Для сравнения результатов были использованы формулы прогибов в шарнирно опертой трехслойной балке, нагруженной равномерно распределенной по всему пролету и по его части, рассмотренные в работе [2].

При нагрузке, равномерно распределенной по всей длине балки, наибольший прогиб составил: по первой методике (авторов доклада) – 2,4 мм; по второй (В. Н. Кобелева с соавторами) – 1,6 мм; по результатам эксперимента – 2,7 мм. При нагрузке, приложенной локально, наибольший прогиб составил: по первой методике – 1,9 мм; по второй – 1,3 мм, по результатам эксперимента – 2,2 мм.

Числовые значения прогибов, полученных по методике авторов доклада, лучше согласуются с данными проведенного испытания балки, чем результаты, рассчитанные по методике [2]. Погрешность составляет не более 10 %. Однако расхождения результатов показывают на необходимость проведения дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, направленных на уточнение расчетных зависимостей для перемещений и напряжений в трехслойных конструкциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Плескачевский, Ю. М.** Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.

2 **Кобелев, В. Н.** Расчет трехслойных конструкций: Справочник / В. Н. Кобелев, Л. М. Коварский, С. И. Тимофеев; под общ. ред. В. Н. Кобелева. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.

УДК 539.3

УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВАНИИ МОДЕЛИ ПАСТЕРНАКА

А. В. ПОПЧЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Постановка задачи и её решение проводятся в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя: ось x направлена вдоль стержня, ось z – вверх, ось y – по нормали к осям z, x. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня l. Деформации малые. На внешние слои стержня действует внешняя распределенная нагрузка, проекции которой $q(x)$ и $p(x)$, а также реакция основания $q_r(x)$, которая описывается моделью Пастернака:

$$q_r(x) = -\kappa w + t_f w,_{xx}, \tag{1}$$

где κ – коэффициент сжатия, формально совпадающий с коэффициентом жесткости основания Винклера, t_f – коэффициент сдвига материала основания.

В качестве искомых величин приняты: прогиб $w(x)$ и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя $u(x)$, дополнительный угол поворота нормали в заполнителе $\psi(x)$. Через h_k обозначается толщина k-го слоя (k =1, 2, 3, $h_3 = 2c$). В соответствии с принятыми кинематическими гипотезами, продольные перемещения $u^{(k)}(x)$ в слоях стержня выражаются через три искомые функции:

$$u^{(1)} = u + c\psi - zw,_x \quad (c \le z \le c + h_1), \; u^{(3)} = u + z\psi - zw,_x \quad (-c \le z \le c),$$
$$u^{(2)} = u - c\psi - zw,_x \qquad (-c - h_2 \le z \le -c), \tag{2}$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций εij следуют из соотношений Коши и выражений (2). Для связи напряжений и деформаций в слоях используем термоупругие соотношения закона Гука (3) в девиаторно-шаровой форме

$$s_{xx}^{(k)}=2G_k(T_k)э_{xx}^{(k)},\ s_{xz}^{(3)}=2G_3э_{xz}^{(3)},\ \sigma^{(k)}=3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)}-\alpha_{0k}T_k), \tag{3}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторные, $э_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций $i, j = x, y, z$, G_k, K_k – модули сдвига и объемной деформации, T_k – температура k-го слоя.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Учтена работа тангенциальных напряжений в заполнителе. В результате получена система обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в перемещениях:

$$a_1u,_{xx}+a_2\psi,_{xx}-a_3w,_{xxx}=p,\ a_2u,_{xx}+a_4\psi,_{xx}-a_6w,_{xxx}-a_5\psi=0,$$

$$-a_3u,_{xxx}-a_6\psi,_{xxx}+a_7w,_{xxxx}+\kappa w-t_f w,_{xx}=q, \tag{4}$$

где коэффициенты a_i зависят от жесткостных параметров слоев.

Рассмотрим процедуру решения системы (4), при этом будем предполагать, что поверхностные нагрузки $p(x), q(x)$ являются аналитическими функциями по длине стержня. После ряда преобразований из системы (4) выделено неоднородное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами относительно прогиба $w(x)$:

$$w,_{xxxxxx}+\alpha_1w,_{xxxx}+\alpha_2w,_{xx}+\alpha_3w=f(x), \tag{5}$$

где $f(x)=\alpha_4q,_{xx}+\alpha_5q+\alpha_6p,_{xxx}+\alpha_7p,_x$

$$\alpha_1=\frac{a_1a_5(a_1a_7-a_3^2)+a_1(a_1a_4-a_2^2)t_f}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},\ \alpha_2=-\frac{a_1(a_1a_4-a_2^2)\kappa+a_1^2a_5t_f}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},$$

$$\alpha_3=\frac{a_1^2a_5\kappa}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},\ \alpha_4=-\frac{a_1(a_1a_4-a_2^2)}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},$$

$$\alpha_5=\frac{a_1^2a_5}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},\ \alpha_6=-\frac{a_3(a_1a_4-a_2^2)-a_2(a_1a_6-a_2a_3)}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)},$$

$$\alpha_7=\frac{a_1a_3a_5}{(a_1a_6-a_2a_3)^2-(a_1a_4-a_2^2)(a_1a_7-a_3^2)}.$$

Решение уравнения (5) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения неоднородного уравнения $w_p(x)$:

$$w(x)=w_0(x)+w_p(x).$$

Для нахождения $w_0(x)$ выпишем характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (5):

$$\lambda^6+\alpha_1\lambda^4+\alpha_2\lambda^2+\alpha_3=0. \tag{6}$$

В зависимости от корней уравнения (6) выписывается аналитический вид искомого решения:

1 Для легких оснований и оснований высокой жесткости ($0<\kappa<\kappa_1, \kappa>\kappa_2$):

$$w(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{-\lambda_1x}+C_3e^{\beta_1x}\cos(\beta_2x)+C_4e^{\beta_1x}\sin(\beta_2x)+C_5e^{-\beta_1x}\cos(\beta_2x)-C_6e^{-\beta_1x}\sin(\beta_2x)+w_p(x),$$

$$\psi(x)=\gamma_1C_1e^{\lambda_1x}-\gamma_1C_2e^{-\lambda_1x}+C_3e^{\beta_1x}(\gamma_2\cos(\beta_2x)+\gamma_3\sin(\beta_2x))+C_4e^{\beta_1x}(\gamma_2\sin(\beta_2x)-\gamma_3\cos(\beta_2x))+$$
$$+C_5e^{-\beta_1x}(-\gamma_2\cos(\beta_2x)+\gamma_3\sin(\beta_2x))-C_6e^{-\beta_1x}(\gamma_2\sin(\beta_2x)+\gamma_3\cos(\beta_2x))+$$
$$+b_1w_p,_{xxx}+b_2w_p,_x+b_3\int w_pdx+b_4\int qdx+b_5p+C_7,$$

$$u(x)=\gamma_4 C_1 e^{\lambda_1 x}-\gamma_{41} C_2 e^{-\lambda_1 x}+C_3 e^{\beta_1 x}\left(\gamma_5\cos(\beta_2 x)+\gamma_6\sin(\beta_2 x)\right)+C_4 e^{\beta_1 x}\left(\gamma_5\sin(\beta_2 x)-\gamma_6\cos(\beta_2 x)\right)+$$
$$+C_5 e^{-\beta_1 x}\left(-\gamma_5\cos(\beta_2 x)+\gamma_6\sin(\beta_2 x)\right)-C_6 e^{-\beta_1 x}\left(\gamma_5\sin(\beta_2 x)+\gamma_6\cos(\beta_2 x)\right)+$$
$$+b_6\left(b_1 w_{p,xxx}+b_2 w_{p,x}+b_3\int w_p dx+b_4\int q dx+b_5 p+C_7\right)+b_7 w_{p,x}+\iint p dx dx+C_8 x+C_9\,, \qquad (7)$$

где $C_1,\cdots,C_9$ – константы интегрирования, определяемые из условия закрепления стержня,

$$\lambda_1=-\lambda_2=\sqrt{m_3+m_4-\frac{\alpha_1}{3}}\,,\; m_3=\sqrt[3]{-\frac{m_2}{2}+\sqrt{\frac{m_1^3}{27}+\frac{m_2^2}{4}}}\,,\; m_3=\sqrt[3]{-\frac{m_2}{2}-\sqrt{\frac{m_1^3}{27}+\frac{m_2^2}{4}}}\,,$$

$$m_1=\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{3}\,,\; m_2=\frac{2\alpha_1^3}{27}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{3}+\alpha_3\,,\; \beta_1=\sqrt{r_1}\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right),\; \beta_2=\sqrt{r_1}\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right),$$

$$r_1=\sqrt{\left(-\frac{m_3+m_4}{2}-\frac{\alpha_1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_4)\right)^2}\,,\; \varphi_1=arctg\left(\left(\frac{m_3+m_4}{2}+\frac{\alpha_1}{3}\right)\Big/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3-m_4)\right)\right),$$

$$b_1=\frac{\left(a_1a_7-a_3^2\right)\left(a_1a_4-a_2^2\right)-\left(a_1a_6-a_2a_3\right)}{a_1a_5\left(a_1a_6-a_2a_3\right)}\,,\; b_2=-\frac{\left(a_1a_4-a_2^2\right)t_f}{a_5\left(a_1a_6-a_2a_3\right)}\,,\; b_3=-\frac{b_2\kappa}{t_f}\,,\; b_4=-\frac{b_2}{t_f}\,,$$

$$b_5=\frac{a_2}{a_1a_5}+\frac{b_2a_3}{a_1t_f}\,,\; b_6=-\frac{a_2}{a_1}\,,\; b_7=\frac{a_3}{a_1}\,,\; \gamma_1=b_1\lambda_1+\frac{b_2}{\lambda_2}\,,\; \gamma_2=b_1\left(\beta_1^3-3\beta_1\beta_2^2\right)+\frac{b_2\beta_1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\,,$$

$$\gamma_3=b_1\left(\beta_2^3-3\beta_1^2\beta_2\right)+\frac{b_2\beta_2}{\beta_1^2+\beta_2^2}\,,\; \gamma_4=b_5\gamma_1+b_5\lambda_1\,,\; \gamma_5=b_5\gamma_2+b_6\beta_1\,,\; \gamma_6=b_5\gamma_3-b_6\beta_2\,.$$

2 Для оснований средней жесткости ($\kappa_1<\kappa<\kappa_2$):

$$w(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{-\lambda_1x}+C_3e^{\lambda_3x}+C_4e^{-\lambda_3x}+C_5e^{\lambda_5x}+C_6e^{-\lambda_5x}+w_p(x)\,,$$

$$\psi(x)=C_1a_{11}e^{\lambda_1x}-C_2a_{11}e^{-\lambda_1x}+C_3a_{12}e^{\lambda_3x}-C_4a_{12}e^{-\lambda_3x}+C_5a_{13}e^{\lambda_5x}-C_6a_{13}e^{-\lambda_5x}+$$
$$+b_1w_{p,xxx}+b_2w_{p,x}+b_3\int w_p dx+b_4\int q dx+b_5p+C_7\,,$$

$$u(x)=C_1a_{21}e^{\lambda_1x}-C_2a_{21}e^{-\lambda_1x}+C_3a_{22}e^{\lambda_3x}-C_4a_{22}e^{-\lambda_3x}+C_5a_{23}e^{\lambda_5x}-C_6a_{23}e^{-\lambda_5x}+$$
$$+b_6\left(b_1w_{p,xxx}+b_2w_{p,x}+b_3\int w_p dx+b_4\int q dx+b_5p+C_7\right)+b_7w_{p,x}+\iint p dx dx+C_8x+C_9\,,$$

где параметры $\lambda_i, r_2, \varphi_2, a_{11}\ldots a_{23}$ определяются формулами, подобными (7).

Следует отметить, что граничные жесткости оснований κ_1 и κ_2 будут зависеть от коэффициента сдвига t_f.

УДК 621.763 : 536

УПРОЩЕННАЯ СХЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСАДКИ ОСНОВАНИЯ

А. А. ПУРГИН, Т. А. РОЩЕВА

Уральский федеральный университет имени первого президента России Б. Н. Ельцина, Российская Федерация

Одной из основных проблем при проектировании сооружений является осадка фундамента. Неравномерная осадка может сильно изменить рабочую схему сооружения, что приведет к выводу из строя отдельных его частей, а возможно и всего сооружения. Существует большое число различных