К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОУПРУГОЙ РЕАКЦИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Л.И. Могилевич[1], В.С.Попов[1,2], Э.И. Старовойтов[3]

[1]Саратовский государственный технический университете имени Гагарина Ю.А.

[2]Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Саратовский научный центр РАН»,

[3]Белорусский государственный университет транспорта

Аннотация. *В работе рассмотрены вопросы формулирования задачи динамики взаимодействия трехслойной балки с несжимаемым легким заполнителем, установленной на нелинейно-упругом основании, с пульсирующим слоем вязкой жидкости. Исследуется случай основания с жесткой кубической нелинейностью, предложены подходы к определению гидроупругой реакции балки.*

Ключевые слова*: трехслойная балка, вязкая жидкость, нелинейно-упругое основание, гидроупругий отклик.*

Abstract*. The paper considers the formulation of the problem for the interaction dynamics of a three-layer beam with an incompressible core, rested on a nonlinear-elastic foundation, with a pulsating layer of viscous fluid. The case of a foundation with hardening cubic nonlinearity is investigated, and approaches to the determination of the hydroelastic response of the beam are proposed.*

Keywords*: three-layer beam, viscous fluid, nonlinear-elastic foundation, hydroelastic response.*

Трехслойные элементы конструкций или сэндвич конструкции находят все более широкое применение в различных изделиях современной техники и строительных сооружениях [1,2]. Исследованию динамики и статики данных элементов посвящены многочисленные работы, представленные в обзорах [3, 4], вместе с тем, работ, посвященных гидроупругости сэндвич конструкций значительной меньше. Среди работ данного направления можно указать на исследования, изучающие гидроупругий отклик трехслойных и композитных балок и пластин [5-7], в том числе установленных на линейное упругое основание Винклера [8]. Однако среди известных работ отсутствуют исследования, посвященные определению гидроупругого отклика трехслойной балки, установленной на основание с жесткой кубической нелинейностью. Представленная работа нацелена на разработку подходов к изучению данной темы.

Рассмотрим шарнирно опертую трехслойную балку-полоску, являющуюся дном узкого плоского канала (см. рис.). Верхняя стенка канала считается абсолютно жесткой. Балка представляет собой сэндвич пакет [1] из верхнего 1 и нижнего 2 несущих слоев толщинами h_1 и h_2, между которыми находится легкий несжимаемый заполнитель 3 толщиной $2c$. Балка установлена на основание с жесткой кубической нелинейностью [9]. С центром заполнителя связана декартова система координат. Полагаем размеры балки в плане $2\ell \times b$ и $2\ell << b$, что позволяет перейти к рассмотрению плоской задачи. Толщина слоя жидкости h_0 и, в силу узости канала, $h_0 << \ell$. Вязкая жидкость в канале имеет постоянную плотность, а давление в ней пульсирует за счет заданного гармонического закона пульсации давления $p^*(\omega t)$ с частотой ω на правом и левом торце. Движение вязкой жидкости в канале рассматриваем как ползущее. Амплитуда нелинейных колебаний балки значительно меньше толщины слоя жидкости. Принимая во внимание, что учет вязкости жидкости приводит к быстрому затуханию переходных процессов, будем рассматривать установившиеся нелинейные колебания трехслойной балки.

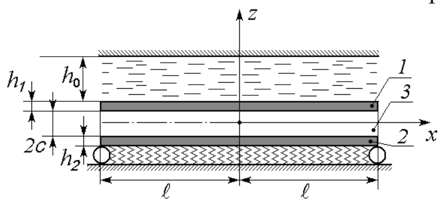

Рис. Трехслойная балка-полоска на нелинейно-упругом основании, взаимодействующая с пульсирующим слоем вязкой жидкости.

Используя подход, предложенный в [1, 2], получены уравнения динамики трехслойной балки, опирающейся на основание с жесткой кубической нелинейностью:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = q_{zx}, \tag{1}$$

$$a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,$$

$$a_7 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \kappa w - \beta w^3 - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q_{zz},$$

Здесь u – продольные перемещения срединной поверхности трехслойной балки, w – прогиб срединной поверхности трехслойной балки, φ – угол поворота нормали в заполнителе трехслойной балки, κ – коэффициент жесткости при линейной составляющей реакции основания, β – коэффициент жесткости при кубической составляющей реакции основания, q_{zz}, q_{zx} – нормальное и касательное напряжение вязкой жидкости, действующие на балку. Выражения для коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7, m_0 представлены в [1].

Краевые условия (1) имеют вид

$$u = \varphi = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \pm \ell. \tag{2}$$

В [10] показано, что для слоя вязкой жидкости, находящемуся в узком канале между твердой верхней стенкой и упругой нижней стенкой, при ползущем движении справедливо соотношение $q_{zz} >> q_{zx}$, а нормальное напряжение q_{zz} определяется выражением

$$q_{zz} = -p^*(\omega t) - 12(\nu\rho\ell / h_0^3)\left(\int_{\xi}^{1}\int \partial w/\partial t \, d\xi d\xi - (\xi - 1)/2 \int_{-1}^{1}\int \partial w/\partial t \, d\xi d\xi\right). \tag{3}$$

Здесь ρ, ν – плотность жидкости и ее коэффициент кинематической вязкости.

Тогда опуская в (1) q_{zx} и учитывая (3), а затем исключая из полученной системы u и φ получаем уравнение относительно прогиба

$$D^*\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\kappa w+\beta w^3+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-p^*(\omega t)-12\frac{\nu\rho\ell}{h_0^3}\left(\int\limits_{\xi}^{1}\int\partial w/\partial t\,d\xi d\xi-\frac{\xi-1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\partial w/\partial t\,d\xi d\xi\right), \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=\pm\ell. \quad (5)$$

Здесь $D^*=a_4-a_7 b_1-a_3 b_2$, $b_1=(a_2 a_7-a_3 a_6)/(a_1 a_2-a_6^2)$, $b_2=(a_1 a_3-a_7 a_6)/(a_1 a_2-a_6^2)$.

Уравнение (4) представляет собой уравнение гидроупругих колебаний трехслойной балки на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью. Для его решения применим метод Бубнова-Галеркина представляя форму прогибов в виде

$$w=w_m W=\sum_{k=1}^{n}R_k(t)\cos\frac{2k-1}{2}\pi\xi. \quad (6)$$

Здесь $R_k(t)$ – неизвестные функции времени, n – число членов ряда.

Проводя процедуру метода Бубнова-Галеркина в первом приближении получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно рассматривать как обобщение известного уравнения Дуффинга. Исследование данного уравнения можно провести методом гармонического баланса [11]. Таким образом, предложенный в работе подход позволяет определить гидроупругую реакцию трехслойной балки на упругом основании с жесткой кубической нелинейностью при ее взаимодействии с пульсирующей вязкой жидкостью в узком канале.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 122030100145-3)

Список использованной литературы

1. Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Горшков А. Г. , Старовойтов Э. И. , Яровая А. В. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с.
2. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Плескачевский, Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. – Москва: Физматлит, 2011. – 560 с.
3. Carrera, E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. – 2003. – Vol. 56(3). – PP. 287-308.
4. Birman, V. Review of current trends in research and applications of sandwich structures/ Birman V., Kardomateas G.A. // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol. 142. – PP. 221-240
5. Могилевич, Л.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем / Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56-63.
6. Hydroelastic vibrations of circular sandwich plate under inertial excitation/ Kondratov D.V., Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. // Advanced Structured Materials. – 2021. – Vol. 157. – P. 227-242.

7. Kramer, M.R. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water / Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – PP. 254-263.
8. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of circular sandwich plate resting on Winkler foundation / Chernenko A., Mogilevich L., Popov V. [et al]// Studies in Systems, Decision and Control. – 2021. – Vol. 337. – P. 91-101.
9. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation/ Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2008. – Vol. 37. – No. 3. – P. 230-235.
10. Mathematical modeling of highly viscous liquid dynamic interaction with walls of channel on elastic foundation / Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V.// 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines, Dynamics 2016. P. 7819051. DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819051.
11. Krack, M. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems./ Krack M., Gross J. – New York: Springer, 2019. – 171 p.