

## ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ ТЕРМОСИЛОВОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОГОННЫМИ МОМЕНТАМИ

<sup>1</sup>Старовойтов Э.И., <sup>1</sup>Леоненко Д.В., <sup>2</sup>Абдусаттаров А.

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент, Узбекистан

*Посвящается 100-летию со дня рождения нашего учителя Виктора Васильевича Москвитина, доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова*

**Аннотация:** Исследован изгиб трехслойной пластины при прямом и повторном знакопеременном нагружении круговой моментной нагрузкой. Физические уравнения состояния для материалов тонких внешних несущих слоев, учитывают возникающие малые упругопластические деформации. Материал более толстого жесткого заполнителя нелинейно упругий. Предполагается, что деформирование несимметричной по толщине пластины подчиняется гипотезам Кирхгофа в несущих слоях и гипотезе Тимошенко в заполнителе. Перпендикулярно ее верхнему слою падает тепловой поток. Торцы пластины и наружная поверхность нижнего несущего слоя теплоизолированы. Для расчета температурного поля используется формула, полученная методом усреднения теплофизических характеристик по толщине пакета. Учтено влияние температуры на модули упругости и функции нелинейности материалов. Постановка краевой задачи проведена вариационными методами. Ее решение получено методом упругих решений Ильюшина. При повторном знакопеременном нагружении использована теория переменного нагружения Москвитина. Проведен численный анализ полученных аналитических решений, исследована зависимость перемещений от физически нелинейных свойств материалов слоев, температуры.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина; пластичность; изгиб; циклическая моментная нагрузка; температура; численный анализ.

**Введение.** Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого и неупругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках, определяется их повсеместным распространением в транспортном машиностроении, строительстве и транспортировке энергоносителей. Физические уравнения состояния основываются на теории малых упругопластических деформаций [1]. При знакопеременных нагрузках упругопластических элементов конструкций применяется теория Москвитина [2, 3], учитывающая эффект Баушингера [4] и позволяющая сводить краевую задачу при знакопеременном нагружении к первоначальной задаче о прямом нагружении. О необходимости учета эффекта Баушингера, заключающегося в изменении механических свойств материалов после пластического деформирования, в частности микролегированных сталей и других металлах рассмотрены в работах [5–7]. Количественная оценка результатов экспериментального исследования этого эффекта в анизотропных металлах дана в статье [8].

Монографии [9–13] посвящены разработке механико-математических моделей деформирования слоистых упругих и неупругих элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Приведены постановки соответствующих задач, рассмотрены примеры решения и их численная апробация.

Работа [14] посвящена анализу колебаний трехслойных пластин по уточненной теории, в том числе с линейно вязкоупругими слоями. Статьи [15–18] посвящены исследованию квазистатического нелинейного деформирования трехслойных балок, пластин и оболочек.

Циклическому нагружению однородных и трехслойных упругопластических стержней с учетом повреждаемости посвящены работы [19, 20]. Знакопеременное нагружение трехслойных пластин с упругопластическими слоями под действием кольцевой нагрузки исследовано в [21, 22].

**Цель, задачи и методика расчета.** Целью работы является решение задачи о переменном изгибе трехслойной пластины погонной моментной нагрузкой в температурном поле. На основе вариационного принципа Лагранжа сформулирована краевая задача изгиба трехслойных пластин при исходном и знакопеременном нагружении. Аналитическое решение краевой задачи получено в итерациях с помощью метода упругих решений Ильюшина.

**Постановка задачи. Нагружение из естественного состояния.** Пусть интенсивность теплового потока  $q_t$ , падающего на внешнюю поверхность трехслойной несимметричной по толщине круговой пластины постоянна (рис. 1). При решении задачи теплопроводности предполагалось, что нижняя поверхность  $z = -c - h_2$  и контур  $r=1$  теплоизолированы. Тогда температурное поле  $T(z)$  определяется с достаточной степенью точности по формуле [9]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $\tau = at / H^2$ ;  $s = z / H$ ;  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ;  $H = h_1 + h_2 + h_3$ ,  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$ ;  $a = \lambda / C$ ; коэффициенты  $\lambda_k$  – теплопроводности,  $C_k$  теплоемкости;  $\rho_k$  – плотность материала;  $k=1, 2, 3$  номер слоя;  $t$  – время.

Все линейные перемещения, размеры пластины и радиальная координата отнесены к радиусу  $r_0$ . При постановке задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя, перпендикулярно которой ось  $z$  направлена вверх. Для несущих внешних достаточно тонких слоев, толщины которых  $h_1 \neq h_2$ , принимаются кинематические гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, перпендикулярности и несжимаемости деформированной нормали. В относительно толстом жестком заполнителе, толщиной  $h_3=2c$ , деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ , т.е. справедлива гипотеза Тимошенко.

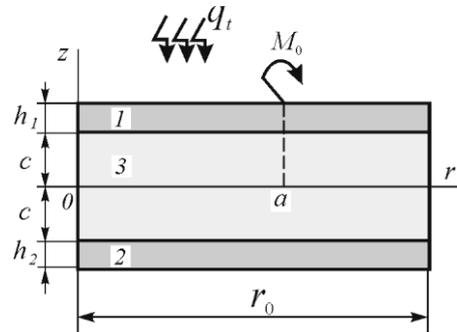


Рис. 1. Нагружение трехслойной пластины погонной моментной нагрузкой

На внешнюю поверхность верхнего слоя рассматриваемой пластины, вдоль окружности относительного радиуса  $a \leq 1$  действует погонный момент, интенсивность которого  $M_0$  (см. рис. 1). Его аналитический вид может быть следующим

$$q(r) = \delta(r-a),_r M_0 = -\frac{\delta(r-a)}{r} M_0, \quad (2)$$

где  $\delta(r)$  – дельта функция Дирака, запятая в индексе обозначает производную по следующей за ней координате.

Нагрузка осесимметричная, поэтому окружные перемещения отсутствуют  $u_\varphi^{(k)} = 0$ , а искомые величины – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя  $u$ , относительный сдвиг  $\psi$  и прогиб пластины  $w$  зависят только от радиальной координаты и не зависят от  $\varphi$ . На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ( $\psi=0$  при  $r=1$ ).

Радиальные перемещения, в силу принятых гипотез, изменяются по толщине слоев линейно:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя напряжения в слоях  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ),  $\sigma_{rz}^{(3)}$ , вводятся обобщенные внутренние силы и моменты:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz. \quad (4)$$

Деформации следуют из соотношений Коши [9] и перемещений (3). Напряжения вычисляются через деформации с помощью соотношений теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T))e_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T^{(k)}), \\ s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T))e_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \quad (5)$$

где  $s_\alpha^{(k)}, e_\alpha^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, e_{rz}^{(3)}$  – компоненты девиаторов и  $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T), K_k(T)$  – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Входящие в (5) функции пластичности  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$  в несущих слоях зависят от интенсивности деформаций  $\varepsilon_u^{(k)}$ , предела текучести –  $\varepsilon_y^{(k)}(T)$  и температуры. В соответствии с условием пластичности Мизеса, при  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$  следует  $\omega_k = 0$ . Подобным образом для функции нелинейности материала заполнителя предполагается, что  $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = 0$  при  $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$ , где  $\varepsilon_s^{(3)}$  – предел нелинейности. Аналитический вид этих функций принимается следующий:

$$\omega_k(\varepsilon_u, T_0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_{y0}^{(k)}, \\ A_k \left( 1 - \frac{\varepsilon_{y0}^{(k)}}{\varepsilon_u^{(k)}} \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_{y0}^{(k)}. \end{cases} \quad (6)$$

Например, для фторопласта-4  $A_3=0.905, \alpha_3=1.48, \varepsilon_s=3.3\%$ ; для сплава Д16-Т  $A_1=0.96, \alpha_1=2.34, \varepsilon_{y0}(T_0)=0.735\%, T_0=293\text{ K}$  [9].

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителе. При кольцевой нагрузке они приведены в [21]. В случае моментной нагрузки (2) они принимают вид:

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_r) = p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_r) - 2cG_3\psi = h_\omega, \quad (7) \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_r) = \frac{\delta(r-a)}{r}M_0 + q_\omega,$$

где  $a_i$  – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и толщины слоев при температуре  $T$  [21];  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Нелинейные составляющие напряжений сгруппированы в правых частях системы (7) и входят в слагаемые с индексом "ω":

$$p_\omega = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega, \quad q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad (8)$$

где величины  $T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_\omega$  ( $\alpha=r, \varphi$ ) вычисляются по формулам (4), в которых следует напряжения  $\sigma_\alpha^{(k)}$  заменить их нелинейными составляющими  $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}$

$$\sigma_{\alpha\omega}^{(k)} = 2G_k\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)e_{\alpha\omega}^{(k)} + 3K_k\alpha_kT^{(k)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)e_{rz\omega}^{(3)}.$$

например

$$M_{\alpha\omega} = 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega_k e_{\alpha}^{(k)} z dz + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz.$$

**Аналитическое итерационное решение краевой задачи.** Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (7) необходимо применять приближенные или численные методы решений. Здесь воспользуемся методом упругих решений Ильюшина, в соответствии с которым система (7) переписывается в следующем итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3 \psi^{(n)} &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) &= \frac{\delta(r-a)}{r} M_0 + q_{\omega}^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины  $p_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $h_{\omega}^{(n-1)}$ ,  $q_{\omega}^{(n-1)}$  в правых частях уравнений (9) служат поправками на нелинейность материалов слоев. Их называют дополнительными «внешними» нагрузками. На первом шаге приближения ( $n=1$ ) они принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения, используя формулы, подобные (8):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_{\alpha}^{(k,n-1)} dz + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ Q_{\omega}^{(n-1)} &= \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} e_{r_z}^{(3,n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k(\epsilon_u^{(k,n-1)}, T^{(k)}). \end{aligned} \quad (10)$$

Для замыкания краевой задачи к уравнениям (9) необходимо добавить условия ограниченности решения в центре пластины и граничные условия, например, при шарнирном опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{r\omega}^{(n-1)} \quad \text{при } r=1. \quad (11)$$

Полученная краевая задача на каждом шаге итерации является линейной. Решение подобной системы уравнений при упругом деформировании пластины ( $n=1$ ) погонным моментом известно [9]. По аналогии выписываем решение, включающее дополнительные «внешние» нагрузки, которое является рекуррентным в задаче о деформировании трехслойной упругопластической пластины:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M_0) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_{\omega}^{(n-1)}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r}^{(n)} - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8^{(n)}}{r}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $I_1(\beta r)$ ,  $K_1(\beta r)$  – функции Бесселя (модифицированная) и Макдональда;  $C_1, C_2, \dots, C_8$  – константы интегрирования;  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  – интегральные операторы

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr;$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3G_3}{b_1b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_5 - a_2a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

Частное решение  $\psi_r^{(n)}$  и интеграл от сдвига  $\psi^{(n)}$  в (12)<sub>1</sub> будут

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)} = & \frac{\gamma_1 M_0}{\beta} H_0(a-r) \left( \frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r)(I_0(\beta a) + I_1(\beta a)\beta a) - -I_1(\beta r)(K_0(\beta a) - K_1(\beta a)\beta a) \right) + \frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2 r} - \\ & - K_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[ \int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \\ & + I_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[ \int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ & \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int \psi^{(n)} dr = & \frac{C_2^{(n)} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 M_0}{\beta^2} H_0(a-r) \times \\ & \times \left( \ln\left(\frac{r}{a}\right) + I_0(\beta a) K_0(\beta r) - K_0(\beta a) I_0(\beta r) \right) - \\ & - \int \left( K_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[ \int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + I_1(\beta r) \left[ \frac{b_3}{b_1b_3 - b_2^2} \left[ \int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left( \int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \right) dr, \end{aligned}$$

$$\int L_3^{-1}(M_0) dr = \frac{M_0}{4} \left( 2r^2 - 2a^2 - 3a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) H_0(a-r). \quad (14)$$

Константы интегрирования следуют из требования ограниченности решения в начале координат и граничных условий на контуре (11).

Таким образом, при нагружении упругопластической трехслойной пластины погонным моментом прогиб  $w^{(n)}(r)$ , радиальное перемещение  $u^{(n)}(r)$  и сдвиг в заполнителе  $\psi^{(n)}(r)$  вычисляются по формулам (12)–(14). Температура входит в решение через константы интегрирования  $C_5, C_7$ .

Следует отметить, что сходимость метода упругих решений доказана в достаточно широких пределах [1], а для материалов Д16-Т, фторопласт-4, используемых в дальнейшем, подтверждена в работе [9].

*Численные результаты* получены для пластины, слой которой выполнены из материалов Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Интенсивность силовой погонной нагрузки принята  $M_0=0.3$  МН, толщины слоев –  $h_1=0.02$ ;  $h_2=0.06$ ;  $h_3=0.4$ . Параметры упругости и нелинейности, входящие в функцию пластичности (6), заимствованы из [9]. Температура при расчетах усреднялась по толщине пластины. Для описания зависимости параметров упругости от температуры использовалась формула Белла [23]. Результаты продемонстрировали достаточно быструю сходимость итерационного метода, уже 5-е приближение отличалось от 4-го менее чем 0.5 %.

На рисунке 2,  $a$  и  $b$  показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба круговой трехслойной пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при радиусе моментной окруж-

ности  $a=0.75$ : 1, 2 – упругие и физически нелинейные при  $T_1=293$  К; 3, 4 – упругие и физически нелинейные при  $T_2=323$  К. При изотермическом нагружении учет физической нелинейности материалов слоев изменяет упругий прогиб на 14 %, повышение температуры на 30 приводит к его увеличению на 21 %.

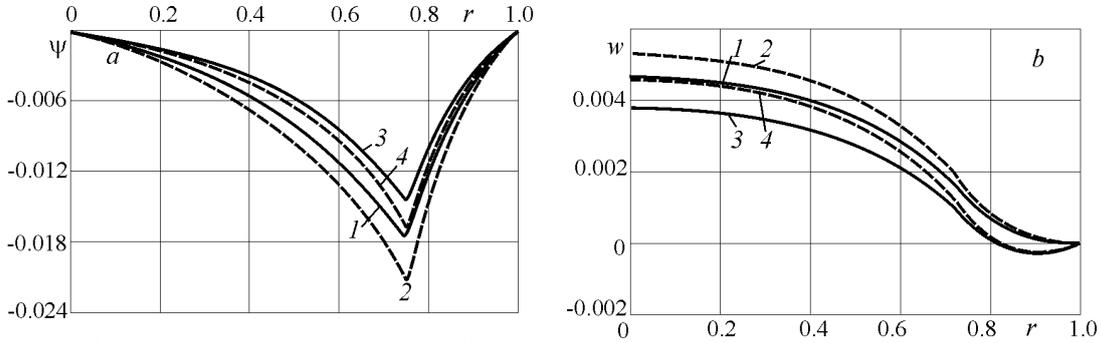


Рис. 2. Упругие и физически нелинейные перемещения при радиусе силовой окружности  $a = 0.75$  ( $T_1 = 293$  К,  $T_2 = 323$  К)

У сдвигов наблюдаются максимумы в виде пиков примерно при  $r=0.75$ . Их величина при учете нелинейности материалов слоев уменьшается.

**Повторный знакопеременный изгиб пластины.** Пусть в момент времени  $t=t_1$ , происходит мгновенная разгрузка и нагружение пластины усилиями обратного знака:

$$q''(r) = \frac{\delta(r-a)}{r} M_0. \quad (15)$$

Принимается, что температура фиксируется  $T_1(z) = T(z, t_1)$  и в дальнейшем не изменится во всех точках пластины. За счет нагрузки (15) в слоях возникнут деформации  $\varepsilon_\alpha^{n(k)}$ , напряжения  $\sigma_\alpha^{n(k)}$ ,  $\sigma_{rz}^{n(3)}$  и перемещения  $u''$ ,  $\psi''$ ,  $w''$ . В соответствии с теорией Москвитина [2], примененной для слоистых пластин в [21], вводятся для указанных величин и нагрузок разности:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma_\alpha^{r(k)} - \sigma_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma_{rz}^{r(3)} - \sigma_{rz}^{n(3)}, \quad s_\alpha^{(k)*} = s_\alpha^{r(k)} - s_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma^{r(k)} - \sigma^{n(k)}, \\ \varepsilon_\alpha^{n(k)} &= \varepsilon_\alpha^{r(k)} - \varepsilon_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon_{rz}^{n(3)} = \varepsilon_{rz}^{r(3)} - \varepsilon_{rz}^{(3)*}, \quad e_\alpha^{n(k)} = e_\alpha^{r(k)} - e_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon^{n(k)} = \varepsilon^{r(k)} - \varepsilon^{(k)*}, \\ \psi'' &= \psi' - \psi^*, \quad u'' = u' - u^*, \quad w'' = w' - w^*, \end{aligned} \quad (16)$$

$$q^*(r) = q(r) - q''(r) = \frac{2\delta(r-a)}{r} M_0,$$

где один штрих отмечает величины перед разгрузкой, т.е. полученные при нагружении из естественного состояния.

Для перемещений и деформаций со звездочками выполняются соотношения Коши. Напряжения определяются через деформации соотношениями типа (5):

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)*} &= 2G_k(1-\omega_k^*)e_\alpha^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k\varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3(1-\omega_3^*)e_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (17)$$

где параметры упругости  $G_k(z)=G_k(T_1(z))$ ,  $K_k(z)=K_k(T_1(z))$  – зафиксированы в момент разгрузки.

По сравнению с соотношениями (5) температура в явном виде в (17) не входит. Используя гипотезу Москвитина, полагаем, что функции пластичности и физической нелинейности со звездочками в (17) подобны соответствующим функциям при нагружении из естественного состояния (6), но с другими константами. Для дюралюминия это  $A_1^* = 0.924$ ,  $\alpha_1^* = 2.27$ ,  $\varepsilon_{y1}^*(T_1) = \beta_1 \varepsilon_{y1}(T_1)$ ,  $\beta_1 = 2.02$  [9]. Материал заполнителя считается нелинейно упругим, поэтому его параметры при знакопеременном нагружении не изменяются.

Проведя процедуру постановки краевой задачи для величин со звездочками, подобную нагружению из естественного состояния, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений похожую по виду на (7). Краевая задача для перемещений со звездочками  $u^{(n)*}(r)$ ,  $\psi^{(n)*}(r)$ ,  $w^{(n)*}(r)$  замыкается присоединением к системе уравнений равновесия граничных условий типа (11). Ее решение строится методом упругих решений.

Итерационное решение задачи формально следует из решения (12), в котором нужно нагрузку и функции физической нелинейности заменить соответствующими величинами со звездочками:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)*} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(M^*) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)*}) dr - \\ &\quad - \frac{C_1^{(n)*}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)*}, r - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)*} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$  – константы интегрирования, частное решение  $\psi_r^{(n)*}$ , интегралы от сдвига  $\psi^{(n)*}$  и нагрузки  $M^*$  вычисляются по формулам (13), (14), в которых необходимо ввести в дополнительных нагрузках звездочки, исключить в  $C_5^{(n)*}$  температуру и заменить  $M^*$  на  $2M_0$ .

После этого искомые перемещения, деформации и напряжения в рассматриваемой пластине при повторном знакопеременном нагружении определяются из соотношений (16), (12), (18), например:

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

На рис. 3 показано изменение прогиба  $a$  и относительного сдвига в заполнителе  $b$  вдоль радиуса пластины при повторном знакопеременном изгибе погонными моментами  $M_0=0.3$  МН: 1 – упругая пластина, 2 – изотермическая упругопластичность, 3 – термоупругопластичность. Здесь после перемены знака нагрузки максимальная величина перемещений несколько уменьшается, как и ранее [21], вследствие циклического упрочнения материалов несущих слоев.

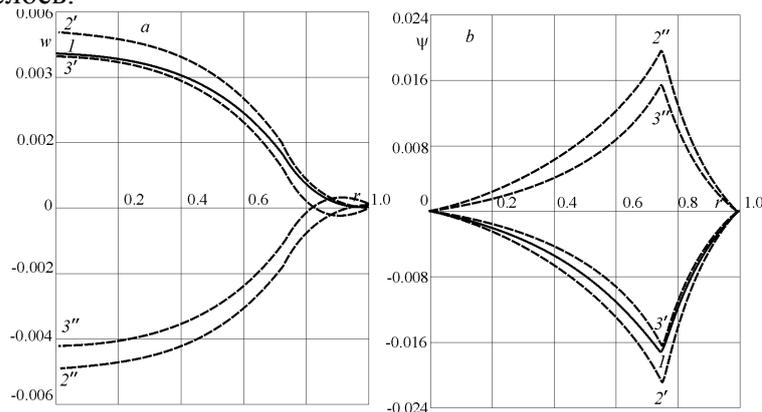


Рис. 3. Перемещения при переменном изотермическом и термосиловом нагружениях погонной поперечной моментной нагрузкой ( $T_1 = 293$  К,  $T_2 = 323$  К)

**Заключение.** Рассмотренная методика решения краевых задач для трехслойных упругопластических пластин позволяет строить аналитическое решение при перемене знака погонной моментной нагрузки после пластического деформирования в температурном поле. Полученные аналитические результаты позволили провести численный анализ, кото-

рый подтвердил быструю сходимость итерационного метода, основанного на методе упругих решений, отметил существенное влияние пластичности материалов слоев и температуры на НДС в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда фундаментальных исследований БРФФИ (проект № T22УЗБ-015).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин А.А.* Труды. Пластичность. М: Логос, 2004. – 388 с.
- [2] *Москвитин В.В.* Циклическое нагружение элементов конструкций. М: URSS, 2019. – 344 с. (переиздание)
- [3] *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М: URSS, 2019. – 327 с. (переиздание) 4,
- [4] *Bauschinger I.* Über die Quercontraktion und Dilatation bei der Langenausdehnung und Zusammendruckung pristiatischer Körper // *Civilingenieur.* 1879. Vol. 25. S.81–124.
- [5] *Kostrzyzhev A.G., Strangwood M., Davis C.L.* Bauschinger Effect in microalloyed Steels: Part II. Influence of Work Softening on Strength Development During UOE Line-Pipe Forming // *Metallurgical and materials transactions A.* 2011. Vol. 42A. No.10. P.3170–3177.
- [6] *Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гултыяев В.И.* Исследование эффекта Баушингера и границы текучести при упруго-пластическом деформировании металлов // *Вестник ПНИПУ Механика.* 2013. №1. С.94–105.
- [7] *Абиров Р.А.* Развитие математических моделей пластичности с учетом деформирования материалов при сложном нагружении: Автореф ... дис.докт.физ.-мат. наук. Ташкент, 2014. – 52 с.
- [8] *Мерсон Д.Л., Васильев Е.В., Виноградов А.Ю.* Количественная оценка эффекта Баушингера в магниевых сплавах с эффектом асимметрии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2017. Т. 83. №3. С.55–58.
- [9] *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. Москва. ФИЗМАТЛИТ, 2005, –576 с.
- [10] *Старовойтов Э.И. Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н.* Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней. Москва. Изд-во МАИ, 2016, – 184 с.
- [11] *Журавков М.А., Старовойтов Э.И.* Математические модели механики твердого тела. Минск. БГУ, 2021, –535 с.
- [12] *Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M.* Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications. Academic Press, 2016, – 410 p.
- [13] *Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I.* Mechanics of Solid Deformable Body. Singapore. Springer, 2023, –317 p.
- [14] *Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V.* Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads // *Strength of materials.* 2002. Vol.34. No.5. P.474–481.
- [15] *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму // *Прикладная математика и механика.* 2018. Т. 82. № 1. С.44–57.
- [16] *Belinha J., Dints L.M.* Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method // *Composite Structures.* 2007. Vol.78. No.3. P.337-350.
- [17] *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A.* Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels // *Materials Sciences and Applications.* 2013. Vol.4. No.8. P.471–477.
- [18] *Pronina P.F., Tushavina O.V., Starovoitov E.I.* Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects // *Periódico Tchê Química.* 2020. Vol. 17. No.35. Pp.753–764.
- [19] *Старовойтов Э.И., Абдусаттаров А., Рузиева Н.Б.* Циклическое нагружение упругопластических трёхслойных стержней с учетом их повреждаемости // *Узб. журнал Проблемы механики.* 2023. № 1. С. 66–74.
- [20] *Абдусаттаров А., Исомиддинов А.И., Рузиева Н.Б.* Упругопластический расчет тонкостенных стержней при переменном нагружении с учетом повреждаемости // *Узб. журнал «Проблемы механики».* 2021. № 2. С. 3 – 16.
- [21] *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А.* Изгиб трехслойной пластины в температурном поле знакопеременной кольцевой нагрузкой // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2022. Т.28. №3. С. 339–358.
- [22] *Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б.* Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях. Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
- [23] *Белл Дж. Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых тел. Ч. 1. Москва. Наука, 1984, – 600 с.

Дата поступления  
18.06.2023

**Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Абдусаттаров А. Уч қатламли пластинканинг ўзгарувчан термик ва погонли момент таъсирида такрорий юкланиши**

**Аннотация:** Мақолада доиравий момент таъсирида бир мартали ва қайта такрорий юкланишларда уч қатламли пластинка эгилишига тадқиқ қилинган. Физик ҳолат тенгламаси ташиқи юк кўтарувчи қатламнинг эластик-пластик деформацияланишини ҳисобга олади. Нисбатан қалин қаттиқ тўлдирувчининг материали чизиқсиз эластик. Қалинлиги бўйича носимметрик юк кўтарувчи қатлам Кирхгоф гипотезаси бўйича, тўлдирувчи эса Тимошенко гипотезаси бўйича деформацияланади деб қабул қилинади. Ташиқи қатламга тик ҳолатда иссиқ оқим тушади. Пластинка чегараси ва қуйи қатлам ташиқи сирти иссиқлик жиҳатдан изоляцияланган. Температуранинг таъсирини ҳисоблаш учун физик иссиқлик параметрларини пластинкани қалинлиги бўйича ўртачалаштириши усули асосида олинган формулалардан фойдаланилган. Температуранинг эластиклик модулига ва материалнинг ночизиқли характеристикаларига таъсири эътиборга олинган. Вариацион усуллар асосида чегаравий масалалар қўйилган. Унинг ечими Ильюшиннинг эластик ечими усулида олинган. Ўзгарувчан юкланишлар таъсирини текширишида Москвитиннинг такрорий юкланишлар назариясидан фойдаланилган. Олинган аналитик ечимлар сонли таҳлил қилиниб, кўчирининг материал физик ночизиқли хоссаларига ва температурага боғлиқлиги тадқиқ этилган.

**Калим сўзлар:** доиравий уч қатламли пластинка; эластиклик; эгилиши; циклик момент юкланиши; температура; сонли таҳлил.

*Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A. Alternating thermal force loading three-layer plate with linear torque load*

**Abstract:** The bending of a three-layer plate under direct and repeated alternating loading by a circular torque load is investigated. The physical equations of state for materials of thin outer bearing layers take into account the small elastic-plastic deformations that occur. The material of the thicker rigid filler is non-linearly elastic. It is assumed that the deformation of the plate, which is asymmetric in thickness, obeys the Kirchhoff hypotheses in the bearing layers and the Timoshenko hypothesis in the filler. The heat flow falls perpendicular to its upper layer. The end face of the plate and the outer surface of the lower bearing layer are thermally insulated. To calculate the temperature field, the formula obtained by averaging the thermophysical characteristics over the thickness of the package is used. The influence of temperature on the elastic modulus and the nonlinearity functions of materials is taken into account. The formulation of the boundary value problem was carried out by variational methods. Its solution is obtained by the Ilyushin elastic solutions method. In case of repeated alternating loading, Moskvitin's theory of alternating loading was used. The numerical analysis of the obtained analytical solutions is carried out, the dependence of the displacements on the physically nonlinear properties of the layer materials and temperature is investigated.

**Keywords:** three-layer round plate; plasticity; cyclic torque load; bending; temperature; numerical analysis

УДК 531.01

## АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО РОТОРА В РАМКАХ МОДЕЛИ ДЖЕФФКОТТА

<sup>1</sup>Сидиков М.Н., <sup>2</sup>Тўражонов К.М.

<sup>1</sup>НИТУ «МИСиС», Алмалыкский филиал, Алмалык, Узбекистан

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан

E-mail: <sup>1</sup>mansur106@mail.ru, <sup>2</sup>q.turajonov@gmail.com

**Аннотация:** В рамках модели Джеффкотта исследуется вопрос существования стационарных движений ротора, установленного на гибком валу с шаровым автобалансирующим устройством (АБУ), когда беговые дорожки балансируемых шариков установлены не только эксцентрично, но и обладают горизонтальной осью вращения. Такая постановка задачи позволяет учитывать также и малые угловые погрешности при установке автобалансирующего устройства. С помощью пакета программ получен график зависимости между амплитудой движения центра масс ротора и угловой скоростью ротора в стационарном движении.

**Ключевые слова:** автобалансирующая система; эксцентриситет; угловая погрешность.

**Введение.** Как известно, имеются два распространенных способа балансировки несбалансированных роторов: активный и пассивный. В последнее время научные исследования посвящены в основном пассивной балансировке с помощью подвижных масс. Особенностью пассивной балансировки является то, что в зависимости от угловой скорости ротора подвижные массы занимают определенное положение, балансируя ротор. Особенно актуален вопрос прохождения ротора через критическую угловую скорость, которая характеризуется достаточным увеличением амплитуды колебаний центра масс ротора. В работах [1–4] рассмотрены вопросы динамики статически и динамически несбалансированного ротора, установленного на гибком валу с шаровым автобалансирующим устройством, с учетом погрешности (эксцентриситета) при установке. При этом беговые дорожки представляют собой круговые или эллиптические траектории. В рамках модели Джеффкотта получены уравнения движения в лагранжевых переменных. В системе координат, связанной с вращающимся ротором, найдены условия стационарности движения, а также проделан анализ полученных уравнений. При конкретных значениях параметров системы численным методом получены графики изменения амплитуды колебаний ротора при прохождении ротора через критическую скорость при постоянном значении углового ускорения, а также момента. Рассмотрен вопрос устойчивости стационарных движений, соответствующих полубалансированному и несбалансированному режимам, получены достаточные условия устойчивости по первому приближению. Показано, что если беговые дорожки представляют собой эллипсы, то полностью сбалансированный режим движения ротора отсутствует.

**Математическая модель.** Рассматривается модель ротора в виде абсолютно твердого цилиндра, закрепленного по вертикальной продольной оси с помощью упругого вала на двух опорах (рис.1). В качестве математической модели принимается модель, рассмотренная в работах [1–4], с дополнением, что круговые беговые линии (трубки) могут