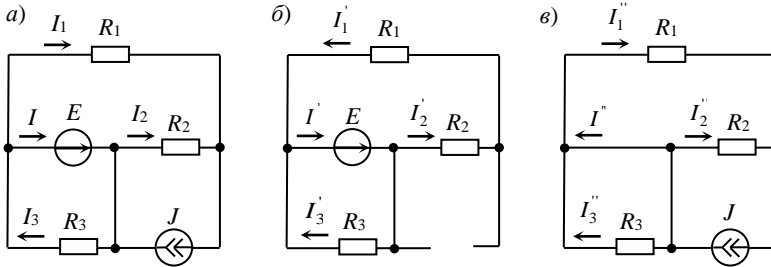


Рисунок 2.40

Найдем частичные токи в ветвях каждой схемы:

$$I'_1 = I'_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ А}; \quad I'_3 = \frac{E}{R_3} = 1,5 \text{ А}; \quad I' = I'_2 + I'_3 = 2,0 \text{ А};$$

$$I'' = I''_1 = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,0 \text{ А}; \quad I''_2 = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А}; \quad I''_3 = 0.$$

Вычислим токи в ветвях исходной схемы в виде алгебраических сумм соответствующих частичных токов:

$$I = I' - I'' = 1 \text{ A}; I_1 = -I_1' + I_1'' = 0,5 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 3,5 \text{ A}; I_3 = I_3' + I_3'' = 1,5 \text{ A}.$$

2.16 Принцип взаимности

Линейные пассивные цепи обладают важным свойством, которое известно как *свойство или принцип взаимности*. Оно было установлено Гельмгольцем и гласит: *если некоторая ЭДС E , находящаяся в некотором контуре электрической цепи, вызывает ток I в другом контуре данной цепи, то та же ЭДС E , будучи перенесенной во второй контур, вызовет в первом контуре такой же ток I .*

Рассмотрим сложную электрическую цепь, в которой действует только один источник с ЭДС E . Выделим в этой цепи две ветви, а остальную часть цепи заменим пассивным четырехполюсником. Первая ветвь с сопротивлением R_1 присоединена к зажимам a и b четырехполюсника и в нее включен источник ЭДС E . Вторая пассивная ветвь с сопротивлением R_2 присоединена к зажимам c и d (рисунок 2.41, *a*).

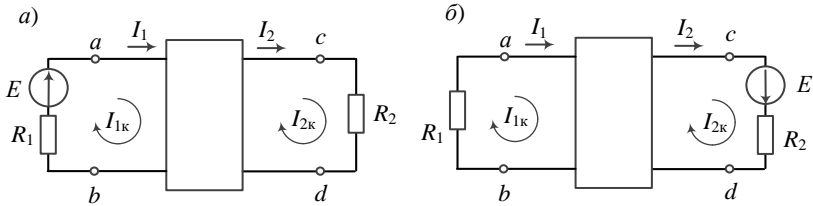


Рисунок 2.41

Для анализа цепи воспользуемся методом контурных токов, выбрав контуры таким образом, чтобы первая ветвь входила в первый контур, а вторая ветвь – во второй контур. При этом токи ветвей будут равны соответствующим контурным токам, т. е. $I_1 = I_{1к}; I_2 = I_{2к}$.

Ток во втором контуре

$$I_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} R_{11} & E & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & 0 & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & 0 & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & 0 & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} = E(-1)^3 \begin{vmatrix} R_{21} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}.$$

Перенесем ЭДС E из первой ветви во вторую (см. рисунок 2.41, б) и найдем ток I_1 в первой ветви

$$I_1 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ E & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ 0 & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} = E(-1)^3 \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix}.$$

Примем во внимание, что общие сопротивления контуров, отличающиеся одно от другого только порядком индексов, равны между собой: $R_{kn} = R_{nk}$. В таком случае равны определители Δ_{12} и Δ_{21} , а следовательно, равны и токи I_1 и I_2 , откуда следует доказательство принципа взаимности.

2.17 Теорема об активном двухполюснике и применение ее к расчету цепей

Существует два варианта теоремы об активном двухполюснике: вариант с источником напряжения и вариант с источником тока. В первом случае теорема носит название *теоремы Тевенина – Гельмгольца* и формулируется следующим образом: *ток в любой ветви ab линейной электрической цепи не изменится, если остальную часть цепи заменить эквивалентным источником напряжения (генератором напряжения), ЭДС E_T которого равна напряжению U_x на зажимах разомкнутой ветви ab , а внутреннее сопротивление источника r_T равно входному сопротивлению R_{ab} пассивной цепи относительно зажимов a и b при разомкнутой ветви ab .*

Рассмотрим на рисунке 2.42 разветвленную электрическую цепь, из которой выделим ветвь с сопротивлением R и присоединим ее к зажимам a и b . Остальную часть цепи представим в виде активного двухполюсника, присоединенного к тем же зажимам a и b . Если разомкнуть эту ветвь, то между точками разрыва появится

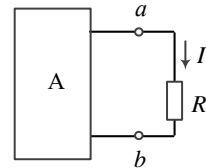


Рисунок 2.42

напряжение U_x при нулевом токе ветви (рисунок 2.43, а). При включении между точками разрыва источника с ЭДС $E = U_x$ (рисунок 2.43, б) ток в ветви ab не изменится.

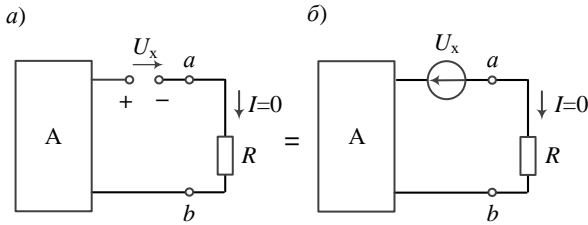


Рисунок 2.43

На рисунке 2.44, а приведена схема, на которой в ветвь ab включены две равные по значению и противоположно направленные ЭДС $E = U_x$, их наличие не приводит к изменению тока I . Применим к данной схеме принцип наложения и выразим ток этой ветви. Составим две схемы с частными режимами: в первой из них действуют источники активного двухполюсника и одна ЭДС U_x (рисунок 2.44, б); во второй действует только один источник с ЭДС U_x , а активный двухполюсник заменен на пассивный с входным сопротивлением R_{ab} (рисунок 2.44, в).

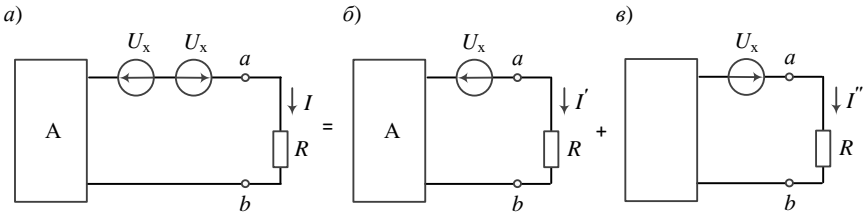


Рисунок 2.44

Ток в ветви ab на основании принципа наложения равен сумме частных токов:

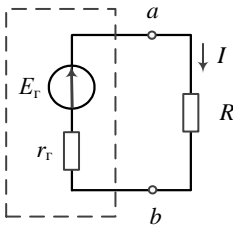


Рисунок 2.45

$$I = I' + I''$$

Первый частичный ток I' в соответствии с рисунком 2.43, б равен нулю, следовательно,

$$I = I'' = \frac{U_x}{R_{ab} + R}$$

Учитывая, что $U_x = E_r$, а $R_{ab} = r_r$, получаем

$$I = \frac{E_{\Gamma}}{r_{\Gamma} + R}. \quad (2.48)$$

Формуле (2.48) соответствует схема на рисунке 2.45, на которой нагрузка с сопротивлением R присоединена к активному двухполюснику, или эквивалентному генератору напряжения (выделен пунктиром).

Второй вариант теоремы об активном двухполюснике, *теоремы Нортона*, формулируется так: *ток в ветви ab линейной электрической цепи не изменится, если остальную часть цепи заменить эквивалентным источником тока (генератором тока) с током J_{Γ} , равным току, протекающему по короткозамкнутому участку ab , и внутренней проводимостью g_{Γ} , равной входной проводимости G_{ab} пассивной цепи относительно зажимов a и b при отключенной ветви ab .*

Если источник напряжения на рисунке 2.45 преобразовать в источник тока, то схема получится такой, как на рисунке 2.46. На схеме пунктиром выделен эквивалентный генератор тока с параметрами

$$J_{\Gamma} = \frac{E_{\Gamma}}{r_{\Gamma}}; \quad g_{\Gamma} = \frac{1}{r_{\Gamma}}.$$

Ток I в ветви ab для находят по формуле

$$I = J_{\Gamma} \frac{r_{\Gamma}}{R + r_{\Gamma}}. \quad (2.49)$$

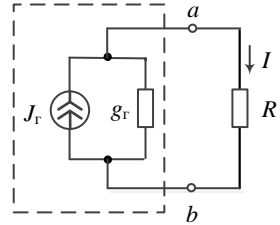


Рисунок 2.46

Теорема об активном двухполюснике применяется в расчетах электрических цепей в случаях, если необходимо в сложной электрической схеме с произвольным числом источников найти ток в какой-либо одной ветви. С помощью этой теоремы исходная схема сводится к схеме с одним источником, т. е. к одной из схем эквивалентного генератора: генератора напряжения (см. рисунок 2.45) или генератора тока (см. рисунок 2.46).

При расчете электрических цепей методом эквивалентного генератора напряжения (ЭГН) операции выполняют в следующем порядке:

1 Произвести разрыв схемы электрической цепи в точках присоединения сопротивления, ток через которое требуется определить.

2 Рассчитать напряжение U_x между точками разрыва (напряжение холостого хода), которое будет равно ЭДС E_{Γ} эквивалентного генератора. Расчет схемы в режиме холостого хода для определения U_x можно выполнить любым способом.

3 Определить внутреннее сопротивление r_{Γ} эквивалентного генератора, которое равно входному сопротивлению пассивной цепи относительно точек разрыва a и b в исходной схеме при условии, что источники ЭДС заменены своими внутренними сопротивлениями, а источники тока – разрывами цепи.

4 Найти искомый ток по формуле (2.48).

При использовании метода эквивалентного генератора тока (ЭГТ) необходимо выполнить следующие действия:

1 Заменить короткозамкнутым участком сопротивление, через которое протекает искомый ток.

2 Определить ток короткого замыкания I_k на этом участке, который будет равен току J_{Γ} эквивалентного генератора тока.

3 Рассчитать внутреннее сопротивление r_{Γ} эквивалентного генератора, которое находят точно так же, как в рассмотренном выше методе ЭГН.

4 Найти искомый ток по формуле (2.49).

Пример 2.9 Методом эквивалентного генератора определить ток I_6 схемы электрической цепи на рисунке 2.47, a .

Дано: $E_1 = 15$ В, $E_4 = 20$ В, $E_6 = 18$ В, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 16$ Ом, $R_3 = 13$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 18$ Ом, $R_6 = 24$ Ом.

Решение. Воспользуемся методом эквивалентного генератора напряжения. Обозначим направление искомого тока I_6 на исходной схеме. Отключим сопротивление R_6 от схемы и определим напряжение U_X между точками a и b . С этой целью рассчитаем полученную схему (рисунок 2.47, b) методом узловых потенциалов. Схема имеет два узла, потенциал одного из которых, например, узла 2, примем равным нулю ($\varphi_2 = 0$).

Составим уравнение для определения потенциала φ_1 узла 1:

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5} \right) \varphi_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} + \frac{E_4}{R_4 + R_5}.$$

Решая уравнение, найдем потенциал $\varphi_1 = 9,082$ В, а затем токи I'_3 и I'_5 по закону Ома:

$$I'_3 = \frac{-\varphi_1 + E_1}{R_1 + R_3} = 0,237 \text{ А}; \quad I'_5 = \frac{-\varphi_1 + E_4}{R_4 + R_5} = 0,331 \text{ А}.$$

Обойдя контур $a-b-1-3-a$ по второму закону Кирхгофа, найдем напряжение U_x на зажимах ab :

$$U_x = E_6 + R_5 I_5' - R_3 I_3' = 20,878 \text{ В.}$$

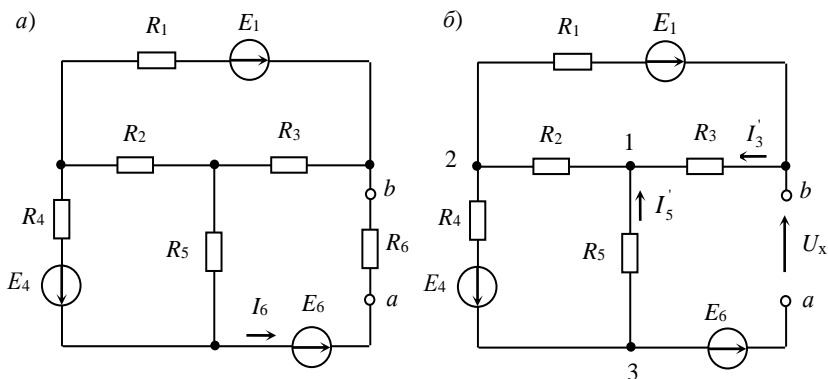


Рисунок 2.47

Найденное значение U_x равно ЭДС эквивалентного генератора: $E_T = U_x$.

Для определения второго параметра эквивалентного генератора (внутреннего сопротивления r_T) вычислим входное сопротивление схемы на рисунке 2.48, a относительно точек a и b . Источники ЭДС при этом из схемы удаляются и заменяются короткозамкнутыми участками (рисунок 2.47, a).

Заменим треугольник сопротивлений R_1, R_2, R_3 эквивалентной звездой (рисунок 2.48, b) с сопротивлениями

$$R_7 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 4,683 \text{ Ом;}$$

$$R_8 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 5,073 \text{ Ом;}$$

$$R_9 = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 3,805 \text{ Ом.}$$

Входное сопротивление схемы

$$R_{ab} = \frac{(R_7 + R_4)(R_8 + R_5)}{R_7 + R_4 + R_8 + R_5} + R_9 = 14,427 \text{ Ом}$$

равно внутреннему сопротивлению r_{Γ} эквивалентного генератора: $r_{\Gamma} = R_{ab}$.

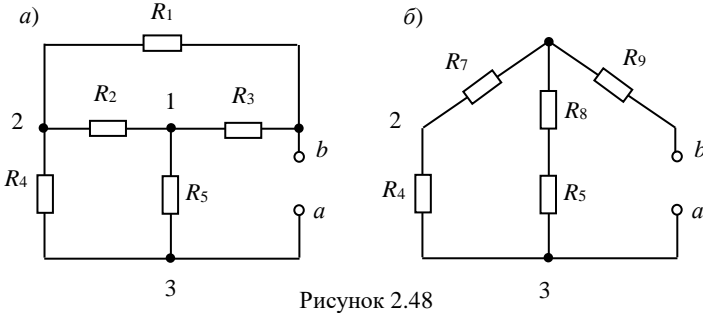


Рисунок 2.48

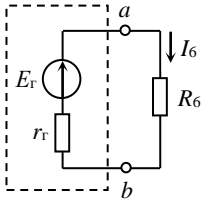


Рисунок 2.49

Таким образом, вычислив параметры эквивалентного генератора напряжения (выделен пунктиром на рисунке 2.49), найдем значение искомого тока по формуле обобщенного закона Ома:

$$I_6 = \frac{E_{\Gamma}}{r_{\Gamma} + R_6} = 0,543 \text{ А.}$$

2.18 Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному

Проведем в цепи на рисунке 2.50 исследование передачи энергии от активного двухполюсника с постоянными параметрами E_{Γ} и r_{Γ} к пассивному двухполюснику (нагрузке), имеющему сопротивление $R_{\text{н}}$. Значение сопротивления нагрузки может изменяться от $R_{\text{н}} = 0$ в режиме короткого замыкания до $R_{\text{н}} = \infty$ в режиме холостого хода. Установим соотношение между значениями r_{Γ} и $R_{\text{н}}$, при котором пассивному двухполюснику передается максимальная мощность $P_{\text{макс}}$.

Мощность пассивного двухполюсника, т. е. нагрузки, $P_{\text{н}}$ определяется выражением

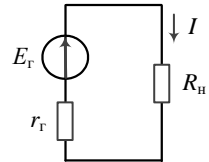


Рисунок 2.50

$$P_{\text{н}} = I^2 R_{\text{н}} = \frac{E_{\Gamma}^2 R_{\text{н}}}{(r_{\Gamma} + R_{\text{н}})^2}. \quad (2.50)$$

Мощность источника напряжения при этом

$$P_{\Gamma} = E_{\Gamma} I = \frac{E_{\Gamma}^2}{r_{\Gamma} + R_{\text{н}}}. \quad (2.51)$$

В режимах короткого замыкания и холостого хода мощность, развиваемая на нагрузке, равна нулю. Следовательно, для определения сопротивления нагрузки, при котором эта мощность будет максимальной, найдем производную от P_n по I из уравнения (2.50) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dP_n}{dR_n} = \frac{E_r^2}{(r_r + R_n)^4} [(r_r + R_n)^2 - 2R_n(r_r + R_n)] = 0,$$

откуда получаем искомое соотношение

$$R_n = r_r. \quad (2.52)$$

Максимальное значение мощности при выполнении условия (2.52)

$$P_{\text{макс}} = \frac{E_r^2}{4r_r}.$$

Отношение мощности P_n пассивного двухполюсника к мощности P_r источника называется коэффициентом полезного действия (КПД) активного двухполюсника:

$$\eta = \frac{P_n}{P_r} = \frac{E_r^2 R_n}{(r_r + R_n)^2} \cdot \frac{r_r + R_n}{E_r^2} = \frac{R_n}{r_r + R_n}. \quad (2.53)$$

Из соотношения (2.53) следует, что при максимальной мощности, получаемой нагрузкой от источника, КПД равен 0,5. Более высокие значения КПД могут быть при $R_n > r_r$.

3 ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Переменным током называют ток, изменяющийся во времени. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени, называются *периодическими*. На практике широкое применение находит периодический ток, являющийся синусоидальной функцией времени и называемый *гармоническим* или *синусоидальным* током. Подавляющая часть электрической энергии в мире производится, передается и потребляется в виде синусоидальных токов.

Цепи с синусоидальными источниками ЭДС $e(t)$ и токами $j(t)$ кроме резисторов содержат катушки индуктивности и конденсаторы. При этом анализ цепей синусоидального тока, как и цепей постоянного тока, базируется на законах Кирхгофа и компонентных уравнениях. С учетом соотношений (1.9) и (1.10) эти уравнения являются не алгебраическими, а дифференциальными. Однако анализ синусоидальных режимов, как будет продемон-

стрировано далее, можно проводить на более простой математической основе без составления и интегрирования дифференциальных уравнений, используя представление гармонических колебаний в комплексной форме.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется по формуле

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.1)$$

где I_m – амплитуда тока;

$\omega t + \psi_i$ – фазовый угол (фаза);

ψ_i – начальная фаза;

ω – угловая частота, равная скорости изменения фазы тока.

Аналогичный вид имеют выражения для других синусоидальных величин: напряжения u , ЭДС e и тока источника j

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u); \quad e = E_m \sin(\omega t + \psi_e); \quad j = J_m \sin(\omega t + \psi_j).$$

Периодом T синусоидального тока называют наименьший промежуток времени, через который мгновенные значения тока повторяются. Величина, обратная периоду, называется *частотой* периодического тока

$$f = \frac{1}{T}. \quad (3.2)$$

Если T измеряется в секундах, то частота измеряется в *герцах* (Гц). Связь между ω и f определяется выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (3.3)$$

В линейной цепи, находящейся под действием синусоидальных источников с неизменными амплитудами и одной частоты f , токи и напряжения на всех участках будут иметь синусоидальную форму с той же частотой f . В соответствии с законом Ома (1.7) ток и напряжение резистивного элемента имеют один и тот же характер изменения во времени, т. е. синусоидальны. Напряжение на индуктивном элементе при протекании по нему синусоидального тока изменяется по синусоидальному закону, так как при дифференцировании синусоидальные функции сохраняют свою форму. Аналогичным образом связаны между собой ток и напряжение на емкостном элементе. Сумма нескольких токов или напряжений, изменяющихся по синусоидальному закону с одной и той же частотой, представляется синусоидой той же частоты.

Таким образом, анализ синусоидального режима в электрической цепи будет заключаться в определении амплитуд и начальных фаз токов и напряжений на отдельных участках цепи.

Основой анализа цепей с гармоническими источниками, как и цепей постоянного тока, являются законы Кирхгофа.

В соответствии с первым законом *алгебраическая сумма мгновенных токов в узле электрической цепи равна нулю*, т. е.

$$\sum \pm i_k = 0. \quad (3.4)$$

Второй закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма мгновенных напряжений на элементах контура равна алгебраической сумме мгновенных ЭДС источников, действующих в этом контуре*:

$$\sum \pm u_k = \sum \pm e_k. \quad (3.5)$$

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их начальных фаз называют *сдвигом фаз*. Разность фаз напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и тока $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ на участке цепи будем обозначать буквой φ :

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

При $\varphi = 0$ говорят, что напряжение и ток совпадают по фазе.

Если $\varphi > 0$, то это значит, что напряжение u опережает по фазе ток i на угол φ , а ток отстает по фазе от напряжения.

При $\varphi < 0$ ток i опережает по фазе напряжение u на угол φ .

Если $\varphi = \pm \pi$, то говорят, что напряжение u и ток i находятся в противофазе, а при $\varphi = \pm \pi/2$ они находятся в квадратуре.

3.1 Действующее значение синусоидального тока

Переменный ток характеризуется *действующим* значением, которое численно равно такому значению I постоянного тока, который в одном и том же сопротивлении r за время одного периода T произведет тот же самый тепловой эффект, что и периодический ток:

$$I^2 r T = \int_0^T i^2 r dt. \quad (3.6)$$

Сократив левую и правую части соотношения (3.6) на r , получим

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (3.7)$$

Действующее значение периодического переменного тока (действующий ток) равно его среднеквадратичному значению за период.

Установим соотношение между действующим током I и амплитудой I_m синусоидального тока:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi_i) dt =$$

$$= \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt = \frac{I_m^2}{2}.$$

Следовательно, действующий ток находим по формуле

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

Аналогичные соотношения справедливы для синусоидальных напряжения и ЭДС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

В дальнейшем при анализе цепей синусоидального тока будем чаще оперировать действующими значениями величин, а не амплитудами.

3.2 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами

Анализ цепей с синусоидальными источниками значительно упрощается, если синусоидальные величины (токи, напряжения, ЭДС и т. д.) изображать вращающимися векторами или комплексными числами. Пусть ток i

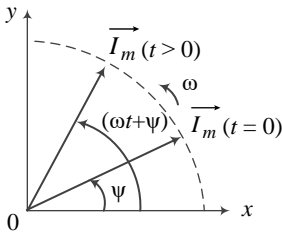


Рисунок 3.1

изменяется по закону $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. Выберем на рисунке 3.1 прямоугольную систему координат x, y и проведем из начала координат под углом ψ относительно оси абсцисс x вектор \vec{I}_m , длина которого в выбранном масштабе равна амплитуде тока I_m . Положительные углы откладываются в направлении против движения часовой стрелки.

Проекция вектора \vec{I}_m на ось ординат при его исходном положении $i(0) = I_m \sin \psi$ соответствует мгновенному значению тока при $t = 0$. Если вектор вращать в положительном направлении с постоянной угловой частотой ω , то для произвольного момента времени t его проекция на вертикальную ось будет равна мгновенному значению тока

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом, между мгновенным значением тока и вращающимся с постоянной угловой частотой вектором \vec{I}_m устанавливается однозначная связь. Вектор \vec{I}_m называют *изображением* гармонического тока $i(t)$.

Для определения суммы двух синусоидальных токов одинаковой частоты $i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ и $i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$ достаточно сложить изображающие их векторы \vec{I}_{1m} и \vec{I}_{2m} (рисунок 3.2). Проекция на вертикальную ось полученного при этом вектора $\vec{I}_m = \vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}$ будет равна сумме мгновенных значений токов i_1 и i_2 :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Совокупность векторов, изображающих гармонически изменяющиеся величины одинаковой частоты (токи, напряжения, ЭДС) в заданный момент времени, называют *векторными диаграммами*.

При построении векторных диаграмм целесообразно располагать векторы для момента времени $t = 0$, так как взаимное расположение векторов остается неизменным для любого значения t . Применение векторных диаграмм делает анализ цепи более простым и наглядным.

Геометрические операции с векторными величинами можно заменить операциями с комплексными числами, что существенно упрощает аналитические расчеты.

Комплексным числом называется число вида

$$\underline{A} = a + jb, \tag{3.9}$$

где $a = \text{Re } \underline{A}$ – вещественная часть комплексного числа \underline{A} ;

$b = \text{Im } \underline{A}$ – мнимая часть комплексного числа \underline{A} ;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

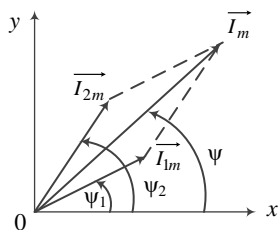


Рисунок 3.2

Приведенная форма записи (3.9) комплексного числа называется *алгебраической*. Комплексное число \underline{A} изображается на комплексной плоскости (рисунок 3.3) в виде точки, абсцисса которой равна a , а ордината $-jb$. Ось абсцисс, на которой откладывают вещественную часть комплексного числа, называется *действительной* и обозначается $+1$. По оси ординат откладывают мнимую часть комплексного числа. Эту ось называют *мнимой* и обозначают $+j$. Все комплексные величины будем отмечать путем подчеркивания их буквенных обозначений.

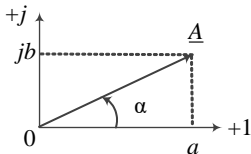


Рисунок 3.3

Комплексному числу \underline{A} на комплексной плоскости соответствует радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку \underline{A} (см. рисунок 3.3). Длину вектора, изображающего комплексное число, называют *модулем* этого числа

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3.10)$$

Угол α , который образует вектор A с положительным направлением вещественной оси, называют *аргументом* комплексного числа:

$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}. \quad (3.11)$$

Аргумент комплексного числа может иметь бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2n\pi$, где n – целое число. Главное значение аргумента, которое будем использовать в дальнейшем, заключено в диапазоне $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

Модуль A , а также компоненты a и b комплексного числа связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника:

$$a = A \cos \alpha; \quad b = A \sin \alpha. \quad (3.12)$$

Подставляя соотношения (3.12) в формулу (3.9), получим *тригонометрическую* форму записи комплексного числа:

$$\underline{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha. \quad (3.13)$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (3.14)$$

где e – основание натурального логарифма, получаем *показательную* форму записи комплексного числа:

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}. \quad (3.15)$$

Два комплексных числа

$$\underline{A} = a + jb = Ae^{j\alpha} \text{ и } \underline{A}^* = a - jb = Ae^{-j\alpha},$$

которые отличаются знаком перед j , называются *сопряженными*.

Комплексные числа $\underline{A}_1 = a_1 + jb_1 = A_1e^{j\alpha_1}$ и $\underline{A}_2 = a_2 + jb_2 = A_2e^{j\alpha_2}$ считаются равными, если попарно равны их действительные и мнимые части. Понятий «больше» или «меньше» для комплексных чисел не существует.

Неподвижному вектору \vec{I}_m при $t = 0$ в декартовой системе координат (см. рисунок 3.1) соответствует комплексное число \underline{I}_m на комплексной плоскости. Комплексная величина $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi}$ называется *комплексной амплитудой* тока. Вращающемуся с угловой частотой ω вектору \vec{I}_m соответствует комплексная функция времени, которая называется *комплексным мгновенным током*:

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t + \psi) + jI_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} [\underline{i}(t)] + j\operatorname{Im} [\underline{i}(t)].$$

Следовательно, синусоидальный ток $i(t)$ и его изображение комплексной величиной однозначно связаны следующим равенством:

$$i(t) = \operatorname{Im} [I_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \operatorname{Im} [I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Im} [\underline{I}_m e^{j\omega t}] = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

Функцию $e^{j\omega t}$ называют *оператором вращения*. Оператор $e^{j\omega t}$ представляет собой вектор единичной длины, вращающийся на комплексной плоскости в положительном направлении с угловой частотой ω . Умножение любого неподвижного вектора на этот оператор приводит к его вращению на комплексной плоскости с угловой частотой ω .

Комплексная величина $\underline{I} = Ie^{j\psi}$, где $I = I_m / \sqrt{2}$, называется *комплексным действующим током* или просто *комплексным током*.

Таким образом, для мгновенного значения тока $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$ можно записать комплексную амплитуду и комплексный ток. И наоборот, если задана комплексная амплитуда тока \underline{I}_m (комплексный ток \underline{I}), то известны амплитуда (действующее значение) и начальная фаза тока.

Из вышесказанного следует, что комплексная амплитуда тока \underline{I}_m , комплексный ток \underline{I} и комплексный мгновенный синусоидальный ток $\underline{i}(t)$ являются изображениями синусоидального тока $i(t)$. Следует отметить, что ком-

плексный мгновенный ток $\underline{i}(t)$ является функцией времени, в то время как комплексная амплитуда тока \underline{I}_m и, соответственно, комплексный ток \underline{I} от времени t не зависят.

Между мгновенным синусоидальным током $i(t)$ и его изображением в комплексной форме нельзя ставить знак равенства. Вместо знака равенства можно ставить знак соответствия \doteq , например,

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) \doteq \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad (3.16)$$

или
$$i(t) \doteq \underline{I} = I e^{j\psi}. \quad (3.17)$$

При выполнении операции дифференцирования гармонической функции ее изображение умножается на $j\omega$. Действительно,

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{i}(t). \quad (3.18)$$

Умножение комплексного числа на $j = e^{j90^\circ}$ равносильно увеличению аргумента этого числа на 90° или повороту изображающего вектора в положительном направлении на этот угол без изменения его модуля.

При выполнении операции интегрирования гармонической функции ее изображение делят на $j\omega$:

$$\int \underline{i}(t) dt = \int \underline{I}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\underline{I}_m e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{i}(t)}{j\omega}. \quad (3.19)$$

Деление на j равносильно изменению аргумента (или повороту вектора) на угол -90° .

Пример 3.1 Найти сумму двух мгновенных напряжений $u = u_1 + u_2$, если $u_1 = 30 \sin(\omega t + 30^\circ)$ В, а $u_2 = 40 \sin(\omega t - 60^\circ)$ В.

Решение. Изображения гармонических величин в комплексной форме:

$$u_1 \doteq \underline{u}_1 = 30 e^{j30^\circ} e^{j\omega t}; \quad u_2 \doteq \underline{u}_2 = 40 e^{-j60^\circ} e^{j\omega t}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } u = u_1 + u_2 \doteq \underline{u}_1 + \underline{u}_2 &= \text{Im}(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \text{Im}\left[(30 e^{j30^\circ} + 40 e^{-j60^\circ}) e^{j\omega t}\right] = \\ &= \text{Im}\left[(25,98 + j15 + 20 - j34,64) e^{j\omega t}\right] = \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Im}[(45,98 - j19,64)e^{j\omega t}] = \operatorname{Im}(50e^{-j23,13^\circ} e^{j\omega t}) = 50 \sin(\omega t - 23,13^\circ) \text{ В.}$$

3.3 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Пусть к электрической цепи, состоящей из элементов r, L, C , приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Цепь представим в виде пассивного двухполюсника на рисунке 3.4, входной ток которого будет изменяться по синусоидальному закону $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$. Заменим синусоидальные величины их комплексными изображениями

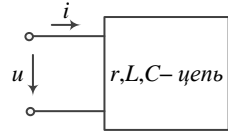


Рисунок 3.4

$$u \doteq \underline{U} = Ue^{j\psi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad i \doteq \underline{I} = Ie^{j\psi_i} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Отношение комплексного напряжения на зажимах двухполюсника ко входному комплексному току называют *комплексным электрическим сопротивлением*:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = Ze^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi}, \quad (3.20)$$

где $Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}$ – полное сопротивление.

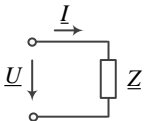


Рисунок 3.5

Схему на рисунке 3.4 с мгновенными значениями напряжения u и тока i можно заменить комплексной схемой на рисунке 3.5. На ней пассивный двухполюсник представлен комплексным сопротивлением \underline{Z} , через который протекает комплексный ток \underline{I} под действием комплексного напряжения \underline{U} .

Запишем комплексное сопротивление в тригонометрической форме:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = r + jx. \quad (3.21)$$

Вещественная часть комплексного сопротивления $\operatorname{Re} \underline{Z} = Z \cos \varphi = r$ называется *активной составляющей* сопротивления, а мнимая часть $\operatorname{Im} \underline{Z} = Z \sin \varphi = x$ – *реактивной составляющей* сопротивления. Связь между полным сопротивлением и его составляющими выражается соотношением сторон прямоугольного треугольника и представляет графически *тре-*

угольник сопротивлений, изображенный на рисунке 3.6, для положительных значений φ :

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2}. \quad (3.22)$$

Величина \underline{Y} , обратная комплексному сопротивлению \underline{Z} , называется *комплексной проводимостью*:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U} = Ye^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = g - jb, \quad (3.23)$$

где $Y = \frac{I}{U} = \sqrt{g^2 + b^2}$ – полная проводимость;

$g = \operatorname{Re} \underline{Y} = Y \cos \varphi$ – активная составляющая проводимости;

$b = \operatorname{Im} \underline{Y} = Y \sin \varphi$ – реактивная составляющая проводимости.

Соотношения между величинами Y , g и b графически изображаются *треугольником проводимостей* на рисунке 3.7.

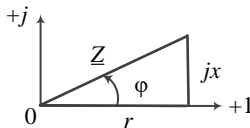


Рисунок 3.6

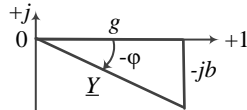


Рисунок 3.7

Для комплексной проводимости \underline{Y} можно получить такое выражение:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} \cdot \frac{r - jx}{r - jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb, \quad (3.24)$$

где $g = \frac{r}{r^2 + x^2}$; $b = \frac{x}{r^2 + x^2}$.

Отношение комплексных напряжения и тока (3.20) представляет собой закон Ома в комплексной форме. Его можно записать также в следующем виде:

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \underline{U} \underline{Y}; \quad \underline{U} = \underline{Z} \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}. \quad (3.25)$$

К цепи синусоидального тока применим первый закон Кирхгофа для мгновенных значений токов (3.4). Принимая во внимание, что сложению

гармонических величин соответствует сложение изображающих их комплексов, получим выражение первого закона Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \pm \underline{I}_k = 0, \quad (3.26)$$

т. е. алгебраическая сумма комплексных токов в узле электрической цепи синусоидального тока равна нулю.

Аналогичным образом можно записать второй закон Кирхгофа, представленный формулой (3.5) для цепи синусоидального тока в комплексной форме:

$$\sum \pm \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum \pm \underline{E}_k, \quad (3.27)$$

т. е. в любом контуре цепи синусоидального тока алгебраическая сумма комплексных напряжений на элементах контура равна алгебраической сумме комплексных ЭДС источников напряжения этого контура.

Сопоставляя формулы закона Ома и законов Кирхгофа, записанные в комплексной форме для цепей синусоидального тока, с соответствующими формулами, применяемыми для цепей постоянного тока, можно констатировать, что они аналогичны по форме. На основе законов Кирхгофа формируются узловые и контурные уравнения, выполняются эквивалентные преобразования электрических схем, применяются принципы наложения и взаимности. Поэтому все методы анализа цепей постоянного тока и полученные при этом различного рода соотношения и формулы можно использовать при анализе цепей синусоидального тока, представляя все электрические величины в комплексной форме.

Метод расчета цепей синусоидального тока, основанный на изображении гармонических функций времени комплексными числами, называется *методом комплексных амплитуд* или *комплексным методом* расчета. Его также называют *символическим методом*. Он был разработан в конце XIX века американскими инженерами Ч. Штейнметцем и А. Коннели.

3.4 Гармонический ток в резистивном элементе

Если к источнику синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ на рисунке 3.8 подключить резистивный элемент с сопротивлением r , то по нему в соответствии с законом Ома будет проходить синусоидальный ток

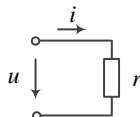


Рисунок 3.8

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m = \frac{U_m}{r}$; $\psi_u = \psi_i$.

Из приведенных соотношений следует, что в цепи с резистивным элементом напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. угол сдвига фаз между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i$ равен нулю. Это демонстрируется на волновой (рисунок 3.9) и векторной (рисунок 3.10) диаграммах.

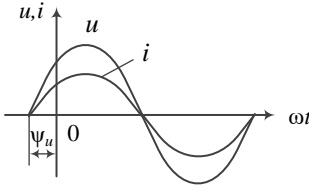


Рисунок 3.9

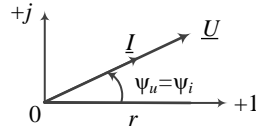


Рисунок 3.10

Произведение мгновенного значения приложенного к цепи напряжения $u(t)$ и мгновенного значения проходящего по цепи тока $i(t)$ называют *мгновенной мощностью*:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2(\omega t + \psi_u).$$

Найдем среднее значение мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI. \quad (3.28)$$

Используя формулы закона Ома, получим дополнительно выражения:

$$P = I^2 r = \frac{U^2}{r} = U^2 g.$$

3.5 Гармонический ток в индуктивном элементе

При подключении к индуктивному элементу L источника гармонического напряжения (рисунок 3.11) по нему проходит синусоидальный ток $i_L = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i)$. Примем начальную фазу тока равной нулю ($\psi_i = 0$) и найдем напряжение на зажимах индуктивности в соответствии с формулой (1.9):

Рисунок 3.11

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \omega L I_{Lm} \cos \omega t = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (3.29)$$

где $U_L = \omega L I_{Lm}$.

Из формулы (3.29) следует, что напряжение на индуктивности опережает по фазе протекающий по ней ток на 90° . Это иллюстрируют на рисунке 3.12 волновые диаграммы изменения тока i_L и напряжения u_L индуктивного элемента. Комплексный ток \underline{I}_L и комплексное напряжение \underline{U}_L на основании выражений для их мгновенных значений представляют в такой форме:

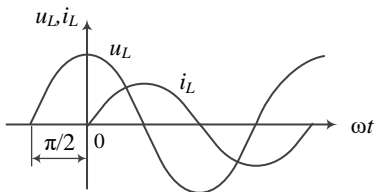


Рисунок 3.12

$$\underline{I}_L = I_L; \quad \underline{U}_L = U_L e^{j90^\circ}.$$

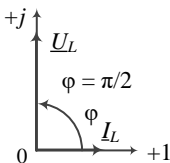


Рисунок 3.13

Векторная диаграмма, построенная для этих величин, представлена на рисунке 3.13. Отношение комплексного напряжения к комплексному току в соответствии с законом Ома равно комплексному сопротивлению индуктивности:

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{\omega L I_L e^{j90^\circ}}{I_L} = j\omega L = jx_L, \quad (3.30)$$

где $x_L = \omega L$ – индуктивное сопротивление, Ом.

Мгновенная мощность в индуктивности:

$$p = u_L i_L = U_{Lm} I_{Lm} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_{Lm} I_{Lm}}{2} \sin 2\omega t = U_L I_L \sin 2\omega t. \quad (3.31)$$

Мгновенная мощность p изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой (рисунок 3.14), при этом среднее значение мощности за период равно нулю. Это означает, что в индуктивном элементе не происходит превращения электрической энергии в другие виды. Во время положительных полуволн графика изменения мощности катушка накапливает энергию, поступающую

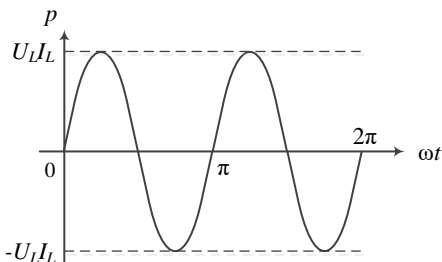


Рисунок 3.14

от источника, в своем магнитном поле. Во время отрицательных полуволн вся накопленная в катушке энергия возвращается обратно к источнику.

3.6 Гармонический ток в емкостном элементе

На рисунке 3.15 к емкостному элементу C подведено гармоническое напряжение $u_C = U_{Cm} \sin \omega t$.

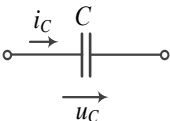


Рисунок 3.15

Запишем в соответствии с формулой (1.10) закон изменения тока в емкости:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos \omega t = I_{Cm} \sin(\omega t + 90^\circ), \quad (3.32)$$

где $I_{Cm} = \omega C U_{Cm}$.

Построим графики изменения напряжения и тока в емкостном элементе в функции ωt (рисунок 3.16).

Из графиков следует, что ток i_C в емкости опережает по фазе приложенное к ней напряжение u_C на 90° .

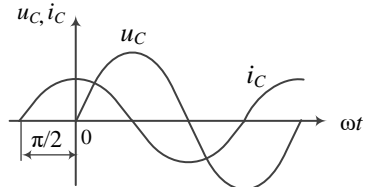


Рисунок 3.16

Таким образом, при комплексном напряжении $\underline{U}_C = U_C$ комплексный ток $\underline{I}_C = I_C e^{j90^\circ}$. На рисунке 3.17 приведена векторная диаграмма, построенная для напряжения и тока емкостного элемента.

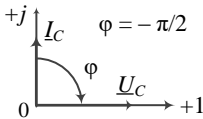


Рисунок 3.17

Отношение комплексного напряжения к комплексному току в соответствии с законом Ома равно комплексному сопротивлению емкости:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{U_C}{\omega C U_C e^{j90^\circ}} = \frac{1}{j\omega C} = -jx_C, \quad (3.33)$$

где $x_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное сопротивление, Ом.

Мгновенная мощность в емкости

$$p = u_C i_C = U_{Cm} I_{Cm} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_{Cm} I_{Cm}}{2} \sin 2\omega t = U_C I_C \sin 2\omega t. \quad (3.34)$$

График изменения мощности в емкостном элементе в зависимости от времени имеет такой же характер, как и в индуктивности. В цепи имеет место колебательный процесс с удвоенной частотой, при котором емкость в определенные интервалы получает энергию от источника, запасает ее в электрическом поле, а затем возвращает обратно источнику. Среднее значение мощности за период равно нулю.

3.7 Гармонический ток в последовательной r, L, C -цепи

Рассмотрим на рисунке 3.18 цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов r, L , и C и находящуюся под действием источника синусоидального напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. По цепи проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, который создает на ее элементах напряжения

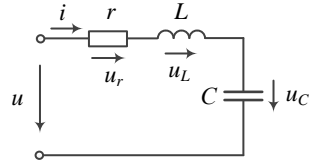


Рисунок 3.18

$$u_r = ri; u_L = L \frac{di}{dt}; u_C = \frac{1}{C} \int idt. \quad (3.35)$$

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для мгновенных напряжений:

$$u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u. \quad (3.36)$$

Заменяя мгновенные синусоидальные величины в уравнении (3.36) их комплексными изображениями, получим уравнение второго закона Кирхгофа в комплексной форме для действующих значений величин:

$$\underline{U}_r + \underline{U}_L + \underline{U}_C = r\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{U}. \quad (3.37)$$

После выполнения простых преобразований уравнения (3.37) получим

$$\left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I} = \left[r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = [r + j(x_L - x_C)] \underline{I} = \underline{U}.$$

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Ze^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ze^{j\varphi} = r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = r + j(x_L - x_C) = r + jx, \quad (3.38)$$

где $x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — реактивное сопротивление;

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2} \text{ — полное сопротивление.}$$

Характер сопротивления цепи зависит от соотношения значений индуктивного x_L и емкостного x_C сопротивлений.

При $x_L > x_C$ разность $x_L - x_C > 0$ и сопротивление цепи имеет активно-индуктивный характер. Если $x_L < x_C$, то разность $x_L - x_C < 0$ и сопротивление цепи будет иметь активно-емкостный характер.

Построим на рисунке 3.19 качественно векторные диаграммы комплексных напряжений и тока схемы для трех вариантов. В каждом из них будем полагать начальную фазу тока равной нулю, т. е. $\underline{I} = I$, и направлять вектор тока по горизонтальной оси. При построении векторов напряжений будем иметь в виду следующее: напряжение на резистивном элементе совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает по фазе ток на 90° , а напряжение на емкости отстает по фазе от тока на 90° . Таким образом, напряжения \underline{U}_L и \underline{U}_C находятся в противофазе.

Рассмотрим первый вариант, когда $x_L > x_C$. В этом случае напряжение на индуктивности U_L превышает по модулю напряжение на емкости U_C . Алгебраическая сумма напряжений на реактивных элементах $\underline{U}_L + \underline{U}_C$ называется *реактивной составляющей* напряжения \underline{U} :

$$\underline{U}_p = \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad (3.39)$$

и представляет собой проекцию вектора напряжения \underline{U} на ось ординат:

$$U_p = U \sin \varphi. \quad (3.40)$$

Проекция вектора напряжения \underline{U} на ось абсцисс равна вектору напряжения на активном сопротивлении \underline{U}_r и называется *активной составляющей* напряжения \underline{U} :

$$U_a = U_r = U \cos \varphi. \quad (3.41)$$

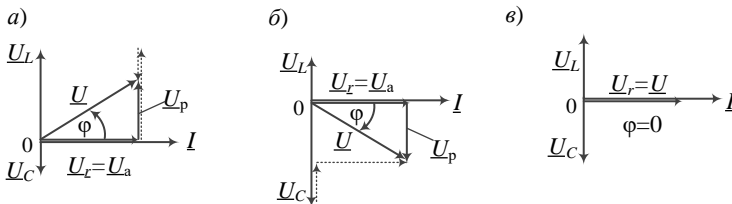


Рисунок 3.19

Вектор напряжения \underline{U} и его составляющие \underline{U}_a и \underline{U}_p связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника, который называется *треугольником напряжений*.

Для рассматриваемого варианта угол сдвига фаз φ положительный, т. е. напряжение \underline{U} , приложенное к цепи, опережает по фазе ток \underline{I} .

Во втором варианте $x_L < x_C$. В этом случае напряжение на индуктивности U_L по модулю меньше напряжения на емкости U_C . Векторная диаграмма для этого случая представлена на рисунке 3.19, б. При активно-емкостном характере сопротивления цепи ток I опережает по фазе входное напряжение на угол φ .

При $x_L = x_C$ реактивная составляющая сопротивления x будет равна нулю, и сопротивление цепи будет иметь только активную составляющую ($Z = r$). В этом случае напряжения на реактивных элементах равны по модулю и взаимно компенсируются (см. рисунок 3.19, в). При этом ток в цепи $I = U/r$ имеет максимальное значение. Такой режим цепи называют *резонансом напряжений*.

3.8 Гармонический ток в цепи с параллельным соединением элементов r, L, C

На рисунке 3.20 приведена схема цепи с параллельно соединенными элементами r, L и C . Если к ней подключить источник гармонического напряжения $u = U_m \sin \omega t$, то во всех частях цепи будут проходить синусоидальные токи. При этом токи в параллельных ветвях определяются следующими соотношениями:

$$i_r = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t = gU_m \sin \omega t = I_{rm} \sin \omega t;$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt = -\frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t = b_L U_m \sin(\omega t - 90^\circ) = I_{Lm} \sin(\omega t - 90^\circ);$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = b_C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = I_{Cm} \sin(\omega t + 90^\circ),$$

где $g = \frac{1}{r}$; $b_L = \frac{1}{\omega L}$; $b_C = \omega C$; $I_{rm} = gU_m$;

$$I_{Lm} = b_L U_m; \quad I_{Cm} = b_C U_m.$$

Запишем выражение для мгновенного тока в неразветвленной части цепи на основании первого закона Кирхгофа:

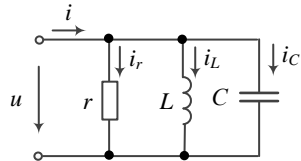


Рисунок 3.20

$$i = i_r + i_L + i_C = I_{rm} \sin \omega t + I_{Lm} \sin(\omega t - 90^\circ) + I_{Cm} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

которому соответствует уравнение в комплексной форме

$$\underline{I}_{rm} + \underline{I}_{Lm} + \underline{I}_{Cm} = g\underline{U}_m + b_L \underline{U}_m e^{-j90^\circ} + b_C \underline{U}_m e^{j90^\circ} = [g - j(b_L - b_C)]\underline{U}_m = \underline{I}_m.$$

Найдем комплексную проводимость цепи

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = g - j(b_L - b_C) = g - jb = Ye^{-j\varphi},$$

где $b = b_L - b_C$; $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$; $\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{b}{g}$.

Сдвиг по фазе между напряжением, приложенным к цепи, и входным током зависит от соотношения индуктивной и емкостной проводимости. На рисунке 3.21 представлены векторные диаграммы для трех случаев:

а) $b_L > b_C$, б) $b_L < b_C$ и в) $b_L = b_C$.

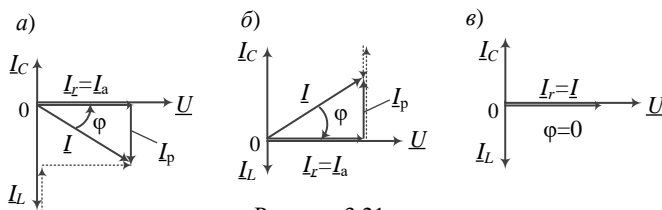


Рисунок 3.21

Вектор тока \underline{I}_r совпадает по направлению с вектором напряжения \underline{U} и представляет проекцию вектора тока \underline{I} на ось абсцисс, вдоль которой направлен вектор напряжения. Векторы токов \underline{I}_L и \underline{I}_C направлены противоположно друг другу и перпендикулярно вектору \underline{U} . Их геометрическая сумма равна проекции вектора тока \underline{I} на ось ординат. Проекцию вектора тока \underline{I} на ось абсцисс называют *активной* I_a составляющей, а проекцию на ось ординат – *реактивной* I_p составляющей. Таким образом, получаем

$$I_a = I_r = I \cos \varphi; \quad I_p = I_L - I_C = I \sin \varphi; \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Векторы \underline{I} , \underline{I}_a и \underline{I}_p образуют *треугольник токов*.

При равенстве индуктивной и емкостной проводимостей ветвей ($b_L = b_C$) происходит компенсация индуктивного тока емкостным. В этом случае в цепи имеет место *резонанс токов*, при котором входной ток I совпадает по фазе с напряжением U (см. рисунок 3.21, в).

3.9 Гармонический ток в цепи со смешанным соединением элементов r, L, C

На рисунке 3.22 представлена разветвленная электрическая цепь, к входным зажимам которой подключен источник гармонического напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Требуется рассчитать электрическую цепь, т. е. найти токи всех ветвей.

Укажем на исходной схеме стрелками токи ветвей. Расчет схемы проведем символическим методом. С этой целью составим расчетную комплексную схему, к которой приложено комплексное напряжение $\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u}$, а по

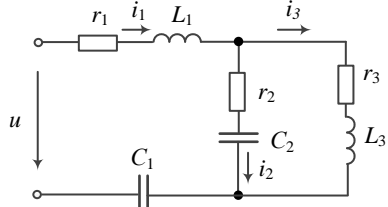


Рисунок 3.22

ветвям проходят комплексные токи (рисунок 3.23).

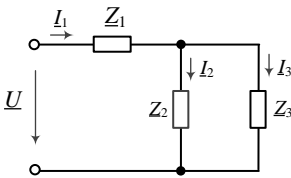


Рисунок 3.23

Запишем выражения для комплексных сопротивлений ветвей, каждое из которых состоит из соединенных последовательно пассивных элементов:

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = r_1 + j(x_{L1} - x_{C1}).$$

Полагая, что $x_{L1} > x_{C1}$, получим

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = Z_1 e^{j\varphi_1};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = r_2 - jx_{C2} = Z_2 e^{-j\varphi_2};$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 + j\omega L_3 = r_3 + jx_{L3} = Z_3 e^{j\varphi_3}.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление схемы относительно входных зажимов

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = Z e^{j\varphi}.$$

Определим по закону Ома входной комплексный ток:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = I_1 e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_1 e^{j\psi_{i1}}.$$

Комплексный ток во второй ветви найдем, применив формулу деления токов в параллельных ветвях (2.31):

$$\underline{I}_2 = I_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = I_2 e^{j\psi_{i2}}.$$

Комплексный ток в третьей ветви вычислим по закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = I_3 e^{j\psi_{i3}}.$$

Запишем выражения для мгновенных токов ветвей:

$$i_1(t) = \text{Im}[\sqrt{2} I_1 e^{j\omega t}] = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1});$$

$$i_2(t) = \text{Im}[\sqrt{2} I_2 e^{j\omega t}] = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{i2});$$

$$i_3(t) = \text{Im}[\sqrt{2} I_3 e^{j\omega t}] = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_{i3}).$$

3.10 Мощность в цепи гармонического тока

Пусть к зажимам пассивного двухполюсника (см. рисунок 3.4) подключен источник гармонического напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. По двухполюснику будет протекать ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, положительное направление которого согласуем с направлением напряжения.

Произведение мгновенных значений напряжения $u(t)$ тока $i(t)$ представляет собой *мгновенную мощность* двухполюсника:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\psi_u - \psi_i) - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)]. \end{aligned}$$

Используя принятые выше обозначения $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $\psi_u - \psi_i = \varphi$, для цепи с активно-индуктивным характером сопротивления ($\varphi > 0$) получим

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i). \quad (3.42)$$

Из соотношения (3.42) следует, что мгновенная мощность в цепи гармонического тока имеет постоянную составляющую $UI \cos \varphi$ и переменную составляющую $UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$, которая изменяется во времени с удвоенной частотой. Графики изменения напряжения, тока и мгновенной мощности цепи в функции ωt приведены на рисунке 3.24.

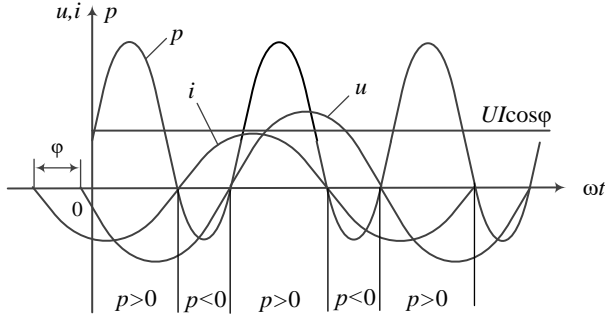


Рисунок 3.24

Как видно из графика $p(\omega t)$, при нулевых значениях напряжения или тока мощность равна нулю. А в определенные интервалы изменения напряжения и тока мгновенная мощность приобретает как положительные, так и отрицательные значения. Положительные значения мощности имеют место, когда направления тока и напряжения совпадают, т. е. когда они оба положительные или оба отрицательные. Это соответствует поступлению энергии от источника в цепь, где некоторая ее часть запасается в электрическом поле емкостей и в магнитном поле индуктивностей. Другая часть энергии источника расходуется в резистивных элементах, превращаясь в них в тепловую и другие виды энергии (химическую, механическую и т. д.). Отрицательные значения мощности наблюдаются при противоположных направлениях напряжения и тока и соответствуют возвращению накопленной в индуктивных и емкостных элементах энергии к источнику.

Среднее значение мгновенной мощности за период называется *активной* мощностью:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (3.43)$$

Для цепи синусоидального тока после подстановки выражения мгновенной мощности (3.42) в формулу (3.43) и интегрирования получим

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) dt = UI \cos \varphi.$$

Таким образом, активная мощность в цепи определяется по формуле

$$P = UI \cos \varphi. \quad (3.44)$$

Активная мощность измеряется в *ваттах* (Вт). Она характеризует энергию, которая передается от источника к нагрузке, где она превращается в тепловую и другие виды энергии. Множитель $\cos\varphi$ называется *коэффициентом мощности*.

Произведение действующих значений напряжения U и тока I называют *полной мощностью*:

$$S = UI. \quad (3.45)$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах (В·А) и характеризует предельную мощность источника при $\cos\varphi = 1$. Таким образом, коэффициент мощности определяет, какую часть полной мощности цепи составляет активная мощность.

Активная мощность измеряется ваттметром, который имеет две обмотки, напряжения и тока. Начала обмоток, относительно которых указываются положительные направления напряжения и тока, обозначаются звездочками (рисунок 3.25). Внутреннее устройство ваттметра выполнено таким образом, что он измеряет значение

$$UI \cos(\angle \underline{U}, \underline{I}),$$

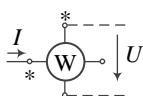


Рисунок 3.25

где U и I – действующие значения напряжения и тока, подведенные к ваттметру;

$\angle \underline{U}, \underline{I}$ – угол сдвига фаз между напряжением и током.

При расчетах электрических цепей используется также понятие *реактивной мощности*, значение которой определяется соотношением

$$Q = UI \sin\varphi. \quad (3.46)$$

Реактивная мощность характеризует энергию, которая периодически циркулирует между источником и нагрузкой. Она измеряется в *вольт-амперах реактивных* (вар). При индуктивном характере нагрузки ($\varphi > 0$) реактивная мощность положительна, а при емкостном характере нагрузки ($\varphi < 0$) – отрицательна.

Активная P , реактивная Q и полная S мощности связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника (*треугольника мощностей*):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad P = S \cos\varphi; \quad Q = S \sin\varphi.$$

На рисунке 3.26 приведен треугольник мощностей для цепи с активно-индуктивным характером нагрузки, построенный в осях комплексной плоскости. Полную мощность можно представить комплексным числом в алгебраической и показательной формах:

$$\underline{S} = P + jQ = S^{j\varphi}. \quad (3.47)$$

Подставляя в формулу (3.47) соотношение (3.45) и учитывая, что $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$ и $\underline{I} = Ue^{j\psi_i}$, получим следующее выражение для комплексной величины \underline{S} , которую называют *комплексной* мощностью:

$$\underline{S} = UIe^{j\varphi} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = \underline{U}\underline{I}^*.$$

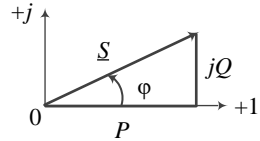


Рисунок 3.26

Из полученного выражения следует, что комплексная мощность \underline{S} равна произведению комплексного напряжения \underline{U} и комплексного тока \underline{I}^* , сопряженного с комплексным током \underline{I} :

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}\underline{I}^*, \quad (3.48)$$

где $P = \text{Re } \underline{S}$ – активная мощность;

$Q = \text{Im } \underline{S}$ – реактивная мощность.

3.11 Условия передачи максимальной мощности от источника к нагрузке

На рисунке 3.27 представлена схема цепи, на которой источник напряжения с ЭДС \underline{E} и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_0 = r_0 + jx_0$ подключен к нагрузке, заданной комплексным сопротивлением $\underline{Z}_H = r_H + jx_H$.

Найдем условие, при котором передаваемая от источника к нагрузке активная мощность будет максимальной. Мощность нагрузки

$$P = r_H I^2 = \frac{r_H E^2}{(r_0 + r_H)^2 + (x_0 + x_H)^2}.$$

Мощность принимает максимальное значение при $x_0 + x_H = 0$, т. е. при разном характере внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки. В этом случае

$$P = \frac{r_H E^2}{(r_0 + r_H)^2}.$$

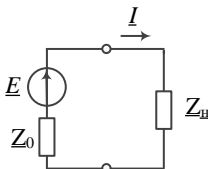


Рисунок 3.27

Выразим производную по r_n от полученного выражения и приравняем ее нулю:

$$\frac{dP}{dr_n} = E^2 \frac{(r_0 + r_n)^2 - r_n(r_0 + r_n)}{(r_0 + r_n)^4} = 0,$$

откуда найдем, что P имеет наибольшее значение при $r_n = r_0$.

Таким образом, передача максимальной активной мощности от источника к нагрузке осуществляется в случае, если комплексное сопротивление нагрузки является сопряженным с комплексным внутренним сопротивлением источника:

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_0^*. \quad (3.49)$$

При этом условии

$$P = \frac{E^2}{4r_0},$$

и коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{r_n I^2}{(r_n + r_0) I^2} = 0,5.$$

Пример 3.10 На рисунке 3.28 приведена схема цепи, на вход которой подается гармоническое напряжение $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ)$ В промышленной частоты $f = 50$ Гц. Элементы схемы имеют следующие параметры: $r_1 = 120$ Ом, $r_2 = 80$ Ом, $L_1 = 286,48$ мГн, $L_3 = 477,46$ мГн, $C_2 = 31,83$ мкФ.

Требуется:

- 1) найти комплексные и мгновенные значения токов в ветвях;
- 2) составить баланс мощностей;
- 3) определить показания измерительных приборов, включенных в цепь;
- 4) построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений на элементах цепи.

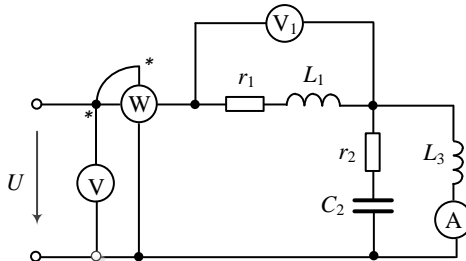


Рисунок 3.28

Решение. Удалим из исходной схемы измерительные приборы и представим ее на рисунке 3.29 в виде комплексной расчетной схемы. Произведем расчет токов ветвей этой схемы символическим методом.

Вычислим сопротивления реактивных элементов схемы

$$x_1 = 2\pi fL_1 = 90 \text{ Ом};$$

$$x_2 = 1 / 2\pi fC_2 = 100 \text{ Ом};$$

$$x_3 = 2\pi fL_3 = 150 \text{ Ом}.$$

Найдем комплексные сопротивления ветвей

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 120 + j90 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 - jx_2 = 80 - j100 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = jx_3 = j150 \text{ Ом}.$$

Комплексное напряжение на входе цепи

$$\underline{U} = 100 e^{-j30^\circ} = 86,6 - j50 \text{ В}.$$

Комплексное входное сопротивление схемы

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 322,25 + j113,6 \text{ Ом}.$$

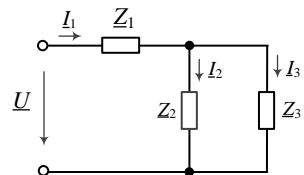


Рисунок 3.29

Найдены комплексные токи ветвей цепи:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = 0,19 - j0,222 = 0,293 e^{-j49,4^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 0,46 + j0,069 = 0,465 e^{j8,6^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = -0,27 - j0,292 = 0,397 e^{-j132,7^\circ} \text{ А}.$$

Запишем выражения для мгновенных значений токов ветвей:

$$i_1(t) = \text{Im}[\underline{I}_1 \sqrt{2} e^{j\omega t}] = 0,414 \sin(\omega t - 49,4^\circ) \text{ А};$$

$$i_2(t) = \text{Im}[\underline{I}_2 \sqrt{2} e^{j\omega t}] = 0,658 \sin(\omega t + 8,6^\circ) \text{ А};$$

$$i_3(t) = \text{Im}[\underline{I}_3 \sqrt{2} e^{j\omega t}] = 0,562 \sin(\omega t - 132,7^\circ) \text{ А}.$$

Составим баланс электрических мощностей.

Комплексная мощность источника

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{U} \underline{I}_1^* = (86,6 - j50)(0,19 + j0,222) = 27,6 + j9,73 \text{ ВА.}$$

$$P_{\text{ист}} = 27,6 \text{ Вт, } Q_{\text{ист}} = 9,73 \text{ вар.}$$

Комплексная мощность нагрузки

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{нагр}} &= I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_3 = 0,293^2 (120 + j90) + 0,465^2 (80 - j100) + \\ &+ 0,397^2 (j150) = 27,6 + j9,73 \text{ ВА.} \end{aligned}$$

$$P_{\text{нагр}} = 27,6 \text{ Вт, } Q_{\text{нагр}} = 9,73 \text{ вар.}$$

Баланс мощностей выполняется.

Определяем показания измерительных приборов. Вольтметр V на входе цепи покажет действующее значение приложенного напряжения

$$U_V = |\underline{U}| = 100 \text{ В,}$$

а показание вольтметра V_1 составит значение

$$U_{V1} = I_1 Z_1 = I_1 \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = 0,293 \sqrt{120^2 + 90^2} = 43,9 \text{ В.}$$

Амперметр A измеряет действующее значение тока I_3 , т. е.

$$I_A = I_3 = 0,56 \text{ А.}$$

Показание ваттметра

$$P_W = \text{Re}[\underline{U} \underline{I}_1^*] = \text{Re}[(86,6 - j50)(0,19 + j0,222)] = 27,554 \text{ Вт.}$$

Построим векторную диаграмму токов, совмещенную с топографической диаграммой для исходной схемы, из которой удалены измерительные приборы. Обозначим буквами a, b, c, d, e узлы схемы, включая устранимые (рисунок 3.30).

Построение векторной диаграммы токов осуществим, откладывая векторы токов в масштабе $m_I = 0,2 \text{ А/см}$ из начала координат комплексной плоскости на рисунке 3.31.

Топографическая диаграмма представляет собой диаграмму комплексных потенциалов, изображенных на комплексной плоскости. При этом каждой точке схемы соответствует определенная точка на топографической диаграмме. Одной из точек схемы, принятой в качестве базисной, придают

нулевой потенциал. На топографической диаграмме этой точке соответствует начало координат.

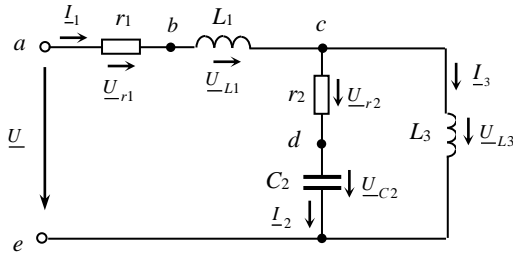


Рисунок 3.30

Комплексный потенциал каждой точки схемы можно изобразить вектором на комплексной плоскости. Тогда напряжение между любыми двумя точками цепи будет определяться разностью векторов, для нахождения которой достаточно провести прямую линию между концами соответствующих векторов. Полученный вектор должен быть направлен к концу уменьшаемого вектора. Такая совокупность векторов напряжения, построенных на комплексной плоскости, называется топографической векторной диаграммой.

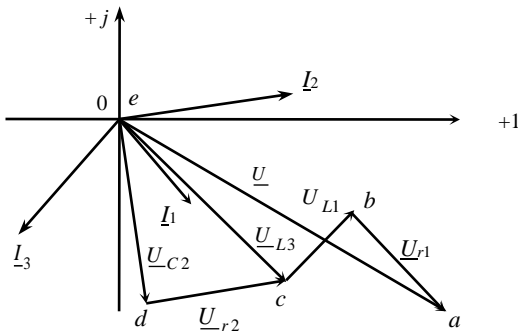


Рисунок 3.31

Примем потенциал точки e равным нулю и найдем численные значения комплексных потенциалов остальных точек схемы:

$$\underline{\varphi}_d = -jx_{C2}I_2 = 6,94 - j46 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_c = jx_{L3}I_3 = 43,75 - j40,5 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + jx_{L1}I_1 = 63,8 - j23,3 \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + r_1I_1 = 86,6 - j50 = 100 e^{-j30^\circ} \text{ В}.$$

Укажем на комплексной плоскости в масштабе $m_u = 20 \text{ В/см}$ найденные потенциалы точек (см. рисунок 3.31). Переход из точки e , помещенной в начало координат, в точку d характеризуется условным увеличением потенциала на значение $(-jx_2I_2)$. Разность потенциалов $\underline{\varphi}_d - \underline{\varphi}_e$ соответствует падению напряжения на емкостном сопротивлении $\underline{U}_{C2} = -jx_2I_2$, которое изображается вектором, проведенным из точки e в точку d . Как следует из построения, вектор напряжения \underline{U}_{C2} смещен относительно вектора тока \underline{I}_2 на угол, равный -90° . Соответствующим образом находим положение точки c на комплексной плоскости, которой соответствует комплексный потенциал $\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + r_2I_2$. Получаем, что $\underline{\varphi}_c - \underline{\varphi}_d = r_2I_2 = \underline{U}_{r2}$. Вектор напряжения \underline{U}_{r2} направлен из точки d в точку c и ориентирован параллельно вектору тока \underline{I}_2 . Потенциал точки c можно найти из соотношения $\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_e + jx_3I_3$, из которого находим напряжение на индуктивном сопротивлении

Аналогичным образом получаем векторы напряжений \underline{U}_{L1} и \underline{U}_{r1} на остальных элементах схемы. Вектор входного напряжения \underline{U} получим, направив его из точки e в точку a . Таким образом, на комплексной плоскости построена топографическая векторная диаграмма напряжений исследуемой схемы, на которой векторы напряжений расположены в соответствии с их чередованием при обходе контуров исследуемой схемы.

Следует обратить внимание на то, что векторы напряжений направлены относительно точек топографической диаграммы противоположно положительным направлениям напряжений относительно соответствующих точек схемы.

3.12 Применение матрично-топологических методов к анализу цепей с гармоническими источниками

При анализе сложных электрических цепей, имеющих в своем составе значительное количество узлов и ветвей, целесообразно матричное описание таких цепей, формирование уравнений состояния и их решение с помощью вычислительной техники.

Уравнения в матричной форме, описывающие электрическую цепь и базирующиеся на законах Кирхгофа, получаются более удобными при введении понятия *обобщенной ветви*. В общем случае такая обобщенная ветвь, включенная между узлами m и n , имеет в своем составе пассивные элементы r_k , L_k , C_k , идеальный источник синусоидальной ЭДС $e_k(t)$ и идеальный источник синусоидального тока $j_k(t)$. Элементы схемы соединяются между собой так, как показано на рисунке 3.32, а. Комплексная форма обобщенной ветви приведена на рисунке 3.32, б. Будем использовать следующие обозначения:

$I_k^{(B)}$ – комплексный ток k -й обобщенной ветви;

$I_k = I_k^{(B)} + J_k$ – комплексный ток, протекающий через сопротивление Z_k k -й ветви.

Токи обобщенных ветвей обычно на схеме не указывают, так как при расчете цепи интерес представляют токи, протекающие через сопротивления ветвей.

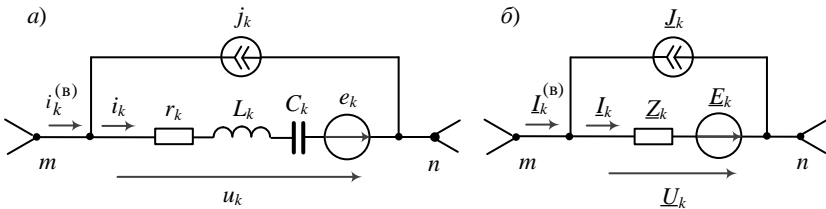


Рисунок 3.32

Для обобщенной ветви с комплексным сопротивлением

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

справедливы следующие соотношения:

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k I_k - \underline{E}_k = \underline{Z}_k (I_k^{(B)} + J_k) - \underline{E}_k, \quad (3.50)$$

где $I_k = I_k^{(B)} + J_k$;

$$\underline{I}_k^{(b)} = \underline{Y}_k(\underline{U}_k + \underline{E}_k) - \underline{J}_k, \quad (3.51)$$

где $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ – комплексная проводимость обобщенной ветви.

Соотношения (3.50) и (3.51) представляют собой формулы закона Ома или компонентные уравнения для обобщенной ветви.

При построении графа электрической схемы каждая обобщенная ветвь изображается одной линией, а информация о ее внутренней структуре в граф не входит.

Запишем в матричной форме первый закон Кирхгофа соответственно для узлов и для главных сечений схемы, а второй закон для главных контуров:

$$[A][\underline{I}^{(b)}] = [0]; [Q][\underline{I}^{(b)}] = [0]; [B][\underline{U}] = [0], \quad (3.52)$$

где $[\underline{I}^{(b)}]$ – матрица-столбец токов обобщенных ветвей;

$[\underline{U}]$ – матрица-столбец напряжений обобщенных ветвей;

$[0]$ – нулевая матрица.

При формировании системы независимых уравнений по первому закону Кирхгофа составляются уравнения для всех узлов, кроме базисного, или для главных сечений. По второму закону Кирхгофа уравнения записываются только для главных контуров.

Соотношение (3.50) можно записать для всех n ветвей схемы с использованием матриц:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_k \\ \dots \\ \underline{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(b)} + \underline{J}_1 \\ \underline{I}_2^{(b)} + \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_k^{(b)} + \underline{J}_k \\ \dots \\ \underline{I}_n^{(b)} + \underline{J}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{E}_k \\ \dots \\ \underline{E}_n \end{bmatrix}$$

или
$$[\underline{U}] = [\underline{Z}][[\underline{I}^{(b)}] + [\underline{J}]] - [\underline{E}] = [\underline{Z}][\underline{I}] - [\underline{E}], \quad (3.53)$$

где $[\underline{E}] = [\underline{E}_1 \ \underline{E}_2 \ \dots \ \underline{E}_k \ \dots \ \underline{E}_n]^T$ – матрица ЭДС источников напряжения;

$[\underline{J}] = [\underline{J}_1 \ \underline{J}_2 \ \dots \ \underline{J}_k \ \dots \ \underline{J}_n]^T$ – матрица токов источников тока;

$[\underline{Z}]$ – диагональная матрица комплексных сопротивлений.

Аналогичным образом можно получить матричное уравнение, соответствующее соотношению (3.51):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(B)} \\ \underline{I}_2^{(B)} \\ \dots \\ \underline{I}_k^{(B)} \\ \dots \\ \underline{I}_n^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_k & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 + \underline{E}_1 \\ \underline{U}_2 + \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_k + \underline{E}_k \\ \dots \\ \underline{U}_n + \underline{E}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{J}_k \\ \dots \\ \underline{J}_n \end{bmatrix}$$

$$[\underline{I}^{(B)}] = [\underline{Y}][[\underline{U}] + [\underline{E}]] - [\underline{J}], \quad (3.54)$$

где $[\underline{Y}] = \text{diag} [\underline{Y}_1 \ \underline{Y}_2 \ \dots \ \underline{Y}_k \ \dots \ \underline{Y}_n]$ – диагональная матрица комплексных проводимостей.

В матрице комплексных проводимостей элемент $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$, поэтому матрицы $[\underline{Z}]$ и $[\underline{Y}]$ взаимно обратимы, т. е.

$$[\underline{Y}] = [\underline{Z}]^{-1} \text{ и } [\underline{Z}] = [\underline{Y}]^{-1}.$$

Применение матрично-топологических методов расчета рассмотрим на примере схемы электрической цепи, представленной на рисунке 3.33.

Обозначим цифрами 1, 2, 3 и 0 узлы схемы, выберем узел 0 в качестве опорного и примем его потенциал равным нулю. Произвольно выберем положительные направления токов ветвей и укажем их стрелками.

Запишем в матричной форме параметры элементов обобщенных ветвей схемы:

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \\ 0 \\ \underline{E}_5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [\underline{J}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ 0 \\ 0 \\ -\underline{J}_6 \end{bmatrix}; \quad [\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 3.34 приведен направленный граф, ветви которого соответствуют обобщенным ветвям исследуемой схемы. Жирными линиями показаны ветви дерева, а тонкими линиями – ветви связи. Номера узлов и ветвей графа соответствуют узлам и ветвям схемы.

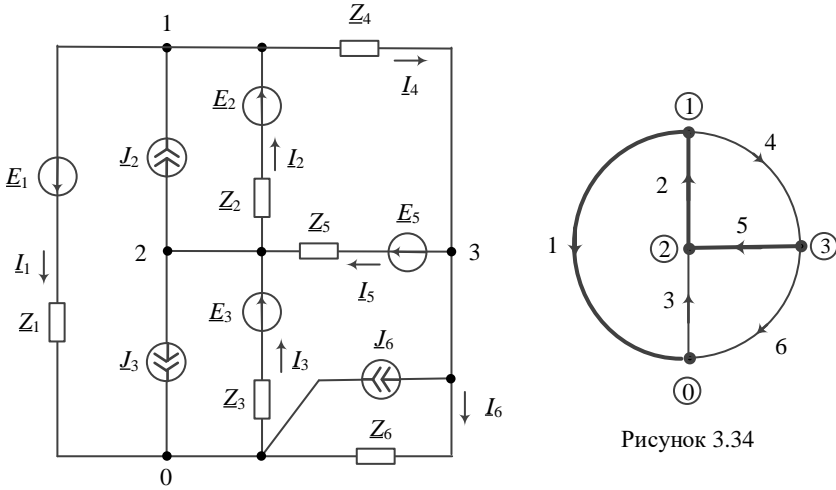


Рисунок 3.33

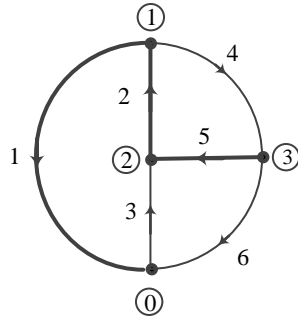


Рисунок 3.34

Запишем топологические матрицы для данного графа:
 – узловая матрица:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

– матрица главных контуров:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

3.12.1 Узловые уравнения в матричной форме

В данном методе в качестве независимых переменных будем использовать потенциалы узлов исследуемой схемы. Индексы потенциалов соответствуют нумерации узлов. Выразим напряжения обобщенных ветвей схемы на рисунке 3.33, направление которых задано графом схемы (см. рисунок 3.34), через потенциалы узлов с учетом того, что базисный узел 0 имеет потенциал, равный нулю

$$\underline{U}_1 = \underline{\varphi}_1; \quad \underline{U}_2 = \underline{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_1; \quad \underline{U}_3 = -\underline{\varphi}_2;$$

$$\underline{U}_4 = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_3; \quad \underline{U}_5 = \underline{\varphi}_3 - \underline{\varphi}_2; \quad \underline{U}_6 = \underline{\varphi}_3.$$

Запишем полученные соотношения в матричной форме:

$$[\underline{U}] = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$

или

$$[\underline{U}] = [A]^T [\varphi], \quad (3.57)$$

где $[A]^T$ – транспонированная узловая матрица;

$[\varphi]$ – столбцовая матрица потенциалов узлов.

Умножим слева левую и правую части соотношения (3.54) на узловую матрицу $[A]$:

$$[A][\underline{I}^{(B)}] = [A][\underline{Y}][\underline{U}] + [A][\underline{Y}][\underline{E}] - [A][\underline{J}].$$

Согласно первому закону Кирхгофа (3.52) для узлов $[A][\underline{I}^{(B)}] = [0]$, следовательно,

$$[A][\underline{Y}][\underline{U}] = [A][\underline{J}] - [A][\underline{Y}][\underline{E}].$$

Заменяя в левой части полученного соотношения матрицу напряжений ветвей $[\underline{U}]$ выражением (3.57), получим уравнение следующего вида:

$$[A][\underline{Y}][A]^T [\varphi] = [A][\underline{J}] - [A][\underline{Y}][\underline{E}], \quad (3.58)$$

которое называют *узловым уравнением в матричной форме*.

Проведем анализ полученного матричного выражения. Выразим через комплексные проводимости ветвей матричное произведение $[A][\underline{Y}][A]^T$ в левой части соотношения (3.58) с учетом записанной для исследуемой схемы матрицы $[A]$ (3.55):

$$[A][\underline{Y}][A]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_5 \\ -\underline{Y}_4 & -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix} = [\underline{Y}^{(y)}],$$

где $[\underline{Y}^{(y)}]$ – матрица узловых проводимостей.

Правая часть матричного выражения (3.58):

$$[A][J] - [A][Y][E] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ 0 \\ 0 \\ -\underline{J}_6 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Y}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \\ 0 \\ \underline{E}_5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{J}_2 \\ -\underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_3 \underline{Y}_3 - \underline{J}_2 - \underline{J}_3 \\ -\underline{E}_5 \underline{Y}_5 - \underline{J}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{1y} \\ \underline{J}_{2y} \\ \underline{J}_{3y} \end{bmatrix} = [\underline{J}^{(y)}],$$

где $[\underline{J}^{(y)}]$ – матрица узловых токов.

С учетом полученных выражений узловое уравнение в матричной форме (3.58) примет следующий вид:

$$\underline{Y}^{(y)}[\Phi] = \underline{J}^{(y)}, \quad (3.59)$$

Решением матричного уравнения (3.59) находим потенциалы узлов расчетной схемы цепи:

$$[\Phi] = \underline{Y}^{(y)^{-1}} \underline{J}^{(y)} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}.$$

По формуле (3.57) определяем напряжения обобщенных ветвей схемы

$$[\underline{U}] = [A]^T [\Phi],$$

а затем находим токи обобщенных ветвей по формуле (3.54)

$$[\underline{I}^{(b)}] = [\underline{Y}][[\underline{U}] + [\underline{E}]] - [\underline{J}].$$

Искомые токи ветвей цепи вычисляем по формуле

$$[\underline{I}] = [\underline{I}^{(b)}] + [\underline{J}] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_k \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

3.12.2 Контурные уравнения в матричной форме

В качестве независимых переменных примем контурные токи, циркулирующие по главным (независимым) контурам схемы. Зная контурные токи, легко найти токи во всех ветвях схемы.

На рисунке 3.35 изображены главные контуры исследуемой схемы, по которым циркулируют контурные токи, направление которых задается направлением ветвей связи графа на рисунке 3.34.

Выразим токи обобщенных ветвей схемы в виде соответствующих алгебраических сумм контурных токов, проходящих через них:

$$I_1^{(b)} = I_{1k} - I_{3k};$$

$$I_2^{(b)} = I_{1k} + I_{2k} - I_{3k};$$

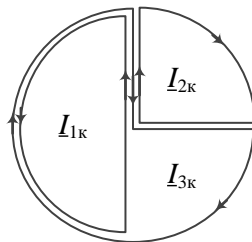


Рисунок 3.35

$$\begin{aligned} \underline{I}_3^{(B)} &= I_{1k}; \\ \underline{I}_4^{(B)} &= I_{2k}; \\ \underline{I}_5^{(B)} &= I_{2k} - I_{3k}; \\ \underline{I}_6^{(B)} &= I_{3k}. \end{aligned}$$

Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^{(B)} \\ \underline{I}_2^{(B)} \\ \underline{I}_3^{(B)} \\ \underline{I}_4^{(B)} \\ \underline{I}_5^{(B)} \\ \underline{I}_6^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1k} \\ I_{2k} \\ I_{3k} \end{bmatrix}$$

или
$$\underline{I}^{(B)} = [B]^T \underline{I}^{(k)}, \quad (3.60)$$

где $\underline{I}^{(k)} = [I_{1k} \ I_{2k} \ I_{3k}]^T$ – матрица контурных токов;

$[B]^T$ – транспонированная матрица главных контуров.

Умножим слева левую и правую части выражения (3.53) на матрицу главных контуров $[B]$:

$$[B][\underline{U}] = [B][\underline{Z}][\underline{I}^{(B)}] + [B][\underline{Z}][J] - [B][\underline{E}].$$

В соответствии с формулой (3.52) $[B][\underline{U}] = [0]$. Таким образом, получим:

$$[B][\underline{Z}][\underline{I}^{(B)}] = [B][\underline{E}] - [B][\underline{Z}][J].$$

Записывая токи обобщенных ветвей через контурные токи согласно соотношению (3.60), получим *контурное уравнение в матричной форме*

$$[B][\underline{Z}][B]^T \underline{I}^{(k)} = [B][\underline{E}] - [B][\underline{Z}][J]. \quad (3.61)$$

Проанализируем полученное матричное уравнение.

Выразим через комплексные сопротивления ветвей матричное произведение $[B][Z][B]^T$ в левой части соотношения (3.61) с учетом записанной для исследуемой схемы матрицы $[B]$ (3.56):

$$\begin{aligned}
 & [B][Z][B]^T = \\
 & = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 \\ -\underline{Z}_1 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{bmatrix} = [\underline{Z}^{(k)}],
 \end{aligned}$$

где $[\underline{Z}^{(k)}]$ – матрица контурных сопротивлений.

Правая часть матричного выражения (3.61):

$$\begin{aligned}
 & [B][E] - [B][Z][J] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \\ 0 \\ \underline{E}_5 \\ 0 \end{bmatrix} - \\
 & - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{J}_2 \\ \underline{J}_3 \\ 0 \\ 0 \\ -\underline{J}_6 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \underline{Z}_2 \underline{J}_2 - \underline{Z}_3 \underline{J}_3 \\ \underline{E}_2 + \underline{E}_5 + \underline{Z}_2 \underline{J}_2 \\ -\underline{E}_1 - \underline{E}_2 - \underline{E}_5 - \underline{Z}_2 \underline{J}_2 + \underline{Z}_6 \underline{J}_6 \end{bmatrix} = [\underline{E}^{(k)}],
 \end{aligned}$$

где $[\underline{E}^{(k)}]$ – матрица контурных ЭДС.

Контурное уравнение (3.58) можно записать в компактной форме:

$$\underline{Z}^{(k)} \underline{I}^{(k)} = \underline{E}^{(k)}. \quad (3.62)$$

Решив матричное уравнение (3.62), найдем матрицу контурных токов:

$$\underline{I}^{(k)} = \left[\underline{Z}^{(k)} \right]^{-1} \underline{E}^{(k)},$$

а затем матрицу токов обобщенных ветвей

$$\underline{I}^{(B)} = [B]^T \underline{I}^{(k)}.$$

Токи, проходящие по ветвям с комплексными сопротивлениями $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots, \underline{Z}_n$, вычислим по формуле

$$\underline{I} = \underline{I}^{(B)} + \underline{J} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_k \\ \dots \\ \underline{I}_n \end{bmatrix}.$$

3.13 Уравнения баланса мощностей в матричной форме

В электрической цепи с гармоническими источниками ЭДС и тока в соответствии с законом сохранения энергии и теоремой Телледжена алгебраическая сумма мгновенных мощностей n обобщенных ветвей изолированной электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) i_k^{(B)}(t) = 0.$$

В комплексной форме это выражение запишем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n U_k I_k^{*(B)} = 0. \quad (3.63)$$

Комплексные токи обобщенных ветвей удовлетворяют уравнению первого закона Кирхгофа в матричной форме $[A] \underline{I}^{(B)} = [0]$, следовательно, будет справедливым и соотношение $[A] \underline{I}^{*(B)} = [0]$, где $\underline{I}^{*(B)}$ — матрица комплексных величин, сопряженных с комплексными токами обобщенных ветвей. Соотношение (3.63) представим в матричной форме:

$$[U]^T \underline{I}^{*(B)} = [0], \quad (3.64)$$

в которой согласно рисунку (3.32, б)

$$[\underline{I}^{*(B)}] = [\underline{I}^*] - [\underline{J}^*]. \quad (3.65)$$

Транспонированную матрицу $[\underline{U}]^T$ получим из уравнения (3.53)

$$[\underline{U}]^T = [[\underline{Z}][\underline{I}] - [\underline{E}]]^T = [[\underline{Z}][\underline{I}]]^T - [\underline{E}]^T = [\underline{I}]^T [\underline{Z}]^T - [\underline{E}]^T.$$

Так как $[\underline{Z}]^T = [\underline{Z}]$, получим

$$[\underline{U}]^T = [\underline{I}]^T [\underline{Z}] - [\underline{E}]^T. \quad (3.66)$$

Подставим соотношение (3.65) в формулу (3.64):

$$[\underline{U}]^T [[\underline{I}^*] - [\underline{J}^*]] = [\underline{U}]^T [\underline{I}^*] - [\underline{U}]^T [\underline{J}^*] = [0],$$

откуда получаем следующее равенство:

$$[\underline{U}]^T [\underline{I}^*] = [\underline{U}]^T [\underline{J}^*]. \quad (3.67)$$

Заменим в левой части формулы (3.67) матрицу $[\underline{U}]^T$ выражением (3.66)

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] [\underline{I}^*] - [\underline{E}]^T [\underline{I}^*] = [\underline{U}]^T [\underline{J}^*]$$

и после переноса матричного произведения $[\underline{E}]^T [\underline{I}^*]$ в правую часть соотношения получим

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] [\underline{I}^*] = [\underline{E}]^T [\underline{I}^*] + [\underline{U}]^T [\underline{J}^*]. \quad (3.68)$$

Левая часть формулы (3.68) после подстановки в нее значений матриц примет следующий вид:

$$[\underline{I}]^T [\underline{Z}] [\underline{I}^*] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 & \dots & \underline{I}_k & \dots & \underline{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{Z}_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{Z}_{nB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \dots \\ \underline{I}_k^* \\ \dots \\ \underline{I}_n^* \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \dots + \underline{Z}_k I_k^2 + \dots + \underline{Z}_n I_n^2 = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 = \underline{S}_{\text{нагр}} \quad (3.69)$$

и определяет суммарную комплексную мощность, потребляемую нагрузкой.

Представив в соотношении (3.69) комплексное сопротивление в алгебраической форме $\underline{Z}_k = r_k + jx_k$, получим

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n r_k I_k^2 + \sum_{k=1}^n jx_k I_k^2 = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}},$$

т. е.

$$\underline{S}_{\text{нагр}} = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}},$$

где $P_{\text{нагр}}$, $Q_{\text{нагр}}$ – соответственно активная и реактивная составляющие комплексной мощности нагрузки.

Правая часть соотношения (3.68)

$$\begin{aligned} [\underline{E}]^T [\underline{I}^*] + [\underline{U}]^T [\underline{J}^*] &= [\underline{E}_1 \ \underline{E}_2 \ \dots \ \underline{E}_k \ \dots \ \underline{E}_n] \begin{bmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \dots \\ \underline{I}_k^* \\ \dots \\ \underline{I}_n^* \end{bmatrix} + [\underline{U}_1 \ \underline{U}_2 \ \dots \ \underline{U}_k \ \dots \ \underline{U}_n] \begin{bmatrix} \underline{J}_1^* \\ \underline{J}_2^* \\ \dots \\ \underline{J}_k^* \\ \dots \\ \underline{J}_n^* \end{bmatrix} = \\ &= \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* + \dots + \underline{E}_k \underline{I}_k^* \dots + \underline{E}_n \underline{I}_n^* + \underline{U}_1 \underline{J}_1^* + \underline{U}_2 \underline{J}_2^* + \dots + \underline{U}_k \underline{J}_k^* \dots + \underline{U}_n \underline{J}_n^* = \\ &= \sum_{k=1}^n \underline{E}_k \underline{I}_k^* + \sum_{k=1}^n \underline{U}_k \underline{J}_k^* = \underline{S}_{\text{ист}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

выражает собой комплексную мощность, генерируемую источниками ЭДС и тока.

Из сопоставления формул (3.68), (3.69) и (3.70) следует:

$$\sum_{k=1}^n r_k I_k^2 = P_{\text{ист}}; \quad (3.71)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k I_k^2 = Q_{\text{ист}}. \quad (3.72)$$

Полученные соотношения (3.71) и (3.72) представляют собой математическую запись баланса мощностей.

Пример 3.12 В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 3.36, действуют гармонические источники напряжения и тока:

$e_1(t) = 50 \sin(\omega t - 40^\circ)$ В, $e_4(t) = 40 \sin(\omega t + 60^\circ)$ В, $e_6(t) = 80 \sin(\omega t + 20^\circ)$ В, $j_2(t) = 2 \sin(\omega t - 30^\circ)$ А, $j_4(t) = 5 \sin(\omega t + 50^\circ)$ А, $j_6(t) = 3 \sin(\omega t - 25^\circ)$ А. Пассивные элементы цепи имеют следующие параметры: $r_1 = 15$ Ом, $r_2 = 35$ Ом, $r_3 = 17$ Ом, $r_4 = 31$ Ом, $r_5 = 18$ Ом, $r_6 = 23$ Ом, $r_8 = 27$ Ом, $L_1 = 30$ мГн, $L_3 = 18$ мГн, $L_5 = 65$ мГн, $L_7 = 52$ мГн; $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ, $C_5 = 40$ мкФ, $C_8 = 25$ мкФ. Угловая частота $\omega = 1000$ с⁻¹.

Требуется:

- 1 Построить направленный граф схемы и указать ветви дерева.
- 2 Составить топологические матрицы: узловую, главных контуров и главных сечений.
- 3 Найти комплексные токи и напряжения всех ветвей цепи.
- 4 Составить баланс электрических мощностей.

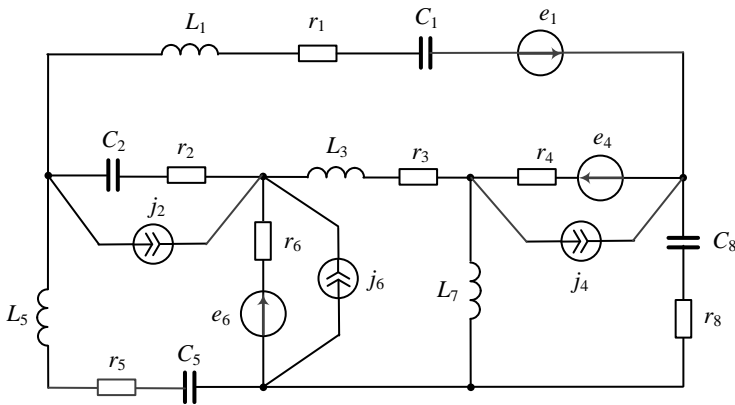


Рисунок 3.36

Решение. На рисунке 3.37 приведена комплексная схема цепи, на которой цифрами 0, 1, 2, 3, 4 обозначены узлы и стрелками указаны произвольно выбранные положительные направления токов ветвей. В схеме действуют источники напряжения с комплексными ЭДС:

$$\underline{E}_1 = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{-j40^\circ} = 35,36 e^{-j40^\circ} = 27,09 - j22,73 \text{ В};$$

$$\underline{E}_4 = \frac{40}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} = 28,28 e^{j60^\circ} = 14,14 + j24,49 \text{ В};$$

$$\underline{E}_6 = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j20^\circ} = 56,57 e^{j20^\circ} = 53,16 + j19,35 \text{ В}$$

и источники тока с комплексными токами:

$$\underline{J}_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ} = 1,41 e^{-j30^\circ} = 1,22 - j0,71 \text{ А};$$

$$\underline{J}_4 = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j50^\circ} = 3,54 e^{j50^\circ} = 2,28 + j2,71 \text{ А};$$

$$\underline{J}_6 = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-j25^\circ} = 2,12 e^{-j25^\circ} = 1,92 - j0,9 \text{ А}.$$

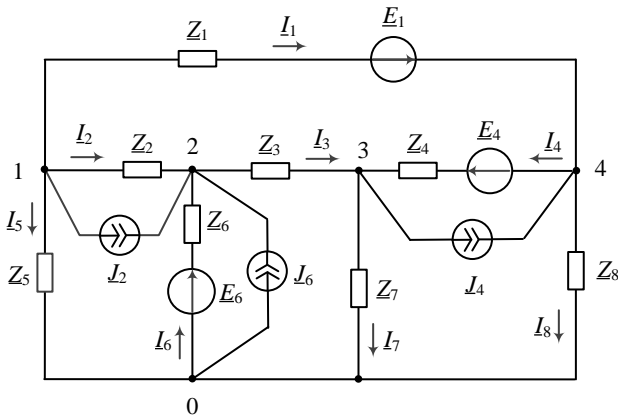


Рисунок 3.37

Комплексные сопротивления ветвей схемы

$$\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = 15 - j20 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = r_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = 35 - j50 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 + j\omega L_3 = 17 + j18 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_4 = r_4 = 31 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_5 = r_5 + j\omega L_5 + \frac{1}{j\omega C_5} = 18 + j40 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_6 = r_6 = 23 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_7 = j\omega L_7 = j19 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_8 = r_8 - \frac{1}{j\omega C_8} = 27 - j40 \text{ Ом}.$$

Граф схемы, в которой каждая обобщенная ветвь представлена отрезком линии, изображен на рисунке 3.38. В качестве дерева выбраны ветви 2, 4, 6, 7. Пунктирными линиями указаны следы замкнутых поверхностей, соответствующие главным сечениям S_1, S_2, S_3, S_4 .

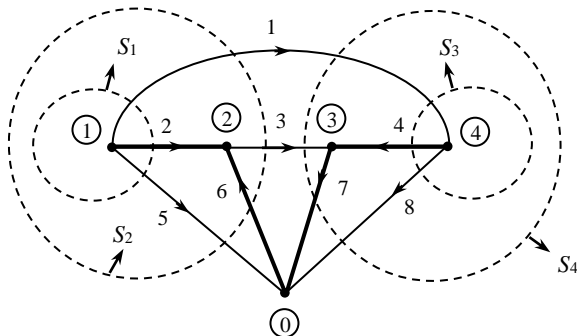


Рисунок 3.38

Запишем топологические матрицы:

– узловую

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

– главных контуров

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

– главных сечений

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет схемы проведем методом контурных токов с использованием системы Mathcad.

Запишем матрицы комплексных сопротивлений $[Z]$ ветвей, ЭДС $[E]$ источников напряжения и токов $[J]$ источников тока расчетной схемы:

$$[Z] = \text{diag} [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4 \ Z_5 \ Z_6 \ Z_7 \ Z_8] =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 - j20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 - j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 + j18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 + j40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 - j40 \end{bmatrix} \text{ Ом};$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ E_4 \\ 0 \\ E_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,09 - j22,73 \\ 0 \\ 0 \\ 14,14 + j24,49 \\ 0 \\ 53,16 + j19,35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ В}; \quad [J] = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_2 \\ 0 \\ J_4 \\ 0 \\ -J_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,22 + j0,71 \\ 0 \\ 2,28 + j2,71 \\ 0 \\ -1,92 + j0,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ А}.$$

Расчет будем производить с применением контурных уравнений в матричной форме (3.59):

$$[Z^{(k)}][I^{(k)}] = [E^{(k)}].$$

Запишем матрицу контурных сопротивлений и матрицу контурных ЭДС:

$$[Z^{(k)}] = [B][Z][B]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 15 - j20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 - j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 + j18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 + j40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 - j40 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 - j18 & 58 - j50 & 23 + j52 & -31 - j52 \\ 58 - j50 & 76 - j10 & 23 & 0 \\ 23 + j52 & 23 & 40 + j70 & -j52 \\ -31 - j52 & 0 & -j52 & 58 + j12 \end{bmatrix} \text{OM.}$$

$$[E^{(k)}] = [B][E] - [B][Z][J] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27,09 - j22,73 \\ 0 \\ 0 \\ 14,14 + j24,49 \\ 0 \\ 53,16 + j19,35 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 15 - j20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 - j50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 + j18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 + j40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 - j40 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ -1,22 + j0,71 \\ 0 \\ 2,28 + j2,71 \\ 0 \\ -1,92 + j0,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60,67 + j2,25 \\ 90,12 + j84,5 \\ 97,32 - j1,35 \\ 56,54 + j59,52 \end{bmatrix} \text{ В.}$$

Решением уравнения (3.59) определяем матрицу контурных токов:

$$[\underline{I}^{(k)}] = [\underline{Z}^{(k)}]^{-1} [\underline{E}^{(k)}] = \begin{bmatrix} -1,188 + j0,389 \\ 1,478 + j0,292 \\ 1,055 - j0,213 \\ 0,396 + j1,034 \end{bmatrix} \text{ А.}$$

Далее рассчитываем комплексные токи обобщенных ветвей в соответствии с соотношением (3.53)

$$[\underline{I}^{(B)}] = [B]^T [\underline{I}^{(k)}] = \begin{bmatrix} -1,188 + j0,389 \\ -0,29 - j0,682 \\ 1,055 - j0,213 \\ -1,584 - j0,644 \\ 1,478 + j0,292 \\ 1,346 + j0,468 \\ -0,529 - j0,858 \\ 0,396 + j1,034 \end{bmatrix} \text{ А,}$$

а затем токи, протекающие по комплексным сопротивлениям ветвей,

$$[\underline{I}] = [\underline{I}^{(B)}] + [\underline{J}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \\ \underline{I}_7 \\ \underline{I}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,188 + j0,389 \\ -1,51 + j0,028 \\ 1,055 - j0,213 \\ 0,696 + j2,066 \\ 1,478 + j0,292 \\ -0,574 + j1,368 \\ -0,529 - j0,858 \\ 0,396 + j1,034 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,251e^{j161,9^\circ} \\ 1,51e^{j179^\circ} \\ 1,076e^{-j11,4^\circ} \\ 2,18e^{j71,4^\circ} \\ 1,51e^{j11,2^\circ} \\ 1,48e^{j112,8,3^\circ} \\ 1,01e^{-j121,7^\circ} \\ 1,11e^{j69^\circ} \end{bmatrix} \text{ А}$$

и напряжения ветвей

$$\underline{[U]} = \underline{[Z]} \underline{[I]} - \underline{[E]} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{U}_5 \\ \underline{U}_6 \\ \underline{U}_7 \\ \underline{U}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -37,118 + j52,327 \\ -51,454 + j76,514 \\ 21,779 + j15,365 \\ 7,443 + j39,552 \\ 14,916 + j64,392 \\ -66,37 + j12,122 \\ 44,591 - j27,487 \\ 52,034 + j12,065 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64,16e^{j125,4^\circ} \\ 92,21e^{j123,9^\circ} \\ 26,65e^{j35,2^\circ} \\ 40,25e^{-j81,3^\circ} \\ 66,1e^{j76,9^\circ} \\ 67,47e^{j169,7^\circ} \\ 52,38e^{-j31,7^\circ} \\ 54,39e^{j12,8^\circ} \end{bmatrix} \text{ В.}$$

Проверим результаты расчета цепи по балансу электрических мощностей.

Комплексная мощность источников энергии, действующих в цепи,

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\text{ист}} &= P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = \underline{[E]}^T \underline{[I]}^* + \underline{[U]}^T \underline{[J]}^* = \\ &= \underline{[E_1 \ 0 \ 0 \ E_4 \ 0 \ E_6 \ 0 \ 0]} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \underline{I}_3^* \\ \underline{I}_4^* \\ \underline{I}_5^* \\ \underline{I}_6^* \\ \underline{I}_7^* \\ \underline{I}_8^* \end{bmatrix} + \underline{[U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8]} \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{J}_2^* \\ 0 \\ \underline{J}_4^* \\ 0 \\ -\underline{J}_6^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \underline{E_1 I_1^*} + \underline{E_4 I_4^*} + \underline{E_6 I_6^*} + \underline{E_8 I_8^*} + \underline{U_4 I_4^*} - \underline{U_6 J_6^*} = 394,951 - j29,914 \text{ В}\cdot\text{А.} \end{aligned}$$

Активная мощность источников $P_{\text{ист}} = 394,951$ Вт, реактивная мощность $Q_{\text{ист}} = -29,914$ вар.

Комплексная мощность, потребляемая нагрузкой,

$$\underline{S}_{\text{нагр}} = P_{\text{нагр}} + jQ_{\text{нагр}} = \underline{[I]}^T \underline{[Z]} \underline{[I]}^* =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{I}_2 & \underline{I}_3 & \underline{I}_4 & \underline{I}_5 & \underline{I}_6 & \underline{I}_7 & \underline{I}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^* \\ \underline{I}_2^* \\ \underline{I}_3^* \\ \underline{I}_4^* \\ \underline{I}_5^* \\ \underline{I}_6^* \\ \underline{I}_7^* \\ \underline{I}_8^* \end{bmatrix} = \\
&= I_1^2 \underline{Z}_1 + I_2^2 \underline{Z}_2 + I_3^2 \underline{Z}_3 + I_4^2 \underline{Z}_4 + I_5^2 \underline{Z}_5 + I_6^2 \underline{Z}_6 + I_7^2 \underline{Z}_7 + I_8^2 \underline{Z}_8 = \\
&= 394,951 - j29,914 \text{ В}\cdot\text{А}.
\end{aligned}$$

Активная мощность нагрузки $P_{\text{нагр}} = 394,951$ Вт, реактивная мощность $Q_{\text{нагр}} = -29,914$ вар.

Сопоставление полученных значений комплексных мощностей источников и нагрузки приводит к выводу, что баланс мощностей выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники : учеб. : в 2 т. Т.1. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М. : Юрайт, 2021. – 725 с.
- 2 Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. В. Зевеке [и др.]. – М. : Энергия, 1989. – 528 с.
- 3 **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники : в 2 т. Т.1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 536 с.
- 4 **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники : в 2 т. Т.2 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
- 5 **Батура, М. П.** Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – Минск : Выш. шк., 2007. – 606 с.
- 6 **Атабеков, Г. И.** Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. И. Атабеков. – 3-е изд., стер. – СПб : Лань, 2009. – 424 с.
- 7 **Шебес, М. Р.** Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособие для вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Выш. шк., 1990. – 488 с.
- 8 **Лосев, Ф. К.** Теория линейных электрических цепей : учеб. для вузов / Ф. К. Лосев. – М. : Выш. шк., 1987. – 511 с.
- 9 **Попов, В. П.** Основы теории цепей : учеб. для вузов / В. П. Попов. – М. : Выш. шк., 1985. – 496 с.
- 10 **Баскаков, С. И.** Лекции по теории цепей : учеб. пособие / С. И. Баскаков. – М. : Едиториал, УРСС, 2002. – 280 с.
- 11 **Новгородцев, А. Б.** Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	3
2 ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	7
2.1 Идеальные источники энергии.....	8
2.2 Схемы замещения реальных источников.....	10
2.3 Закон Ома для активного участка цепи.....	12
2.4 Законы Кирхгофа.....	12
2.5 Применение законов Кирхгофа для анализа цепей.....	16
2.6 Баланс мощностей.....	20
2.7 Топологические графы электрических цепей.....	22
2.8 Топологические матрицы.....	24
2.9 Уравнения Кирхгофа в матричной форме.....	26
2.10 Теорема Телледжена	29
2.11 Эквивалентные преобразования электрических схем.....	30
2.11.1 Последовательное соединение элементов.....	30
2.11.2 Параллельное соединение сопротивлений.....	31
2.11.3 Параллельное соединение активных ветвей.....	33
2.11.4 Соединение сопротивлений треугольником и звездой.....	35
2.11.5 Перенос источников в схеме.....	38
2.12 Метод узловых потенциалов.....	40
2.13 Метод контурных токов.....	46
2.14 Принцип наложения	55
2.15 Метод наложения.....	57
2.16 Принцип взаимности.....	58
2.17 Теорема об активном двухполюснике и применение ее к расчету цепей... ..	59
2.18 Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному.....	64
3 ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА.....	65
3.1 Действующее значение синусоидального тока.....	67
3.2 Изображение синусоидальных функций векторами и комплексными числами.....	68
3.3 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.....	73
3.4 Гармонический ток в резистивном элементе.....	75
3.5 Гармонический ток в индуктивном элементе.....	76
3.6 Гармонический ток в емкостном элементе.....	78
3.7 Гармонический ток в последовательной r, L, C -цепи.....	79
3.8 Гармонический ток в цепи с параллельным соединением элементов r, L, C	81
3.9 Гармонический ток в цепи со смешанным соединением элементов r, L, C	83
3.10 Мощность в цепи гармонического тока.....	84
3.11 Условия передачи максимальной мощности от источника к нагрузке.....	87
3.12 Применение матрично-топологических методов к анализу цепей с гармоническими источниками.....	93
3.12.1 Узловые уравнения в матричной форме.....	96
3.12.2 Контурные уравнения в матричной форме.....	99
3.13 Уравнения баланса мощностей в матричной форме.....	102
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	113

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**

Пособие

Часть I

Редактор *Е. Г. Привалова*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 07.10.2024. Формат 60x84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 6,74. Уч.-изд. л. 5,07. Тираж 100 экз.
Зак. № 1910. Изд. № 22

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653 г. Гомель