УДК 519.248: 62–192

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ С ОТКАЗАМИ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

А. Н. СТАРОВОЙТОВ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Моделирование транспортной системы с отказами является важной задачей. С необходимостью решения такой задачи сталкиваются как при проектировании новой транспортной системы, так и при оптимизации работы уже существующей. При моделировании транспортной системы или ее элемента нередко прибегают к теории массового обслуживания. В данной работе исследуется модель с групповым поступлением, групповым обслуживанием, выходом системы из строя и восстановлением.

Описание модели. Рассмотрим систему, в которую поступают группы требований стационарным пуассоновским потоком с интенсивностью λ. Требования также обслуживаются группами. Обслуживание групп является экспоненциальным с интенсивностью μ. Время нахождения системы в рабочем состоянии имеет экспоненциальный закон распределения с параметром φ. Если система вышла из строя, то ее немедленно начинают восстанавливать. Все требования, которые были в очереди на момент выхода системы из строя, теряются. Пока систему не восстановили, она игнорирует все поступающие требования.

Время, необходимое для ремонта системы, имеет экспоненциальный закон распределения с параметром ν. Процессы поступления и обслуживания требований, выхода системы из строя и восстановления будем считать независимыми.

Обозначим X_i – количество требований в i-й поступающей группе, Y_i – количество требований в i-й группе, выбранной на обслуживание. Предполагается, что X_i, Y_i – независимые неотрицательные целочисленные случайные величины с вероятностями значений $a(k) = P\{X_i = k\}$, $b(k) = P\{Y_i = k\}$ и производящими функциями $A(x)$, $B(x)$ соответственно. Также предположим, что X_i и Y_i имеют конечные математические ожидания.

Состояние системы будем описывать случайным процессом $n(t)$, который будет характеризовать число требований в системе в момент времени t, когда система исправна, неисправное состояние системы в момент времени t будем обозначать θ. Тогда $n(t)$ является марковским процессом с пространством состояний $Z_+ = \{\theta, 0, 1, \ldots\}$.

Стационарное распределение вероятностей состояний системы. Установлено, что если размеры поступающих групп имеют геометрическое распределение с параметром a, то стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет вид

$$p(0) = p_0,\ p(\theta) = p_1,\ p(n) = (1 - p_0 - p_1)(1-c)c^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $p_1 = \dfrac{\varphi}{\varphi + \nu}$, а p_0 и c находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} a = \dfrac{p_0 + p_1 - 1 + c(1 - p_1)}{p_0}; \\ B(c) = 1 - \dfrac{(\lambda + \varphi)p_0 - \nu p_1}{\mu(1 - p_0 - p_1)}. \end{cases}$$

Данная система имеет решение, удовлетворяющее условиям $0 < p_0 + p_1 < 1$, $0 < c < 1$, если

$$max\{(1-p_1)(1-c), \frac{\nu p_1}{\lambda + \varphi}\} < p_0 < (1-p_1)\frac{\varphi + \mu}{\varphi + \lambda + \mu}.$$

Зная указанные стационарные вероятности, можно определить и другие стационарные характеристики функционирования данной системы.

Приведем пример. Пусть $\lambda = 5$, $\mu = 15$, $\varphi = 1$, $\nu = 10$, $B(x) = 0{,}5x + 0{,}5x^2$ – производящая функция размера групп, выбираемых на обслуживание, а параметр геометрического распределения размера поступающих групп $a = 0{,}8$. Тогда $p_1 = 0{,}091$. Решая вышеприведенную систему уравнений, получим $p_0 = 0{,}299$, $c = 0{,}934$.