

Безопасный и комфортный город. VI МНПК. 2023. С. 481 – 487.
Safe and comfortable city. VI ISPC. 2023. P. 481 – 487.

Научная статья
УДК 624.072

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ УПРУГИХ СРЕД

Кристина Александровна Сирош¹✉, Оксана Васильевна Козунова²

^{1,2}Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

²Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

¹kris.sirosh@mail.ru✉

²kozunova@gmail.com

Аннотация. Исследуется изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) фрагмента регулярной системы перекрестных балок на упругом основании при изменении изгибной жесткости и глубины сжимаемой зоны упругого основания. Принято, что система балок представляет собой совокупность жестко соединенных стержней. Статический анализ осуществляется с использованием вариационно-разностного метода, для которого характерна замена дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. Физическая нелинейность учитывается через зависимость «момент – кривизна».

Ключевые слова: регулярная система балок, вариационно-разностный метод, упругое основание, контактная зона, прогиб, осадки, физическая нелинейность.

Original article

STATIC ANALYSIS OF A REGULAR SYSTEM OF BEAMS ON AN ELASTIC FOUNDATION TAKING INTO ACCOUNT THE PHYSICAL NONLINEARITY OF ELASTIC MEDIA

Kristina A. Sirosh¹✉, Oksana V. Kozunova²

^{1,2}Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

²Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

¹kris.sirosh@mail.ru✉

²kozunova@gmail.com

Abstract. A change in the stress-strain state of a fragment of a regular system of cross beams on an elastic base is investigated with a change in the bending stiffness and depth of the compressible zone of the elastic base. It is accepted that the beam system is a set of rigidly connected rods. Static analysis is carried out using the variation-difference method, which is characterized by the replacement of differential equations by finite-difference approximations. Physical nonlinearity is taken into account through the "moment – curvature" relationship.

Keywords: regular beam system, variation-difference method, elastic base, contact zone, deflection, precipitation, physical nonlinearity.

Вариационно-разностный метод (ВРМ) основывается на методе Ритца-Тимошенко и вариационном принципе Лагранжа-Дирихле с заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. Смысл ВРМ состоит в приведении задачи минимизации функционала полной потенциальной энергии расчетного фрагмента исследуемой системы с параметрами расчетной области к задаче минимизации функции многих переменных.

© Сирош К.А., Козунова О.В., 2023

Рассмотрим регулярную систему балок, свободно опирающуюся на упругое основание под действием внешней сосредоточенной нагрузки. Такая система представляет собой совокупность жестко соединенных ортогональных стержней, оси которых совпадают с одной из главных осей инерции балок. Система балок разбивается на расчетные элементы – крестообразные фрагменты (места пересечения балок), соединенные между собой. Изгибные жесткости балок регулярной системы EJ_x , EJ_y одинаковые. Внешняя сосредоточенная нагрузка P перпендикулярна плоскости основания. Упругое основание заменяется расчетной областью из совокупности ячеек и узловых точек, полученных путем аппроксимации основания симметричной объемной разбивочной сеткой (шаг сетки в осях координат: Δx , Δy , Δz (рисунок 1)).

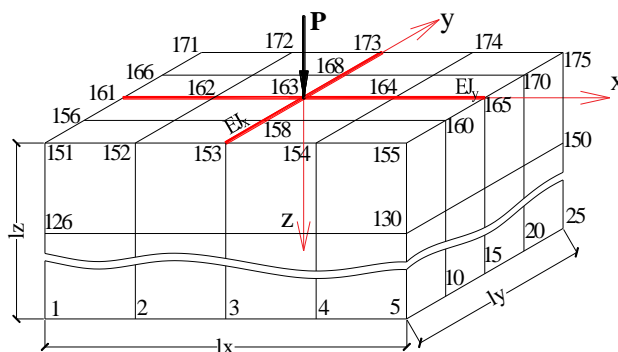


Рисунок 1 – Расчетная область решения пространственной задачи

Граничные условия. Кинематические: на границе расчетной области основания $u = 0$, $v = 0$; в контактной зоне прогиб конструкции равен осадкам основания. Смешанные: в крайних точках балок поперечные силы Q_z и углы поворота φ_x , φ_y равны нулю.

Алгоритм расчета регулярной системы перекрестных балок методом Ритца-Тимошенко [1,2,3] дает последовательность всех этапов расчета. Подробный алгоритм решения приведен в работе автора [4].

Функционал полной энергии есть сумма полной энергии деформации изотропного основания, энергии изгиба двух перекрестных железобетонных балок и потенциала внешней нагрузки [4].

Решение задачи реализуется методом конечных разностей (МКР) – через замену дифференциальных уравнений на конечно-разностные соотношения. При решении энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки расчетной области, а затем суммируется по объему упругого основания [5]. Тогда полная энергия деформации всего упругого основания задачи

$$U = \iiint_{z,y,x} U_f dx dy dz = \int_v U_f dv, \quad (1)$$

где U_f – функционал энергии деформаций основания для отдельно взятой объемной ячейки расчетной области [4];

dv – элемент объема расчетной области основания.

Энергия изгиба крестообразного фрагмента балок есть совокупность энергий изгиба каждой балки (энергия деформаций отождествлена с энергией изгиба конструкции, при условии, что деформации сдвига не учтены)

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y = \frac{EJ_x}{2} \int_{-l_x}^{l_x} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EJ_y}{2} \int_{-l_y}^{l_y} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy, \quad (2)$$

где EJ_x , EJ_y – изгибные жесткости балок.

Потенциал внешней нагрузки определяется из формулы

$$\Pi = -\left(\int_{-l_x}^{l_x} q(x) w(x) dx + \int_{-l_y}^{l_y} q(y) w(y) dy \right). \quad (3)$$

Решение задачи реализуется математически через принятие за неизвестные компонентов вектора узловых перемещений. Неизвестные перемещения будут вычислены из условия тождества производных от полной энергии по каждому из перемещений нулю ввиду минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия.

Внутренние усилия, возникающие в балках, и контактные напряжения определяются по вертикальным перемещениям $w_i(z)$ с учетом граничных условий в контактной зоне через формулы аппроксимации производных [6]. Исходя из кинематических граничных условий расчетной области, перемещения контурных точек обнуляются.

Внешняя нагрузка P_{163} действует на систему балок (см. рисунок 1), ее можно представить в виде суммы двух составляющих (см. рисунок 2): $P_{163} = P_x^{(163)} + P_y^{(163)}$, где $P_x^{(163)} = P_y^{(163)} = P_{163}/2 = 2000/2 = 1000 \text{ кН}$. Каждую из составляющих внешней силы, приходящуюся на каждую балку, представим в виде совокупность сил, приложенных в узлах балки:

$$P_x^{(163)} = P_x^{(2)} + P_x^{(3)} + P_x^{(4)}; \quad P_y^{(163)} = P_y^{(2')} + P_y^{(3')} + P_y^{(4')}. \quad (4)$$

Вычислим значение каждой силы (см. рисунок 3):

$$\begin{aligned} P_x^{(2)} = P_x^{(4)} = \frac{P_x^{(163)}}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ кН}; & \quad P_y^{(2')} = P_y^{(4')} = \frac{P_y^{(163)}}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ кН}; \\ P_x^{(3)} = \frac{P_x^{(163)}}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ кН}; & \quad P_y^{(3')} = \frac{P_y^{(163)}}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (5)$$

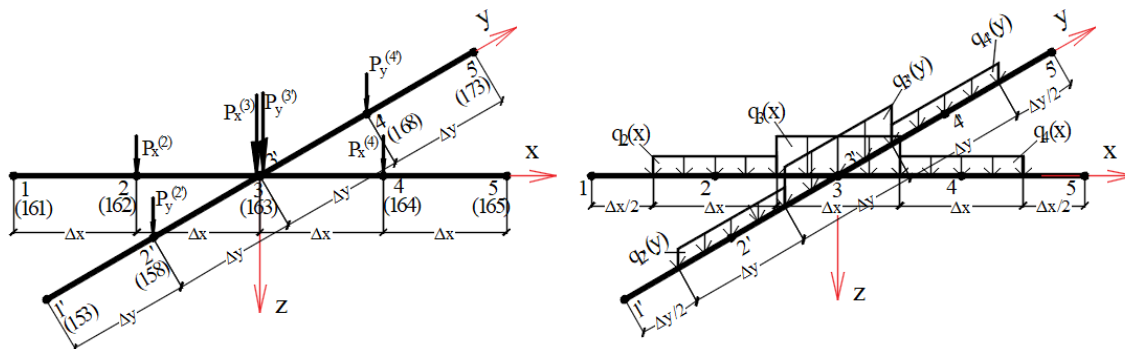


Рисунок 2 – К расчету контактных напряжений и внутренних усилий

Заменяем сосредоточенные силы на распределенные:

$$\begin{aligned} q_2(x) = q_4(x) = \frac{P_x^{(2)}}{\Delta x} = \frac{P_x^{(4)}}{\Delta x} = \frac{250}{1} = 250 \text{ кН / м}, & \quad q_{2'}(y) = q_{4'}(y) = \frac{P_y^{(2')}}{\Delta y} = \frac{P_y^{(4')}}{\Delta y} = \frac{250}{0,5} = 500 \text{ кН / м}, \\ q_3(x) = \frac{P_x^{(3)}}{\Delta x} = \frac{500}{1} = 500 \text{ кН / м}, & \quad q_{3'}(y) = \frac{P_y^{(3')}}{\Delta y} = \frac{500}{0,5} = 1000 \text{ кН / м}. \end{aligned} \quad (6)$$

Контактные напряжения в конечно-разностном представлении [7]:

$$\begin{aligned} p_z^{(k)} = q_k(x) - EJ_{y \ i=i+1} \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4}, & \quad (7) \\ p_z^{(k')} = q_{k'}(y) - EJ_{x \ i'=i'+1} \frac{w_{i'-2} - 4w_{i'-1} + 6w_{i'} - 4w_{i'+1} + w_{i'+2}}{\Delta y^4}, \end{aligned}$$

где $q_k(x)$, $q_{k'}(y)$ – внешняя нагрузка, действующая на конструкцию в k -том и k' сечении;

$EJ_{x i'=I'+1}, EJ_{y i=II+1}$ – изгибная жесткость балок;

I_1, I'_1 – номер узла начала балок.

Моменты, возникающие в железобетонных балках, в конечно-разностном виде [7]:

$$M^{(k)} = -EJ_{y i=I_1+1} \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2},$$

$$M^{(k)} = -EJ_{x i'=I'_1+1} \frac{w_{i'-1} - 2w_{i'} + w_{i'+1}}{\Delta y^2}. \quad (8)$$

Для определения перемещений точек основания и контактных напряжений в зоне контакта балок и основания, а также для их исследования в области физической нелинейности составлена компьютерная программа с применением прикладного пакета "Mathematica".

Результаты решения представлены в табличном виде и графическом виде.

Таблица 1 – Значения осадок регулярной системы перекрестных балок при изменении жесткости

Балка длиной 4м в направлении оси x				Балка длиной 2м в направлении оси y			
Изгибная жесткость $EJ_y, \text{кНм}^2$	Узловые точки			Изгибная жесткость $EJ_x, \text{кНм}^2$	Узловые точки		
	1 (161), 5 (165)	2 (162), 4 (164)	3 (163)		1'(153), 5' (173)	2'(158), 4' (168)	3' (163)
	Перемещения $w_x, \text{м}$				Перемещения $w_y, \text{м}$		
1000	0,00386	-0,00383	0,00406	1000	0,00313	-0,00324	0,00406
1500	0,00269	-0,00267	0,00290	1500	0,00198	-0,00209	0,00290
2000	0,00211	-0,00208	0,00231	2000	0,00141	-0,00151	0,00231
2500	0,00175	-0,00173	0,00196	2500	0,00107	-0,00116	0,00196

Таблица 2 – Значения осадок регулярной системы перекрестных балок при изменении глубины сжимаемой зоны основания

Балка длиной 4м в направлении оси x				Балка длиной 2м в направлении оси y			
Глубина сжимаемой толщи основания $l_z, \text{м}$	Узловые точки			Глубина сжимаемой толщи основания $l_z, \text{м}$	Узловые точки		
	1 (161), 5 (165)	2 (162), 4 (164)	3 (163)		1'(153), 5' (173)	2'(158), 4' (168)	3' (163)
	Перемещения $w_x, \text{м}$				Перемещения $w_y, \text{м}$		
3	0,00243	-0,00246	0,00268	3	0,00110	-0,00139	0,00268
4	0,00227	-0,00228	0,00250	4	0,00124	-0,00145	0,00250
5	0,00217	-0,00216	0,00239	5	0,00134	-0,00149	0,00239
6	0,00211	-0,00208	0,00231	6	0,00141	-0,00151	0,00231

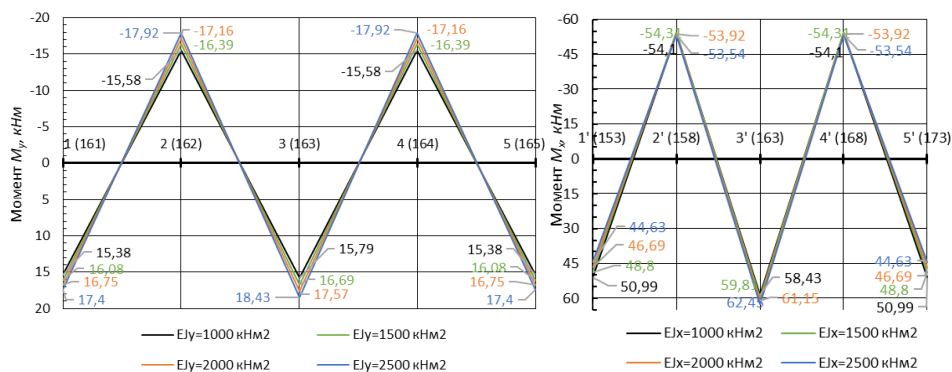


Рисунок 3 – Эпюры моментов: M_y – вдоль оси x (изгиб XOZ), длина балки 4м; M_x – вдоль оси y (изгиб YOZ), длина балки 2м

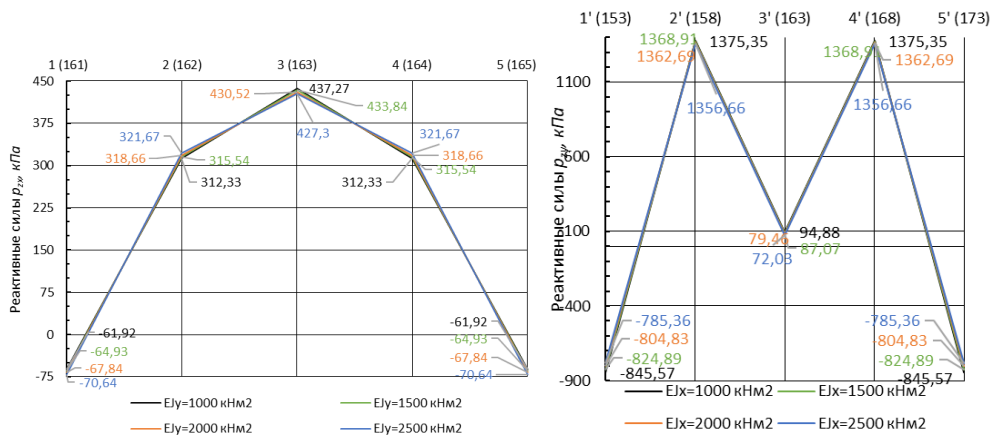


Рисунок 4 – График контактных напряжений: p_{zx} – вдоль оси x , длина балки 4м; p_{zy} – вдоль оси y , длина балки 2м

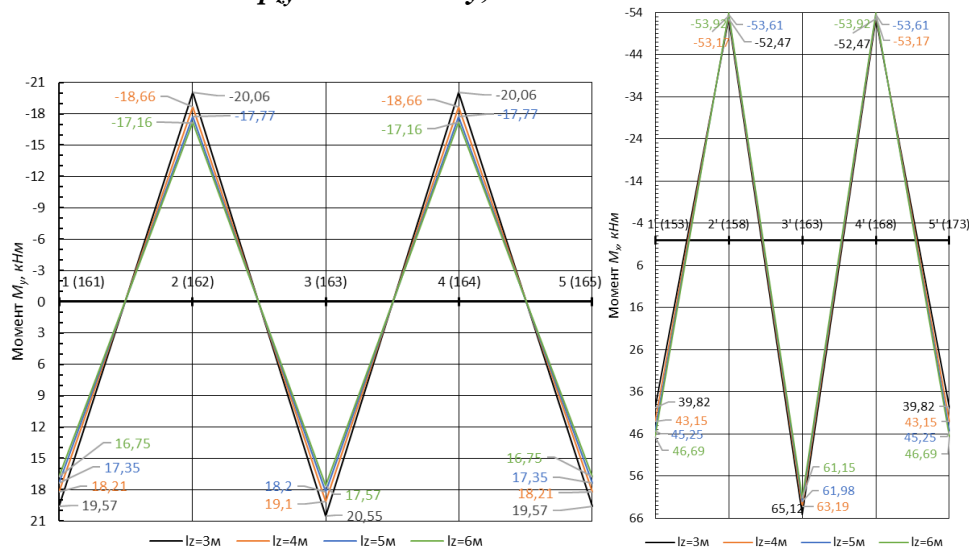


Рисунок 5 – Эпюры моментов: M_y – вдоль оси x (изгиб XOZ), длина балки 4м; M_x – вдоль оси y (изгиб YOZ), длина балки 2м

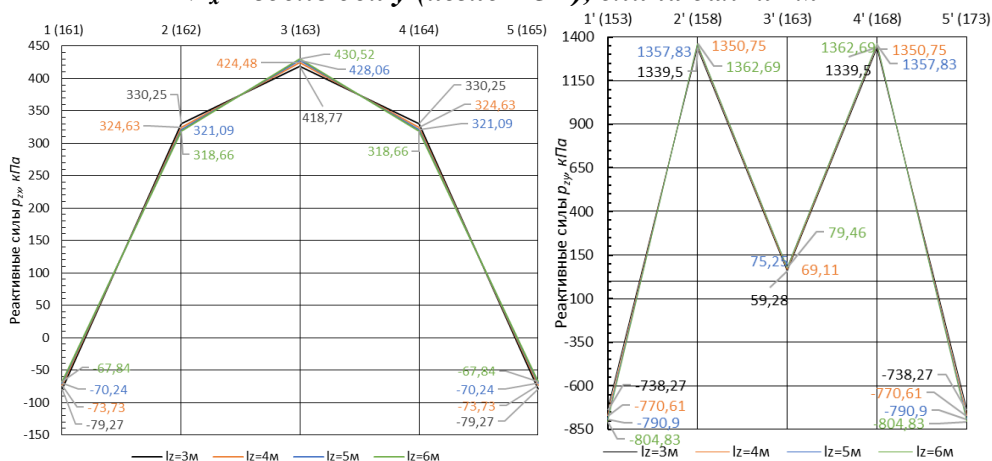


Рисунок 6 – График контактных напряжений: p_{zx} – вдоль оси x , длина балки 4м; p_{zy} – вдоль оси y , длина балки 2м

Учет физической нелинейности железобетона осуществляется через асимптотическую зависимость «момент-кривизна». Материал конструкции принимается нелинейно-упругим. Зависимость «момент-кривизна» аппроксимируется как гиперболический тангенс (9), условно показанного на рисунке 7.

$$M\left(\frac{1}{\rho}\right) = M_{\lim} \operatorname{Tanh}\left(\frac{B_0}{M_{\lim} \rho}\right), \quad (9)$$

где M_{lim} – предельный изгибающий момент, воспринимаемый сечением балки;
 B_0 – начальная жесткость балки;
 $\frac{1}{\rho}$ – кривизна в данном сечении балки.

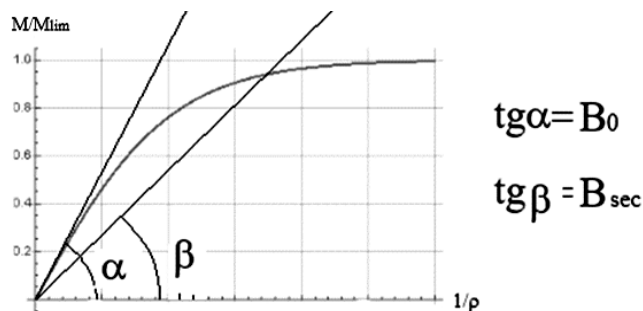


Рисунок 7 – Асимптотическая зависимость «момент-кривизна»

В нелинейном расчете железобетонных балок регулярной системы на изотропном основании вариационно-разностным методом используется переменная (секущая) изгибная жесткость (см. рисунок 7). Зависимость «момент-кривизна» при нелинейном расчете железобетонных балок учитывает нелинейные свойства материала, анизотропность, неоднородность и трещинообразование материала балок системы.

Заключение. В предлагаемой работе рассмотрена методика расчета регулярной системы балок на упругом основании вариационно-разностным методом.

При увеличении глубины сжимаемого слоя наблюдается общая тенденция к уменьшению осадки. По мере увеличения глубины сжимаемой толщи с шагом 1 метр разница в значениях осадок (перемещений), моментов и контактных напряжений на каждом шаге уменьшается. В центре балок наблюдается уменьшение значений моментов до 7,6% вдоль оси x (длина балки 4м) и до 3,1% вдоль оси y (балка 2м). На краях расчетной области моменты уменьшаются вдоль оси x на величину до 6,9%, а вдоль оси y увеличиваются до 8,4%. Характер распределения контактных напряжений изменяется в зависимости от длины балки, на которую действует нагрузка: для балки длиной 4м распределение в форме параболы, для балки длиной 2м распределение имеет седловидную форму. При увеличении глубины сжимаемой области контактные напряжения вдоль оси x растут в месте приложения силы до 1,7% и уменьшаются на границе расчетной области до 7%. Вдоль оси y **контактные напряжения** растут на границе расчетной области до 8,1%, а в месте приложения силы уменьшаются до 16,6%.

Увеличение жесткости на каждые 500 кНм² приводит к уменьшению осадок до 40,2% в точке приложения нагрузки, на краю балок – до 30,2% вдоль оси x и до 36,7% вдоль оси y . Стоит отметить, с увеличением жесткости разница осадок сокращается. В центре балок наблюдается увеличение значений моментов, до 5,4% вдоль оси x , до 2,3% вдоль оси y . На краю балки вдоль оси x (длина балки 4м) – тенденция к увеличению моментов (до 4,4%), вдоль оси y (длина балки 2м) – тенденция к уменьшению моментов на 4,5%. Вдоль оси x (балка размером 4м) с ростом жесткости контактные напряжения увеличиваются на краях расчетной области до 4,6% и уменьшаются в месте приложения силы на 0,8%. Вдоль оси y (балка размером 2м) с ростом жесткости реактивные давления уменьшаются на краях расчетной области до 2,5%, в месте приложения силы до 9,4%.

Список источников

1. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.
2. Guenfoud, S. A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space / S. Guenfoud, S. V. Bosakov, D. F. Laefer // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47. – P. 1822–1829.

3. Козунова, О.В. Расчет бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Новополоцк : Вестник ПГУ. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. №16. – 2021. – С.65-71.
4. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гульдер. – М. : Наука, 1974. – 560 с.
5. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.
6. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики : справочное пособие / В.П.Ильин, В.В.Карпов, А.М.Масленников. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 346 с.
7. Козунова, О. В. Учет физической нелинейности в железобетонных балках регулярной системы перекрестных лент на изотропном основании / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Безопасный и комфортный город : сб. науч. трудов по материалам V междунар. науч.-практ. конф., Орёл, 06–08 июня 2022 г. – Орёл : ОГУ им. И.С. Тургенева, 2022. – С. 283-288.
8. Босаков, С. В. Использование зависимости «момент – кривизна» при нелинейном расчете железобетонных балок / О. В. Козунова, Н. С. Щетько // Новополоцк : Вестник ПГУ. Серия Ф. Строительство. Прикладные науки. №16. – 2021. – С.31-35.

References

1. Bosakov, S. V. The Ritz method in contact problems of elasticity theory: monograph / S. V. Bosakov. – Brest : BrSTU, 2006. – 107 p. (In Russ.).
2. Guenfoud, S., Bosakov, S.V. & Laefer, D.F. (2010). A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space. *International Journal of Solids and Structures*, 47 (14–15), 1822–1829.
3. Kozunova, O.V. Calculation of an infinite system of cross beams on an elastic base by the variational-difference method / O. V. Kozunova, K. A. Sirosh // Novopolotsk : Bulletin of PSU. Series F. Construction. Applied Sciences. № 16. – 2021. – pp.65-71. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Timoshenko, S. P. *theory of elasticity* / S. P. Timoshenko, J. Gulder. Moscow: Nauka publ., 1974, 560 p. (In Russ.).
5. Bosakov, S. V. Variational-difference approach in solving a contact problem for a nonlinear elastic non-uniform basis. Flat deformation. Theory of calculation (Part 1) / S. V. Bosyakov, O. V. Kozunova // Vestnik BNTU. 2009, № 1, pp. 5-13. (In Russ.).
6. Ilyin, V. P. Numerical methods for solving problems of structural mechanics: a reference manual / V.P.Ilyin, V.V.Karpov, A.M.Maslennikov. – Minsk : Higher School, 1990. – 346 p. (In Russ.).
7. Kozunova, O. V. Accounting for physical nonlinearity in reinforced concrete beams of a regular system of cross-belts on an isotropic base / O. V. Kozunova, K. A. Sirosh // Bez-dangerous and comfortable city : collection of scientific works based on the materials of the V International Scientific and Practical Conference, Orel, 06-08 June 2022 – Eagle : I.S. Turgenev OSU, 2022. – pp. 283-288. (In Russ.).
8. Bosakov, S. V. The use of the "moment – curvature" dependence in the nonlinear calculation of reinforced concrete beams / O. V. Kozunova, N. S. Shchetko // Novopolotsk : Bulletin of PSU. Series F. Construction. Applied Sciences. № 16. – 2021. – pp.31-35. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.03.2023; одобрена после рецензирования 20.03.2023; принята к публикации 21.03.2023.

The article was submitted 18.03.2023; approved after reviewing 20.03.2023; accepted for publication 21.03.2023.