УДК 539.375

ВЫПОЛНЕНИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСОЙ СДВИГА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕКЛЕ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НЕГОМОГЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

О. М. Остриков
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет транспорта

Введено понятие элементарного носителя поля упругих напряжений для полосы сдвига в материале, не имеющем в своей атомной структуре дальнего порядка. Предложено мощность данного источника напряжений задавать вектором смещения $\vec{o}$. Проведена проверка выполнения условия равновесия аморфного твердого тела с криволинейной полосой сдвига в случае плоскодеформированного состояния. Принималось непрерывное распределение в полосе сдвига элементарных носителей поля упругих напряжений. Установлено выполнение условия равновесия твердого тела, не имеющего в структуре дальнего порядка, в случае плоского деформированного состояния.

Ключевые слова: плоскодеформированное состояние, негомогенная пластическая деформация, поля напряжений, условие равновесия, металлическое стекло, аморфный материал.

Введение

Металлические стекла, не имеющие дальнего порядка в своей структуре, при их деформировании подвержены, как гомогенной, так и негомогенной пластической деформации [1, 2]. Как известно [1], гомогенная пластическая деформация равномерно распределена по всему объему деформируемого твердого тела, в то время как негомогенная пластическая деформация является локализованной в некоторых областях, и в металлических стеклах эти области, как правило, имеют вид тонких полос, названных полосами сдвига в аморфных материалах [1, 2]. Очевидно, что с точки зрения атомной структуры, полосы сдвига в аморфных материалах отличаются от полос сдвига в кристаллах [3, 4]. Это отличие необходимо учитывать при разработке математических моделей негомогенной пластической деформации металлических стекол.

Изучение закономерностей негомогенной пластической деформации металлических стекол является актуальным, так как она напрямую связана с зарождением и развитием трещин, а, следовательно, от нее зависят такие важные характеристики аморфного материала, как вязкость, пластичность и преждевременное хрупкое разрушение [1, 2]. Актуальным также представляется основанное на методах механики деформируемого твердого тела математическое моделирование напряженно-деформированного состояния металлических стекол, связанное с полосами сдвига – основными каналами негомогенной пластической деформации конденсированных систем, не имеющих дальнего порядка [1–7]. Это открывает возможность для ведения инженерных технологических расчетов для прогнозирования ресурса технических систем, использующих в своей основе металлические стекла.

© Остриков О. М., 2023

Целью данной работы стало основанное на методах механики деформируемого твердого тела в рамках гипотезы сплошности среды выяснение наличия выполнения условия равновесия металлического стекла, содержащего полосу сдвига, в случае плоскодеформированного состояния.

Постановка задачи

Научная идея, состоящая в выяснении наличия выполнения условия равновесия твердого тела с криволинейной полосой сдвига в металлическом стекле в случае плоскодеформированного состояния при негомогенной пластической деформации, является оригинальной. Для реализации этой идеи необходимо введение понятия элементарного носителя поля упругих напряжений, обусловленного наличием в металлическом стекле полосы сдвига. Это связано с необходимостью учета в математических расчетах отсутствия в аморфном материале дальнего порядка.

В теории пластической деформации металлических стекол широко используется дислокационный подход [1–7]. При этом понятие дислокации, как линейного дефекта, для аморфных материалов трудно определяется из-за отсутствия в таких материалах дальнего порядка [8–14]. С другой стороны, дислокационная теория изначально разрабатывалась для сплошной среды [15], к модели которой больше подходит аморфный, чем кристаллический материал. Поэтому достижения теории дислокаций целесообразно применять и к новому классу материалов, к которым относятся металлические стекла, что и сделано, в частности, в ряде работ [1–8].

По аналогии с теорией дислокаций [16, 17] введем элементарное приращение $\vec{o}$ вектора упругого смещения $\vec{u}$ обусловленное линейным дефектом в сплошной среде, помещенным вовнутрь контура, радиус которого R примем не превышающим двух-трех межатомных расстояний a (т.е. $2a < R < 3a$), где в аморфном материале еще сохраняется, так называемый ближний порядок [7]. При этом также невелика математическая неопределенность, наблюдаемая в ядре дефекта. Тогда можно записать:

$$\oint du_i = \int \frac{du_i}{dl} dl = -o_i . \tag{1}$$

Здесь dl – элемент контура, охватывающего рассматриваемый дефект.

Так как решается плоская задача, то протяженность дефекта определяющей роли не играет. В этом плане необходимо лишь ограничение на то, чтобы в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой проведен контур радиусом R, дефект не создавал градиента напряжений. Тогда, согласно [16], такой дефект создает напряжения, определяемые по формулам:

$$\sigma_{xx}^{(\text{пд})}(x,y) = -\frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{y\left[3x^2 + y^2\right]}{\left[x^2 + y^2\right]},$$

$$\sigma_{yy}^{(\text{пд})}(x,y) = \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{y\left[x^2 - y^2\right]}{\left[x^2 + y^2\right]},$$

$$\sigma_{xy}^{(\text{пд})}(x,y) = \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{x\left[x^2 - y^2\right]}{\left[x^2 + y^2\right]}, \tag{2}$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Будем рассматривать данный дефект, как элементарный носитель поля упругих напряжений, полосы сдвига в аморфном материале [8]. Распределим дефекты такого типа вдоль полосы сдвига с линейной плотностью $\rho(\xi)$. В общем случае примем полосу сдвига криволинейной формы, описываемой функцией $f(\xi)$. Пусть полоса сдвига имеет форму плоской кривой линии. Тогда по аналогии с [18] можно записать

$$\sigma_{ij}(x,y)=\int_0^L\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\sigma_{ij}^{(0)}(x,y,\xi)d\xi, \tag{3}$$

где L – длина полосы сдвига; ξ – параметр интегрирования; функция $\sigma_{ij}^{(0)}(x,y,\xi)$ с учетом (2), для полосы сдвига, находящейся вдали от поверхности, описывается формулами:

$$\sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)=-\frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)}\frac{\left(y-f(\xi)\right)\left[3(x-\xi)^2+\left(y-f(\xi)\right)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+\left(y-f(\xi)\right)^2\right]},$$

$$\sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)=\frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)}\frac{\left(y-f(\xi)\right)\left[(x-\xi)^2-\left(y-f(\xi)\right)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+\left(y-f(\xi)\right)^2\right]},$$

$$\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)=\frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)}\frac{(x-\xi)\left[(x-\xi)^2-\left(y-f(\xi)\right)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2+\left(y-f(\xi)\right)^2\right]}. \tag{4}$$

Пусть полоса сдвига в аморфном материале является остаточной и сохраняет свои размеры и форму после снятия нагрузки. Тогда для плоского деформированного состояния аморфного твердого тела при отсутствии объемных сил справедливы условия [16, 19]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\end{cases}. \tag{5}$$

Проверка выполнения условия равновесия

Не трудно показать, что из (5), после подстановки (3), (4), получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)d\xi+\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)d\xi=0\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)d\xi+\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)d\xi=0\end{cases}. \tag{6}$$

Отсюда, согласно [20], получим

$$\begin{cases} \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\dfrac{\partial\sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x}d\xi + \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}d\xi = 0 \\ \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x}d\xi + \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\dfrac{\partial\sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}d\xi = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

После преобразований (7) получим:

$$\begin{cases} \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}\right]d\xi = 0 \\ \int_0^L \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\rho(\xi)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}\right]d\xi = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(0)}}{\partial x} = -\frac{\mu o}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(x-\xi)(y-f(\xi))[3(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}}{\partial x} = \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(x-\xi)^2[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}}{\partial y} = -\frac{\mu o}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(x-\xi)(y-f(\xi))[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}^{(0)}}{\partial y} = \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-\xi)^2-3(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(y-f(\xi))^2[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3}\right]. \quad (9)$$

Тогда не трудно показать, что в (8) выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}=$$

$$=\frac{4\mu o}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2}-\frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y}=$$

$$=\frac{2\mu o}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2}-\frac{(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2}\right]=0. \quad (10)$$

Подстановка (16) в (8) дает два тождества типа $0+0\equiv 0$, которые означают, что деформированное твердое тело, не имеющее в своей атомной структуре дальнего порядка, с остаточной полосой сдвига находится в равновесии в случае плоскодеформированного состояния. Это также указывает на правомерность введения понятия элементарного носителя мощностью $\vec{o}$ упругих полей напряжений в случае негомогенной пластической деформации металлических стекол.

Заключение

Таким образом, показано выполнение условия равновесия деформированного аморфного твердого тела с остаточной полосой сдвига в случае плоскодеформированного состояния при негомогенной пластической деформации. Введено понятие элементарного носителя поля упругих напряжений при негомогенной пластической деформации металлических стекол. Предложено мощность данного источника обозначать вектором $\vec{o}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Глезер, А. М.*** Структура и механические свойства аморфных сплавов / А. М. Глезер, Б. В. Молотилов. – М. : Металлургия, 1992. – 208 с.

2. ***Верещагин, М. Н.*** Негомогенная пластическая деформация аморфных сплавов на основе железа / М. Н. Верещагин, В. Г. Шепелевич, О. М. Остриков. – Гомель : Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2004. – 134 с.

3. ***Остриков, О. М.*** Дислокационная гармоническая модель полосы сдвига в аморфном материале / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2007, № 4. – С. 41–48.

4. ***Верещагин, М. Н.*** Дислокационная модель полисинтетических полос сдвига в аморфных материалах / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, №3. – С. 164–168.

5. ***Верещагин, М. Н.*** Моделирование напряженного состояния у полосы сдвига в аморфном материале / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков, Д. Б. Зюков // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 3. – С. 113–115.

6. ***Рюмцев, А. А.*** Методика расчета полей напряжений в металлических стеклах у полос сдвига в форме изогнутых лучей / А. А. Рюмцев, О. М. Остриков // Вестник Могилевского государственного университета имени А.А. Кулешова. Серия В. – 2015, № 2(46). – С. 63–72.

7. ***Алехин, В. П.*** Структура и физические закономерности деформации аморфных сплавов / В. П. Алехин, В. А. Хоник. – М.: Металлургия, 1992. – 248 с.

8. ***Остриков, О. М.*** Модель дислокации в аморфном материале / О.М. Остриков // Современные проблемы машиноведения : Тез. докл. Международной конференции. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2006. – С. 58–59.

9. ***Лузгин, Д. В.*** Свойства объемных металлических стекол / Д. В. Лузгин, В. И. Полькин // Металловедение и термическая обработка. – 2016. – № 6. – С. 71–85.

10. ***Лузгин, Д. В.*** Объемные металлические стекла: Получение, структура, структурные изменения при нагреве / Д. В. Лузгин, В. И. Полькин // Известия вузов. Цветная металлургия. – 2015. – № 6. – С. 43–52.

11. ***Aljerf, M.*** Shaping of metallic glasses by stress-annealing without thermal embritlement / M. Aljerf, K. Georgarakisa, A.R. Yavari // Acta Mater. – 2011. – Vol. 59. – P. 3817–3824.

12. ***Louzguine-Luzgin, D. V.*** Evidence of the existence of two deformation stages in bulk metallic glasses. / D. V. Louzguine-Luzgin, V. Yu. Zadorozhnyy, N. Chen, S. V. Ketov // J. Non-Crys. Solids. – 2014. – Vol. 396–397. – P. 20–24.

13. ***Zhang, Q. S.*** Stable flowing of localized shear bands in soft bulk metallic glasses / Q. S. Zhang, W. Zhang, G. Q. Xie, D. V. Louzguine-Luzgin, A. Inoue // Acta Mater. – 2010. – Vol. 58. – P. 904–909.

14. Phase selection and nanocrystallization in Cu-free soft magnetic FeSiNbB amorphous alloy upon rapid annealing / L. Morsdorf, K. G. Pradeep, G. Herzer at all // Journal of Applied Physics. – 2016. – Vol. 119. – P. 124903-1.

15. ***Работнов, Ю. Н.*** Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.

16. ***Хирт, Дж.*** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.

17. *Косевич, А. М.* Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич. – Киев : Наук. Думка, 1978. – 220 с.

18. ***Остриков, О. М.*** Методика прогнозирования распределения полей напряжений в реальных кристаллах с остаточными некогерентными двойниками. Монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2019. – 278 с.

19. ***Василевич, Ю. В.*** Выполнение условия равновесия твердого тела с нетонким остаточным клиновидным двойником в случае плоскодеформированного состояния / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Машиностроение. – Мн. : БНТУ, 2021. – Вып. 34. – С. 128–134.

20. ***Корн, Г.*** Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука. – 1973. – 832 с.

Поступила в редакцию 27.04.2022 г.
Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. M. **FULFILLMENT OF THE EQUILIBRIUM CONDITION FOR A SOLID BODY WITH A CURVILINEAR SHEAR BAND IN METALLIC GLASS IN THE CASE OF A PLANE DEFORMED STATE WITH NONHOMOGENEOUS PLASTIC DEFORMATION**

The concept of an elementary carrier of the elastic stress field for a shear band in a material that does not have a long-range order in its atomic structure is introduced. It is proposed to set the power of this voltage source by the displacement vector $\vec{o}$. The fulfilment of the equilibrium condition for an amorphous solid with a curvilinear shear band in the case of a plane-deformed state is verified. A continuous distribution in the shear band of elementary carriers of the elastic stress field was assumed. The fulfilment of the equilibrium condition for a solid body that does not have a long-range order in the structure in the case of a plane deformed state is established.

Keywords: plane strain state, inhomogeneous plastic deformation, stress fields, equilibrium condition, metallic glass, amorphous material.