

УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Шафиева

Белорусский государственный университет транспорта
г. Гомель, Беларусь

Аннотация: рассмотрен изгиб круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем при осесимметричной поверхностной нагрузке и воздействии температурного поля. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком наполнителе нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол. Его обжатие принимается линейным по толщине. Деформации малые.

Ключевые слова: трехслойная пластина, упругость, сжимаемый наполнитель, осесимметричное нагружение, температурное поле.

THERMAL FORCE BENDING OF A THREE-LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Abstract: the bending of a circular three-layer plate with a compressible filler under axisymmetric surface load and the influence of a temperature field is considered. Kirchhoff's hypotheses are valid in thin load-bearing layers. In a light filler, the normal remains straight, rotates at some additional angle. Its compression is assumed to be linear in thickness. The deformations are small.

Keywords: three-layer plate, elasticity, compressible filler, axisymmetric loading, temperature field.

Введение

Постановки и методики решения краевых задач о деформировании слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. В статьях [5–11] рассмотрен ряд задач о деформировании трехслойных стержней и пластин с несжимаемым наполнителем, в том числе при воздействии температурного поля. Публикации [12–21] посвящены исследованию деформирования упругих и упругопластических круглых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при изотермических нагружениях.

Материал и методы исследований

Здесь рассматривается постановка и решение задачи о деформировании круглой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем термосиловой нагрузкой. Используется цилиндрическая система координат. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком наполнителе нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие по толщине принимается линейным. Деформации малые.

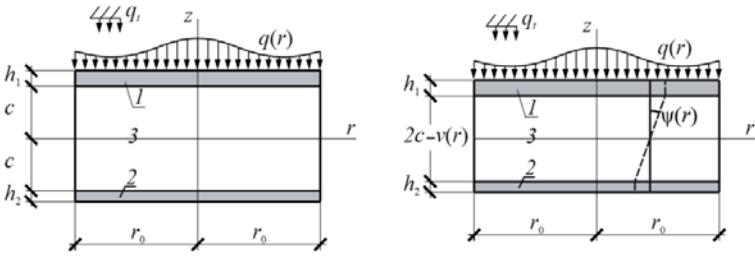


Рис. 1. Расчетная схема круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная нагрузка $q = q(r)$ и падает тепловой поток q_t . На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя. Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и радиальное перемещение срединной плоскости наполнителя, $v(r)$ – функция обжатия наполнителя.

Радиальные перемещения $u^{(k)}(r, z)$ и прогибы $w^{(k)}(r, z)$ в k -ом слое можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$, $v(r)$ следующими формулами:

– в несущих слоях $k = 1, 2$;

$$u_r^{(1)}(r, z) = u + c\psi - z(w_r + v_r), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)}(r, z) = u - c\psi - zw_r, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r) \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

– в наполнителе $k = 3$.

$$u_r^{(3)}(r, z) = u + z\psi - z \left[w_r + \frac{v_r}{2c}(z+c) \right],$$

$$w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z+c) \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где z – координата волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Введем интенсивности обобщенных внутренних усилий в слоях пластины с помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c}S_\alpha^{(3)}, \quad \alpha = r, \varphi. \quad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций воспользуемся термоупругими соотношениями закона Гука в девiatorно-шаровой форме:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k(T_k) \theta^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\vartheta_{rz}^{(3)}, \quad s_z^{(3)} = 2G_3(T_3)\vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma^{(3)} = 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T_3), \quad (3)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, \vartheta_{\alpha}^{(k)}$ – девиаторные ($\alpha = r, \varphi$); $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k), K_k(T_k)$ – температурно зависимые модули сдвига и объемного деформирования, T_k – температура; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Используя вариационный принцип Лагранжа, получена система дифференциальных уравнений равновесия во внутренних усилиях. Чтобы получить из них уравнения равновесия в перемещениях нужно с помощью соотношений (1)–(3) внутренние усилия выразить через искомые функции. Например, для момента M_r получим:

$$\begin{aligned} M_r = & \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\ & + \left[K_1^+ c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] \psi_{,r} + \\ & + \left[K_1^- c h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- c h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] w_{,rr} - \\ & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\ & - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^+ \frac{c^3}{3} \right] v_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_3^- \frac{c^3}{3} \right] \frac{v_{,r}}{r} - \\ & - \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z dz. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате имеем следующую систему дифференциальных уравнений для описания деформирования в температурном поле круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) - 2c G_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} \left(2K_3 - \frac{1}{3} G_3 \right) \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) - K_3^- \left(u_{,r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{1}{2c} K_3^+ v = -q,$$

где a_i – коэффициенты, определяемые термоупругими и геометрическими параметрами слоев, L_2, L_3 – дифференциальные операторы [19].

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям равновесия кинематических граничных условий. Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (5) получено в виде:

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) + \frac{q_0 r}{2\beta^2} (p_1 + p_2) + C_9,$$

$$\psi = -\frac{q_0 r^3}{16a_6} - \frac{1}{a_6} (a_3 u - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) + C_3 \frac{r}{2},$$

$$u = b_1 v_{,r} + (b_2 + b_3) \frac{q_0 r^3}{16} + C_5 \frac{r}{2},$$

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5 q_0}{64(a_6^2 - a_5 a_8)} r^4 + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{12},$$

где C_i – константы интегрирования, следующие из граничных условий.

Это решение отличается от полученных ранее учетом зависимости упругих параметров материалов слоев от температуры, которая рассчитывается по формуле Белла [1–2]. Температура в явном виде входит в решение через константы интегрирования.

Результаты и проблематика

Численные результаты. На рисунках 2, 3 показано изменение перемещений в пластине с несущими слоями, выполненными из различных материалов ($c = 0,23$, $h_1 = 0,02$, $h_2 = 0,02$): 1 – Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, 2 – титан–фторопласт-4–Д16Т, 3 – кордиерит–фт-4–Д16Т, 4 – кордиерит–фторопласт-4–титан.

Следует отметить, что усиление нижнего слоя приводит к увеличению функции обжатия (4) в то время как остальные перемещения уменьшаются.

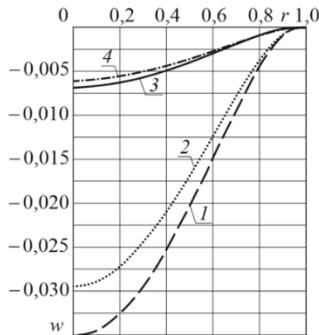


Рис. 2. Прогиб при различных материалах слоев

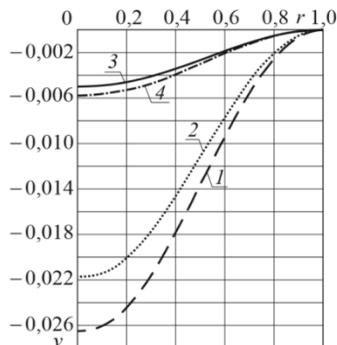


Рис. 3. Функция сжимаемости при различных материалах слоев

Заключение

Приведенная постановка и аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать напряженно-деформированного состояния круговой несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым легким заполнителем в температурном поле.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

Список литературы

1. Горшков А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Журавков М.А. Математические модели механики твердого тела / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. Mechanics of Solid Deformable Body. – Singapore: Springer, 2023. – 317 p.
4. Абдусаттаров А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузках / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS». 2023. – 381 с.
5. Vakhneev S., Starovoitov E. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – №18 (4). – P. 699–704.
6. Козел А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – №1 (54). – С. 30–37.
7. Нестерович А.В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. Междунар. н.-т. сборник. Белорусский национальный технический университет. Минск. – 2020. – №35 – С. 246–252.
8. Трацевская Е.Ю. Динамическая неустойчивость квазитиксотропных моренных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. – 2017. – №1 (46). – С. 107–111.
9. Старовойтов Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – №1 (22). – С. 31–35.

10. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovsky D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2015. – Vol. 88, no.4. – P. 1023–1029.
11. Pronina P.F., Tushavina O.V., Starovoitov E.I. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects // *Periódico Tchê Química*. – 2020. – Vol. 17. – No. 35. – Pp. 753–764.
12. Захарчук Ю.В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – №11. – С. 80–87.
13. Захарчук Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2018. – №4 (37). – С. 72–79.
14. Захарчук Ю.В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – №11. – С. 80–87.
15. Старовойтов Э.И. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2019. – №3 (48). – С. 26–33.
16. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – №12. – С. 66–75.
17. Старовойтов Э.И. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2020. – Т. 26. №1. – С. 58–73.
18. Захарчук Ю.В. Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2020. – С. 61–69.
19. Захарчук Ю.В. Осесимметричный изгиб трёхслойной пластины со сжимаемым наполнителем / *Современные вопросы механики сплошных сред – 2021 : сб. ст. по материалам III Международной конференции*. – Чебоксары: Среда. – 2021. – С. 8–16.
20. Starovoitov E.I., Zakharchuk Y.V., Kuznetsova E.L. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load // *Journal of the Balkan Tribological Association* – 2021. – Vol. 27. No 2. – P. 175–188.
21. Захарчук Ю.В. Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками / Ю.В. Захарчук // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2022. – С. 34–41.

Шафиева Юлия Викторовна – канд. физ.-мат. наук, доцент Белорусского государственного университета транспорта, ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель, Беларусь. E-mail: zakharchuk.julia2@mail.ru

Shafieva Yulia Viktorovna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Belarusian State University of Transport, Kirova str., 34, 246653, Gomel, Belarus. E-mail: zakharchuk.julia2@mail.ru