

## АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЁХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Д. В. ЛЕОНЕНКО

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

Ранее в работах [1–3] рассмотрено деформирование трехслойного стержня, скрепленного с упругим основанием Винклера. В данной статье рассмотрены свободные колебания трехслойного стержня, лежащего на основании, описываемого моделью Пастернака.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат  $x, y, z$  связывается с срединной плоскостью заполнителя. На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция упругого основания  $q_r(x, t)$ . Через  $w_k(x, t)$  и  $u_k(x, t)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв.

Уравнения движения трёхслойного стержня следуют из принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$\delta A - \delta W = \delta A_1 \quad (1)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости;  $\delta A_1$  – вариация работы сил инерции.

В рамках модели Пастернака [4] реакция основания будет

$$q_r = \kappa_0 w_2 - t_f \Delta w. \quad (2)$$

Подставив значения вариаций в (1) с учетом (2), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую собственные колебания системы стержень-основание.

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жёсткие опоры.

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Начальные условия движения будут ( $t=0$ )

$$\begin{aligned} u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \\ w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad w_k(x, 0) = w_{k0}(x) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, в данной работе рассмотрена постановка начально-краевой задачи (1)–(4) о свободных колебаниях трехслойного стержня на упругом основании Пастернака. Получены аналитические и численные решения для стержней со сжимаемым заполнителем.

### Список литературы

- 1 Леоненко, Д. В. Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.
- 2 Леоненко, Д. В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом инерционном основании Винклера / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика междунар. науч.-техн. журнал. Вып. 30. – Минск, 2015. – С. 61–64.
- 3 Плещачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плещачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
- 4 Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.