

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТРАНСПОРТА»**

Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебно-методическое пособие

Гомель 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
Кафедра «Электротехника»

Н. П. ВОЛКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

*Одобрено методической комиссией электротехнического факультета
в качестве учебно-методического пособия для выполнения контрольной
работы № 4 студентами электротехнических специальностей
заочной формы обучения*

Гомель 2014

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2
В67

Р е ц е н з е н т – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электротехника»
В. Н. Галушко (УО «БелГУТ»)

Волков, Н. П.

В67 Теоретические основы электротехники : учеб.-метод. пособие /
Н. П. Волков ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос.
ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2014. – 39 с.
ISBN 978-985-379-5

Приведены задания с методическими указаниями для самостоятельной работы студентов при выполнении контрольной работы по расчету нелинейных магнитных и электрических цепей по курсу «Теоретические основы электротехники».

Предназначено для студентов электротехнических специальностей заочной формы обучения.

УДК 621.3(075.8)
ББК 31.2

ISBN 978-985-379-5

© Волков Н. П., 2014
© Оформление. УО «БелГУТ», 2014

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

На первой странице контрольной работы, а в случае необходимости и на последующих, приводятся: формулировка задачи, схема электрической цепи и параметры ее элементов. Далее приводятся расчетные схемы со всеми необходимыми цифровыми и буквенными обозначениями. На схеме указываются стрелками направления токов и напряжений. Кратко даются пояснения по всем этапам расчета, при этом сначала записываются уравнения и расчетные формулы в общем виде, а затем производится подстановка числовых значений. Рисунки, графики, вспомогательные схемы, векторные диаграммы должны располагаться по тексту после соответствующих ссылок и выполняться в приемлемом для анализа масштабе. Каждый рисунок должен быть подписан.

При построении графиков, векторных диаграмм необходимо обозначать координатные оси, единицы измерения откладываемых по осям величин и градуировку осей в кратных числах. Градуировку осей выполнять, начиная с нуля, равномерно через один или два сантиметра, указывая численные значения величин слева от вертикальной оси и под горизонтальной осью. Обязательно указывать обозначения величин и их единицы измерения.

При этом следует выбирать такой масштаб, чтобы 1 см координат соответствовал $1 \cdot 10^{\pm n}$, $2 \cdot 10^{\pm n}$ или $5 \cdot 10^{\pm n}$ единицам измеряемой величины, где n – целое число.

При построении векторных диаграмм на комплексной плоскости оси не градуируются, а указывается масштаб изображаемых величин, например, $m_i = 0,5$ А/см, $m_u = 20$ В/см.

Расчетные точки, через которые проводят линии графика, должны быть обозначены на соответствующих кривых. При этом на графиках не следует указывать числовые значения координат этих точек.

Вычисления производятся с точностью, при которой относительная погрешность расчета не превышает 1 %.

Для всех используемых в расчетах величин указывается их размерность.

В тексте допускаются только общепринятые сокращения слов.

В ходе решения задачи следует придерживаться ранее принятых буквенных и цифровых обозначений величин (токов, напряжений, сопротивлений и т. п.), ветвей и узлов схемы.

Исходные данные и расчетные схемы при выполнении каждой задачи студент выбирает в соответствии с шифром, который ему сообщает преподаватель.

1 МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ С ПОСТОЯННЫМИ ПОТОКАМИ

Задача 1

На рисунке 1.1 изображены магнитные цепи, магнитопроводы которых выполнены из электротехнической стали 1411. На стержнях каждого магнитопровода размещены намагничивающие катушки с заданным числом витков ($w_1 = 600$, $w_2 = 300$, $w_3 = 400$). По катушкам протекают токи I_1 , I_2 , I_3 . На одном из участков магнитной цепи имеется воздушный зазор длиной l_0 . В таблице 1.1 приведены значения длины (l_1 , l_2 , l_3) и площади сечений (S_1 , S_2 , S_3) участков магнитной цепи, а также длина воздушного зазора l_0 . В таблице 1.2 заданы значения протекающих по катушкам токов (I_1 , I_2 , I_3). Кривая намагничивания $B(H)$ электротехнической стали задана

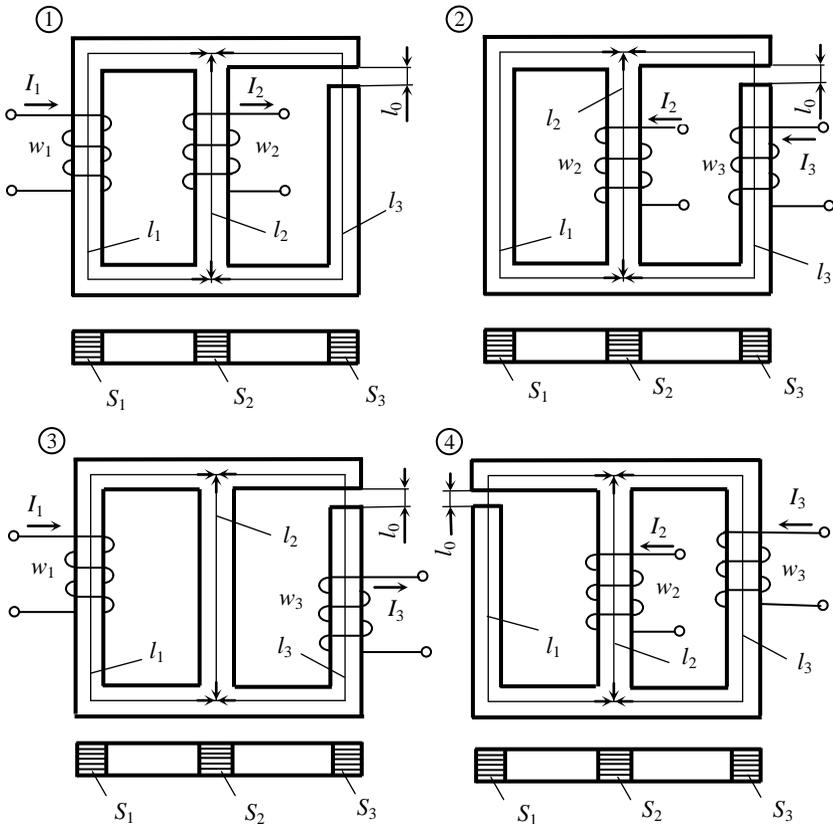


Рисунок 1.1 (начало)

таблицей 1.3.

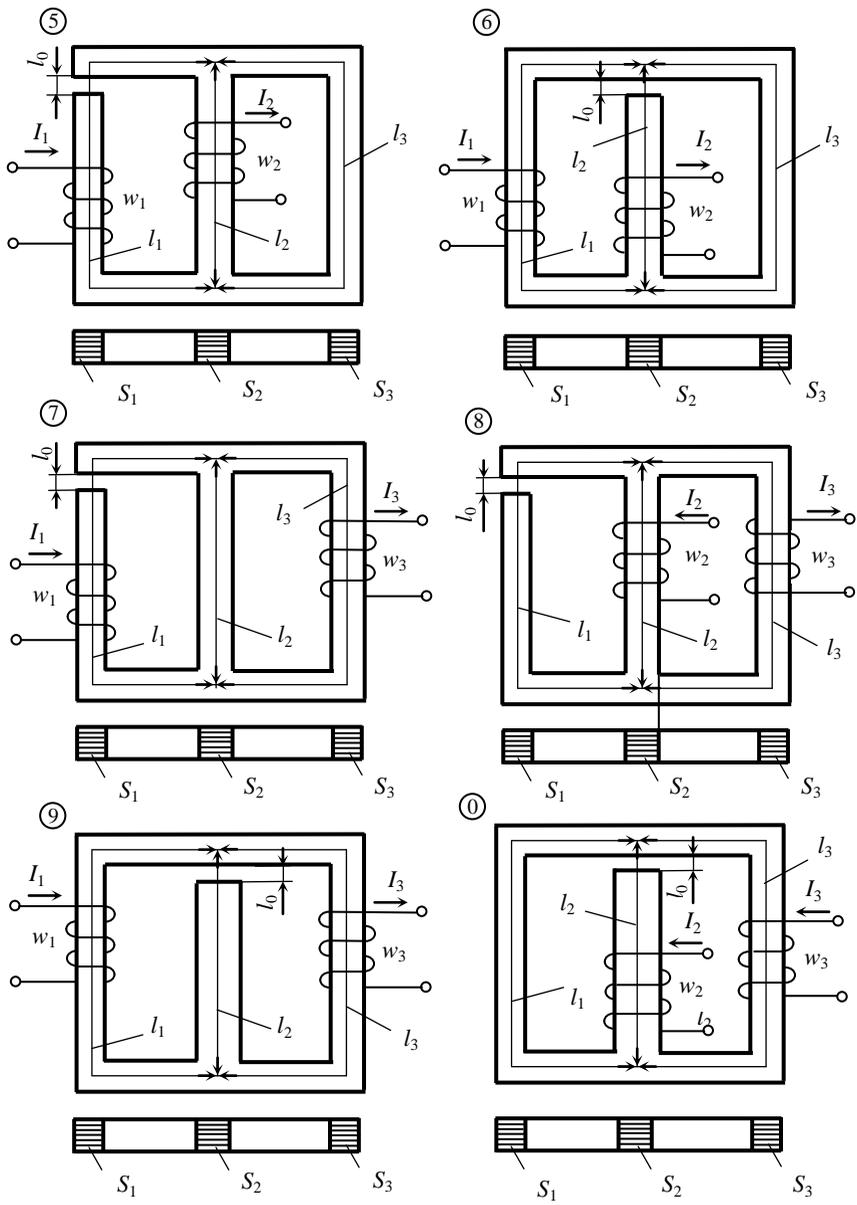


Рисунок 1.1 (окончание)

Для соответствующего варианта магнитной цепи определить, пренебрегая потоками рассеяния, потерями в стали сердечников и проводах обмоток:

- магнитные потоки на всех участках магнитной цепи;
- значения напряженности и индукции магнитного поля в воздушном зазоре.

Таблица 1.1

Размеры участков сердечника	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_1 , см	25	27	28	32	34	24	30	35	38	32
l_2 , см	12	16	14	15	16	12	14	15	18	16
l_3 , см	32	35	40	44	48	36	42	46	50	47
S_1 , см ²	4,1	4,8	5,0	3,8	4,2	6,0	5,6	5,2	4,6	5,2
S_2 , см ²	3,6	3,8	4,6	3,4	3,7	5,6	5,3	4,7	4,1	4,6
S_3 , см ²	4,1	4,8	5,0	3,8	4,2	6,0	5,6	5,2	4,6	5,2
l_0 , мм	0,9	1,1	1,2	1,2	1,3	1,1	1,2	1,3	1,0	1,4

Таблица 1.2

Значения токов катушек, A	Номер магнитной цепи									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I_1	3,2	–	2,8	–	1,4	3,0	3,4	–	1,3	–
I_2	2,4	3,1	–	6,3	5,8	2,8	–	3,0	–	6,2
I_3	–	5,0	2,1	2,3	–	–	2,4	4,8	4,6	2,2

Таблица 1.3

H , А/м	0	50	100	200	300	400	500	600	800
B , Тл	0	0,21	0,44	0,76	1,00	1,15	1,22	1,28	1,32
H , А/м	1000	1200	1400	1800	2200	4000	8000	12000	
B , Тл	1,37	1,40	1,42	1,44	1,46	1,54	1,65	1,74	

Исходные данные для решения задачи выбираются следующим образом. По последней цифре шифра выбирают схему магнитной цепи, по предпоследней - размеры участков сердечника из таблицы 1.1.

2 НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Задача 2

Электрическая схема в зависимости от варианта задачи имеет в своем составе синусоидальный источник (напряжения или тока), линейные элементы (r, L, C), а также один или два нелинейных элемента.

Характеристики нелинейных элементов аппроксимированы ломаными линиями и изображены: на рисунке 2, *а* для нелинейной катушки, на рисунке 2, *б* – для нелинейного конденсатора и на рисунке 2, *в* – для нелинейного резистора.

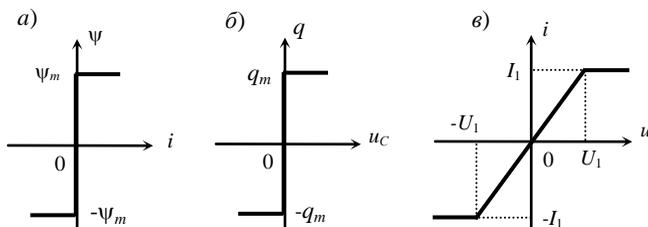


Рисунок 2

В каждом варианте приведенной ниже задачи требуется рассчитать периодический процесс в нелинейной электрической цепи по характеристикам для мгновенных значений величин и построить графики изменения требуемых величин в функции времени.

Номер задачи выбирают по последней цифре шифра, а исходные данные – по предпоследней цифре соответствующей таблицы.

2.1 На рисунке 2.1 приведена схема электрической цепи, которая состоит из двух линейных резисторов r_1, r_2 и катушки с ферромагнитным сердечником. Цепь подключена к источнику синусоидальной ЭДС

$e(t) = E_m \sin \omega t$. Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ катушки дана на рисунке 2, *а*. Параметры линейных резисторов схемы, источника а также значение ψ_m заданы в таблице 2.1.

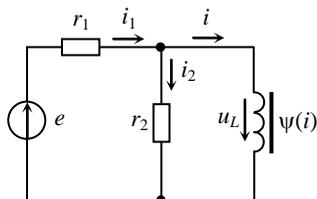


Рисунок 2.1

Построить зависимости ψ, i, i_1, i_2, u_L в функции ωt .

Таблица 2.1

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r_1 , Ом	120	100	110	125	115	112	105	118	124	116
r_2 , Ом	100	120	130	115	105	88	113	110	96	84
E_m , В	210	180	160	210	190	215	220	190	185	175
ω , рад/с	500	520	450	600	700	500	550	700	420	550
ψ_m , Вб	0,09	0,08	0,09	0,08	0,07	0,09	0,1	0,07	0,09	0,06

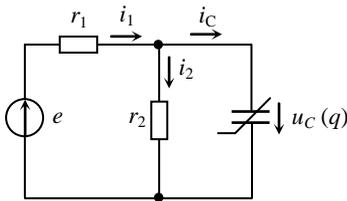


Рисунок 2.2

2.2 Схема на рисунке 2.2 состоит из двух линейных резисторов r_1 , r_2 и нелинейного конденсатора. Она подключена к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Кулон-вольтовая характеристика $q(u_C)$ конденсатора дана на рисунке 2, б. Параметры линейных резисторов схемы, источника, а также значение q_m приведены в таблице 2.2.

Построить зависимости q , u_C , i_C , i_1 , i_2 в функции ωt .

Таблица 2.2

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r_1 , Ом	180	165	215	170	200	195	175	180	150	190
r_2 , Ом	100	120	90	80	95	115	110	105	85	115
E_m , В	80	70	75	90	85	80	100	95	90	85
ω , рад/с	1550	1500	1600	1700	1650	1800	1750	1800	1850	1650
q_m , мкКл	150	140	120	145	130	115	160	135	140	130

2.3 В схеме на рисунке 2.3, состоящей из линейной катушки L , линейного резистора r и катушки с ферромагнитным сердечником, действует источник синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$. Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ катушки дана на рисунке 2, а. Параметры линейных элементов схемы и источника, а также

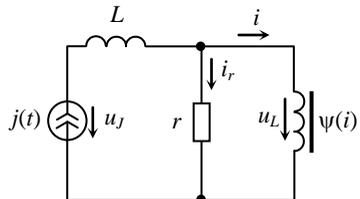


Рисунок 2.3

значения ψ_m приведены в таблице 2.3.

Построить зависимости ψ , i , u_J , i_r , u_L в функции ωt .

Таблица 2.3

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r , Ом	80	120	100	75	85	90	70	80	95	100
L , Гн	0,5	0,4	0,28	0,25	0,35	0,24	0,18	0,21	0,3	0,26
J_m , А	1,0	0,8	1,2	1,8	1,6	1,4	1,5	1,4	1,2	1,3
ω , рад/с	200	300	350	310	240	380	400	380	320	350
ψ_m , Вб	0,2	0,15	0,18	0,21	0,25	0,16	0,14	0,22	0,17	0,18

2.4 В схеме на рисунке 2.4, состоящей из линейного конденсатора C , линейного резистора r и нелинейного конденсатора, действует источник синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$. Кулон-вольтная характеристика $q(u_C)$ нелинейного конденсатора дана на рисунке 2, б. Параметры линейных элементов схемы, источника, а также значение q_m приведены в таблице 2.4.

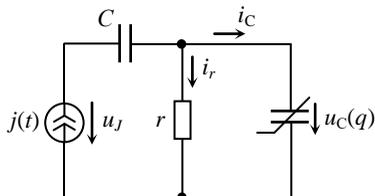


Рисунок 2.4

Построить зависимости q , u_C , i_C , i_r , u_J в функции ωt .

Таблица 2.4

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r , Ом	400	360	280	300	320	380	410	350	340	370
C , мкФ	6,25	5,55	7,34	5,12	5,64	5,08	5,14	4,74	5,22	3,68
J_m , мА	12	15	16	20	18	25	17	16	22	26
ω , рад/с	500	600	550	700	600	650	520	640	710	800
q_m , мкКл	10	12	16	15	13	18	14	11	15	16

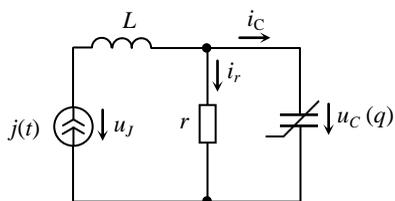


Рисунок 2.5

2.5 Схема на рисунке 2.5 состоит из линейной катушки L , линейного резистора r , нелинейного конденсатора и подключена к источнику синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$. Кулон-вольтная характеристика $q(u_C)$ нелинейного конденсатора дана на рисунке 2, б. Параметры линейных элементов

схемы, источника, а также значение q_m приведены в таблице 2.5.

Построить зависимости q , u_C , i_C , i_r , u_J в функции ωt .

Таблица 2.5

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
L , Гн	0,61	0,47	0,55	0,52	0,68	0,54	0,42	0,36	0,56	0,65
r , Ом	400	450	380	420	460	390	350	300	440	470
J_m , МА	20	18	24	21	17	24	26	22	19	18
ω , рад/с	500	640	720	680	600	650	800	700	680	540
q_m , мкКл	20	12	16	11	14	18	16	15	14	16

2.6 Схема на рисунке 2.6 состоит из катушки с ферромагнитным сердечником, линейного r и нелинейного резисторов. Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ катушки представлена на рисунке 2, а, а вольт-амперная характеристика $u(i)$ нелинейного резистора – на рисунке 2, в. В схеме действует источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Значения параметров источника, линейного резистора, а также значения ψ_m , U_1 и I_1 приведены в таблице 2.6.

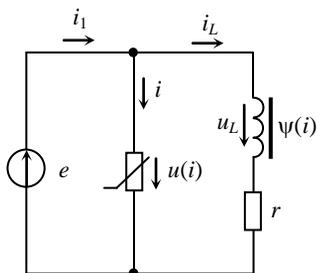


Рисунок 2.6

Построить зависимости ψ , u_L , i , i_1 , i_L в функции ωt .

Таблица 2.6

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_m , В	3,8	3,7	4,0	3,6	3,4	4,2	3,7	4,1	4,4	4,5
ω , рад/с	980	940	980	960	1100	1050	970	1200	1300	960
r , Ом	15	17	14	16	18	20	19	21	23	25

ψ_m , мВб	2,0	1,8	1,9	2,1	1,7	2,2	2,0	1,9	1,7	2,3
U_1 , В	2,4	2,2	2,5	1,8	1,9	2,8	2,0	2,6	2,5	2,7
I_1 , А	0,25	0,35	0,3	0,28	0,23	0,38	0,24	0,26	0,42	0,45

2.7 Схема на рисунке 2.7 состоит из нелинейного конденсатора, линейного r и нелинейного резисторов. Кулон-вольтная характеристика $q(u_C)$ нелинейного конденсатора представлена на рисунке 2, б, а вольт-амперная характеристика $u(i)$ нелинейного резистора приведена на рисунке 2, в.

В схеме действует источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Значения параметров источника, линейного резистора, а также значения q_m , U_1 и I_1 приведены в таблице 2.7.

Построить зависимости q , u_C , i_C , u_2 , i_1 , i в функции ωt .

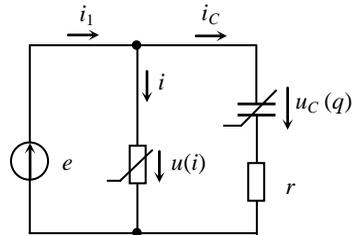


Рисунок 2.7

Таблица 2.7

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_m , В	12,5	11,0	11,5	10,2	13,4	14,3	12,5	13,2	14,8	15,0
ω , рад/с	400	410	400	360	820	650	620	480	500	660
r , Ом	820	780	620	380	540	600	640	750	680	700
q_m , мкКл	18	16	24	36	16	17	14	19	20	15
U_1 , В	7,5	7,8	7,0	6,8	8,8	8,2	6,9	8,7	7,9	9,8
I_1 , мА	5,1	3,2	4,0	5,2	5,8	7,2	3,8	5,5	6,0	6,4

2.8 Схема на рисунке 2.8 состоит из линейного конденсатора C , линейного резистора r и катушки с ферромагнитным сердечником. Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ нелинейной катушки представлена на рисунке 2, а. В схеме действует источник синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$. Значения параметров источника, линейных элементов схемы, а также значение ψ_m , приведены в таблице 2.8.

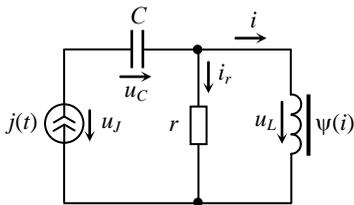


Рисунок 2.8

и u_J в функции ωt .

Построить зависимости ψ , i , u_C , i_r , u_L

Таблица 2.8

Величина	Вариант										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
r_1 , Ом	100	90	75	110	105	115	110	125	85	120	
C , мкФ	42	31	44	41	40	27	29	23	31	28	
J_m , А	0,8	1,4	1,6	0,9	1,0	1,4	1,6	1,3	1,2	1,0	
ω , рад/с	300	320	240	280	250	350	380	400	360	340	
ψ_m , Вб	0,12	0,18	0,25	0,16	0,2	0,21	0,22	0,18	0,14	0,17	

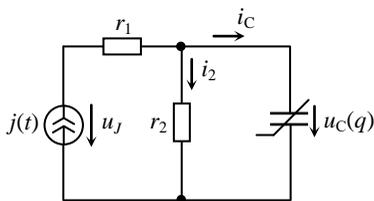


Рисунок 2.9

2.9 В схеме на рисунке 2.9 к источнику синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$ подключена цепь, состоящая из двух линейных резисторов r_1 , r_2 и нелинейного конденсатора. Кулон-вольтная характеристика $q(u_C)$ конденсатора дана на рисунке 2, б. Параметры линейных резисторов схемы,

источника, а также значение q_m при-

ведены в таблице 2.9.

Построить зависимости q , u_C , i_C , i_2 , u_j в функции ωt .

Таблица 2.9

Величина	Вариант										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
r_1 , Ом	280	310	300	360	250	270	340	330	290	280	
r_2 , Ом	320	280	340	300	310	350	270	290	330	300	
J_m , мА	18	20	16	14	24	23	22	19	24	23	
ω , рад/с	600	620	560	580	610	660	700	690	620	540	
q_m , мкКл	13	15	14	12	18	16	17	14	19	20	

2.0 В схеме на рисунке 2.0, состоящей из двух линейных резисторов r_1 , r_2 и катушки с ферромагнитным сердечником, действует источник синусоидального тока $j(t) = J_m \sin \omega t$. Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ катушки дана на рисунке 2, а. Параметры линейных резисторов схемы, источника, а также значение ψ_m приведены в таблице 2.0.

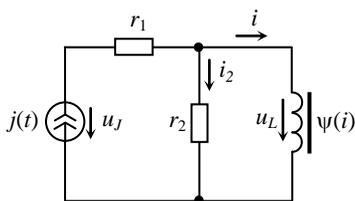


Рисунок 2.0

Построить зависимости ψ , i , u_L , i_2 и u_j в функции ωt .

Таблица 2.0

Величина	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
r_1 , Ом	270	320	300	340	280	330	310	350	290	250
r_2 , Ом	310	280	250	300	240	280	270	310	360	330
J_m , А	0,45	0,38	0,48	0,32	0,74	0,33	0,46	0,38	0,35	0,47
ω , рад/с	350	380	280	220	370	300	400	320	350	340
ψ_m , Вб	0,18	0,16	0,24	0,20	0,22	0,15	0,14	0,17	0,18	0,21

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

3.1 Нелинейные электрические и магнитные цепи

Под *нелинейными* цепями понимают цепи, содержащие элементы с *нелинейными* характеристиками. Нелинейные элементы могут быть представлены в виде резистивных, индуктивных и емкостных двухполюсников.

Нелинейный резистор представляет собой идеализированный элемент, свойства которого полностью определяются зависимостью между напряжением u и током i , т. е. вольт-амперной характеристикой (ВАХ):

$$u = u(i) \text{ или } i = i(u).$$

ВАХ одного и того же нелинейного резистора зависит от скорости изменения тока, протекающего по нему. При постоянном или низкочастотном переменном токе получают *статическую* ВАХ. Полученная при быстром изменении тока (в области высоких частот) ВАХ называется *динамической*.

На рисунке 3.1 показаны условное обозначение нелинейного резистора (рисунок 3.1, а) и его ВАХ, снятая на постоянном токе (рисунок 3.1, б).

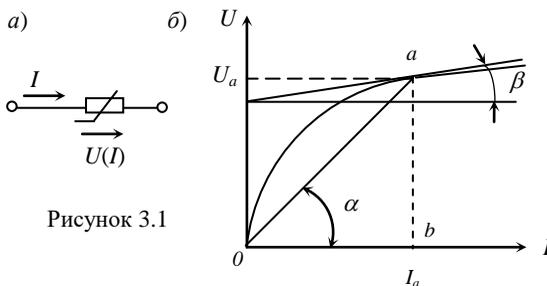


Рисунок 3.1

Каждая точка полученной ВАХ характеризуется *статическим* сопротивлением, равным отношению напряжения к току. Так для рабочей точки характеристики (точка a на рисунке 3.1, б) с координатами U_a и I_a статическое сопротивление $R_{ст}^a = \frac{U_a}{I_a}$. Если при графическом изображении ВАХ в качестве масштабов напряжения и тока принять m_u и m_i , то

$$R_{ст}^a = \frac{m_u \overline{ab}}{m_i Ob} = m_R \operatorname{tg} \alpha, \quad (3.1)$$

т. е. статическое сопротивление в точке a пропорционально тангенсу угла наклона относительно оси I прямой, проведенной из начала координат в точку a .

При достаточно малых отклонениях напряжения ΔU или тока ΔI вблизи рабочей точки a на ВАХ поведение нелинейного резистора может быть охарактеризовано условием

$$\lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} = R_{диф}^a(I),$$

$\Delta I \rightarrow 0$

где $R_{диф}^a$ – дифференциальное сопротивление элемента в точке a .

Дифференциальное сопротивление нелинейного резистора пропорционально тангенсу угла наклона касательной к ВАХ в рассматриваемой рабочей точке (см. рисунок 3.1, б):

$$R_{диф}^a = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \beta = m_R \operatorname{tg} \beta. \quad (3.2)$$

Катушка с нелинейной индуктивностью – это идеальный индуктивный двухполюсник в цепи переменного тока, свойства которого определяются вебер-амперной характеристикой (ВБАХ), т. е. зависимостью между потокоцеплением Ψ и током i :

$$\Psi = \Psi(i) \quad \text{или} \quad i = i(\Psi).$$

Нелинейная характеристика индуктивного элемента обусловлена нелинейной зависимостью $B(H)$ магнитного материала. Поэтому потокоцепление ψ не пропорционально току i . Индуктивность такой

катушки зависит от тока. По аналогии с нелинейным резистором вводят понятия статической нелинейной $L_{ст}(i) = \frac{\Psi(i)}{i}$ и дифференциальной

$L_{диф}(i) = \frac{d\Psi(i)}{di}$ индуктивностей.

Нелинейная катушка изображена на рисунке 3.2, а.

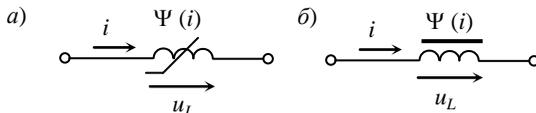


Рисунок 3.2

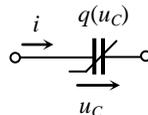
Напряжение u_L на зажимах катушки и потокосцепление Ψ связаны между собой соотношениями

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{и} \quad \Psi = \int_{-\infty}^t u_L dt = \int_{-\infty}^0 u_L dt + \int_0^t u_L dt = \Psi(0) + \int_0^t u_L dt,$$

где $\Psi(0)$ – значение потокосцепления в момент $t = 0$.

Типичным нелинейным индуктивным элементом является катушка с ферромагнитным сердечником. Ее обозначение приведено на рисунке 3.2, б.

Конденсатор с нелинейной емкостью – идеализированный элемент, свойства которого определяются кулон-вольтной характеристикой (КлВХ), т. е. зависимостью между зарядом q и напряжением u_C :



$$q = q(u_C) \quad \text{или} \quad u_C = u_C(q).$$

Рисунок 3.3

Нелинейный конденсатор изображен на рисунке 3.3.

Нелинейными свойствами обладают конденсаторы с изоляцией, диэлектрическая проницаемость которых зависит от приложенного напряжения. Наибольшее распространение получили конденсаторы с сегнетодиэлектриками (*вариконды*). Емкость такого конденсатора зависит от приложенного к его обкладкам напряжения. Для нелинейных конденсаторов используют понятия статической нелинейной

$C_{ст}(u_C) = \frac{q(u_C)}{u_C}$ и дифференциальной $C_{диф}(u_C) = \frac{dq(u_C)}{du_C}$ емкостей.

Ток i , проходящий через конденсатор, и заряд q связаны между собой соотношениями

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{или} \quad q = \int_{-\infty}^t idt = \int_{-\infty}^0 idt + \int_0^t idt = q(0) + \int_0^t idt,$$

где $q(0)$ – заряд конденсатора в момент $t = 0$.

3.1.1 Нелинейные магнитные цепи с постоянными потоками

Магнитной цепью называют совокупность катушек (обмоток) с токами и ферромагнитных тел, по которым замыкается магнитный поток.

Магнитные цепи являются составными частями ряда электротехнических устройств и предназначены для создания интенсивных магнитных полей в определенной части пространства (заданном рабочем объеме).

Участки магнитной цепи, выполненные из ферромагнитных материалов, называют *магнитопроводами* или *сердечниками*.

Основными физическими величинами, характеризующими магнитное поле, являются *магнитная индукция* B и *напряженность* магнитного поля H . Единицей магнитной индукции является *тесла* (Тл), напряженность измеряется в А/м. B и H являются векторными величинами.

Магнитное поле графически можно изображать линиями магнитной индукции (силовыми линиями), которые являются непрерывными и направляются таким образом, чтобы касательные к ним в каждой их точке совпадали с направлением вектора \vec{B} .

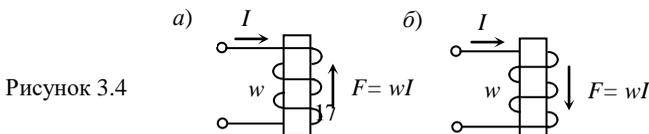
Магнитное поле создается в большинстве случаев катушками с токами, размещенными на сердечниках, при этом магнитная индукция, обусловленная какой-либо катушкой, пропорциональна току в ней. Магнитные поля с постоянными потоками создаются катушками, по которым текут постоянные токи, или постоянными магнитами.

Произведение числа витков w катушки на протекающий по ней ток I называется *магнитодвижущей силой* (МДС) и обозначается буквой F :

$$F = wI. \quad (3.3)$$

МДС F вызывает магнитный поток в магнитной цепи подобно тому, как ЭДС вызывает ток в электрической цепи. *Измеряют* МДС в *амперах* (А).

МДС характеризуют направлением, которое определяется правилом правого винта и на схеме указывается стрелкой (рисунок 3.4, а и б).



Магнитная индукция зависит не только от тока, возбуждающего магнитное поле, но и от среды, в которой оно существует. Влияние среды на магнитное поле характеризуется *абсолютной магнитной проницаемостью* среды

$$\mu_a = \mu_r \mu_0, \quad (3.5)$$

где μ_r – относительная магнитная проницаемость среды;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость вакуума, называемая *магнитной постоянной*.

Относительная магнитная проницаемость вещества показывает, как изменяется магнитный поток в данном веществе по сравнению с магнитным потоком в вакууме.

Вещества, у которых $\mu_r \gg 1$, называют *ферромагнетиками*.

Между магнитной индукцией B и напряженностью H существует зависимость

$$B = \mu_a H. \quad (3.6)$$

Если векторы магнитной индукции \vec{B} в любой точке поля одинаковы и направлены в одну сторону, то поле *однородное*. Если хотя бы одно условие не выполняется, то поле *неоднородное*.

Поток вектора магнитной индукции \vec{B} через некоторую поверхность S называется магнитным потоком Φ

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (3.7)$$

где $d\vec{S}$ – элемент поверхности S .

В однородном магнитном поле, когда поверхность S располагается нормально силовым линиям,

$$\Phi = BS. \quad (3.8)$$

Единица магнитного потока – *вебер* (Вб).

3.1.2 Основные характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуют зависимостью $B(H)$. При этом различают два основных вида этих зависимостей: кривые намагничивания и гистерезисные петли. Кривые намагничивания представляют однозначную зависимость между B и H .

Зависимость $B(H)$ для каждого ферромагнитного материала определяется экспериментально.

Ферромагнитным материалам присуще явление *гистерезиса* – отставание изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H . При периодическом изменении напряженности поля зависимость $B(H)$ имеет петлевой характер (рисунок 3.5) и называется *петлей магнитного гистерезиса*.

Каждый из отрезков, отсекаемых петлей гистерезиса на оси ординат, определяет *остаточную индукцию* (B_r и $-B_r$), а каждый отрезок, отсекаемый той же петлей на оси абсцисс, – *коэрцитивную* (задерживающую) *силу* (H_c и $-H_c$).

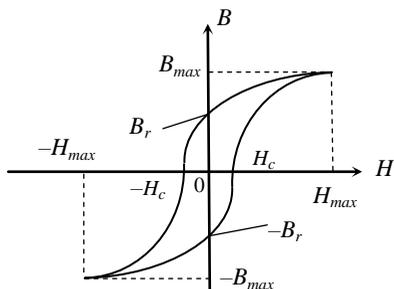


Рисунок 3.5

Часть петли, лежащая во втором квадранте между точками B_r и $-H_c$, называется *кривой размагничивания*. Этой кривой пользуются при расчете постоянных магнитов.

При расчете магнитных цепей в большинстве случаев пользуются *основной кривой намагничивания* или просто *кривой намагничивания*,

которую получают путем соединения вершин симметричных гистерезисных петель, снятых при различных максимальных значениях H_{\max} . Кривые намагничивания различных ферромагнитных материалов приводятся в справочниках.

3.1.3 Основные законы магнитной цепи

В основе расчета магнитных цепей лежат:

1 Принцип непрерывности магнитного потока, согласно которому *магнитный поток сквозь любую замкнутую поверхность S равен нулю*:

$$\int_S \overline{B} dS = 0. \quad (3.9)$$

где \overline{dS} – элемент поверхности S .

2 Закон полного тока, согласно которому *циркуляция вектора \overline{H} вдоль любого замкнутого контура l равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром*:

$$\int_l \overline{H} d\vec{l} = \sum i, \quad (3.10)$$

где \overline{dl} – элемент контура l .

Контур интегрирования целесообразно выбирать таким образом, чтобы он совпадал с силовой линией, что позволяет заменить подынтегральное выражение в формуле (3.10) произведением скалярных величин

$$\int_l H dl = \sum i.$$

Знак каждого тока, охватываемого контуром, определяется правилом правого винта.

Простейшей магнитной цепью является кольцевой магнитопровод из ферромагнитного материала с равномерно намотанной на нем намагничивающей катушкой с числом витков w и током I (рисунок 3.6).

Будем полагать, что магнитное поле полностью сосредоточено в сердечнике, а поток рассеяния, замыкающийся по воздуху, отсутствует. Будем также считать, что магнитный поток Φ равномерно распределен по поперечному сечению сердечника S , т. е. $B = \Phi/S = \text{const}$.

При неизменном значении магнитной индукции B во всех точках цепи напряженность магнитного поля H будет также везде одинакова. В качестве контура интегрирования выберем среднюю силовую линию l , совпадающую с осевой линией магнитопровода. Направление линии определяется, как было отмечено выше, правилом правоходового винта. Тогда в соответствии с законом полного тока, принимая во внимание, что

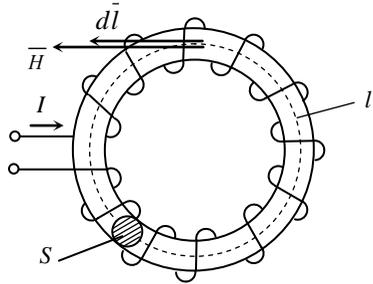


Рисунок 3.6

векторы \overline{H} и $d\vec{l}$ совпадают по направлению, получим

$$\int_l H dl = Hl = Iw = F \quad \text{или} \quad \frac{\Phi}{\mu_a S} l = F,$$

откуда

$$\Phi = \frac{F}{\frac{l}{\mu_a S}} = \frac{F}{R_m}, \quad (3.11)$$

где $R_m = \frac{l}{\mu_a S}$ – магнитное сопротивление рассматриваемого сердечника.

Размерность магнитного сопротивления – Гн⁻¹.

Произведение числа витков катушки w на магнитный поток Φ называется *потокосцеплением* и обозначается $\Psi = w\Phi$.

По аналогии с электрической цепью полученное выражение (3.11) можно рассматривать в качестве формулы закона Ома для магнитной цепи. Закон Ома для магнитной цепи не всегда может быть применен в силу нелинейного характера R_m .

В соответствии с формулой (3.11) рассмотренную магнитную цепь можно изобразить схемой замещения, представленной на рисунке 3.7.

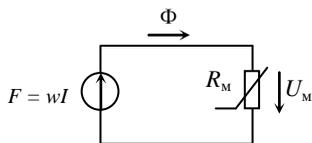


Рисунок 3.7

На схеме вместо тока цепи направляем магнитный поток Φ , вызываемый МДС F .

Произведение магнитного сопротивления на магнитный поток называется падением магнитного напряжения, или просто *магнитным напряжением*, которое измеряется в

амперах:

$$U_m = R_m \Phi, \text{ или } U_m = HI. \quad (3.12)$$

Нелинейное магнитное сопротивление характеризуется вебер-амперной характеристикой $\Psi(I)$.

ВБХ строится по заданной кривой намагничивания (рисунок 3.8, а). Каждому значению B кривой соответствует значение H . Умножив все значения B на wS , получим соответствующие значения потокосцепления $\Psi = BwS$. В соответствии с законом полного тока имеем $HI = wi$, откуда получаем

$$i = H \frac{l}{w}.$$

Построенная таким образом вебер-амперная характеристика $\Psi(I)$ магнитопровода на рисунке 3.8, б по внешнему виду подобна кривой намагничивания.

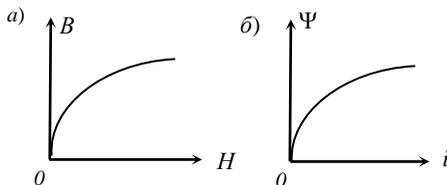


Рисунок 3.8

Неразветвленная магнитная цепь. На рисунке 3.9 дана неразветвленная магнитная цепь. Магнитопровод цепи выполнен из одного и того же ферромагнитного материала, имеет два участка с разными поперечными сечениями и воздушный зазор длиной l_0 .

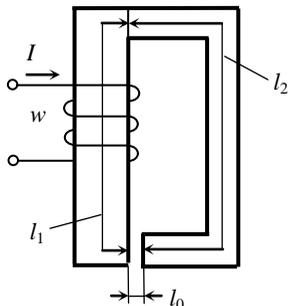


Рисунок 3.9

Магнитный поток создается намагничивающей обмоткой с МДС $F = wI$. Заданы геометрические размеры магнитопровода и кривая намагничивания $B(H)$ материала сердечника.

Разобьем магнитную цепь на три участка в зависимости от их поперечного сечения и материала, из которого они состоят. Проведем среднюю силовую линию по участкам магнитопровода, определим длину и площадь сечения каждого участка: l_1, l_2, S_1 и S_2 . Площадь

сечения воздушного зазора примем равной сечению второго участка ($S_0 = S_2$).

Схема замещения магнитной цепи приведена на рисунке 3.10. На ней изображены два нелинейных магнитных сопротивления, которые соответствуют первому и второму участкам магнитопровода.

Наличие воздушного зазора учтено линейным магнитным сопротивлением

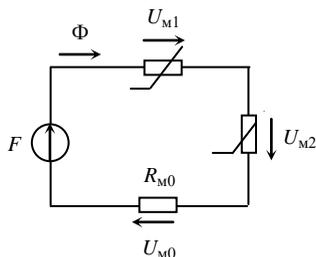


Рисунок 3.10

$$R_{M0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0}.$$

Применив к магнитной цепи закон полного тока с учетом сделанных ранее допущений, получим

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 = F,$$

или

$$U_{M1} + U_{M2} + U_{M0} = F,$$

где H_1, H_2 и H_0 – напряженности магнитного поля соответствующих участков магнитной цепи.

В общем случае для n участков неразветвленной магнитной цепи с магнитным потоком Φ можно записать:

$$\sum_{k=1}^n H_k l_k = \sum_{k=1}^n \Phi \frac{l_k}{\mu_{rk} S_k} = \sum_{k=1}^n \Phi R_{mk} = F. \quad (3.13)$$

Расчет неразветвленной магнитной цепи может осуществляться для двух типов задач: *прямой* и *обратной*.

Прямая задача заключается в определении МДС для заданного значения магнитной индукции в воздушном зазоре.

Обратная задача состоит в определении значения магнитной индукции в воздушном зазоре по заданному значению МДС.

Пример 3.1 (прямая задача). На рисунке 3.9 дана магнитная цепь, сердечник которой выполнен из ферромагнитного материала. Кривая намагничивания задана таблицей 3.1. На сердечник насажена обмотка с числом витков $w = 800$. В сердечнике имеется воздушный зазор длиной $l_0 = 2$ мм. Заданы геометрические размеры участков сердечника: $l_1 = 10$ см, $l_2 = 22$ см, $S_1 = 8$ см², $S_2 = 4$ см².

Определить ток обмотки, обеспечивающий в воздушном зазоре магнитную индукцию $B_0 = 1,2$ Тл.

Таблица 3.1

B , Тл	0	0,4	0,6	0,9	1,06	1,2	1,4
H , А/м	0	140	200	400	600	800	1600

Решение. Пренебрегая искажением магнитного поля в зазоре и принимая сечение зазора равным сечению второго участка магнитопровода $S_0 = S_2$, определяем магнитный поток:

$$\Phi = B_0 S_0 = 1,2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Магнитная индукция первого участка $B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = 0,6$ Тл, а второго –

$$B_2 = B_0 = 1,2 \text{ Тл.}$$

По кривой намагничивания материала сердечника находим значения напряженности магнитного поля ферромагнитных участков: $H_1 = 200$ А/м и $H_2 = 800$ А/м по соответствующим значениям B_1 и B_2 . Напряженность магнитного поля в зазоре определяется по формуле

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 9,55 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

В соответствии с формулой (3.13) найдем МДС катушки

$$F = wI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 = 2106 \text{ A},$$

откуда искомое значение тока $I = F / w = 2,633 \text{ A}$.

Пример 3.2 (обратная задача). Для магнитной цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, определить значение магнитной индукции B_0 в воздушном зазоре, если ток катушки $I = 2 \text{ A}$.

Решение. Задачу будем решать графически путем построения вебер-амперных характеристик участков.

На схеме замещения магнитной цепи (рисунок 3.11) выделим две ветви, присоединенные к зажимам a и b : нелинейную активную ветвь (обведена пунктиром) и пассивную ветвь с линейным магнитным сопротивлением R_{M0} . Обозначим магнитное напряжение между узлами U_{Mab} . Построим в одной системе координат осей (рисунок 3.12) вебер-амперные характеристики обеих ветвей, уравнения которых составлены по второму закону Кирхгофа:

$$U_{Mab} = F - U_{M1}(\Phi) - U_{M2}(\Phi); \quad (3.14)$$

$$U_{Mab} = R_{M0} \Phi. \quad (3.15)$$

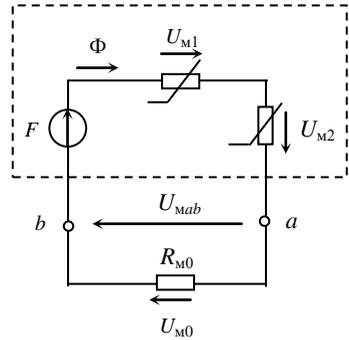
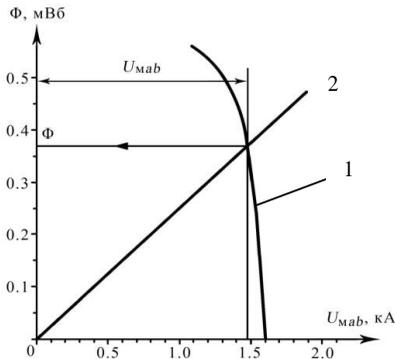


Рисунок 3.11

Построение ВБАХ первой ветви в соответствии с уравнением 3.14 произведем, составив предварительно таблицу 3.2.



Умножая значения B первой колонки на S_0 , получим значения магнитного потока Φ , а умножая значения H из второй колонки на l_1 , а затем на l_2 , получим соответственно значения U_{M1} и U_{M2} . Зависимость $U_{Mab}(\Phi)$ для первой ветви изображена на рисунке линией 1.

Для второй ветви (воздушного зазора) зависимость $U_{Mab}(\Phi)$ представляет прямую линию, проходящую через начало координат (линия 2). Для ее построения возьмем

произвольное значение магнитного потока Φ , напри-

Рисунок 3.12

мер, $\Phi = 0,3$ мВб, и, умножив его на магнитное сопротивление воздушного

Таблица 3.2

B	H	$\Phi = B \cdot S_0$	$U_{M1} = Hl_1$	$U_{M2} = Hl_2$	$U_{Mag} = F - U_{M1} - U_{M2}$
Тл	А/м	мВб	А		
0	0	0	0	0	1600
0,4	140	0,16	14	30,8	1555,2
0,6	200	0,24	20	44	1536
0,9	400	0,36	40	88	1472
1,06	600	0,424	60	132	1408
1,2	800	0,48	80	176	1344
1,4	1600	0,56	160	352	1088

зазора $R_{M0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0} = 4 \cdot 10^6 \text{ Гн}^{-1}$, получим соответствующее значение магнитное напряжение $U_{M0} = 1200 \text{ А}$.

Ордината точки пересечения характеристик 1 и 2 соответствует значению магнитного потока

$$\Phi = 0,37 \text{ мВб.}$$

Магнитная индукция в воздушном зазоре $B_0 = \frac{\Phi}{S_0} = 0,925 \text{ Тл}$.

Разветвленная магнитная цепь. В разветвленной магнитной цепи могут быть несколько различных магнитных потоков. По аналогии с разветвленной электрической цепью ее можно представлять совокупностью ветвей и узлов. Под *ветвью* будем понимать участок магнитной цепи, по которому проходит неизменный магнитный поток. Узел магнитной цепи – это место соединения трех и более ветвей. На рисунке 3.13 приведена магнитная цепь, которая имеет три ветви с магнитными потоками Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и два узла.

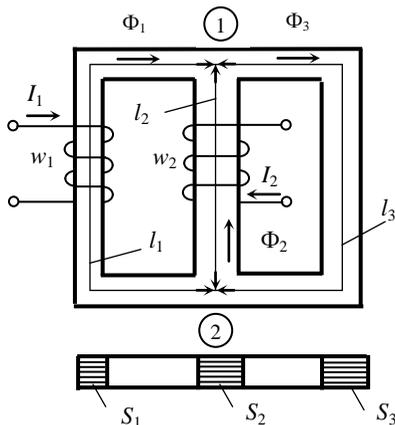


Рисунок 3.13

Цепь имеет две намагничивающих обмотки с МДС $F_1 = w_1 I_1$ и $F_2 = w_2 I_2$ соответственно.

Выберем направления магнитных потоков ветвей и укажем их стрелками. Согласно принципу непрерывности магнитного потока для узла магнитной цепи справедливо соотношение

$$\sum \Phi = 0. \quad (3.16)$$

Оно представляет собой запись первого закона Кирхгофа для магнитной цепи, который гласит:

“Алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю”.

Магнитные потоки, направленные к узлу, берем с положительным знаком, а направленные от узла – со знаком минус (или наоборот).

Разобьем магнитную цепь на участки в зависимости от их поперечных сечений. Длину каждого участка будем принимать равной длине средней силовой линии на этом участке. Обозначим через l_1, l_2 и l_3 длины участков, а через S_1, S_2 и S_3 – их сечения.

Анализируемая магнитная цепь представлена схемой замещения на рисунке 3.14.

Выберем два контура цепи: первый, включающий левую и среднюю ветви, и второй, в который входят средняя и правая ветви. Применим к выбранным контурам закон полного тока и запишем уравнения, совершая обход контуров, например, по направлению движения часовой стрелки.

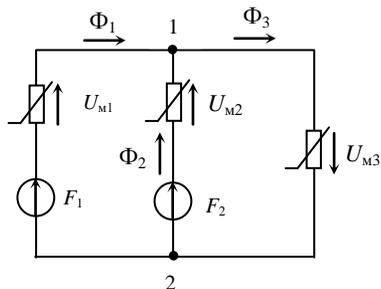


Рисунок 3.14

$$H_1 l_1 - H_2 l_2 = I_1 w_1 - I_2 w_2;$$

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 = I_2 w_2.$$

Обозначив $H_1 l_1 = U_{M1}; \quad H_2 l_2 = U_{M2}; \quad H_3 l_3 = U_{M3},$

получим $U_{M1} - U_{M2} = F_1 - F_2;$

$$U_{M2} + U_{M3} = F_2.$$

Полученные соотношения представляют собой уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа для контуров магнитной цепи.

Он гласит:

“Алгебраическая сумма магнитных напряжений участков контура магнитной цепи равна алгебраической сумме МДС, действующих в данном контуре.”:

$$\sum U_{mk} = \sum F_k. \quad (3.17)$$

Со знаком плюс берут магнитные напряжения и МДС, направление которых совпадает с направлением обхода контура. В противном случае их берут со знаком минус

Пример 3.3 Определить магнитные потоки в стержнях разветвленного магнитопровода (рисунок 3.15), выполненного из электротехнической стали, кривая намагничивания которой задана таблицей 1.3. Геометрические размеры магнитопровода: $l_1 = 50$ см, $l_2 = 18$ см, $l_3 = 60$ см, $S_1 = S_3 = 30$ см², $S_2 = 24$ см², $l_0 = 0,8$ мм. На стержнях магнитной цепи насажены две катушки с МДС $F_1 = w_1 I_1 = 2000$ А и $F_3 = w_3 I_3 = 200$ А.

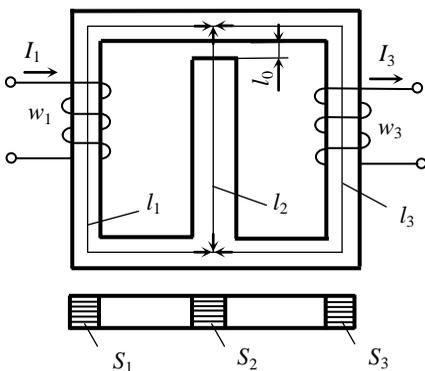


Рисунок 3.15

Решение. Составим расчетную схему замещения (рисунок 3.16), где каждый участок магнитопровода из стали представлен нелинейным магнитным сопротивлением, воздушный зазор – линейным магнитным сопротивлением R_{m0} , а катушки – источниками МДС.

Выберем положительные направления магнитных потоков Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и укажем на схеме стрелками соответствующие им падения магнитных напряжений U_{m1} , U_{m2} , U_{m3} и U_{m0} на участках магнитной цепи.

Расчет магнитной цепи произведем методом двух узлов.

Обозначим через U_{M12} магнитное напряжение между узлами 1 и 2 и запишем уравнения для вебер-амперных характеристик ветвей магнитной цепи, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{M12}(\Phi_1) = F_1 - U_{M1}(\Phi_1);$$

$$U_{M12}(\Phi_2) = U_{M2}(\Phi_2) + U_{M0}(\Phi_2);$$

$$U_{M12}(\Phi_3) = F_3 + U_{M3}(\Phi_3).$$

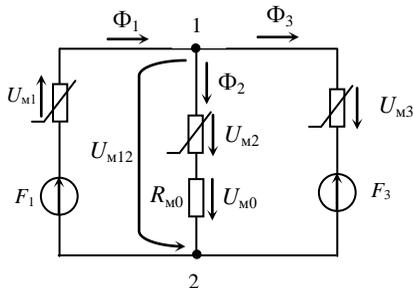


Рисунок 3.16

Магнитные потоки ветвей магнитной цепи удовлетворяют первому закону Кирхгофа:

$$\Phi_1(U_{M12}) = \Phi_2(U_{M12}) + \Phi_3(U_{M12}).$$

Решение написанной выше системы уравнений выполним графически на рисунке 3.17, для чего построим зависимости $\Phi_1(U_{M12})$, $\Phi_2(U_{M12})$ и $\Phi_3(U_{M12})$.

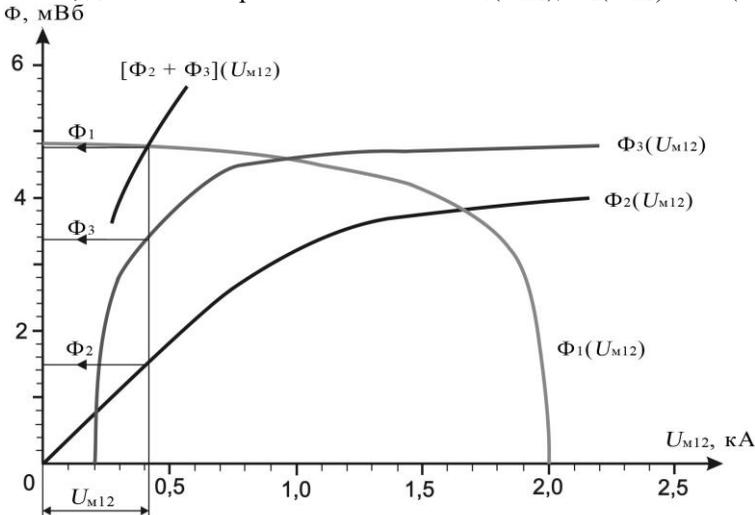


Рисунок 3.17

Для их построения воспользуемся кривой намагничивания $B(H)$ стали, приведенной в таблице 3.3. Каждому значению магнитной индукции B соответствует определенное значение напряженности H . Умножая значения

B на поперечные сечения участков магнитопровода, получим ряд значений магнитных потоков ветвей:

$$\Phi_1 = BS_1; \quad \Phi_2 = BS_2; \quad \Phi_3 = BS_3.$$

Умножая значения H на длины участков, получим значения падений магнитных напряжений на нелинейных магнитных сопротивлениях:

$$U_{M1} = Hl_1; \quad U_{M2} = Hl_2; \quad U_{M3} = Hl_3.$$

Падение магнитного напряжения на воздушной зазоре, представленного на схеме линейным магнитным сопротивлением $R_{M0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0} = 265258 \text{ Гн}^{-1}$, определяем по закону Ома $U_{M0} = R_{M0}\Phi_2$. Результаты вычислений представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

B	H	$\Phi_1=\Phi_3$	Φ_2	U_{M1}	U_{M2}	U_{M3}	U_{M0}	$U_{M12}(\Phi_1)$	$U_{M12}(\Phi_2)$	$U_{M12}(\Phi_3)$
Тл	А/м	мВб		А						
0	0	0	0	0	0	0	0	2000	0	200
0,18	40	0,54	0,43	20	7	24	114	1980	121	224
0,67	100	2,0	1,61	50	18	60	427	1950	445	260
0,81	140	2,43	1,94	70	25	84	515	1930	540	284
0,92	180	2,76	2,21	90	32	108	586	1910	618	308
1,05	240	3,15	2,52	120	43	144	668	1880	711	344
1,14	400	3,42	2,74	200	72	240	727	1800	799	440
1,23	600	3,69	2,95	300	108	360	783	1700	891	560
1,30	800	3,9	3,12	400	144	480	828	1600	972	680
1,38	1000	4,14	3,31	500	180	600	878	1500	1058	800
1,42	1200	4,26	3,41	600	216	720	905	1400	1121	920
1,46	1400	4,38	3,5	700	252	840	928	1300	1180	1040
1,50	1800	4,5	3,6	900	324	1080	955	1100	1279	1280
1,53	2200	4,59	3,67	1100	396	1320	973	900	1369	1520
1,55	2400	4,65	3,72	1200	432	1440	987	800	1419	1640
1,59	4000	4,77	3,82	2000	720	2400	1013	0	1733	2600

Построим вспомогательную кривую $U_{M12}(\Phi_2 + \Phi_3)$, так как значения магнитных потоков должны удовлетворять уравнению $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. Для этого суммируем ординаты кривых $\Phi_2(U_{M12})$ и $\Phi_3(U_{M12})$ при одних и тех же значениях магнитного напряжения U_{M12} . Абсцисса точки пересечения этой

кривой с кривой $\Phi_1(U_{M12})$ соответствует значению межзвонного напряжения $U_{M12} = 420$ А. По найденному напряжению U_{M12} определяем значения магнитных потоков:

$$\Phi_1 = 4,7 \text{ мВб}; \quad \Phi_2 = 1,4 \text{ мВб}; \quad \Phi_1 = 3,3 \text{ мВб}.$$

3.1.4 Нелинейные емкостные цепи

Нелинейные конденсаторы, пространство между обкладками которого заполнено сегнетодиэлектриком, по виду своих характеристик во многом подобны нелинейным катушкам индуктивности с ферромагнитными сердечниками. Сегнетодиэлектрики подобно ферромагнитным веществам обладают свойствами гистерезиса. Электрическим гистерезисом называют явление отставания изменения электрического смещения D от изменения напряженности поля E .

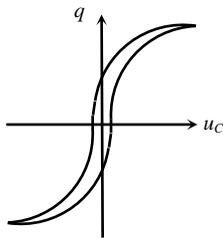


Рисунок 3.18

Сегнетодиэлектрики могут иметь узкие и широкие петли гистерезиса, а также почти прямоугольные. На рисунке 3.18 приведена кулон-вольтная характеристика нелинейного конденсатора.

При анализе цепей, содержащих нелинейные емкостные элементы, используют те же методы, что и для резистивных и индуктивных цепей.

3.1.5 Нелинейные цепи переменного тока

Для всех цепей переменного тока справедливы законы Кирхгофа в записи для мгновенных значений токов и напряжений.

При анализе поведения нелинейного элемента в цепи переменного тока наибольший интерес представляет зависимость между напряжением и током $u(i)$, причем она различна для мгновенных и действующих значений величин. В зависимости от рассматриваемого вопроса используют различные типы характеристик одного и того же элемента:

- ВАХ для действующих значений;
- характеристики для мгновенных значений;
- характеристики по первым гармоникам тока и напряжения.

Под ВАХ для действующих значений понимают зависимость между действующим синусоидального (несинусоидального) напряжения на нелинейном элементе и действующим значением тока, протекающего через него.

Основным типом характеристик нелинейных элементов являются характеристики для мгновенных значений величин:

- тока и напряжения на нелинейном резисторе $u(i)$;

- б) потокосцепления и тока на нелинейной катушке $\psi(i)$;
- с) заряда и напряжения на нелинейном конденсаторе $q(u_C)$.

При протекании переменного тока необходимо учитывать инерционность некоторых нелинейных элементов цепи, которая может быть вызвана тепловыми процессами или обусловлена механическими перемещениями подвижных частей элементов. Например, если постоянная времени нагрева термосопротивления значительно больше периода установившегося переменного тока в нем, то сопротивление элемента в течение периода практически не меняется. Элемент в таком режиме является инерционным и его ВАХ для мгновенных значений линейна. При синусоидальном токе напряжение на элементе также синусоидально. При этом зависимость между действующими значениями напряжения и тока $U(I)$ нелинейна. В этом случае для анализа цепи по действующим значениям с учетом зависимости $U(I)$ можно применять символический метод расчета и построение векторных диаграмм.

Примером инерционного индуктивного элемента является электромагнит, изменение индуктивности которого обусловлено изменением воздушного зазора в магнитопроводе при перемещении его якоря. Инерционностью обладает конденсатор, пластины которого перемещаются под действием приложенного напряжения.

Большинство нелинейных элементов безынерционны, и зависимость $u(i)$ оказывается нелинейной. В цепях с безынерционными элементами даже при синусоидальных источниках возникают несинусоидальные токи и напряжения. В этом случае следует оперировать непосредственно с мгновенными значениями величин.

Для анализа периодических процессов в нелинейных цепях с синусоидальными источниками используются аналитические, графические и численные методы.

При использовании аналитического расчета характеристики нелинейных элементов должны быть заданы аналитически. Чаще всего характеристики аппроксимируются полиномами второй и третьей степени.

Достаточно широко используют *метод кусочно-линейной аппроксимации характеристик* нелинейных элементов, который основан на замене отдельных участков характеристики элемента ломаной кривой с одной или несколькими точками излома. Такая замена позволяет упростить анализ нелинейных цепей, т. к. в интервале между изломами характеристик цепь оказывается линейной и может быть рассчитана известными методами теории линейных цепей.

Пример 3.4 Катушка с ферромагнитным сердечником и линейный резистор r включены последовательно с источником синусоидального тока

$j(t) = J_m \sin \omega t$ (рисунок 3.19, а). Вебер-амперная характеристика катушки приведена на рисунке 3.19, б.

Дано: $J_m = 10$ А, $\omega = 1000$ с⁻¹, $r = 4$ Ом, $\psi_m = 10$ мВб, $I_1 = 5$ А.

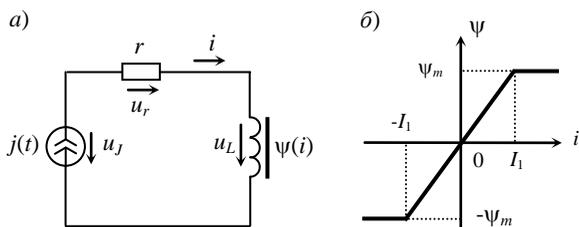


Рисунок 3.19

Построить графики изменения потокоцепления ψ , напряжений u_r на резисторе, u_L на катушке и u_J на зажимах источника тока.

Решение. Вебер-амперная характеристика катушки симметрична относительно начала координат, следовательно, графики $\psi(\omega t)$, $u_r(\omega t)$, $u_L(\omega t)$ и $u_J(\omega t)$ будут иметь симметрию относительно оси ωt .

Из представленной вебер-амперной характеристики следует, что напряжение на ее зажимах будет возникать при изменении тока в диапазоне от $-I_1$ до I_1 . В этом интервале изменения тока катушку можно характеризовать линейной дифференциальной индуктивностью

$$L_{\text{диф}} = \frac{d\psi}{di} = \frac{\psi_m}{I_1} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Напряжение на катушке

$$u_L = L_{\text{диф}} \frac{di}{dt} = L_{\text{диф}} \frac{dj(t)}{dt} = \omega L_{\text{диф}} J_m \cos \omega t = 20 \cos 1000 t \text{ В.}$$

Полученное выражение для положительных значений времени t справедливо в интервалах

$$0 \leq \omega t \leq \omega t_1; \quad \pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi + \omega t_1; \quad 2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi.$$

Значение ωt_1 найдем из условия

$$i(\omega t_1) = I_1 = J_m \sin \omega t_1,$$

откуда
$$\omega t_1 = \arcsin \frac{I_1}{J_m} = 30^\circ.$$

В интервалах $\omega t_1 \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1$ и $\pi + \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi - \omega t_1$ потокосцепление остается неизменным и равным Ψ_m и $-\Psi_m$ соответственно, что соответствует нулевому значению u_L в этих временных интервалах.

Потокосцепление Ψ катушки изменяется по закону

$$\Psi(t) = L_{\text{диф}} j(t) = 2 \cdot 10^{-2} \sin 1000 t \text{ Вб}$$

в интервалах $0 \leq \omega t \leq \omega t_1$; $\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi + \omega t_1$; $2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi$.

Напряжение u_r на резисторе определяется законом Ома:

$$u_r(t) = rj(t) = 40 \sin 1000 t \text{ В},$$

а напряжение u_j на зажимах источника тока находим по второму закону Кирхгофа:

$$u_j(t) = u_r(t) + u_L(t).$$

В диапазонах $0 \leq \omega t \leq \omega t_1$, $\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi + \omega t_1$ и $2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi$ напряжение u_j изменяется по закону

$$u_j = 40 \sin 1000 t + 20 \cos 1000 t = 44,72 \sin(1000 t + 26,6^\circ) \text{ В},$$

а в диапазонах $\omega t_1 \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1$ и $\pi + \omega t_1 \leq \omega t \leq 2\pi - \omega t_1$ – по закону

$$u_j(t) = u_r(t) = 40 \sin 1000 t \text{ В}.$$

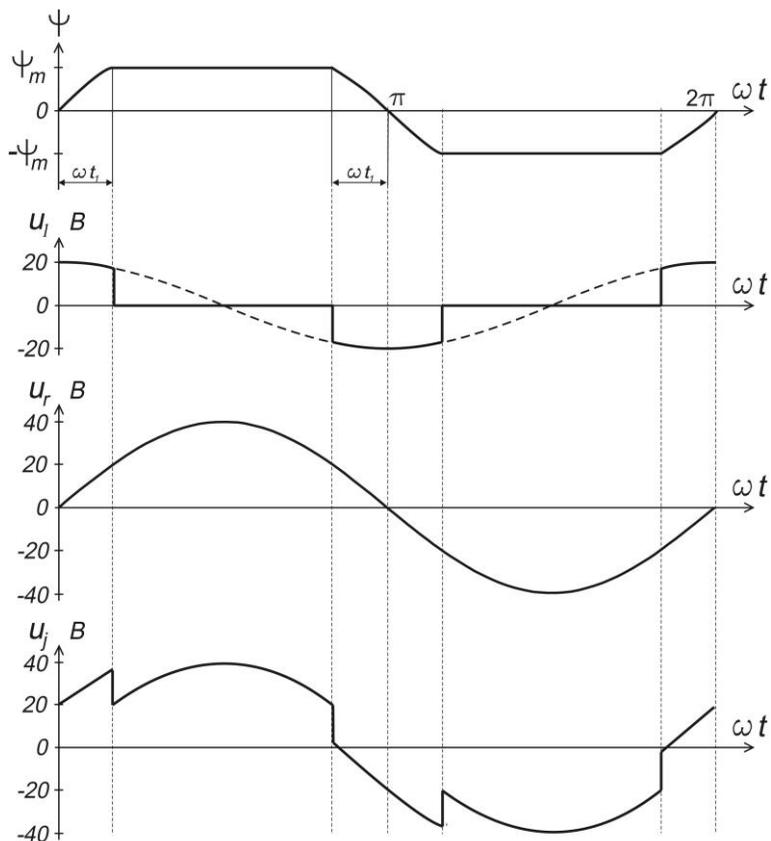


Рисунок 3.20

Графики изменения потокосцепления ψ , напряжений u_r на резисторе, u_L на катушке и u_j на зажимах источника тока приведены на рисунке 3.20.

Пример 3.5 Цепь на рисунке 3.21, *a* содержит линейный резистор r_1 и два нелинейных элемента: нелинейный конденсатор и нелинейный резистор, характеристики которых приведены на рисунках 3.21, *б* (кулон-вольтная характеристика конденсатора) и 3.21, *в* (вольт-амперная характеристика нелинейного резистора). Цепь питается от источника синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Дано: $E_m = 50$ В, $\omega = 5000$ с⁻¹, $r_1 = 250$ Ом, $q_m = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл, $I_0 = 0,15$ А, $U_0 = 25$ В.

Построить графики изменения во времени заряда q конденсатора, напряжения u_C на его зажимах, токов ветвей i_1, i_2, i .

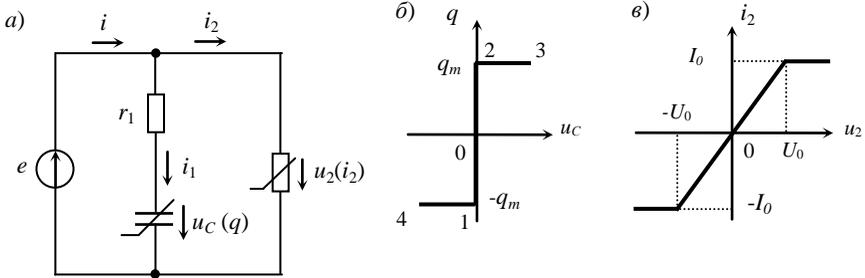


Рисунок 3.21

Решение. Поскольку ветви схемы соединены параллельно и каждая из них находится под действием одного и того же источника $e(t)$, проанализируем установившиеся режимы в каждой ветви, а затем найдем закон изменения входного тока i .

Первая ветвь. Согласно приведенной на рисунке 3.21, б кулон-вольтовой характеристики конденсатора его заряд изменяется только при бесконечно малом напряжении u_c на его зажимах, что соответствует короткозамкнутому участку цепи. Началу процесса ($t = 0$) соответствует положение изображающей точки в позиции 1.

Запишем уравнение состояния ветви по второму закону Кирхгофа:

$$r_1 i_1 + u_c = E_m \sin \omega t.$$

В первом временном интервале $0 \leq \omega t \leq \omega t_1$ при перемещении изображающей точки по участку 1-2 кулон-вольтовой характеристики $q(u_c)$ напряжение на конденсаторе $u_c = 0$, а ток i_1 ветви определяется выражением

$$i_1 = \frac{dq}{dt} = \frac{E_m}{r_1} \sin \omega t = 0,2 \sin 5000 t \text{ А.}$$

Заряд q конденсатора при перезарядке изменяется по закону

$$q(t) = \int \frac{E_m}{r_1} \sin \omega t dt = -\frac{E_m}{r_1 \omega} \cos \omega t + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Постоянную C_1 можно найти из начального условия: при $t = 0$ $q(0) = -q_m$.

Таким образом, $-q_m = -\frac{E_m}{r_1\omega} + C_1$, откуда $C_1 = \frac{E_m}{r_1\omega} - q_m = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл.

Получаем закон изменения заряда:

$$q(t) = 4 \cdot 10^{-5} \sin(5000t - 90^\circ) + 2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Для определения длительности первого временного интервала подставим в выражение для $q(t)$ значение заряда в точке 2, равное q_m :

$$q_m = -\frac{E_m}{r_1\omega} \cos\omega t_1 + \frac{E_m}{r_1\omega} - q_m,$$

откуда

$$\omega t_1 = \arccos\left(1 - \frac{2q_m r_1 \omega}{E_m}\right) = 90^\circ.$$

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ при перемещении изображающей точки по участку насыщения 2-3 и возвращении ее в позицию 2 заряд q остается неизменным и равным q_m , а ток i_1 принимает нулевое значение. При этом напряжение источника оказывается приложенным к конденсатору, т. е.

$$u_c(t) = e(t) = E_m \sin \omega t = 50 \sin \omega t \text{ В.}$$

В течение второго полупериода изменения ЭДС источника отображающая точка перемещается в обратном направлении, и процесс повторяется.

При $\omega t = \pi$ напряжение u_c становится равным нулю и начинается процесс перезарядки конденсатора от q_m до $-q_m$ (участок 2-1).

Закон изменения заряда $q(t)$ на этом участке такой же, как и на участке 1-2:

$$q(t) = \int \frac{E_m}{r_1} \sin \omega t dt = -\frac{E_m}{r_1\omega} \cos \omega t + C_2.$$

Постоянная интегрирования C_2 определяется из начального условия для момента времени $\omega t = \pi$: $\psi(\pi) = q_m$.

Получаем, что $C_2 = -\frac{E_m}{r_1\omega} + q_m = -2 \cdot 10^{-5}$ Кл. Таким образом,

$$q(t) = 4 \cdot 10^{-5} \sin(5000t - 90^\circ) - 2 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

Вторая ветвь. В соответствии с приведенной на рисунке 3.21, в вольт-амперной характеристике нелинейного резистора при изменении напряжения на его зажимах от 0 до $u_2 = U_0$ и соответственно тока i_2 в диапазоне от 0 до $i_2 = I_0$ можно говорить о линейном характере зависимости $u_2(t) = r_{\text{диф}} i_2(t)$, где $r_{\text{диф}} = U_0/I_0 = 500/3$ Ом.

Следовательно, в течение временного интервала длительностью от 0 до $\omega t = \omega t_2$ ток i_2 изменяется по синусоидальному закону:

$$i_2(t) = \frac{E_m}{r_{\text{диф}}} \sin \omega t = 0,3 \sin 1000 t \text{ А.}$$

В конце этого интервала ток i_2 достигает своего предельного значения, равного I_0 , и остается неизменным в течение следующего временного интервала $\omega t_2 \leq \omega t \leq \pi - \omega t_2$. Далее до конца первого полупериода изменения входного напряжения ($\pi - \omega t_2 \leq \omega t \leq \pi$) ток изменяется по синусоидальному закону, как в первом временном интервале. В течение второго полупериода изменения входного напряжения характер изменения тока i_2 повторяется.

Значение ωt_2 найдем из условия

$$i_2(t_2) = I_0 = \frac{E_m}{r_{\text{диф}}} \sin \omega t_2,$$

откуда
$$\omega t_2 = \arcsin \frac{I_0 r_{\text{диф}}}{E_m} = 30^\circ.$$

Ток источника ЭДС $i(t)$ находим по первому закону Кирхгофа:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t).$$

Графики изменения искомых величин задачи изображены на рисунке 3.22.

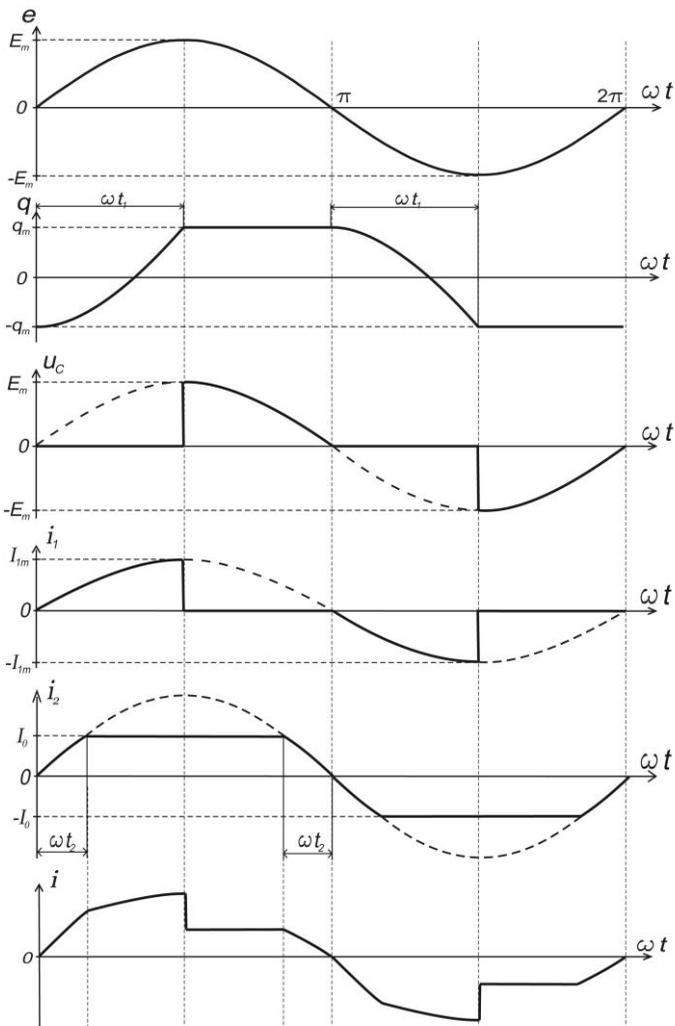
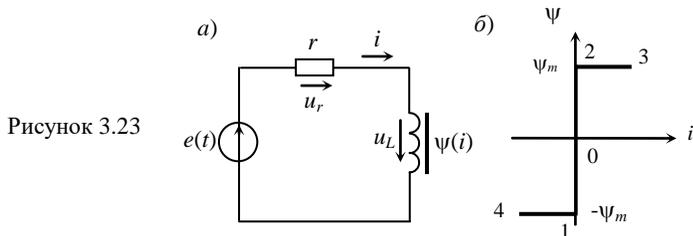


Рисунок 3.22

Пример 3.6 На рисунке 3.23, *a* источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$ подключен к цепи, состоящей из катушки с ферромагнитным сердечником и резистора сопротивлением r . Вебер-амперная характеристика $\psi(i)$ катушки дана на рисунке 3.23, *б*.

Построить графики изменения во времени потокосцепления ψ катушки, напряжения u_L на ее зажимах и тока i цепи.



Решение. Уравнение электрического равновесия для установившегося режима цепи составим по второму уравнению Кирхгофа:

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = E_m \sin \omega t.$$

При перемещении изображающей точки по участку 1-2 в течение первого интервала времени от 0 до ωt_1 потокосцепление ψ меняется $-\psi_m$ до ψ_m , при этом ток $i = 0$. Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t,$$

решение которого определяет закон изменения потокосцепления в первом временном интервале:

$$\psi(t) = \int E_m \sin \omega t dt = -\frac{E_m}{\omega} \cos \omega t + C,$$

где C – постоянная интегрирования, которая определяется из начального условия:

$$\psi(0) = -\psi_m = -\frac{E_m}{\omega} + C, \text{ откуда } C = \frac{E_m}{\omega} - \psi_m.$$

Напряжение на зажимах катушки $u_L = \frac{d\psi}{dt} = E_m \sin \omega t$.

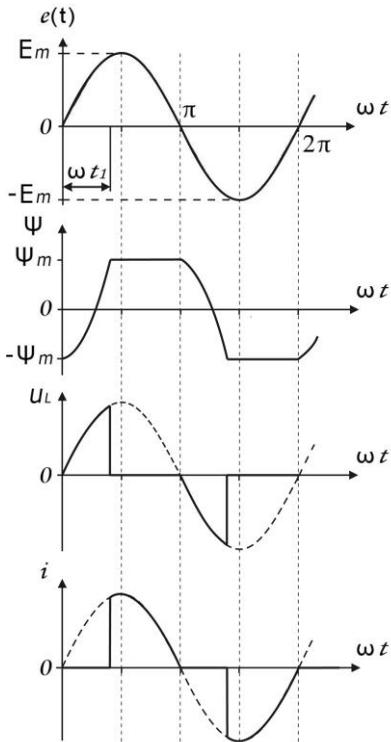


Рисунок 3.24

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Основы теории цепей / Г. В. Зевеке [и др.]. – 5-е изд., перераб. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
- 2 Теоретические основы электротехники. Т. 2 / Л. Р. Нейман, К.С. Демирчян. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 415 с.
- 3 **Батура, М. П.** Теория электрических цепей : учеб. для студ. электротехн. спец. / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев. – 2-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2007. – 608 с.
- 4 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 2006. – 638 с.
- 5 **Новгородцев, А. Б.** Теоретические основы электротехники. 30 лекций по теории электрических цепей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – 576 с.

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ потокосцепление ψ остается постоянным и равным ψ_m , следовательно, $u_L = \frac{d\psi}{dt} = 0$. Из уравнения состояния для этого интервала находим закон изменения тока:

$$i(t) = \frac{E_m}{r} \sin \omega t.$$

Во второй половине периода изображающая точка перемещается из позиции 2 в позицию 1, и процесс повторяется.

Графики изменения ψ , u_L и i в функции ωt показаны на рисунке 3.24.

6 Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи/Матханов П. Н.–М.: Высш. шк., 1986. – 352 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие методические указания по выполнению контрольных работ	3
1 Магнитные цепи с постоянными магнитными потоками. Задача 1.....	5
2 Нелинейные цепи с синусоидальными источниками. Задача 2	7
3 Методические указания к решению задач	13
3.1 Нелинейные электрические и магнитные цепи	13
3.1.1 Нелинейные магнитные цепи с постоянными магнитными потоками	15
3.1.2 Основные характеристики ферромагнитных материалов.....	17
3.1.3 Основные законы магнитной цепи.....	18
3.1.4 Нелинейные емкостные цепи	28
3.1.5 Нелинейные цепи переменного тока	29
Список литературы	39

Учебное издание

ВОЛКОВ Николай Петрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Эвентов
Технический редактор В. Н. Кучерова

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж 300 экз.
Зак. №. Изд. №. 97

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
Изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014

Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель,