УДК 621.3

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАРМОНИИ НА ОСНОВЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Н. Ф. СЕМЕНЮТА

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В основе гармонии мира лежат гармонические пропорции, особое место среди которых занимает золотое сечение (золотая пропорция). Золотое сечение присутствует в окружающем нас мире, науке и технике. Они лежат в основе процессов самоорганизации и эволюции многих систем в природе, науке и технике, обществе и др.

В настоящей работе рассмотрена связь золотого сечения (золотой пропорции) с однородной электрической цепью, являющейся универсальной моделью золотого сечения и гармонических пропорций. Показана также связь гармонических пропорций с параметрами однородных электрических цепей – моделями золотого сечения: основным уравнением передачи электрической цепи, цепными матрицами (Q-матрицами Фибоначчи) и соотношениями Кассини.

Электрическая модель золотого сечения и гармонических пропорций. Рассмотрим многозвенные «золотые» электрические цепи, состоящие из цепочечно (каскадно) включенных простейших четырехполюсников ($n = 3$) и нагрузки $R_н$ (рисунок 1).

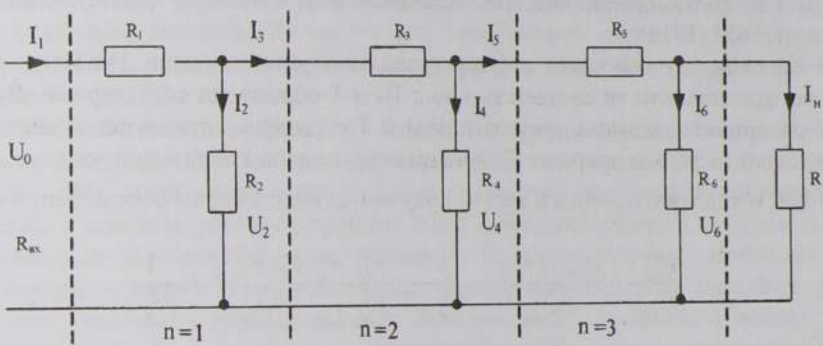

Рисунок 1

Соотношения между величинами напряжения и тока на входе (U_0 и I_1) и выходе ($U_к$ и $I_к$) четырехполюсников определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= AU_н + BI_н \\ I_1 &= CU_н + DI_н \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где A, B, C и D – коэффициенты пропорциональности. Связь между коэффициентами A, B, C и D характеризуется следующим уравнением:

$$AD - BC = 1. \tag{2}$$

Из четырех параметров уравнения (2) независимыми являются только три, т. е. только три параметра могут быть заданы независимо друг от друга, четвертый параметр определяется по уравнению связи.

Особенностью «золотой» цепи является то, что $R_1 = R_2$. В простейшем случае, когда $R_1 = R_2 = 1$ токи (напряжения) продольных и поперечных ветвей звеньев (таблица 1) в случаях холостого хода ($R_н \to \infty$) и короткого замыкания ($R_н = 0$) определяются отношениями чисел последовательности Фибоначчи:

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots, \tag{3}$$

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ F_5,\ F_6,\ F_7,\ F_8,\ F_9,\ F_{10},\ F_{11},\ F_{12},\ \ldots \tag{4}$$

в которой каждый последующий ее член (кроме первых двух $F_1 = 1$ $F_2 = 1$) равен сумме двух предыдущих:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Таблица 1 – **Токи электрической цепи**

$R_н$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
∞	F_6/F_7	F_5/F_7	F_4/F_7	F_3/F_7	F_2/F_7	F_1/F_7
0	F_5/F_6	F_4/F_6	F_3/F_6	F_2/F_6	F_1/F_6	-

Основные параметры цепи отражают свойства последовательности Фибоначчи (4). Так, при $R_н \to \infty$ и напряжении на входе цепи $U_0 = F_7$ ток на входе будет определяться числами Фибоначчи $I_1 = I_2 + I_4 + I_6 = F_5 +$

$+ F_3 + F_1$ и равен сумме чисел Фибоначчи с нечетными индексами или в общем случае $I_1 = F_{2n}$. Напряжение на входе цепи $U_0 = U_1 + U_3 + U_5 + U_6 = F_6 + F_4 + F_2 + 1$ равно сумме чисел Фибоначчи с четными индексами плюс 1 или в общем случае $U_0 = F_{2n+1} + 1$.

Входное сопротивление цепи $R_{вх} = U_0 / I_1$ и в случае холостого хода $R_{вх} = F_7/F_6$ и коротком замыкании $R_{вх} = F_6/F_5$. При $n \to \infty$ входные сопротивления цепей в обоих случаях $R_{вх} \to$ Ф, т.е. стремится к золотому сечению.

Входящие в уравнения (1), (2) коэффициенты пропорциональности A, B, C и D можно представить в виде цепочечной матрицы типа A, которая связана с матрицей чисел Фибоначчи

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}, = \begin{Vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

определитель которой является основным уравнением четырехполюсника

$$AD - BC = 1 \text{ или } F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2 = 1. \tag{6}$$

Из (6) можно получить соотношения для четных и нечетных членов:

$$F_{2n}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1, \; F_{2n-1}^2 = F_{2n}F_{2n-2} + 1, \tag{7}$$

которые известны как соотношения Кассини, установленные в 1680 г. французским астрономом Жан-Домеником Кассини (1625–1712).

Соотношения Кассини связаны также со структурой электрической цепи. Выделим в однородной цепи (см. рисунок 1). четырехполюсники соответственно с П- и Т-образными структурами. В электротехнике П-образную структуру принято называть треугольником, а Т-образную – трехлучевой звездой. Треугольник и звезда – фундаментальные формы природы. С помощью треугольника образованы основные Платоновы тела.

Соотношения для токов треугольника и звезды получим, разделив члены соотношений (7) на F_{2n+2}^2,

$$\frac{F_{2n}^2}{F_{2n+2}^2} = \frac{F_{2n+1}F_{2n-1}}{F_{2n+2}^2} - \frac{1}{F_{2n+2}^2}, \; \frac{F_{2n-1}^2}{F_{2n+2}^2} = \frac{F_{2n}F_{2n-2}}{F_{2n+2}^2} + \frac{1}{F_{2n+2}^2}. \tag{8}$$

Для П-структуры фрагмента цепи (в электротехнике треугольника сопротивлений) можно записать следующие соотношения связи токов продольных и поперечной ветвей цепи (см. таблицу 1):

$$I_{2n}^2 = I_{2n+1}I_{2n-1} - \frac{1}{F_{2n+2}^2}. \tag{9}$$

Для Т-структуры фрагмента цепи (в электротехнике трехлучевой звезды) связь токов продольных и поперечной ветвей цепи:

$$I_{2n-1}^2 = I_{2n}I_{2n+2} - \frac{1}{F_{2n-2}^2}, \tag{10}$$

В реальных электрических цепях число цепочечно соединенных четырехполюсников $n >> 1$ и цепи приобретают свойства цепей с распределенными элементами. Для таких цепей член $1/F_{2n+2}^2 \to 0$ $\left(F_{2n+2}^2 \to \infty\right)$ и из соотношений (9), (10) следуют новые закономерности для токов продольных и поперечных ветвей однородных электрических цепей:

– токи поперечных ветвей однородной лестничной цепи равны среднему геометрическому токов прилегающих к нему продольных ветвей:

$$I_{2m} = \sqrt{I_{2n+1}I_{2n-1}},$$

– токи продольных ветвей однородной лестничной цепи равны среднему геометрическому токов прилегающих к нему поперечных ветвей:

$$I_{2n-1} = \sqrt{I_{2n}I_{2n+2}}.$$

Вывод. Электрическая модель более точная интерпретация математических начал золотого сечения и гармонических пропорций по сравнению с геометрической и алгебраической. Она отражает многие процессы самоорганизации, эволюции и развития систем в природе, науке, технике, обществе и др.