

УДК 529.3

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, чл.-корр. НАН Беларуси, д-р техн. наук;  
Э.И. СТАРОВОЙТОВ, Д.В. ЛЕОНЕНКО, доктора физ.-мат. наук  
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

## ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

*Рассмотрен изгиб круговой трехслойной пластины кольцевой нагрузкой в условиях нейтронного облучения. Тонкие упругие несущие слои имеют различную толщину и при деформировании подчиняются гипотезам Кирхгофа. В относительно толстом заполнителе предполагается прямолинейность и несжимаемость нормали с линейной аппроксимацией радиальных перемещений по его толщине. Учитывается работа касательных напряжений в заполнителе. Принято, что дополнительное изменение объема материала в слоях прямо пропорционально величине интегрального нейтронного потока. Приведена постановка краевой задачи для нахождения трех неизвестных функций: прогиба пластины, относительного сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Для получения системы дифференциальных уравнений равновесия применен вариационный принцип Лагранжа. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию внешнего контура. Аналитическое решение краевой задачи для рассматриваемой трехслойной пластины получено в функциях Бесселя. Проведено его численное параметрическое исследование.*

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, изгиб, кольцевая нагрузка, упругие слои, нейтронное облучение

**Введение.** Необходимость расчета напряженно-деформированного состояния композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций, работающих при комплексных внешних воздействиях, обусловлена их широким применением в строительстве и технике. Этой проблеме посвящен ряд работ.

В монографиях [1–4] приведены различные кинематические и математические модели деформирования трехслойных инженерных конструкций. Исследования динамического воздействия на неоднородные элементы конструкций содержат публикации [5–12]. Статьи [13, 14] содержат критический анализ уравнений статики теорий изгибаемых композитных ортотропных пластин, полученных с помощью вариационных принципов теории упругости. Анализ деформирования слоистых оболочек, пластин и балок в случае конечных прогибов при квазистатических нагрузках проводится в [15, 16]. Компьютерное моделирование и приложения по определению температурных напряжений в композитных элементах конструкций рассмотрено в статье [17]. Упруго-пластическое и физически нелинейное изотермическое деформирование трехслойных круговых пластин проводится в [18–21]. Изгиб трехслойных стержней в температурных полях рассмотрен в работах [22, 23].

В монографии [24] описано влияние нейтронного облучения на объемное деформирование материалов. В статьях [25, 26] исследовано деформирование трехслойной круговой пластины вследствие нейтронного облучения и его влияние на изгиб пластины равномерно распределенной нагрузкой.

Здесь, в отличие от опубликованного ранее, приведено решение краевой задачи об изгибе упругой круговой трехслойной пластины кольцевой нагрузкой в условиях нейтронного облучения.

**Постановка задачи.** В несимметричной по толщине трехслойной круговой пластине внешние несущие слои предполагаются тонкими, толщины  $h_1 \neq h_2$  (рисунок 1). Для них принимаются гипотезы Кирхгофа. В достаточно жестком и сравнительно толстом заполнителе

( $h_3 = 2c$ ) учитывается работа касательных напряжений в тангенциальном направлении. В нем, согласно гипотезе Тимошенко, деформированная нормаль остается прямолинейной и несжимаемой, но поворачивается на дополнительный угол  $\psi(r)$ . Для решения используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя, ось  $z$  направлена вверх. Нумерация слоев: 1, 2 — несущие;  $k = 3$  — заполнитель.

Предполагается, что на внешнюю поверхность  $z = c + h_1$  пластины параллельно оси  $z$  падает нейтронный поток плотностью  $\phi_0 = \text{const}$ . Согласно экспериментальным данным при малых деформациях можно считать, что изменение объема материала в слоях  $\theta_{ik}$  прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку [24]

$$\theta_{ik} = B_k I_k(z, t); \quad I_k(z, t) = \phi_k(z) t, \quad (1)$$

где  $\phi_k$  — интенсивность потока, дошедшего за время  $t$  к поверхности с координатой  $z$  в  $k$ -м слое, нейтрон/( $\text{м}^2 \cdot \text{с}$ );  $B_k$  — константа материала, получаемая из опыта.

Интенсивность нейтронного потока, проходя через слои пластины, убывает по экспоненте, что исследовано в статье [26]. Получено, что к моменту  $t$  через сечение

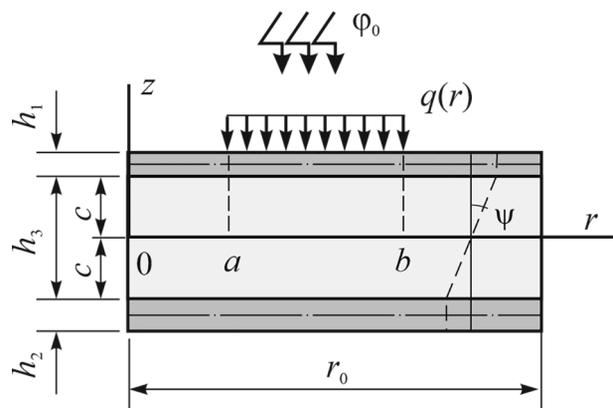


Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойной пластины при кольцевой нагрузке

с координатой  $z$  в верхнем слое пройдет интегральный поток

$$I_1(z, t) = \varphi_0 t \exp(-\mu_1(c + h_1 - z)), \quad (2)$$

где  $\mu_1$  — величина макроскопического эффективного сечения (1/см).

В заполнителе интегральный поток к этому моменту будет

$$I_3(z, t) = \varphi_{13} t \exp(-\mu_3(c - z)), \quad (3)$$

где  $\varphi_{13} = \varphi_0 \exp(-\mu_1 h_1)$ .

В нижнем слое интегральный поток

$$I_2(z, t) = \varphi_{32} t \exp(\mu_2(c + z)), \quad (4)$$

где  $\varphi_{32} = \varphi_{13} \exp(-2\mu_3 c)$ .

Отметим, что  $\mu_1$  обратно величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии  $\lambda_1 = 14,1-15,9$  см, в полиэтилене  $\lambda_3 = 5,5-13,9$  см. В реакторах  $\varphi_0$  имеет порядок  $10^{17}-10^{18}$  нейтрон/(м<sup>2</sup>·с), а  $I_0$  достигает значений  $10^{23}-10^{27}$  нейтрон/м<sup>2</sup>, причем  $\theta_1$  достигает значений порядка 0,1. Следовательно, величина параметра  $B$  может быть порядка  $10^{-28}-10^{-23}$  м<sup>2</sup>/нейтрон.

Предположим, что на рассматриваемую пластину падает нейтронный поток и воздействует внутри кольца  $a \leq r \leq b$  поверхностная равномерно распределенная нагрузка (см. рисунок 1):

$$q(r) = q_0 (H_0(b - r) - H_0(a - r)), \quad q_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где  $H_0(r)$  — функция Хевисайда.

Нагрузка осесимметрична, поэтому тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а искомые перемещения прогиб  $w$ , относительный сдвиг  $\psi$  и радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя  $u$  не зависят от окружной координаты  $\varphi$ . Эти функции зависят только от радиальной координаты  $r$  и времени действия нейтронного потока  $t$ . Перемещения точек пластины и толщины слоев отнесены к ее радиусу  $r_0$ . На контуре относительный сдвиг предполагается равным нулю ( $\psi = 0$  при  $r = 1$ ), что обеспечивается наличием жесткой диафрагмы.

Напряжения и деформации в слоях связаны законом Гука с учетом радиационного изменения объема (1):

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}; \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}; \quad (6)$$

$$\sigma^{(k)} = K_k (3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k), \quad k = 1, 2, 3; \quad \alpha = r, \varphi,$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$  — девиаторные части тензоров напряжений и деформаций;  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  — шаровые составляющие;  $G_k$  — модули сдвига;  $K_k$  — модули объемного деформирования материалов слоев;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\varepsilon_{rz}^{(3)}$  — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся соотношениями:

$$T_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 T_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha}^{(k)} dz; \quad M_{\alpha} \equiv \sum_{k=1}^3 M_{\alpha}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int \sigma_{\alpha}^{(k)} z dz; \quad (7)$$

$$H_{\alpha} = M_{\alpha}^{(3)} + c (T_{\alpha}^{(1)} - T_{\alpha}^{(2)}); \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz,$$

где  $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\sigma_{rz}^{(k)}$  — компоненты тензора напряжений.

Формулы, выражающие обобщенные внутренние усилия через искомые функции с учетом нейтронного потока, приведены в [26]. Система уравнений равновесия упругой трехслойной пластины при отсутствии

силовой нагрузки получена с помощью вариационного принципа Лагранжа [25]. Она справедлива и в рассматриваемом случае, только в правой части третьего уравнения появится нагрузка (5):

$$\begin{aligned} a_1 L_2(u) + a_2 L_2(\psi) - a_3 L_2(w, r) &= 0; \\ a_2 L_2(u) + a_4 L_2(\psi) - a_5 L_2(w, r) - 2cG_3\psi &= 0; \\ a_3 L_3(u) + a_5 L_3(\psi) - a_6 L_3(w, r) &= \\ &= q_0 (H_0(b - r) - H_0(a - r)), \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты  $a_i$  определяются через упругие и геометрические параметры слоев [26];  $L_2$ ,  $L_3$  — дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующим за ней координатам.

**Решение краевой задачи.** Система линейных дифференциальных уравнений (8) имеет следующее аналитическое решение:

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r; \\ w &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q(r)) dr - \frac{1}{4b_3} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \\ &+ \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4; \quad u = \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_8$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий;  $I_1(\beta r), K_1(\beta r)$  — функции Бесселя и Макдональда; пределы интегрирования от 0 до  $r$ ;  $L_3^{-1}$  — интегральный оператор, обратный  $L_3$ :

$$L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \left[ \int_r^1 \int_r^1 r f dr dr dr \right];$$

$\psi_r$  — частное решение, зависящее от вида нагрузки:

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{q_0 \gamma_1}{2\beta^2} \left( \left( \frac{b^2}{r} - r + 2b(I_1(\beta r)K_1(\beta b) - K_1(\beta r)I_1(\beta b)) \right) H_0(b - r) - \right. \\ &\left. - \left( \frac{a^2}{r} - r + 2a(I_1(\beta r)K_1(\beta a) - K_1(\beta r)I_1(\beta a)) \right) H_0(a - r) \right) + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}; \end{aligned}$$

$\int \psi dr$  — интеграл от относительного сдвига:

$$\begin{aligned} \int \psi dr &= \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b - r) \times \\ &\times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (I_0(\beta r)K_1(\beta b) + K_0(\beta r)I_1(\beta b)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \\ &- \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(a - r) \left[ \frac{a^2 - r^2}{2} + a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{2a}{\beta} I_0(\beta r) (K_1(\beta a) + K_0(\beta r)I_1(\beta a)) - \frac{2}{\beta^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad \gamma_1 = \frac{b_2}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1};$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

Оператор  $L_3^{-1}$  от нагрузки (5), входящий в решение (9), и интеграл от него:

$$L_3^{-1}(q(r)) = q_0 \left[ \left( \frac{r^3}{16} - \frac{b^4}{16r} - \frac{b^2 r}{4} \ln \frac{r}{b} \right) H_0(b-r) - \left( \frac{r^3}{16} - \frac{a^4}{16r} - \frac{a^2 r}{4} \ln \frac{r}{a} \right) H_0(a-r) \right];$$

$$\int L_3^{-1}(q(r)) dr = q_0 \left[ \left( \frac{r^4}{64} - \frac{5b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{16} - \frac{b^2(b^2 + 2r^2)}{16} \ln \frac{r}{b} \right) \times \right. \quad (10)$$

$$\left. \times H_0(b-r) - \left( \frac{r^4}{64} - \frac{5a^4}{16} + \frac{a^2 r^2}{16} - \frac{a^2(a^2 + 2r^2)}{16} \ln \frac{r}{a} \right) H_0(a-r) \right].$$

Принимаются граничные условия шарнирного опирания контура пластины. В этом случае интегральный нейтронный поток входит в решение краевой задачи через константы интегрирования, т. к. при  $r = 1$  должны обращаться в нуль искомые перемещения и обобщенный внутренний радиальный изгибающий момент, т. е.

$$u = 0, \psi = 0, w = 0, M_r = 0, \quad (11)$$

где в соответствии с (6), (7)

$$M_r = \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \left[ cK_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[ cK_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \sum_{k=1}^3 K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz.$$

Величины интегрального нейтронного потока  $I_k(z)$ , входящие в обобщенный момент  $M_r$ , определяются формулами (1)–(4). Константы интегрирования, входящие в решение (9), в соответствии с граничными условиями (11) равны:

$$C_1 = -\frac{q_0(b^2 - a^2)}{2};$$

$$C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2 I_1(\beta)} \left[ b^2 - a^2 + 2aK_1(\beta)I_1(\beta a) - 2bI_1(\beta b)K_1(\beta) \right];$$

$$C_3 = -\frac{\gamma_1(aI_1(\beta a) - bI_1(\beta b))q_0}{\beta^2}; \quad C_4 = -\frac{C_5}{4b_3} - \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr \Big|_{r=1}; \quad (12)$$

$$C_5 = \left( \frac{C_1}{2} + 2b_3 C_6 \right) \frac{a_1 b_3 - a_7 a_1 - a_3^2}{a_1(a_6 + a_7)}$$

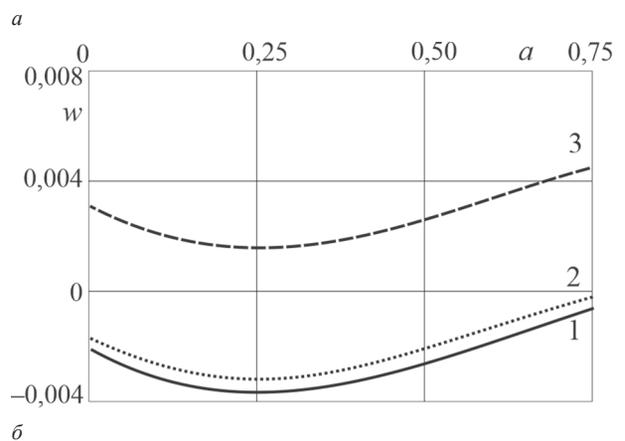
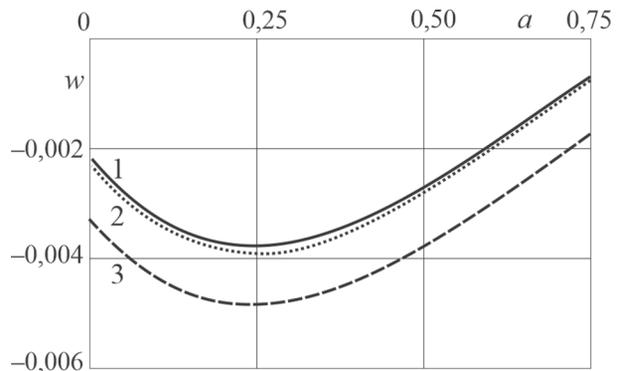
$$-\frac{2b_3 t}{a_6 + a_7} \left[ \frac{\Phi_0 K_1 B_1}{\mu_1} \left( h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left( c - \frac{1}{\mu_1} \right) \exp(-\mu_1 h_1) \right) + \frac{\Phi_{32} K_2 B_2}{\mu_2} \left( c \left( c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) \exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2} \right) + \frac{\Phi_{13} K_3 B_3}{\mu_3} \left( c - \frac{1}{\mu_3} + \left( c + \frac{1}{\mu_3} \right) \exp(-2\mu_3 c) \right) \right];$$

$$C_6 = \frac{q_0(b^4 - a^4)}{16b_3}; \quad C_7 = -\frac{2a_3}{a_1} \left( \frac{C_6}{r_0^2} + \frac{C_5}{2b_3} \right); \quad C_8 = 0.$$

Следовательно, соотношения (9), (10), (12) дают искомые перемещения в круговой трехслойной пластине при изгибе кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке.

**Численные результаты** получены для пластины, материалы слоев которой Д16Т–фторопласт–Д16Т с толщинами слоев  $h_2 = 0,04$ ,  $h_3 = 0,4$ . Для обеспечения дополнительной объемной деформации примерно 3–3,5%, принимались константы  $B_1 = B_2 = B_3 = 10^{23}$  м<sup>2</sup>/нейтрон, величина макроскопического эффективного сечения для сплава Д16-Т —  $\mu_1 = 1,26$  см; для фторопласта-4  $\mu_3 = 3,21$  см; время действия нейтронного потока — 1 ч. Ширина кольца нагрузки постоянна  $b - a = 0,25$ .

Графики зависимости максимального прогиба  $w$  трехслойной пластины от положения кольцевой нагрузки при различных величинах интенсивности нейтронного потока показаны на рисунке 2. Здесь, как и ранее [26], если толщина верхнего несущего слоя меньше критической  $h_1 < h_1^* \approx 0,012$ , то увеличение интенсивности ней-



**Рисунок 2 — Максимальный прогиб  $w$  в зависимости от положения кольца нагрузки при различных величинах интенсивности нейтронного потока (нейтрон/(м<sup>2</sup>·с)):**  
 1 —  $\Phi_{01} = 0$ ; 2 —  $\Phi_{02} = 10^{17}$ ; 3 —  $\Phi_{03} = 10^{18}$ ;  
 $a - h_1 = 0,01$  м;  $b - h_1 = 0,02$  м

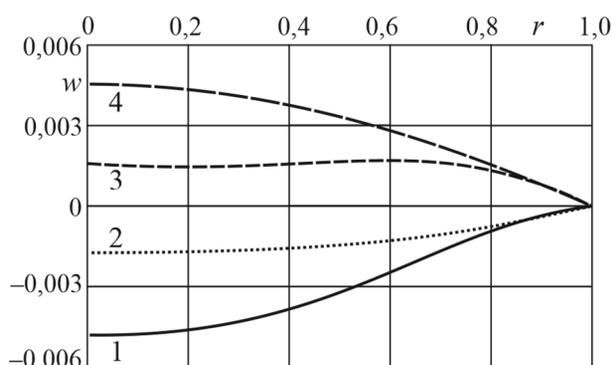


Рисунок 3 — Изменение прогиба  $w$  вдоль радиуса пластины: 1 —  $a = 0,25$ ; 2 —  $a = 0,75$  (оба  $h_1 = 0,01$  м); 3 —  $a = 0,25$ ; 4 —  $a = 0,75$  (оба  $h_1 = 0,02$  м)

тронного потока приводит к смещению прогиба в сторону действия локальной нагрузки. Максимум абсолютной величины прогиба достигается при нагрузке с внешним радиусом  $b = 0,5$ .

В случае толщины  $h_1 > h_1^*$  график прогиба с ростом интенсивности нейтронного потока смещается вверх. Максимум абсолютной величины прогиба достигается при кольцевой нагрузке, примыкающей к контуру пластины. В этом случае при интенсивности нейтронного потока  $\varphi_3$  прогиб от нейтронного облучения превосходит прогиб от кольцевой нагрузки и направлен в сторону, противоположную ее действию.

Изменение прогиба  $w$  вдоль радиуса пластины при величине интенсивности нейтронного потока  $\varphi_0 = 10^{18}$  (нейтрон/(м<sup>2</sup>·с)) и различных значениях внутреннего радиуса  $a$  кольца нагрузки показано на рисунке 3. Если толщина верхнего несущего слоя меньше критической  $h_1 < h_1^* \approx 0,012$ , то прогиб направлен вниз в сторону действия нагрузки и при увеличении радиуса силового кольца уменьшается по модулю. В случае  $h_1 > h_1^*$  прогиб направлен вверх и с ростом радиуса кольца нагрузки увеличивается по модулю.

**Замечание.** Аналитические решения о деформировании в нейтронном потоке круговой шарнирно опертой по контуру трехслойной пластины при погонной силовой нагрузке можно получить предельным переходом, устремляя в решениях (9)–(12) толщину кольца нагрузки к нулю и оставляя постоянной ее равнодействующую.

**Заключение.** Полученное решение краевой задачи позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин с шарнирно опертым контуром, изгибаемых в нейтронном потоке локальной кольцевой и круговой нагрузками. Численные расчеты показали существенное влияние величины интегрального нейтронного потока и толщины верхнего несущего слоя на напряженно-деформированное состояние пластины.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025».

### Список литературы

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 576 с.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2021. — 535 с.
3. Zhuravkov, M. Mechanics of solid deformable body / M. Zhuravkov, L. Yongtao, E. Starovoitov. — Singapore: Springer,

2023. — 308 p. — DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5>.

4. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. — М.: МАИ, 2016. — 183 с.
5. Tarlakovskiy, D.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / D.V. Tarlakovskiy, G.V. Fedotenkov // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 162, no. 2. — Pp. 246–253. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4>.
6. Tarlakovskii, D.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2014. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 145–152.
7. Bakulin, V.N. Panel flutter of a variable-thickness composite shell / V.N. Bakulin, M.A. Konopelchev, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2020. — Vol. 56, no. 5. — Pp. 629–638. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09909-y>.
8. Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. — 2021. — Vol. 57, no. 5. — Pp. 623–634. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-021-09984-9>.
9. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of materials. — 2002. — Vol. 34, no. 5. — Pp. 474–481. — DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021050611206>.
10. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — Vol. 18, iss. 4. — Pp. 699–704.
11. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — Vol. 52. — Pp. 41–51. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>.
12. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2015. — Т. 21, № 2. — С. 162–169.
13. Yankovskii, A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order / A.P. Yankovskii // Mechanics of Composite Materials. — 2020. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 271–290. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
14. Yankovskii, A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories / A.P. Yankovskii // Mechanics of Composite Materials. — 2020. — Vol. 56, no. 4. — Pp. 437–454. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
15. Paimushin, V.N. Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour / V.N. Paimushin // Mechanics of Composite Materials. — 2017. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 3–26. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9636-1>.
16. Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection / Zh. Wang [et al.] // Journal of Engineering Mechanics. — 2017. — Vol. 143, iss. 9.
17. Carrera, E. Thermal stress analysis of composite beams, plates and shells: computational modelling and applications / E. Carrera, F.A. Fazzolari, M. Cinefra. — 1st ed. — Academic Press, 2016. — 410 p.
18. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — Вып. 4(33). — С. 53–57.
19. Козел, А.Г. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. — 2018. — № 11. — С. 127–133.
20. Pronina, P.F. Study of the radiation situation in Moscow by investigating elastoplastic bodies in a neutron flux taking into account thermal effects / P.F. Pronina, O.V. Tushavina,

- E.I. Starovoitov // *Periódico Tchê Química*. — 2020. — Vol. 17, no. 35. — Pp. 753–764.
21. Старовойтов, Э.И. Неосесимметричное нагружение упругопластической трехслойной пластины в своей плоскости / Э.И. Старовойтов, А.В. Нестерович // *Журнал Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика*. — 2022. — № 2. — С. 57–69. — DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-2-57-69>.
  22. Deformation of a step composite beam in a temperature field / E.I. Starovoitov [et al.] // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. — 2015. — Vol. 88, no. 4. — Pp. 1023–1029. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1280-9>.
  23. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.
  24. Ильюшин, А.А. Упруго-пластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. — 224 с.
  25. Плескачевский, Ю.М. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в радиационном потоке / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: С.Н. Поддубко [и др.]*. — Минск, 2020. — Вып. 9. — С. 161–165.
  26. Starovoitov, E.I. Deformation of elastic circular sandwich plate in a neutron flow / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *Mechanics of Composite Materials*. — 2021. — Vol. 57, no. 4. — Pp. 1155–1170. — DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10001-w>.

---

Pleskachevskii Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

### **Bending of a three-layer circular plate by ring load in the neutron flux**

The bending of a three-layer circular plate by ring load under neutron irradiation conditions is considered. Thin elastic bearing layers have different thicknesses and, when deformed, obey Kirchhoff's hypotheses. In a relatively thick filler, the straightness and incompressibility of the normal is assumed with a linear approximation of radial displacements along its thickness. The work of tangential stresses in the filler is taken into account. It is assumed that the additional change in the volume of the material in the layers is directly proportional to the magnitude of the integral neutron flux. The formulation of the boundary value problem is given for finding three unknown functions: plate deflection, relative shear, and radial displacement in the filler. To obtain a system of differential equilibrium equations, the Lagrange variational principle is applied. The boundary conditions correspond to the hinge support of the outer contour. The analytical solution of the boundary value problem for the three-layer plate under consideration is obtained in Bessel functions. Its numerical parametric study is carried out.

*Поступила в редакцию 27.05.2023.*